الباب الأول

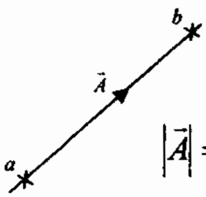
جبرُ المتجهات

<u>تعريف</u>: تعرف الكميات الطبيعية بأنها الكميات التي نستخدمها في حياتنا اليوميـــة، وهي نوعان:

(١)كميات قياسية (عددية): تتميز بالمقدار فقط. مثل: الكتلة، الزمن، درجة الحرارة.

(٢)كميات متجهة (متجهات): تتميز بالمقدار والإتجاه. مثل: الإزاحـــة، الـــسرعة، القوة.

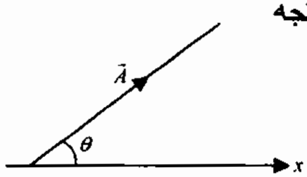
<u>تمثيل المتجه</u>: يمثل المتجه بخط مستقيم يصل بين نقطتين وطوله هو المسافة بـــين النقطتين $\vec{A} = a\vec{b}$.



ويشار إلى المتجه بالسهم المبين.

<u>مقدار المتجه</u>: هو طوله (أو قيمته العددية) ويكتب: $|\vec{A}| = A = ab$

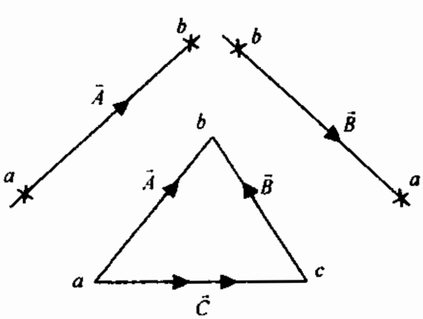
<u>إتجاه المتجه</u>: في المستوى يحدد الإتجاه بزاوية ميل المتجه على محور x مثلا.



<u>مجموع والفرق بين متجهين:</u>

<u>أولاً</u>: **<u>المجموع</u>**: مجموع متجهين $\vec{A}, \vec{B}$ هو المتجه $\vec{C}$ حيث: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ويعرف أيضاً بمحصلة المتجهين.

<u>بيانياً</u>: نرسم المتجه $\vec{A}$ وليكن $\overline{ab}$ ومن نهايته نرسم موازياً للمتجه $\vec{B}$ وليكن $\overline{bc}$، ثم نوصل بداية $\vec{A}$ بنهاية $\vec{B}$ فنحصل على المجموع $\vec{C}$

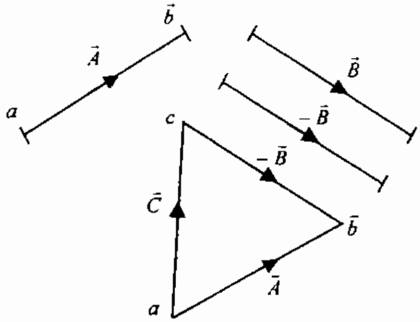


$$\overline{ac} = \overline{ab} + \overline{bc} \quad \rightarrow \quad \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

يسمى المثلث abc بمثلث المتجهات.

ثانياً: **الفرق**: الفرق بين متجهين $\vec{A},\vec{B}$ هو المتجه $\vec{C}$ حيث:

$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



بيانياً: نرسم المتجه $\vec{A}$

ومن نهايته نرسم موازياً للمتجه $(-\vec{B})$

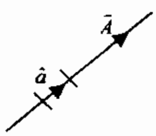
ثم نوصل بداية $\vec{A}$ بنهاية $(-\vec{B})$ فنحصل

على $\vec{C}$ الذي هو محصلة

المتجهين $(\vec{A}),(-\vec{B})$.

متجه الوحدة: هو متجه مقداره يساوي الوحدة وإتجاهه هو

إتجاه المتجه الأصلي $\vec{A}$. ويرمز له $\hat{a}$ (ويقرأ $a\ hat$)

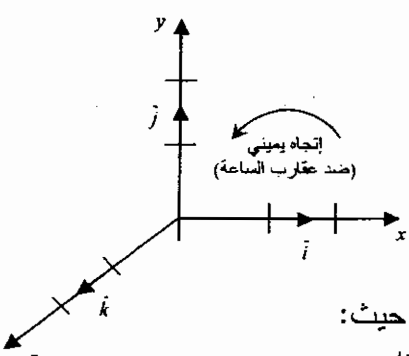


$|\hat{a}|=1$ يقرأ $\bmod\ \hat{a}$ أي المقدار أو القيمة العددية لـ $\hat{a}$

العلاقة بين $\vec{A}\ ,\hat{a}$:

$$\vec{A}=|\vec{A}|\,\hat{a}\ \rightarrow\ \hat{a}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

يكتب $|\vec{A}|$ أيضاً A $\leftarrow$ $\boxed{\hat{a}=\frac{\vec{A}}{A}}$ $\therefore$



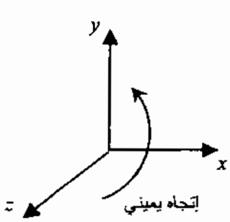
متجهات الوحدة الأساسية:

$\hat{i}$ في اتجاه محور x ، $\hat{j}$ في اتجاه محور y

$\hat{k}$ في اتجاه محور z

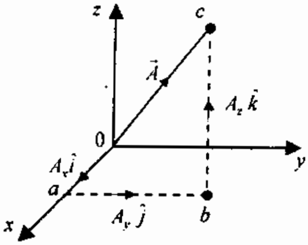
تعرف تلك المتجهات بمتجهات الوحدة الأساسية حيث:

$$|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}|=1$$



ملحوظة: مجموعة المحاور الكرتيزية في الفراغ $(x\,y\,z)$

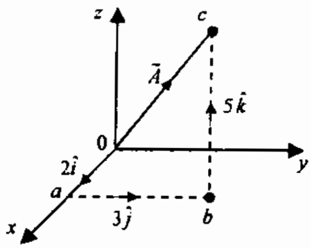
هي مجموعة يمينية ويمكن رسمها بالصورة:



<u>مركبات المتجه</u>: المتجه $\vec{A}$ له ثلاث مركبات هي عبارة عن الكميات القياسية A_x , A_y , A_z

<u>تحليلياً</u>: نكتب المتجه بدلالة مركباته بالصورة:

$$\vec{A} = \overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$$
$$= A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$



<u>مثال</u>: ارسم المتجه $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ بيانياً.

<u>الحل</u>: المتجه $\vec{A}$ يمكن كتابته بالصورة:

$$\vec{A} = \overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$$

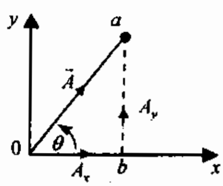
حيث: $\overrightarrow{oa} = 2\hat{i}$ (أي المركبة x للمتجه التي مقدارها 2 في اتجاه $\hat{i}$)

$\overrightarrow{ab} = 3\hat{j}$ (أي المركبة y للمتجه التي مقدارها 3 في اتجاه $\hat{j}$)

$\overrightarrow{bc} = 5\hat{k}$ (أي المركبة z للمتجه التي مقدارها 5 في اتجاه $\hat{k}$)

$$\therefore\ \vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

<u>**مقدار واتجاه متجه:**</u>

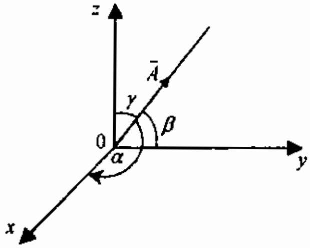


(١) في المستوى: $\vec{A} \equiv (A_x , A_y)$

$$\boxed{\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j}}$$

<u>مقداراً</u>: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

<u>إتجاهاً</u>: $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$



(٢) في الفراغ: $\vec{A} \equiv (A_x , A_y , A_z)$

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$

<u>مقداراً</u>: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

اتجاهاً: يحدد اتجاه المتجه بالزوايا الثلاثة α, β, γ

حيث: $\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$, $\cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$, $\cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$

جيوب تمام الاتجاه: $\cos\alpha = \ell$, $\cos\beta = m$, $\cos\gamma = n$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أثبت أن $\boxed{\ell^2 + m^2 + n^2 = 1}$

وأن متجه الوحدة $\hat{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{A}$ يمكن كتابته بالصورة:

$$\boxed{\hat{a} = \ell\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}}$$

الحل:

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$= \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2}$$

$$= \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1$$

الجزء الثاني: من تعريف $\hat{a}$:

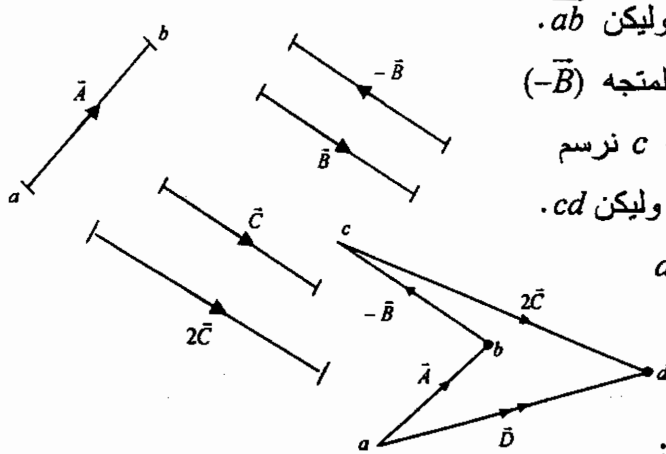
$$\hat{a} = \frac{A}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{i} + \frac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{j} + \frac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{k}$$

$$= \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

$$= \ell\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال(٢) : إذا أعطيت المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ كما في الشكل كون المتجه $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$ بيانياً .



الحــل: نرسم موازياً $\vec{A}$ وليكن $\overline{ab}$.
ومن نهايته b نرسم المتجه $(-\vec{B})$
وليكن $\overline{bc}$ ومن نهايته c نرسم
موازياً للمتجه $(2\vec{C})$ وليكن cd.
ونصل نقطة البداية a
بنقطة النهاية d
فيكون هو المتجه
$\vec{D}$ المطلوب. حيث:

$$\vec{D} = \vec{A} + (-\vec{B}) + 2\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} + 2\vec{C}$$

وهو المطلوب.

مثال(٣) إذا كــان :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} \quad , \vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k} \quad , \vec{C} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

أوجد: (١) المتجه $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ مقداراً واتجاهاً

(٢) المتجه $\vec{G} = 2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{C}$ مقداراً واتجاهاً

الحــل:

$$(1) \quad \vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) + (-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$
$$= 4\hat{i} - 4\hat{j} + (0)\hat{k} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$$

مقدار $\vec{D}$:

$$D = \left|\vec{D}\right| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

إتجاه $\vec{D}$:

$$\tan\theta = \frac{-4}{4} = -1$$

$$(2)\ \vec{G}=2\vec{A}-3\vec{B}-5\vec{c}$$

$$=2(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})-3(2\hat{i}-4\hat{j}-3\hat{k})-5(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$$

$$=(6\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})-(6\hat{i}-12\hat{j}-9\hat{k})-5(-5\hat{i}+10\hat{j}+10\hat{k})$$

$$=5\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

مقدار $\vec{G}$:

$$G=\left|\vec{G}\right|=\sqrt{(5)^2+(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{30}$$

إتجاه $\vec{G}$: يتحدد بالزوايا الثلاثة:

$$\cos\alpha=\frac{G_x}{G}=\frac{5}{\sqrt{30}}\quad,\quad \cos\beta=\frac{G_y}{G}=\frac{-2}{\sqrt{30}}\quad,\quad \cos\gamma=\frac{G_Z}{G}=\frac{1}{\sqrt{30}}$$

مثال(٤): إذا كانت

$$3\vec{A}+\vec{B}=15\hat{i}+2\hat{j}\qquad \_\_\_\_(1)$$

$$2\vec{A}+\vec{B}=11\hat{i}+4\hat{k}\qquad \_\_\_\_(2)$$

فأوجد $\vec{A}\,,\vec{B}$ مقدارً وإتجاهاً.

