

الباب الرابع

تطبيقات إستاتيكية (I)

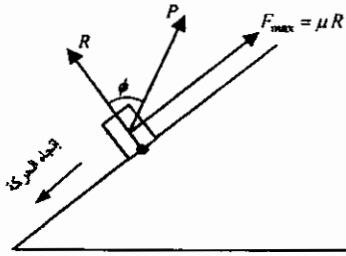
في هذا الباب سوف ندرس بعض التطبيقات الإستاتيكية وهي:

(١) الاحتكاك.

(٢) الانقلاب والإنزلاق.

(٣) التخرج.

أولاً: الاحتكاك



إذا ارتكز جسم خشن على جسم آخر

تظهر قوة احتكاك F بين الجسمين، يزداد

مقدارها بالتدريج كلما اقترب الجسم للمرتكز من الحركة حتى تصل إلى نهاية عظمى عندما يكون الجسم للمرتكز على وشك الإنزلاق على الجسم الآخر، ويكون إتجاهها عكس إتجاه الحركة.

وقد وجد أن النهاية العظمى لقوة الاحتكاك (قوة الاحتكاك النهائية) تتناسب مع رد الفعل العمودي R بين الجسمين

$$F_{\max} \propto R \rightarrow \boxed{F_{\max} = \mu R}$$

حيث μ يسمى معامل الاحتكاك بين الجسمين.

زاوية الاحتكاك: إن محصلة رد الفعل العمودي R وقوة الاحتكاك النهائي $F_{\max}$

تسمى برد الفعل الكلي P ، وتسمى الزاوية بين P, R بزاوية الاحتكاك ϕ حيث:

$$\tan \phi = \frac{F_{\max}}{R} = \frac{\mu R}{R} = \mu$$

أي أن: ظل زاوية الاحتكاك يساوي معامل الاحتكاك.

ملحوظة:

(١) إذا كانت $F = F_{\max} = \mu R$ فإن الجسم يكون على وشك الإنزلاق على

الجسم الآخر (أي على وشك الحركة).

(٢) إذا كانت $F < F_{\max}$ أي $F < \mu R$ فإن الجسم لن ينزلق أي يكون في حالة إتران.

أمثلة محلولة:

مثال (١): كتلة وزنها W موضوعة على مستوى مائل خشن يميل بزاوية θ على

الأفقي، فإذا كانت زاوية الاحتكاك بين هذه الكتلة والمستوى هي ϕ فأثبت أن:

أقل قوة تلزم لتحريك الكتلة إلى أعلى المستوى هي:

$$P_{\min} = W \sin(\theta + \phi)$$

وأن هذه القوة تميل على المستوى بزاوية $\alpha = \phi$

الحل:

بتحليل القوى في إتجاه المستوى والإتجاه

العمودي عليه وكتابة معادلتي الإتران

في هذين الإتجاهين:

(١) في إتجاه المستوى:

$$P \cos \alpha - W \sin \theta - \mu R = 0 \quad (1)$$

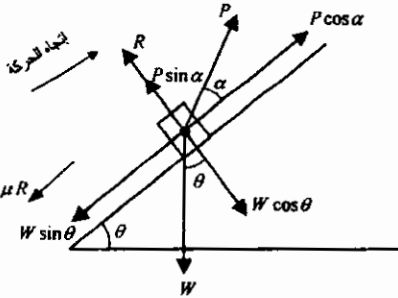
(٢) في الإتجاه العمودي:

$$R + P \sin \alpha - W \cos \theta = 0 \quad (2)$$

من (1), (2) نجد P كالآتي:

$$R = W \cos \theta - P \sin \alpha \quad (2)$$

بالتعويض في (1) وإعتبار أن $\mu = \tan \phi$



$$P \sin \alpha - W \cos \theta - \tan \phi (W \cos \theta - P \sin \alpha) = 0$$

$$\therefore P(\cos \alpha + \tan \phi \sin \alpha) = W(\sin \theta + \tan \phi \cos \theta)$$

$$\therefore P(\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi) = W(\sin \theta \cos \phi + \sin \phi \cos \theta)$$

(وذلك بضرب الطرفين في $\cos \theta$)

$$\therefore P \cos(\alpha - \phi) = W \sin(\theta + \phi)$$

$$\therefore \boxed{P = W \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos(\alpha - \phi)}} \quad (3)$$