الحل: من $(2),(1)$ بالطرح:

$$\boxed{\vec{A}=4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}}\qquad \_\_\_\_(3)$$

بالتعويض في (1):

$$\vec{B}=15\hat{i}+2\hat{j}-3\vec{A}$$

$$=15\hat{i}+2\hat{j}-3(4\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})=3\hat{i}-4\hat{i}+12\hat{k}\qquad \_\_\_\_(4)$$

بالنسبة إلي $\vec{A}$: مقداراً

$$A=\sqrt{(4)^2+(2)^2+(-4)^2}=6$$

إتجاهاً:

$$\cos\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\quad,\quad \cos\beta=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad,\quad \cos\gamma=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

بالنسبة إلى $\vec{B}$: مقداراً

$$B=\sqrt{(3)^2+(-4)^2+(12)^2}=13$$

إتجاهاً:

$$\cos\alpha=\frac{3}{13} \quad , \quad \cos\beta=\frac{-4}{13} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{12}{13}$$

مثال(٥): أوجد متجه الوحدة الموازي لمحصلة (لمجموع) المتجهين:

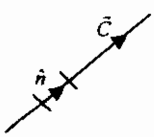
$$\vec{A}=2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k} \quad , \quad \vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$$

الحل: محصلة عدة متجهات هي مجموعها الإتجاهي:

محصلة $\vec{A},\vec{B}$:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})+(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$
$$=3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$$

متجه الوحدة الموازي لـــ $(\vec{C})$ (أي في إتجاه $\vec{C}$):



$$\hat{n}=\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{(3)^2+(6)^2+(-2)^2}}=\frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{49}}$$
$$=\frac{3}{7}\hat{i}+\frac{6}{7}\hat{j}-\frac{3}{7}\hat{k}$$

مسألة: تحقق من أن $\hat{n}$ هو عبارة عن متجه وحدة.

الحل: للتحقق من ذلك نثبت أن $|\hat{n}|=1$

$$|\hat{n}|=\sqrt{(\frac{3}{7})^2+(\frac{6}{7})^2+(-\frac{2}{7})^2}=\sqrt{\frac{9}{49}+\frac{36}{49}+\frac{4}{49}}=\sqrt{\frac{49}{49}}=1$$

مثال(٦): ما هو المتجه الذي يجب إضافته إلى المتجهين:

$$\vec{A}=\hat{i}-2\hat{i}+2\hat{k} \quad . \quad \vec{B}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$$

بحيث تكون محصلتهما هي متجه وحدة في إتجاه محور x.

الحل: محصلة $\vec{A},\vec{B}$:

$$\vec{C}=(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

متجه الوحدة في إتجاه $\hat{i}=x$

نفرض أن المتجه الذي يجب إضافته إلى $\vec{C}$ لكي يعطي $\hat{i}$ هو $\vec{D}$:

$$\vec{D}+\vec{C}=\hat{i}\rightarrow\vec{D}=\hat{i}-\vec{C}=-\hat{i}-(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=-2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$$

مثال(٧): أثبت أن

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2+\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2=2\left|\vec{A}\right|^2+2\left|\vec{B}\right|^2$$

الحل:

$$\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}$$

$$\therefore\left|\vec{A}\right|^2=A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

$$\vec{B}=B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}$$

$$\therefore\left|\vec{B}\right|^2=B^2=B_x^2+B_y^2+B_z^2$$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2=(A_x+B_x)^2+(A_y+B_y)^2+(A_z+B_z)^2$$

$$=A_x^2+2A_xB_x+B_x^2+A_y^2+2A_yB_y+B_y^2+A_z^2+2A_zB_z+B_z^2 \quad \_\_(1)$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2=(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2+(A_z-B_z)^2$$

$$=A_x^2-2A_xB_x+B_x^2+A_y^2-2A_yB_y+B_y^2+A_z^2-2A_zB_z+B_z^2 \quad \_\_(2)$$

بجمع $(1),(2)$:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2+\left|\vec{A}-\vec{B}\right|^2=2A_x^2+2B_x^2+2A_y^2+2B_y^2+2A_z^2+2B_z^2$$

$$=2(A_x^2+A_y^2+A_z^2)+2(B_x^2+B_y^2+B_z^2)=2\left|\vec{A}\right|^2+2\left|\vec{B}\right|^2$$

المتجهات المتوازية

يقال أن $\vec{b}$، $\vec{a}$ متوازيان إذا كانت تربطها علاقة خطية

أي إذا كان $\vec{a}=\lambda\vec{b}$، حيث λ عدد قياسي:

$$\vec{b}\ \longrightarrow$$
$$\vec{a}\ \longrightarrow$$

$\lambda<0$	$\lambda>0$
$\vec{a}=-\lambda\vec{b}$	$\vec{a}=\lambda\vec{b}$
$\vec{b}$، $\vec{a}$ في إتجاهين متعاكسين	$\vec{b}$، $\vec{a}$ في إتجاهين متعاكسين
$\vec{b}\ \longrightarrow$ $\vec{a}\ \longleftarrow$	$\vec{b}\ \longrightarrow$ $\vec{a}\ \longrightarrow$

<u>مثال</u>: إذا كان لدينا المتجهات الثلاثة:

$$\vec{a}=(15\,,-6\,,24)\ \ ;\ \ \vec{b}=(5\,,-2\,,8)\ \ ;\ \ \vec{c}=(-\frac{15}{2}\,,3\,,-12)$$

فأثبت أن المتجهات الثلاثة متوازية، وأن $\vec{b}$، $\vec{a}$ لهما نفس الإتجاه، بينمـــا $\vec{c}$، $\vec{a}$ في اتجاهين متضادين.

<u>الحل</u>: نكتب المتجهات الثلاثة في الصورة الإتجاهية:

$$\vec{a}=15\hat{i}-6\hat{j}+24\hat{k}\ \ ;\ \ \vec{b}=5\hat{i}-2\hat{j}+8\hat{k}\ ;\ \hat{c}=-\frac{15}{2}\hat{i}+3\hat{j}-12\hat{k}$$

واضح أن هناك علاقات بين المتجهات الثلاثة:

(١) <u>علاقة بين</u> $\vec{a},\vec{b}$:

$$\vec{a}=3(5\hat{i}-2\hat{j}+8\hat{k})=3\vec{b}=\lambda\vec{b}$$

وهذا يعني أن $\vec{a}$ يوازي $\vec{b}$ وفي نفس الإتجاه $(\lambda>0)$.

(٢) <u>علاقة بين</u> $\vec{a},\vec{c}$:

$$\vec{a}=-2(-\frac{15}{2}\hat{i}+3\hat{j}+12\hat{k})=-5\vec{c}=\lambda\vec{c}$$

وهذا يعني أن $\vec{a}$ يوازي $\vec{c}$ وفي عكس الإتجاه $(\lambda<0)$.

وحيث أن $\vec{a}$ يوازي $\vec{b}$، $\vec{a}$ يوازي $\vec{c}$ فإن المتجهات الثلاثة تكون متوازية.

نظرية(١): أثبت أنه إذا كان المتجهان $\vec{a},\vec{b}$ غير متوازيين فإن العلاقة: $x\vec{a}+y\vec{b}=0$ تستلزم أن يكون $x=0\ ,\ y=0$.

الإثبات: معنى أن $\vec{a},\vec{b}$ غير متوازيين هو: $\vec{a}\neq\lambda\vec{b}$

في العلاقة المعطاه: $x\vec{a}+y\vec{b}=0$ حيث $\vec{a},\vec{b}$ غير متوازيين.

المطلوب: إثبات أن $x=0\ ,\ y=0$، ولإثبات ذلك

نفرض عكس المطلوب: أي نفرض أن $x\neq 0$:

$$\therefore\ x\vec{a}=-y\vec{b}\rightarrow\vec{a}=-\frac{y}{x}\vec{b}=\lambda\vec{b}$$

وهذا يعني أن $\vec{a},\vec{b}$ متوازيان، وهو عكس المعطى في رأس المسألة، وإذن الفرض الذي فرضناه يكون خطأ ويكون الصح هو عكسه أي أن $x=0$ ومن ذلك $y\vec{b}=0 \leftarrow y=0$، وهو المطلوب.

نظرية(٢): إذا كان $\vec{a},\vec{b}$ متجهان غير متوازيين، وكان

$$x_1\vec{a}+y_1\vec{b}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$$

فإن: $x_1=x_2\ ,\ y_1=y_2$

الإثبات: حيث أن: $x_1\vec{a}+y_1\vec{b}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}$

$$\therefore(x_1-x_2)\vec{a}+(y_1-y_2)\vec{b}=0$$

$$(x\vec{a}+y\vec{b})=0$$

ومن النظرية(١): فإن $x=0,\ y=0$ (لأن $\vec{a},\vec{b}$ غير متوازيين)

$$x_1-x_2=0\quad\rightarrow\quad\therefore\ x_1=x_2$$

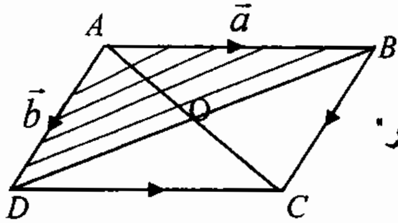
$$y_1-y_2=0\quad\rightarrow\quad\therefore\ y_1=y_2$$

وهو المطلوب.

تطبيقات هندسية على المتجهات

[١] تطبيقات المتجهات في الهندسة الإقليدية:

يمكن استخدام المتجهات في إثبات بعض النظريات في الهندسة الإقليدية كما في الأمثلة الآتية.



مثال(١): باستخدام المتجهات أثبت أن:

" قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر"

الإثبات:

نفرض أن القطرين AC, DB يتقاطعان عند O، وأن:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\ ,\ \overrightarrow{AD} = \vec{b}$

القطر AC:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \_\_\_\_(1)$$

القطر DB:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \_\_\_\_(2)$$

حيث: $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB}$.

أيضاً: إذا كانت λ, μ أعداد قياسية فإن:

$$\overrightarrow{AO} = \lambda(\overrightarrow{AC}) = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{DO} = \mu(\overrightarrow{DB}) = \mu(\vec{a} - \vec{b})$$

ومن ΔAOD نجد أن:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO}$$

$$\therefore\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} + \vec{\mu}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\therefore (\lambda - \mu)\vec{a} = (1 - \mu - \lambda)\vec{b}$$

ولكن $\vec{a},\vec{b}$ متجهان غير متوازيان، فإن: $\lambda-\mu=0 \quad ; \quad 1-\mu-\lambda=0$

بحل المعادلتين: $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$

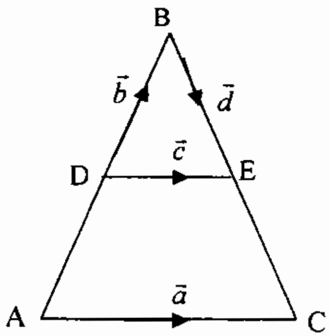
$$\therefore\ \overline{AO}=\lambda(\overline{AC})=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

$$\overline{DO}=\mu(\overline{DB})=\frac{1}{2}\overline{DB}$$

أي أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> باستخدام المتجهات أثبت أن:

"المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه"



<u>الإثبات:</u>

في المثلث ABC المستقيم DE

يصل بين منتصفي الضلعين AB,BC

وبأخذ:

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}\ ,\ \overrightarrow{AB}=\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{DE}=\vec{c}\ \ ,\ \overrightarrow{BC}=\vec{d}$

نكون العلاقات الاتجاهية الآتية:

من الشكل

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\therefore\ \vec{a}=\vec{b}+\vec{d} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

أيضاً:

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}$$

$$\therefore\ \vec{C}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d}) \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

حيث:

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{d}$$

من $(2),(1)$ نحصل على:

$$\vec{C} = \frac{1}{2}\vec{a} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

$$|\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC \qquad \_\_\_\_\_(4)$$

ومن (3):

$$\vec{c} = \lambda\vec{a}$$

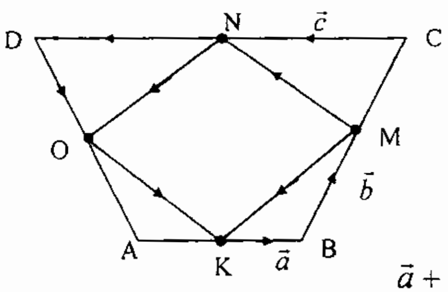
$$\therefore \vec{c} \,//\, \vec{a} \qquad \_\_\_\_(5)$$

من (4)، (5) ينتج أن:

المستقيم DE الواصل بين منتصفي الضلعين AB,BC في المثلث ABC يوازي الضلع الثالث AC ويساوي نصفه في الطول. وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> بإستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

"إذا وصلت منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي بمستقيمات فإن الشكل الرباعي الناتج يكون متوازي الأضلاع".



<u>الإثبات:</u>

إذا كان لدينا المتجهات الأربع $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ تشكل مضلعاً مقفلاً فإن:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0 \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

وبفرض أن $ABCD$ هو الشكل الرباعي المعطـــي، وأن K,M,N,O هـــي منتصفات أضلاعه المتتالية، فبتوصيل هذه المنتصفات بالمستقيمات المبينة بالشكل، وكتابة:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}\ ,\ \overrightarrow{BC}=\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{CD}=\vec{c}\ ,\ \overrightarrow{DA}=\vec{d}$$

أيضاً فإن:

$$\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\vec{A}\quad ,\quad \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

ومن هندسة الشكل نجد أن:

$$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \_\_\_(2)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \_\_\_(3)$$

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}) \qquad \_\_\_(4)$$

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{a}) \qquad \_\_\_(5)$$

ومن (1):

$$(\vec{a}+\vec{b})=-(\vec{c}+\vec{d}) \qquad \_\_\_(6)$$

$$(\vec{b}+\vec{c})=-(\vec{a}+\vec{d}) \qquad \_\_\_(7)$$

بالتعويض من (6)، (7) في (2)، (3) واستخدام (4)، (5):

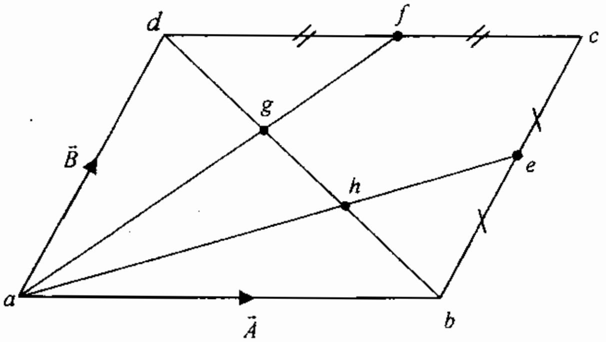
$$\therefore\ \overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})=-\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{ON} \qquad \_\_(8)$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})=-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{KO} \qquad \_\_\_(9)$$

من (8)، (9) نجد أن: $MN=KO$ (ويوازيه)، $KM=ON$ (ويوازيـــه) وهـــذا يعني أن الشكل $KMON$ هو متوازي أضلاع. وهو المطلوب.

مثال(٤): باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية".



الحل:

نفرض أن $abcd$ متوازي أضلاع فيه e, f منتصفا الضلعين bc, cd

وليكن $\overrightarrow{ad} = \vec{B}$, $\overrightarrow{ab} = \vec{A}$

والمطلوب إثبات أن:

$$\overrightarrow{hb} = \frac{1}{3}\overrightarrow{db} \quad , \quad \overrightarrow{dg} = \frac{1}{3}\overrightarrow{db}$$

أي أن $\qquad dg = dh = hb$

من المثلث abe:

$$\overrightarrow{ae} = A + \frac{1}{2}\vec{B} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

المتجه $\overrightarrow{ah}$ في إتجاه المتجه $\overrightarrow{ae}$ ولذلك فإن:

$$\overrightarrow{ah} = \lambda\,\overrightarrow{ae} = \lambda(\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}) \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

حيث λ عدد قياسي:

بالمثل: فإن

$$\overrightarrow{db} = \vec{A} - \vec{B} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

$$\overrightarrow{hb} = \mu\,\overrightarrow{db} = \mu(\vec{A} - \vec{B}) \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

حيث μ عدد قياسي.

من المثلث abh:

$$\vec{A} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ah} + \overrightarrow{hb} = \lambda(\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B}) + \mu(\vec{A} - \vec{B})$$

$$\therefore (\lambda+\mu-1)\,\vec{A}+(\frac{\lambda}{2}-\mu)\,\vec{B}=0 \qquad \_\_\_\_(5)$$

وحيث أن $\vec{A},\vec{B}$ متجهان غير متوازيين فإن:

$$\lambda+\mu-1=0 \qquad \_\_\_\_(6)$$

$$\frac{\lambda}{2}-\mu=0 \qquad \_\_\_\_(7)$$

من (7):

$$\lambda=2\mu \qquad \_\_\_\_(8)$$

بالتعويض في (6):

$$2\mu+\mu-1=0 \to \mu=\frac{1}{3} \qquad \_\_\_\_(9)$$

بالتعويض في (8): $\therefore \lambda=\frac{2}{3}$

$$\therefore \overrightarrow{hb}=\mu\,\overrightarrow{db}=\frac{1}{3}\overrightarrow{db} \qquad \_\_\_\_(10)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\overrightarrow{dg}=\frac{1}{3}\overrightarrow{db} \qquad \_\_\_\_(11)$$

من (10),(11) نجد أن: $hb=dg=gh$

أي أن المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية.

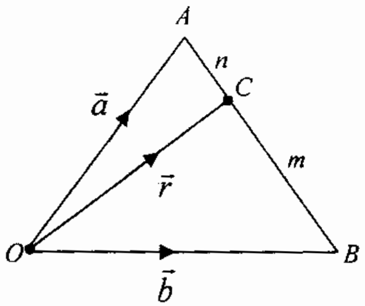
[٢] معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلوم متجهي موضعيهما:

لإيجاد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين A,B اللذان متجها موضعهما $\vec{a},\vec{b}$

وذلك بالصورة: $\vec{r}=\dfrac{m\,\vec{a}+n\,\vec{b}}{m+n}$

حيث $\vec{r}$ متجه موضع أي نقطة على المستقيم ، m,n عددان قياسيان .

الإثبات: يعرف متجه الموضع لأي نقطة بأنه المتجه الواصل من نقطة الأصل إلى النقطة ، فبأخذ المستقيم المار بالنقطتين A,B اللذان متجهاً موضعهما $\vec{a},\vec{b}$ بالنسبة لنقطة الأصل O ، وأخذ المتجه $\vec{r}$ هو متجه موضع أي نقطة C على المستقيم .



فمن المثلث OCA :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{r}-\vec{a} \qquad \_\_\_(1)$$

ومن المثلث OAB :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a} \qquad \_\_\_\_(2)$$

ولكن : $\overrightarrow{OB}=\vec{r}+\overrightarrow{CB}$

$$\therefore \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\vec{r}=\vec{b}-\vec{r} \qquad \_\_\_\_(3)$$

وحيث أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}$ تقع على المستقيم AB فيكون لدينا علاقة خطية تربطهما معاً، وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالصورة :

$$m\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{CB} \qquad \_\_\_\_(4) \quad \rightarrow \frac{AC}{CB}=\frac{n}{m}$$

حيث m,n عددان قياسيان .

بالتعويض من (1), (3) في (4) :

$$\therefore m(\vec{r}-\vec{a})=n(\vec{b}-\vec{r})$$

$$\therefore (m+n)\vec{r}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

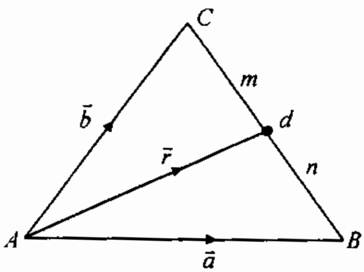
$$\therefore \vec{r}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n} \qquad \_\_\_\_(I)$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصورة :

$$m\vec{a}+n\vec{b}=(m+n)\,\vec{r} \qquad \_\_\_\_\_(II)$$

وهو المطلوب .

ملاحظة هامة: من العلاقة (I) المذكور في البند السابق وهي:



$$\vec{r} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n}$$

$$\therefore m\vec{a} + n\vec{b} = (m+n)\vec{r}$$

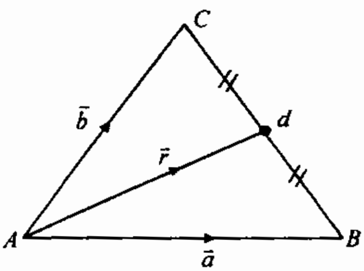
وهذا يعني إنه إذا كانت d تقسم CB بنسبة

$$(\frac{dc}{Bd} = \frac{m}{n})m:n$$

وكانت $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ وكان $\vec{r}$ متجه موضع d فإن:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = (m+n)\vec{r}$$

وكحالة خاصة:



إذا كانت d في منتصف CB فإن $m = n$

$$\therefore m\vec{a} + n\vec{b} = (n+n)\vec{r}$$

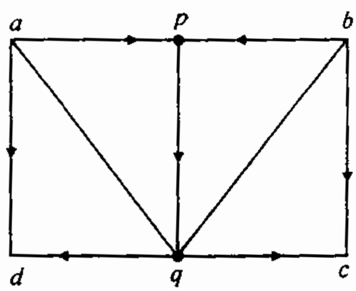
$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{r} \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{Ad}$$

ونستخدم هذه العلاقة في حل كثير من المسائل.

أمثلة محلولة:

مثال(١): $abcd$ شكل رباعي فيه النقطة p منتصف الضلع ab والنقطة q منتصف الضلع cd، أثبت أن: $\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{bc} = 2\overrightarrow{pq}$

الحل: في الشكل $apqd$:



$$\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qd} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

في الشكل $pbcq$:

$$\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qc} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (2)$$

وحيث أن p تقع في منتصف ab فإن:

$$\overrightarrow{ap} = -\overrightarrow{bp} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (3)$$

وحيث أن q تقع في منتصف cd فإن:

$\overrightarrow{qd} = -\overrightarrow{qc}$ ______ (4)

بجمع (2),(1) واستخدام (4) ,(3) نجد أن:

$$\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{bp} + 2\,\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qd} + \overrightarrow{qc}$$
$$= -\overrightarrow{bp} + \overrightarrow{bp} + 2\,\overrightarrow{pq} - \overrightarrow{qc} + \overrightarrow{qc} = 2\,\overrightarrow{pq}$$

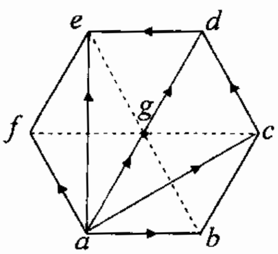
وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> $abcdef$ شكل سداسي منتظم مركزه g أثبت أن:

(i) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{ae} + \overrightarrow{af} = 3\overrightarrow{ad}$

(ii) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ae} + \overrightarrow{af} = 4\overrightarrow{ag}$

<u>الحل:</u>



(أ) في المثلث ade:

$$\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ae} + \overrightarrow{ed}$$

ولكن: $\overrightarrow{ed} = \overrightarrow{ab}$ (من داخل المسدس)

$\therefore\ \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ae} + \overrightarrow{ab}$ ______ (1)

في المثلث acd: $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cd}$

ولكن: $\overrightarrow{cd} = \overrightarrow{af}$ (من خواص المسدس)

$\therefore\ \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{af}$ ______ (2)

بجمع (2) ,(1):

$$2\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ae} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cf}$$

وبإضافة $\overrightarrow{ad}$ للطرفين نحصل على:

$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{ae} + \overrightarrow{af} = 3\overrightarrow{ad}$ ______ (i)

<u>ثانياً</u>: نصل $cf\,,\,be$ فيتقابلان في g (مركز المسدس)

في المثلث abe:

$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ae} = 2\,\overrightarrow{ag}$ (حيث $eg = gb$) ______ (3)

في المثلث acf:

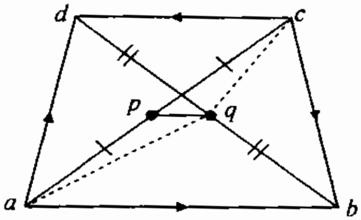
(4) ـــــــ $\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{af}=2\overrightarrow{ag}$ (حيث $fg=gc$)

بجمع (4) ,(3) نجد أن: $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{ae}+\overrightarrow{af}=4\overrightarrow{ag}$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> $abcd$ شكل رباعي فيه p,q منتصفا ac,bd على الترتيب، أثبت أن:

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}+=4\overrightarrow{pq}$$



<u>الحل:</u> نصل aq,cq

في المثلث abd:

(1) ـــــــ $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}=2\overrightarrow{aq}$

في المثلث cbd:

(2) ـــــــ $\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=2\overrightarrow{cq}$

بجمع (2) ,(1) نحصل على:

(3) ـــــــ $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=2(\overrightarrow{aq}+\overrightarrow{cq})$

ومن المثلث: acq:

(4) ـــــــ $\overrightarrow{aq}+\overrightarrow{cq}=2\overrightarrow{pq}$

بالتعويض من (4) في (3): $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=2(2\overrightarrow{pq})=4\overrightarrow{pq}$

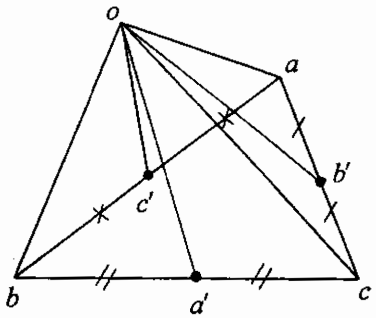
وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> إذا كانت a',b',c' هي منتصفات أضلاع المثلث abc وكانت o نقطة إختيارية خارج المثلث، أثبت أن: $\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc}=\overrightarrow{oa'}+\overrightarrow{ob'}+\overrightarrow{oc'}$

<u>الحل:</u> نصل a,b,c وكذلك a',b',c' بالنقطة o

في المثلث oab:

(1) ـــــــ $\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}=2\overrightarrow{oc'}$



في المثلث obc:

$$\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc}=2\overrightarrow{oa'} \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

في المثلث oca:

$$\overrightarrow{oc}+\overrightarrow{oa}=2\overrightarrow{ob'} \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

بجمع $(1), (2), (3)$:

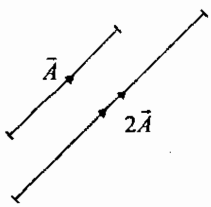
$$2(\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc})=2(\overrightarrow{oa'}+\overrightarrow{ob'}+\overrightarrow{oc'})$$

$$\therefore \overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc}=\overrightarrow{oa'}+\overrightarrow{ob'}+\overrightarrow{oc'}$$

وهو المطلوب.

ضرب المتجهات

(١) ضرب متجه في كمية قياسية (عدد):



متجه في إتجاه $\vec{A} \equiv (\lambda\vec{A})$ وقيمته λ مرة قدر $\vec{A}$

$$(1)\ (\lambda+\mu)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$$

$$(2)\ \lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$$

(٢) ضرب متجه في متجه:

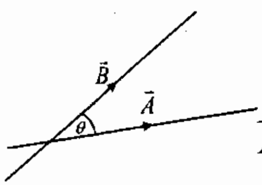
إذا كان لدينا المتجهان $\vec{A}, \vec{B}$ ، فيوجد نوعان من حواصل الضرب:

(أ) كمية قياسية $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ويقرأ: $\vec{B}\,dot\,\vec{A}$ (حاصل الضرب القياسي).

(ب) كمية متجهة $\vec{A}\wedge\vec{B}$ ويقرأ: $\vec{B}\,cross\,\vec{A}$ (حاصل الضرب الإتجاهي).

أولاً: حاصل الضرب القياسي:

تعريف:



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = A\ B\cos\theta \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

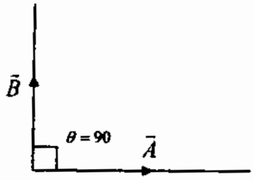
ملاحظات:

(١) $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$، وذلك حيث أن: $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=BA\cos\theta=\vec{B}\cdot\vec{A}$

(٢) الزاوية بين متجهين:

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

(٣) شرط تعامد متجهين:



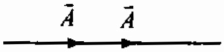
$$\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}\rightarrow\cos\theta=0$$

$$\therefore\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta 90^\circ=0$$

$$\therefore\quad\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=0}$$

(٤) حاصل الضرب القياسي لمتجه $\vec{A}$ في نفسه:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=(A)(A)\cos 0=A^2=\left|\vec{A}\right|^2$$

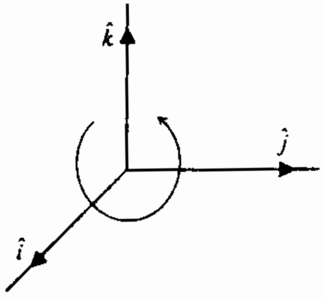


$$\therefore\quad\boxed{\vec{A}\cdot\vec{A}=\left|\vec{A}\right|^2}$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد حواصل الضرب الثنائية القياسية لمتجهات الوحدة الأساسية $\hat{k}$, $\hat{j}$, $\hat{i}$.

الحل:



$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1\times1\times\cos 0=1$$

$$\hat{j}\cdot\hat{j}=1\times1\times\cos 0=1$$

$$\hat{k}\cdot\hat{k}=1\times1\times\cos 0=1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=1\times1\times\cos 90=0$$

$$\hat{j}\cdot\hat{k}=1\times1\times\cos 90=0$$

$$\hat{k}\cdot\hat{i}=1\times1\times\cos 90=0$$

<u>مثال(٢):</u> إذا كان: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ، $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

فأثبت أن :

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

<u>الحل:</u>

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x\hat{i})\cdot(B_x\hat{i}) + (A_x\hat{i})\cdot(B_y\hat{j}) + (A_x\hat{i})\cdot(B_z\hat{k})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= A_xB_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\cdot\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\cdot\hat{k})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

وهو المطلوب.

<u>ملحوظة:</u> استخدمنا نتيجة المثال رقم (١).

<u>مثال(٣):</u> إذا كان $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ فاستخدم حاصل الضرب القياسي لإثبات أن:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

<u>الحل:</u> حيث أن

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

أيضاً

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

$$= A_x A_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_y A_y(\hat{j}\cdot\hat{j}) + A_z A_z(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

$$= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

من $(1), (2)$:

$$\therefore A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهين

$\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}\ ,\ \vec{B} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ متعامدين.

الحل: شرط تعامد متجهين:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$$

$$\therefore A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$$

$$\therefore (4)\times(2) + (-2)\times(\lambda) + (2)\times(1) = 0$$

$$8 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$10 = 2\lambda \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda = 5}$$

مثال(٥): إذا كان $\vec{A}$ أي متجه فأثبت أنه يمكن كتابته بالصورة:

$$\vec{A} = (\vec{A}\cdot\hat{i})\hat{i} + (\vec{A}\cdot\hat{j})\hat{j} + (\vec{A}\cdot\hat{k})\hat{k}$$

الحل:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

لإثبات الصورة المعطاة يجب أن نثبت الآتي:

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{i}\ ,\ A_y = \vec{A}\cdot\hat{j}\ ,\ A_z = \vec{A}\cdot\hat{k}$$

من (1) بالضرب القياسي في $\hat{i}$:

$$\vec{A}\cdot\hat{i} = A_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + A_y(\hat{j}\cdot\hat{i}) + A_z(\hat{k}\cdot\hat{i}) = A_x(1) = A_x$$

من (1) بالضرب القياسي في $\hat{j}$:

$$\vec{A}\cdot\hat{j} = A_x(\hat{i}\cdot\hat{j}) = A_y(\hat{j}\cdot\hat{j}) + A_z(\hat{k}\cdot\hat{j}) = A_y(1) = A_y$$

من (1) بالضرب القياسي في $\hat{k}$:

$$\vec{A}\cdot\hat{k} = A_x(\hat{i}\cdot\hat{k}) + A_y(\hat{j}\cdot\hat{k}) + A_z(\hat{k}\cdot\hat{k}) = A_z(1) = A_z$$

$$\therefore\ \vec{A} = (\vec{A}\cdot\hat{i})\,\hat{i} + (\vec{A}\cdot\hat{j})\,\hat{j} + (\vec{A}\cdot\hat{k})\,\hat{k}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٦):</u> أثبت أن المتجهات الثلاثة:

$$\vec{A} \equiv (3,-2,1)\ ,\ \vec{B} \equiv (1,-3,5)\ ,\ \vec{C} \equiv (2,1,-4)$$

تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية.

<u>الحل</u>: نكتب المتجهات الثلاثة في صورة إتجاهية

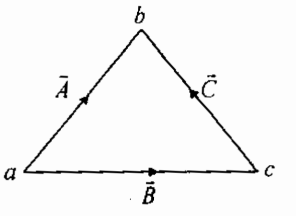
$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\ ,\ \vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}\ ,\ \vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

(١) نثبت أن هذه المتجهات تكون أضلاع مثلث:

بالنظر إلى المتجهات الثلاثة يتضح أن: $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$

من الشكل $\overline{ab} = \overline{ac} + \overline{cb}$

إذاً المتجهات الثلاثة تكون أضلاع مثلث.



(٢) ولإثبات أن المثلث قائم الزاوية:

نوجد حواصل الضرب الممكنة للمتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (3)(1) + (-2)(-4) + (1)(5)$$
$$= 3 + 6 + 5 = 14 \neq 0$$

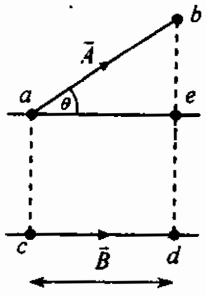
$$\therefore b\,\hat{a}\,c = \hat{a} \neq 90^\circ$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4)$$
$$= 2 - 3 - 20 = -21 \neq 0$$
$$\therefore\ \hat{c} \neq 90^\circ$$

$\vec{A}\cdot\vec{C} = 6 - 2 - 4 = 0$ [متعامدان $\vec{A},\vec{C}$]

$\therefore \ \hat{b} = 90^\circ$

إذاً المثلث abc قائم الزاوية في b. وهو المطلوب.



<u>مسقط متجه على متجه آخر:</u>

المسافة cd تمثل مسقط

المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$

من الشكل:

$$cd = ae = ab\cos\theta$$

مسقط Projection $\therefore \ p = |\vec{A}|\cos\theta$ ______ (1)

ولكن: من تعريف حاصل الضرب القياسي:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

بالتعويض في (1):

$$p = |\vec{A}| \left[\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right] = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \vec{A}\cdot\hat{B}$$

حيث $\hat{B} = \dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$. إذاً مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B} = \vec{A}\cdot\hat{B}$

وبالمثل: مسقط $\vec{G}$ على $\vec{H} = \vec{G}\cdot\hat{H}$، وهكذا.

<u>مثال عددي:</u> أوجد مسقط كلاً من المتجهين

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \qquad , \quad \vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

على الآخر، وكذلك الزاوية المحصورة بينهما.

<u>الحل:</u> مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ = $\vec{A}\cdot\hat{B}$ = p_1

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{1+9+25}} = \frac{\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{35}}$$

$$\therefore\ p_1 = (2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\frac{\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{35}})$$

$$= (2)(\frac{1}{\sqrt{35}}) + (1)(\frac{3}{\sqrt{35}}) + (1)(\frac{5}{\sqrt{35}})$$

$$= \frac{2+3+5}{\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{35}}$$

أيضاً : مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$ $= p_2 = \vec{B}\cdot\hat{A}$ حيث :

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore\ p_2 = (\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})\cdot(\frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}}) = \frac{2+3+5}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

الزاوية المحصورة بين $\vec{A}, \vec{B}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \hat{A}\cdot\hat{B} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

<u>ملحوظة</u>: بعض المراجع تكتب $\frac{\vec{A}}{A} = \vec{a}\ ,\ \frac{\vec{B}}{B} = \vec{b}$

$$\therefore \cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

بالتعويض عن $\hat{A}, \hat{B}$ في (1):

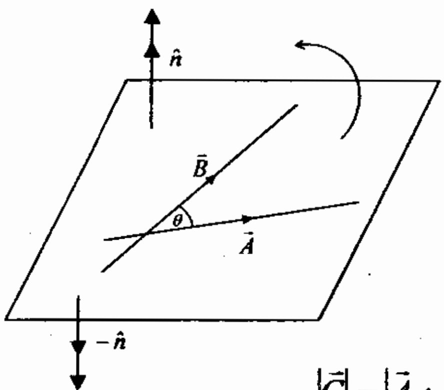
$$\therefore \cos\theta = (\frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}})\cdot(\frac{\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{35}})$$

$$= \frac{2+3+5}{\sqrt{6}\sqrt{35}} = \frac{10}{\sqrt{210}} = \frac{10}{14.49} = 0.69$$

وهو المطلوب.

ثانياً: حاصل الضرب الإتجاهي:

تعريف: إذا كان $\overline{A},\overline{B}$ متجهان بينهما زاوية θ وكان $\hat{n}$ متجه الوحدة في الإتجاه العمودي على المستوى $\overline{A},\overline{B}$ بحيث أن $\vec{A},\vec{B},\hat{n}$ تشكل منظومة يمينية فإن حاصل الضرب الإتجاهي يعرف بالعلاقة:



$$\overline{C}=\overline{A}\wedge\overline{B}=(AB\sin\theta)\overline{n}$$

مقدار $\vec{A}\wedge\vec{B}$:

$$|\vec{C}|=|\vec{A}\wedge\vec{B}|=|AB\sin\theta\,\hat{n}|$$

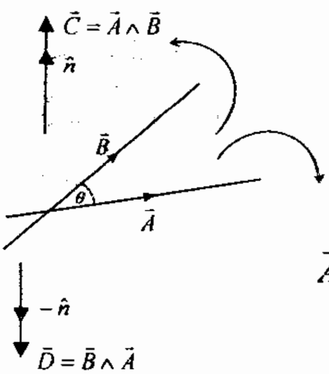
$$=|AB\sin\theta||\hat{n}|=AB\sin\theta \quad , \quad |\hat{n}|=1 \quad \text{حيث}$$

وتكون الزاوية بين $\vec{A},\vec{B}$:

$$\sin\theta=\frac{|\vec{A}\wedge\hat{B}|}{|\hat{A}||\vec{B}|}$$

نتائج:

(١) $\vec{A}\wedge\hat{B}=-\hat{B}\wedge\vec{A}$



الإثبات:

(1) ______ $\vec{A}\wedge\hat{B}=AB\sin\theta(\hat{n})$

(2) ______ $\vec{A}\wedge\hat{B}=BA\sin\theta(-\hat{n})=-AB\sin\theta(\hat{n})$

من $(1),(2)$

$$\therefore\ \boxed{\vec{A}\wedge\hat{B}=-\hat{B}\wedge\vec{A}}$$

ملحوظة: في حاصل الضرب القياسي فإن:

$$\vec{A}\cdot\hat{B}=\hat{B}\cdot\vec{A}$$

(٢) شرط توازي متجهين:

$$\vec{A} \wedge \hat{B} = \vec{0} \rightarrow \left|\hat{B} \wedge \vec{A}\right| = 0$$

<u>**الإثبات:**</u>

$$\text{(شرط التوازي)}\ \theta = 180^\circ \quad , \theta = 0^\circ$$

$$\sin\theta = 0$$

$$\left|\vec{A} \wedge \hat{B}\right| = AB\sin\theta = 0$$

<u>**ملحوظة:**</u> شرط التعامد: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (في حاصل الضرب القياسي).

(٣) <u>حاصل الضرب الإتجاهي للمتجه $\vec{A}$ في نفسه:</u>

$$\theta = 0^\circ$$

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\vec{A} \wedge \vec{A} = AA\sin 0^\circ(\hat{n}) = \vec{0}$$

ملحوظة: في حاصل الضرب القياسي فإن:

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2}$$

<u>**أمثلة محلولة:**</u>

<u>**مثال(١):**</u> أوجد حواصل الضرب الإتجاهية لمتجهات الوحدة الأساسية.

<u>**الحل:**</u>

$$\left.\begin{aligned} \hat{i} \wedge \hat{i} &= 1 \times 1 \times \sin 0 \times (\hat{n}) = 0 \\ \hat{j} \wedge \hat{j} &= 1 \times 1 \times \sin 0(\hat{n}) = 0 \\ \hat{k} \wedge \hat{k} &= 1 \times 1 \times \sin 0(\hat{n}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\qquad} (1)$$

ونلاحظ أن: في حاصل الضرب القياسي تكون:

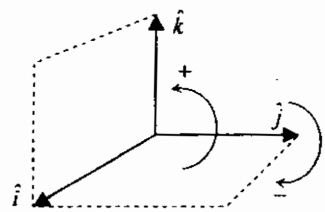
$$\boxed{\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1}$$

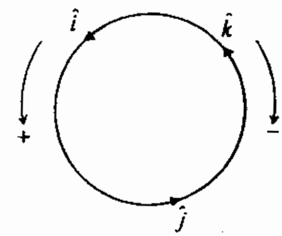
أيضاً فإن:

$$\hat{i}\wedge\hat{j}=1\times1\times\sin 90\times(\hat{n})=\hat{k} \qquad , \ (\hat{n}=\hat{k})$$

$$\hat{j}\wedge\hat{k}=1\times1\times\sin 90\times(\hat{n})=\hat{i} \qquad , \ (\hat{n}=\hat{i})$$

$$\hat{k}\wedge\hat{k}=1\times1\times\sin 90\times(\hat{n})=\hat{j} \qquad , \ (\hat{n}=\hat{j})$$





ونلاحظ أن:

$$\hat{j}\wedge\hat{i}=-\hat{i}\wedge\hat{j}=-\hat{k}$$

$$\hat{k}\wedge\hat{j}=-\hat{j}\wedge\hat{k}=-\hat{i}$$

$$\hat{i}\wedge\hat{k}=-\hat{k}\wedge\hat{i}=-\hat{j}$$

أيضاً: $\boxed{\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0}$ (في حاصل الضرب القياسي).

<u>**مثال(٢):**</u> إذا كان $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \quad , \quad \vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

فأثبت أن:

$$\hat{A}\wedge\hat{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(A_yB_z-A_zB_y)-\hat{j}(A_xB_z-A_zB_x)+\hat{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

$$=\hat{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

<u>**الإثبات:**</u>

$$\hat{A}\wedge\hat{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\wedge(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=A_xB_x(\hat{i}\wedge\hat{i})+A_xB_y(\hat{i}\wedge\hat{j})+A_xB_z(\hat{i}\wedge\hat{k})$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وباستخدام نتيجة مثال(١):

$$\hat{A}\wedge\hat{B} = A_xB_x(0) + A_xB_y(\hat{k}) + A_xB_z(-\hat{j})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= A_xB_y(\hat{k}) + A_xB_z(-\hat{j}) + A_yB_x(-\hat{k}) + A_yB_z(\hat{i}) + A_zB_x(\hat{j}) + A_zB_y(-\hat{i})$$
$$= \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{j}(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> إذا كان

$$\vec{A} \equiv (2,-3,-1) \qquad \vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$
$$\vec{B} \equiv (1,4,-2) \qquad \vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

فأثبت أن: $\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$ ، وأحسب المتجه: $(\vec{A}+\vec{B})\wedge(\vec{A}-\vec{B})$

<u>الحل:</u>

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$$

$$\vec{B}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -10\hat{i} - 3\hat{j} - 11\hat{k} = -\vec{A}\wedge\vec{B}$$

وهو المطلوب الأول.

ثانياً: يمكن الحل بطريقتين:

نوجد $(\vec{A}+\vec{B})$، $(\vec{A}-\vec{B})$ ثم نضربهما إتجاهياً:

$$\vec{A}+\vec{B}=3\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}=\vec{C}$$
$$\vec{A}-\vec{B}=\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}=\vec{D}$$

المطلوب: إيجاد $\vec{C}\wedge\vec{D}$

$$\vec{C}\wedge\vec{D}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -7 & 1\end{vmatrix}=-20\hat{i}-6\hat{j}-22\hat{k}$$

الطريقة الثانية:

$$(\vec{A}+\vec{B})\wedge(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}\wedge\vec{A}-\vec{A}\wedge\vec{B}+\hat{B}\wedge\vec{A}-\vec{B}\wedge\vec{B}$$
$$=0+\hat{B}\wedge\vec{A}+\hat{B}\wedge\vec{A}+0 \qquad \left|\ \vec{A}\wedge\vec{B}=-\hat{B}\wedge\vec{A}\right.$$
$$=2(\hat{B}\wedge\vec{A})$$
$$=2\ (-10\hat{i}-3\hat{j}-11\hat{k})$$
$$=-20\hat{i}-6\hat{j}-22\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): أثبت أن $\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right|^2+\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2$

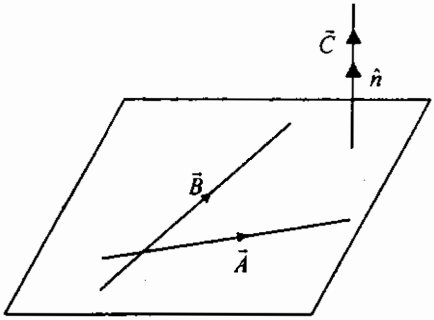
الحل: من التعريف فإن الطرف الأيسر يكون:

$$L.H.S.=\left|A\,B\cos\theta\right|^2+\left|A\,B\sin\theta\,\hat{n}\right|^2$$
$$=A^2B^2\cos^2\theta+A^2B^2\sin^2\theta\left|\hat{n}\right|^2 \qquad \left|\ \left|\hat{n}\right|^2=1\right.$$
$$=A^2B^2(\cos^2\theta+\sin^2)$$
$$=A^2B^2=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2=R.H.S.=\text{الطرف الأيمن}$$

وهو المطلوب.

مثال(٥): أوجد متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k} \quad , \quad \hat{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$



الحل: حيث أن $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي $\vec{A}, \vec{B}$، فإن متجه الوحدة المطلوب يكون في إتجاه $\vec{C}$ أي:

$$\hat{n} = \frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$\vec{C} = \hat{A} \wedge \hat{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

$$\left|\vec{C}\right| = \sqrt{(15)^2 + (10)^2 + (30)^2} = 35$$

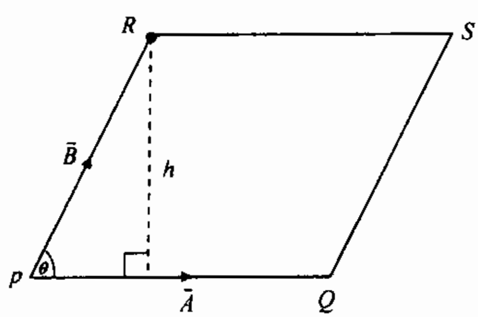
بالتعويض في (1):

$$\therefore \hat{n} = \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

وهو المطلوب.

المعنى الهندسة لحاصل الضرب الأتجاهي $(\vec{A} \wedge \vec{B})$

$\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{A}, \vec{B}$ ضلعان متجاوران.



الحل: نسقط الأرتفاع h من R على القاعدة فيكون: $h = \left|\vec{B}\right| \sin\theta$

مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع

$$\therefore S = \left|\vec{A}\right| \times \left|\vec{B}\right| \sin\theta \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

ولكن من التعريف:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta\, \hat{n}$$

$$\therefore \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta \quad , \quad \left|\hat{n}\right| = 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

من (1), (2) نجد أن:

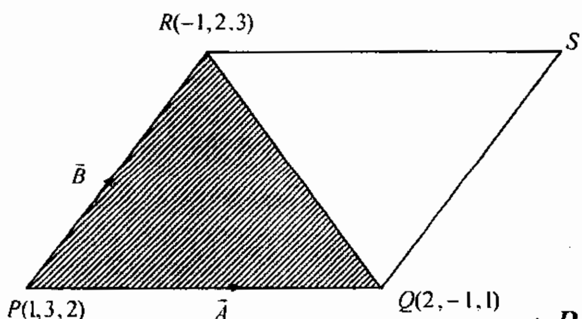
$$S = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$$

وهو المطلوب.

مثال تطبيقي: باستخدام المعنى الهندسي لحاصل ضرب الإتجاهي أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط الآتية:

$$P(1,3,2) \quad , \quad Q(2,-1,1) \, , \, R(-1,2,3)$$

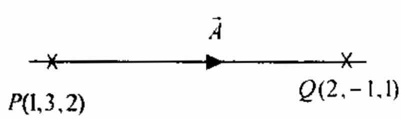
الحل:



مساحة المثلث PRQ :

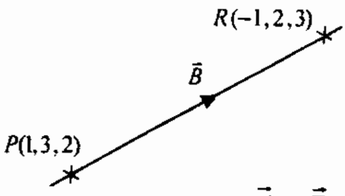
$$\Delta PRQ = \frac{1}{2} \,\square\, PRSQ = \frac{1}{2}\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

لإيجاد $\vec{A}, \vec{B}$:



$$\vec{A} = (2-1)\,\hat{i} + (-1-3)\,\hat{j} + (1-2)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$



$$\vec{B}=(-1-1)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-2)\hat{k}$$
$$=-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-5\hat{i}+\hat{j}-9\hat{k}$$

$$\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|=\sqrt{(-5)^2+(1)^2+(-9)^2}=\sqrt{107}$$

بالتعويض في (1):

$$\Delta PRQ=\frac{1}{2}\sqrt{107}=5.17$$

وهو المطلوب.

حواصل الضرب الثلاثية والرباعية

أولاً: حواصل الضرب الثلاثية:

قياسية $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$، إتجاهية $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$

ثانياً: حاصل الضرب الرباعي:

قياسية $(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D})$، إتجاهية $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})$

ملخص لحواصل الضرب:

ثنائي قياسي ثنائي إتجاهي	$\vec{A}\cdot\vec{B}$ $\vec{A}\wedge\vec{B}$
ثلاثي قياسي ثلاثي إتجاهي	$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$ $\hat{B}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$
رباعي قياسي رباعي إتجاهي	$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D})$ $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})$

أمثلة.

مثال(١): إذا كان

$$\vec{A} = A_x\ \hat{i} + A_y\ \hat{j} + A_z\ \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\ \hat{i} + B_y\ \hat{j} + B_z\ \hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\ \hat{i} + C_y\ \hat{j} + C_z\ \hat{k}$$

فأثبت أن حاصل الضرب الثلاثي القياسي هو:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}\ (1)$$

ملحوظة: حاصل الضرب الثنائي الإتجاهي

$$\vec{A}\wedge\hat{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

إثبات (1):

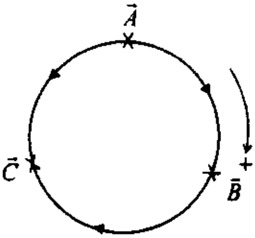
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (A_x\ \hat{i} + A_y\ \hat{j} + A_z\ \hat{k})\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): أثبت أن حاصل الضرب القياسي $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$ يخضع للخاصية الدورية الآتية:



$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

الحل: نستخدم خواص المحددات

(تغيير صف مكان صف يغير من إشارة المحدد)

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \text{\_\_\_\_}(2)$$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \text{\_\_\_\_}(3)$$

من (3), (2), (1) ينتج المطلوب

$$\therefore\quad \vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

مسألة: أثبت أن تغيير مواضع علامتي $\wedge$, $\cdot$ لا يغير من ناتج حاصل الضرب الثلاثي القياسي، أي أثبات أن:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}$$

الإثبات: من الخاصية الدورية

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}$$

(لأن $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$)

وهو المطلوب.

ملحوظة: يمكن إثبات أن $\vec{A}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$

الإثبات: من خواص المحددات

(تساوي صفين في محدد يجعل المحدد يساوي صفراً)

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=0$$

وهو المطلوب.

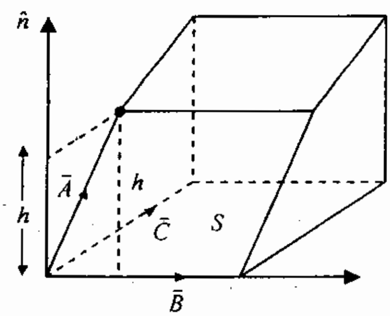
$$A_x\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_y \end{vmatrix}-A_y\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_y \end{vmatrix}+A_z\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}=0$$

المعنى الهندسي لحاصل الضرب $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$

إذا كانت المتجهات $\vec{A}\,,\,\vec{B}\,,\,\vec{C}$ تشكل جوانب متوازي مستطيلات فإن:

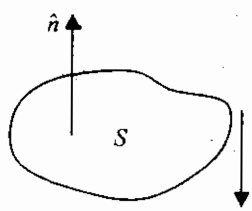
$$\boxed{\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})\;=\;\text{حجم المتوازي}}$$

الحل:



تمهيد(١):

المساحة كمية متجهة أي تمثل بمتجه $\vec{S}$ قيمته S وإتجاهه هو الإتجاه العمودي على S أي في إتجاه متجه الوحدة $\hat{n}$ بحيث $\boxed{\vec{S}=S\,\hat{n}}$



تمهيد(٢): مركبة أي متجه في إتجاه ما تساوي حاصل الضرب القياسي للمتجه في متجه الوحدة في هذا الإتجاه (مثال سابق).

فمثلاً: المركبة A_x للمتجه $\vec{A}$ هي:

$$A_x = \vec{A}\cdot\hat{i}$$

لحل المثال: قاعدة متوازي المستطيلات يمثلها متوازي أضلاع فيه $\vec{B},\vec{C}$ ضلعان متجاوران، إذاً مساحة القاعدة تساوي مساحة متوازي الأضلاع

$$S = \left|\vec{B}\wedge\vec{C}\right|$$

الأرتفاع h يمثل بمستقيم عمودي على القاعدة S وهو في نفس الوقت مركبة المتجه $\vec{A}$ في إتجاه العمودي على S أي أن إتجاه $\hat{n}$:

$$h = \vec{A}\cdot\hat{n}$$

حجم متوازي المستطيلات:

$V =$ مساحة القاعدة × الأرتفاع

$$V = S\times h = S\,(\vec{A}\cdot\hat{n}) = \vec{A}\cdot(S\,\hat{n})$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{S} = \vec{A}\cdot(\hat{B}\wedge\vec{C})$$

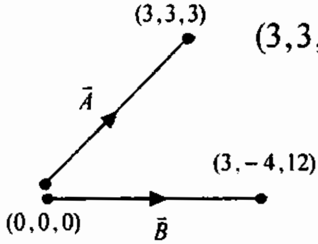
طريقة أخرى:

$$V = S\times h = \left|\hat{B}\wedge\vec{C}\right|\times(\vec{A}\cdot\hat{n})$$
$$= \vec{A}\cdot\left\{\left|\hat{B}\wedge\vec{C}\right|\hat{n}\right\} = \vec{A}\cdot(\hat{B}\wedge\vec{C})$$

وهو المطلوب.

مثال عددي: أوجد حجم متوازي المستطيلات الذي تحد أضلاعه الثلاثة المستقيمات الواصلة من نقطة الأصل إلى النقاط الثلاثة:

$$(3,3,3)\ ,\ (3,-4,12)\ ,\ (5,0,-12)$$



الحل: حجم متوازي المستطيلات

الذي أضلاعه هي $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$

$$V = \vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

المطلوب إيجاد $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$:

$$\vec{A}=(3-0)\,\hat{i}+(3-0)\,\hat{j}+(3-0)\,\hat{k}=3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$$
$$\vec{B}=(3-0)\hat{i}+(-4-0)\,\hat{j}+(12-0)\,\hat{k}=3\hat{i}-4\hat{j}+12\hat{k}$$
$$\vec{C}=(5-0)\hat{i}+(0-0)\,\hat{j}+(-12-0)\,\hat{k}=5\hat{i}-12\hat{k}$$
$$\therefore\ \vec{A}\equiv(3,3,3)$$
$$\vec{B}\equiv(3,-4,12)$$
$$\vec{C}\equiv(5,0,-12)$$

بالتعويض في (1)

$$V=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}3&3&3\\3&-4&12\\5&0&-12\end{vmatrix}=392$$

وهو المطلوب.

نظرية: الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ واقعة في نفس المستوى هو:

$$\boxed{\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=0}$$

الإثبات: إعتماداً على المعنى الهندسي لحاصل الضرب $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$ أنه يمثل حجم متوازي المستطيلات التي تشكل $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ جوانبه.

إذا وقعت المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ في مستوى واحد فإن حجم متوازي المستطيلات الذي تشكل هذه المتجهات جوانبه يساوي صفراً

$$\therefore\ \vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=0$$

وبالعكس: إذا كانت $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=0$ فهذا يعني أن حجم متوازي المستطيلات الذي فيه $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ تشكل جوانبه يساوي صفراً أي أن $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ يجب أن تقع في المستوى. وهو المطلوب.

<u>مثال عددي</u>: أوجد قيمة الثابت λ التي تجعل المتجهات الثلاثة

$$\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\ ,\quad \vec{B}=2\hat{i}-4\hat{k}\ ,\quad \vec{C}=\hat{i}+\lambda\,\hat{j}+3\hat{k}$$

تقع في مستوى واحد

<u>الحل:</u> شرط أن تقع المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ في مستوى واحد هو أن يكون :

$$\underbrace{\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})}_{\downarrow}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}=0$$

بفك المحدد نجد أن:

$$\boxed{\lambda=\frac{5}{3}}$$

وهو المطلوب.

أمثلة على حاصل الضرب الثلاثي الإتجاهي $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$

<u>مثال(١):</u> أثبت أن حاصل الضرب الثلاثي الإتجاهي للمتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ يعطي بالعلاقة الآتية:

$$\boxed{\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot B)\,\vec{C}}$$

<u>الحل:</u> نكتب $\vec{B}\wedge\vec{C}=\vec{D}$ حيث:

$$\vec{D}=(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left(B_y\,C_z-B_z\,C_y\right)+\hat{j}\left(B_z\,C_x-B_x\,C_z\right)+\hat{k}\left(B_x\,C_y-B_y\,C_x\right)$$

$$=\hat{i}\,D_x+\hat{j}\,D_y+\hat{k}\,D_z$$

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{A}\wedge\vec{D}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ D_x & D_y & D_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ (B_yC_z-B_zC_y) & (B_zC_x-B_xC_z) & (B_xC_y-B_yC_x)\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\,[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)]+\hat{j}\,[\cdots\cdots]+\cdots$$

$$=\hat{i}\,[(A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_yB_y+A_zB_z)C_x]+\hat{j}\,[\cdots\cdots]+\cdots$$

بإضافة $(A_xB_xC_x-A_xB_xC_x)$ إلى الطرف الأيمن:

$$\therefore\ \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=\hat{i}\,[(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)C_x]+\hat{j}\,[..........$$

$$=\hat{i}\,[(\vec{A}\cdot\vec{C})B_x-(\vec{A}\cdot\vec{B})C_x]+\hat{j}\,[..........$$

إذاً المركبة x لحاصل الضرب $\hat{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ هي:

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})B_x-(\vec{A}\cdot\vec{B})C_x$$

وبالمثل بالنسبة للمركبة y:

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})B_y-(\vec{A}\cdot\vec{B})C_y$$

والمركبة z:

$$=(\vec{A}\cdot\vec{C})B_z-(\vec{A}\cdot\vec{B})C_z$$

$$\therefore\quad \boxed{\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot B)\,\vec{C}}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> أثبت أن

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})\neq(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$$

الحل:

$$L.H.S. = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$R.H.S. = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \wedge \vec{C} = -\vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

$$= -[(\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}] = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A}$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

[$\vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{C}$, $\vec{C} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C}$: حيث]

من (2) ,(1) ينتج أن:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): إذا كان

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} \ , \ \vec{B} = -\hat{j} + \hat{k} \ , \vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

فأثبت أن $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$

الحل: يمكن حل هذا المثال بطريقتين

أولاً: بتطبيق القانون، ثانياً: من المبادئ الأولية (يحلها الطالب)

الحل بالطريقة الأولي: باستخدام القانون

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$\vec{A} \equiv (2,-3,0) \ , \ \vec{B} \equiv (0,-1,1) \ , \vec{C} \equiv (1,1,1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = (2)(1) + (-3)(1) + (0)(1) = -1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(0) + (-3)(-1) + (0)(1) = 3$$

$$\therefore \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = -\vec{B} - 3\vec{C}$$

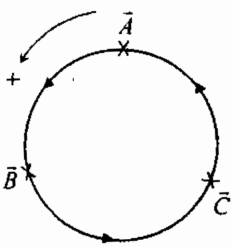
$$= -(-\hat{j} + \hat{k}) - 3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \qquad \_\_\_\_(1)$$

أيضاً: باستخدام القانون (مثال(٢))

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{C}=-1$$
$$\vec{B}\cdot\vec{C}=(0)(1)+(-1)(1)+(1)(1)=0$$
$$\therefore(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}=-\vec{B}-0(\vec{A})=-\vec{B}=\hat{j}-\hat{k} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

من (1), (2): $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})\neq(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$

وهو المطلوب.



مثال(٤): أثبت صحة العلاقة الدورية لحاصل الضرب الثلاثي الإتجاهي وصورتها:

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})+\vec{B}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})+\vec{C}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$$

الحل: باستخدام القانون:

الطرف الأيسر $L.H.S.=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

$$+(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}+(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}$$
$$=[(\vec{C}\cdot\vec{B})-(\vec{B}\cdot\vec{C})]\vec{A}+[(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\vec{C}\cdot\vec{A})]\ \vec{B}$$
$$+[(\vec{B}\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\vec{B})]\vec{C}=0$$

[حيث أن: $\vec{C}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{C}\ ,\ \vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{C}\cdot\vec{A}\ ,\ \vec{B}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}$

وهو المطلوب.

مثال(٥): أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=[\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})]^2$$

الحل: بوضع $\vec{B}\wedge\vec{C}=\vec{D}$

$$\therefore\ \vec{D}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=(\vec{D}\cdot\vec{A})\vec{C}-(\vec{D}\cdot\vec{C})\vec{A}$$
$$\therefore\ (\vec{B}\wedge\vec{C})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=(\vec{B}\wedge\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{C}-(\vec{B}\wedge\vec{C}\cdot\vec{C})\vec{A}$$
$$=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{C}-(\vec{B}\cdot\vec{C}\wedge\vec{C})\vec{A}$$
$$=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{C} \qquad \Big|\ (\vec{B}\cdot\vec{C}\wedge\vec{C})=0$$

$$\therefore\ L.H.S. = (\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{C}] \qquad \Big|\ \vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B}\cdot\vec{C}$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})(\vec{A}\wedge\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}) = [\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}]^2$$

وهو المطلوب.

مثال على حواصل الضرب الرباعي:

(أ) أثبت أن حاصل الضرب الرباعي القياسي يعطي بالعلاقة:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$$

(ب) أثبت أن حاصل الضرب الرباعي الإتجاهي يعطي بالعلاقة:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D}) = [(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{D}]\vec{C} - [(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}]\vec{D}$$

الحل: **أولاً**: نفرض أن $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{G}$

$$L.H.S. = \vec{G}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{G}\wedge\vec{C})\cdot\vec{D} = [(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}]\cdot\vec{D}$$

$$= [(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}]\cdot\vec{D}$$

$$= (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$$

وهو المطلوب.

ثانياً: نفرض أن $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{G}$

$$L.H.S. = \vec{G}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{G}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{G}\cdot\vec{C})\vec{D}$$

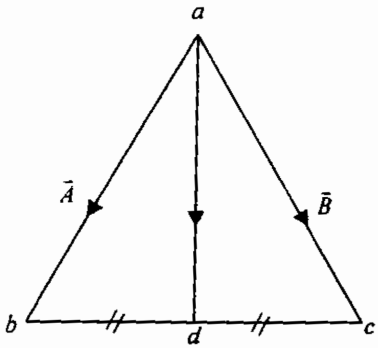
$$= [(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{D}]\vec{C} - [(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}]\vec{D}$$

وهو المطلوب ثانياً.

تطبيق حاصل ضرب المتجهات في حل بعض المسائل في الهندسة المستوية وحساب المثلثات

يمكن استخدام حاصل ضرب المتجهات في إثبات بعض النظريات في الهندسة المستوية (الإقليدية) وحساب المثلثات كما في الأمثلة الآتية.

مثال(١): باستخدام خواص حاصل الضرب الثنائي القياسي، أثبت النظرية الهندسية الآتية: "**المستقيم المنصف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة**"



الإثبات:

المثلث abc فيه $ab = ac$

المستقيم ad ينصف القاعدة bc

المطلوب: إثبات أن هذا المستقيم يكون عمودياً على القاعدة، أي إثبات أن $\overrightarrow{ad} \perp \overrightarrow{bc}$ أي: $\boxed{\overrightarrow{ad} \cdot \overrightarrow{bc} = 0}$

ولإثبات ذلك: نأخذ $\overrightarrow{ab} = \vec{A}\ ,\ \overrightarrow{ac} = \vec{B}$ بحيث أن: $|\vec{A}| = |\vec{B}| \rightarrow \boxed{A = B}$

من الرسم:

$$\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bd} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{bc} \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن: $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$ (من المثلث abc)

$$\therefore\ \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ab} = \vec{B} - \vec{A} \qquad \_\_\_\_(2)$$

بالتعويض في (1):

$$\overrightarrow{ad} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) \qquad \_\_\_\_(3)$$

بضرب $(2), (3)$ قياسياً:

$$\overrightarrow{ad} \cdot \overrightarrow{bc} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \frac{1}{2}[\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A}]$$

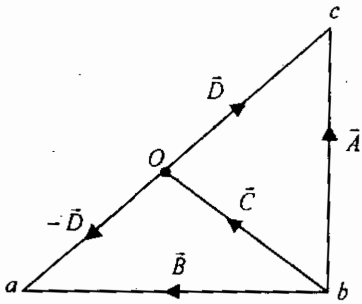
ولكن: $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2\ ,\ \vec{B} \cdot \vec{B} = B^2\ ,\ \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\therefore \overrightarrow{ad} \cdot \overrightarrow{bc} = \frac{1}{2}[B^2 - A^2] = 0$ (لأن $A = B$)

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> باستخدام خواص المتجهات، أثبت النظرية الهندسية الآتية

" المستقيم الواصل من رأس القائمة في المثلث قائم الزاوية إلى منتصف الوتر يساوي نصف الوتر" .



<u>الإثبات</u>: نرسم المثلث abc القائم الزاوية في b والمطلوب: إثبات أن المستقيم bO الواصل من b إلى منتصف الوتر (نقطة O) يساوي نصف الوتر أي:

$$\boxed{bO = Oc}$$

ولإثبات ذلك:

نأخذ $\overrightarrow{bO} = \vec{C}$, $\overrightarrow{ba} = \vec{B}$, $\overrightarrow{bc} = \vec{A}$، وليكن $\overrightarrow{OC} = \vec{D}$ أي أن: $\overrightarrow{Oa} = -\vec{D}$

من الرسم نجد أن:

(1)_____ (من المثلث bcO) $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$

(2)_____ (من المثلث bOa) $\vec{B} = \vec{C} + (-\vec{D}) = \vec{C} - \vec{D}$

وحيث أن المثلث abc قائم الزاوية في b فإن $\vec{A}$ يكون عمودياً على $\vec{B}$.

(3)_____ $\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

بالتعويض من (2) ,(1) في (3):

$$(\vec{C} + \vec{D}) \cdot (\vec{C} - \vec{D}) = 0$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} - \vec{C} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \vec{C} - \vec{D} \cdot \vec{D} = 0$$

ولكن $\vec{C} \cdot \vec{D} = \vec{D} \cdot \vec{C}$, $\vec{D} \cdot \vec{D} = D^2$, $\vec{C} \cdot \vec{C} = C^2$

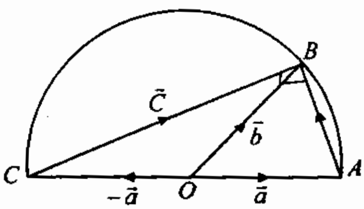
$$\therefore C^2 - D^2 = 0 \rightarrow C^2 = D^2 \rightarrow C = D$$

أي أن : $bO = Oc$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> باستخدام المتجهات، أثبت نظرية الهندسة الآتية

" الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة"



<u>الحل:</u> نأخذ O مركز الدائرة كنقطة أصل.

ولتكن B نقطة على محيط الدائرة

المطلوب: إثبات أن $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$

ليكن r نصف قطر الدائرة حيث $r = |\vec{a}| = |\vec{b}|$

وهنا $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$، أيضاً فإن: $\overrightarrow{OC} = -\vec{a}$

من الرسم نجد أن:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \qquad \underline{\qquad}(1)$$

أيضاً فإن:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{b} + \vec{a} \qquad \underline{\qquad}(2)$$

ولإثبات أن $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ نثبت أن $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CB}$ متعامدان فمن (1), (2) بالضرب القياسي نجد أن:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$$
$$= \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

ولكن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{b}^2$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$

وذلك لأن $a = b$، $\therefore\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = b^2 - a^2 = 0$

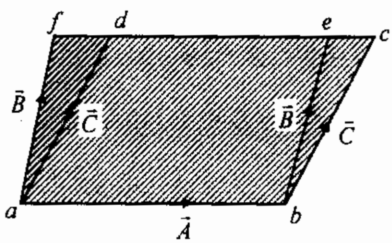
أي أن $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ متعامدان وبذلك فإن الزاوية

$$A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> باستخدام المعنى الهندسي لحاصل الضرب الثنائي الاتجاهي، أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" متوازيا الأضلاع المرسومان على نفس القاعدة وبين نفس الخطين المتوازيين يكونان متساويان في المساحة" .



<u>الإثبات</u>: متوازيا الأضلاع $abcd$, $abef$ مرسومان على نفس القاعدة ab وبين الخطين المتوازيين ab, fc.

والمطلوب: إثبات أن

$$\boxed{\square\, abcd = \square\, abef}$$

ولإثبات ذلك: نفرض أن

$$\overrightarrow{ab} = \vec{A} \;,\; \overrightarrow{bc} = \vec{C} \;,\; \overrightarrow{be} = \vec{B}$$

في Δafd : $\overrightarrow{fd} = \lambda\, \overrightarrow{dc} = \lambda\, \vec{A}$

حيث λ عدد قياسي، (لأن $\overrightarrow{fd}$ في إتجاه $\overrightarrow{dc}$)

ومن الرسم نجد أن:

$$\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{af} + \overrightarrow{fd}$$

$$\vec{C} = \vec{B} + \lambda\, \vec{A} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

بضرب (1) إتجاهياً في المتجه $\vec{A}$:

$$\vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} + \lambda(\vec{A} \wedge \vec{A})$$

ولكن: $\vec{A} \wedge \vec{A} = 0$

$$\therefore \vec{A} \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

بأخذ مقياس (القيمة العددية) للطرفين:

$$\left|\vec{A} \wedge \vec{C}\right| = \left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

ومن المعنى الهندسي لحاصل الضرب الإتجاهي فإن:

$\left|\vec{A} \wedge \vec{C}\right|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع $abcd$.

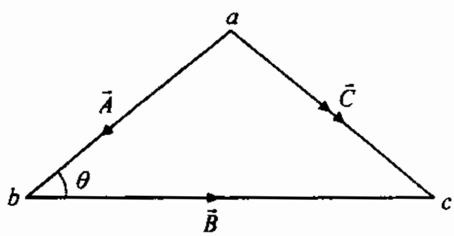
$\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع $abef$.

من (3) نجد أن:

$$\square\, abcd = \square\, abef$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٥):</u> أثبت قانون جيب التمام في حساب المثلثات المستوية.



<u>الإثبات</u>: المثلث abc حاد الزوايا وفيه الزاوية θ هي الزاوية بين ab, bc، فإذا كان $\overrightarrow{ab} = \vec{A}\ ,\ \overrightarrow{bc} = \vec{B}\ ,\ \overrightarrow{ac} = \vec{C}$ ،

المطلوب: إثبات أن

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad \text{(قانون جيب التمام)}$$

حيث $A = \left|\vec{A}\right|\ ,\ B = \left|\vec{B}\right|\ ,\ C = \left|\vec{C}\right|$

ولإثبات ذلك: في المثلث abc:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

بضرب (1) في نفسها قياسياً:

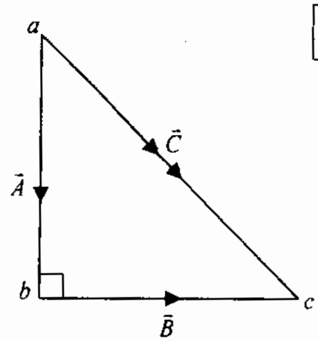
$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$C^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} = A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

(وذلك لأن: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}\ ,\ \cdots\ ,\ \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$)

وحيث أن: $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ ، فإن

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$



وهو المطلوب.

حالة خاصة: إذا كانت $\theta = 90^\circ \leftarrow \cos\theta = 0$

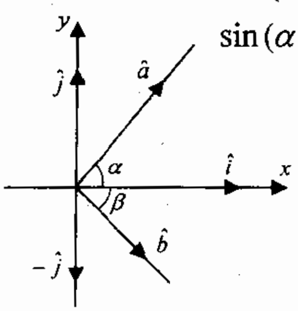
أي أن $\vec{A},\vec{B}$ يكونان متعامدان.

$$\therefore \quad \boxed{C^2 = A^2 + B^2}$$

وهي نظرية فيثاغورث.

مثال(٦): باستخدام خواص حاصلي الضرب القياسي والإتجاهي استنتج العلاقتين المثلثتين الآتيتين:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$



الإثبات: نأخذ متجهي وحدة $\hat{a},\hat{b}$ يصنعان زاويتين α,β مع محور x على الترتيب، فتكون الزاوية بينهما $(\alpha+\beta)$.

فمن الرسم نجد أن:

$$\hat{a} = \cos\alpha\,\hat{i} + \sin\alpha\,\hat{j} \qquad \_\_\_\_(1)$$
$$\hat{b} = \cos\beta\,\hat{i} - \sin\beta\,\hat{j} \qquad \_\_\_\_(2)$$

(بتحليل $\hat{a},\hat{b}$ في إتجاهي x,y)

<u>استنتاج العلاقة الأولى:</u>

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = (\cos\alpha)\,(\cos\beta) + (\sin\alpha)(-\sin\beta)$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \_\_\_\_(3)$$

ومن تعريف حاصل الضرب القياسي:

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = (1)\,(1)\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) \qquad \_\_\_\_(4)$$

بمساواة (4) ,(3):

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

وهو المطلوب أولاً.

<u>استنتاج العلاقة الثانية:</u>

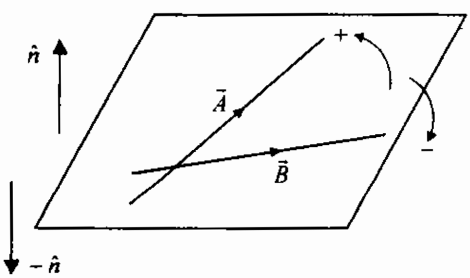
من (2) ,(1) بالضرب الإتجاهي:

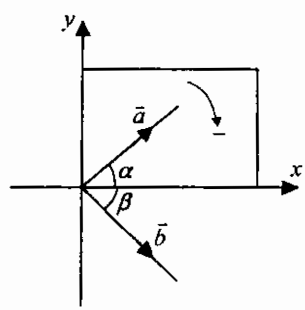
$$\hat{a}\wedge\hat{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{k}(-\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)$$

$$=-\hat{k}(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta) \qquad \_\_\_\_\_(5)$$

ومن تعريف حاصل الضرب الإتجاهي:





$$\hat{a}\wedge\hat{b}=(1)\ (1)\sin(\alpha+\beta)(-\hat{k})$$

[حيث $(-\hat{k})$ هو متجه الوحدة العمودي على $\hat{a},\hat{b}$ ($\hat{a},\hat{b}$ في الإتجاه اليساري)]

$$\therefore\ \hat{a}\wedge\hat{b}=-\hat{k}\sin(\alpha+\beta) \qquad \_\_\_\_\_(6)$$

بمساواة (6) ,(5):

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}$$

وهو المطلوب ثانياً.

مسائل على جبر المتجهات

(١) إذا كان: $\vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}\ ,\ \vec{B}=2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}\ ,\vec{C}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ فأوجد:

(أ) المتجه $\vec{G}=2\vec{A}-\vec{B}+3\vec{C}$ مقداراً وإتجاهاً.

(ب) متجه الوحدة الموازي للمتجه $\vec{D}=3\vec{A}-2\vec{B}+4\vec{C}$

(٢) (أ) أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهين $\vec{A}\equiv(2,\lambda,1)\ ,\ \vec{B}\equiv(4,-2,-2)$ متعامدين.

(ب) أوجد متجه الوحدة العمودي على كل من المتجهين $\vec{A}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\ ,\ \vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

(ج) أثبت أن المتجه $\vec{A}$ يكون عمودياً على $\vec{B}$ إذا كان: $|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$.

(٣) إذا كان: $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}\ ,\ \vec{B}=\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ فأوجد الآتي:

$$(\vec{A}+\vec{B})\wedge(\vec{A}-\vec{B})\ ,(\vec{A}+2\vec{B})\wedge(2\vec{A}-\vec{B})\ ,(2\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-2\vec{B})$$

(٤) (أ) أوجد مسقط المتجه $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ على المتجه $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$.

(ب) أوجد مسقط المتجه $\vec{A}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ على المتجه الواصل بين النقطتين $a=(-2,-4,3)\ ,\ b=(2,3,-1)$.

(٥) (أ) أوجد المتجه الذي مقداره 5 وعمودي على المتجهين:

$$\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}\ ,\ \vec{B}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

(ب) إذا كان $\vec{A}=5\hat{i}+8\hat{j}+3\lambda\hat{k}\ ,\ \vec{B}=-\hat{j}+4\lambda\hat{k}$ أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهين $(\vec{A}-2\vec{B})\ ,(2\vec{A}+\vec{B})$ متعامدين.

(٦) (أ) أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $(3,-1,2),\ (1,-1,-3),(4,-8,1)$.

(ب) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة هي المتجهات $\vec{A}=5\hat{i}-2\hat{j}\ ,\ \vec{B}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\ ,\vec{C}=3\hat{i}+2\hat{k}$

(٧) (أ) أثبت أن المتجهين $\vec{A}=\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}\ ,\vec{B}=-6\hat{i}+9\hat{j}+3\hat{k}$ يكونان متوازيان.

(ب) إذا كان $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$ ، فأثبت أن $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{B}\wedge\vec{C}=\vec{C}\wedge\vec{A}$.

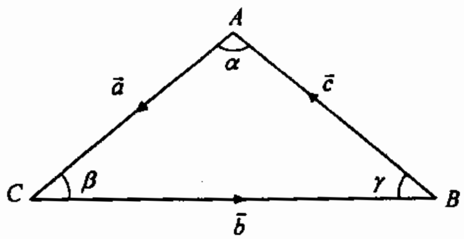
(ج) أثبت العلاقة الآتية:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})+(\vec{b}\wedge\vec{c})\cdot(\vec{a}\wedge\vec{d})+(\vec{c}\wedge\vec{a})\cdot(\vec{b}\wedge\vec{d})=0$$

(٨) (أ) باستخدام المتجهات أثبت قانون الجيب في حساب المثلثات المستوية.

(ب) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

محصلة المتجهات الممثلة بواسطة المستقيمات المتوسطة للمثلث تساوي صفراً.



<u>حل المسألة(٨):</u>

<u>الجزء(أ):</u> إذا كان

$AB=|\vec{a}|=a$

$BC=b$

$CA=c$

وكان المتجهات الثلاثة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ في ترتيب دوري واحد فإن:

(1)______ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ (بدأنا بنقطة A وانتهينا بها)

بضرب (1) إتجاهياً في $\vec{a}$ واعتبار أن $\vec{a}\wedge\vec{a}=0$ ، $\vec{a}\wedge\vec{c}=-\vec{c}\wedge\vec{a}$

(2)______ $\therefore\ \vec{a}\wedge\vec{a}+\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}=0\ \rightarrow\ \therefore\ \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{a}$

بضرب (1) اتجاهياً في $\vec{c}$ واعتبار أن $\vec{c}\wedge\vec{c}=0\ ,\ \vec{c}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{c}$

(3)______ $\therefore\ \vec{c}\wedge\vec{a}+\vec{c}\wedge\vec{b}+\vec{c}\wedge\vec{c}=0\ \rightarrow\ \therefore\ \vec{c}\wedge\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{c}$

من (2), (3): $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{c}\wedge\vec{a}$ وبأخذ المقياس:

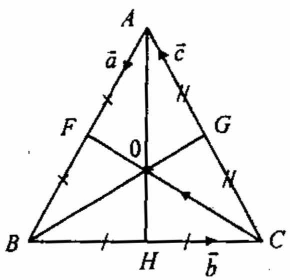
$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{b}\wedge\vec{c}|=|\vec{c}\wedge\vec{a}|$$

$$\therefore\quad ab\sin\beta = bc\sin\gamma = ca\sin\alpha \rightarrow \frac{\sin\beta}{c}=\frac{\sin\gamma}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}$$

بالقسمة على abc:

$$\therefore\quad \boxed{\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{\sin\beta}{c}=\frac{\sin\gamma}{a}}$$

وهو قانون الجيب.



<u>الجزء(ب)</u>: المستقيمات المتوسطة (أو متوسطات المثلث) هي المستقيمات الواصلة بين منتصفات الأضلاع والرؤوس المقابلة، وهي تتلاقى في نقطة واحدة تسمى المركز المتوسط للمثلث.

<u>المطلوب</u>: إثبات أن محصلة المتوسطات $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{AH}$ تساوي صفراً، أي:

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CF}=0$$

<u>الإثبات</u>: نأخذ $\Delta\, ABC$ فيه: $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$

فمن الشكل ومن خواص المتجهات:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0 \quad\rightarrow\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \qquad \_\_\_(1)$$

ومن تعريف المتوسطات:

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{a}\ ,\ \overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\vec{b}\ ,\ \overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b} \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c} \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a} \qquad \_\_\_\_(4)$$

بالجمع واستخدام (1):

$$\therefore\ \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$$

وهو المطلوب.