وهي العلاقة العامة التي تعطينا القوة P . ولكي تكون P أقل ما يمكن، يجب أن يكون المقام في (3) أكبر من يمكن، وأكبر قيمة لـ $\cos$ هي 1

$$\therefore P \rightarrow P_{\min} : \cos(\alpha - \phi) = 1$$

$$\therefore \alpha - \phi = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = \phi}$$

$$\therefore \boxed{P_{\min} = W \sin(\theta + \phi)}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): جسم وزنه W موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية θ ، فإذا كانت W هي أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم وتمنعه من الانزلاق هابطاً على المستوى، وكانت القوة (αW) هي أقل قوة أفقية تجعل الجسم على وشك الحركة صاعداً إلى أعلى المستوى، فأثبت أن الزاوية θ

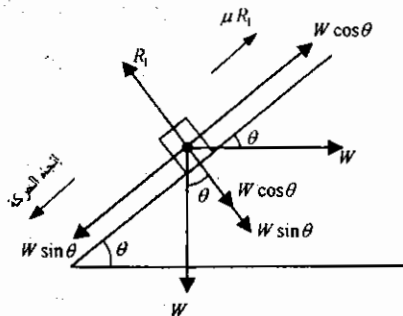
$$\tan 2\theta = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \quad \text{تعطي من:}$$

الحل: هناك حالتان

الحالة الأولى: إذا قلت القوة الأفقية عن W

فإن الجسم سوف ينزلق إلى أسفل المستوى وتكون قوة الاحتكاك نهائية واتجاهها

إلى أعلى: $F = \mu R_1$



معادلتى الإتران:

(١) فى إتجاه المستوى

$$\mu R_1 + W \cos \theta - W \sin \theta = 0$$

(1)

(٢) فى الإتجاه العمودي:

$$R_1 - W \cos \theta - W \sin \theta = 0$$

(2)

من (1), (2) نوجد معامل الإحتكاك μ كالآتى:

من (2):

$$R_1 = W \cos \theta + W \sin \theta$$

بالتعويض فى (1):

$$\mu (W \cos \theta + W \sin \theta) + W \cos \theta - W \sin \theta = 0$$

$$\mu W (\cos \theta + \sin \theta) = W (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$\therefore \mu = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \quad (3)$$

الحالة الثانية:

إذا زادت القوة الأفقية

عن αW فإن الجسم سوف يصعد إلى

أعلى ويكون الإحتكاك نهائياً إلى أسفل

ويساوي μR_2

معادلتى الإتران:

(١) فى إتجاه المستوى:

$$\alpha W \cos \theta - \mu R_2 - W \sin \theta = 0$$

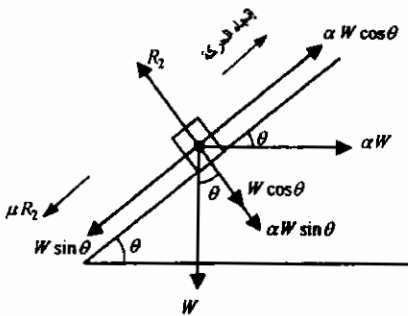
(4)

(٢) فى الإتجاه العمودي:

$$R_2 - W \cos \theta - \alpha W \sin \theta = 0$$

(5)

من (4), (5) نوجد μ كالآتى:



من (5):

$$R_2 = W \cos \theta + \alpha W \sin \theta$$

بالتعويض في (4):

$$\alpha W \cos \theta - \mu (W \cos \theta + \alpha W \sin \theta) - W \sin \theta = 0$$

$$\mu W (\alpha \sin \theta + \cos \theta) = W (\alpha \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\therefore \mu = \frac{\alpha \cos \theta - \sin \theta}{\alpha \sin \theta + \cos \theta} \quad \text{_____ (6)}$$

من (6), (3) نجد أن:

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\alpha \cos \theta - \sin \theta}{\alpha \sin \theta + \cos \theta} \quad \text{_____ (7)}$$

ومن ذلك يمكن إستنتاج المطلوب $\tan 2\theta = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ كالآتي:

من العلاقة (7) بضرب الطرفين في الوسطين:

$$(\sin \theta - \cos \theta)(\alpha \sin \theta + \cos \theta) = (\alpha \cos \theta - \sin \theta)(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\therefore \alpha \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \alpha \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$= \alpha \cos \theta \sin \theta + \alpha \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \alpha \sin \theta \cos \theta = \cos^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \alpha \sin^2 \theta$$

$$\therefore 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \alpha) = \cos^2 \theta (1 + \alpha) - \sin^2 \theta (1 + \alpha)$$

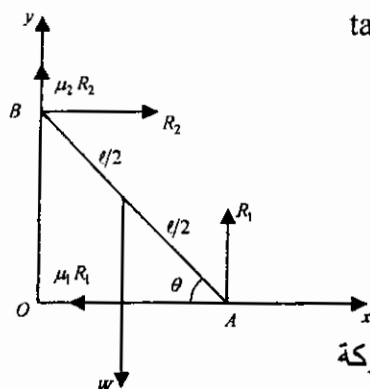
$$\therefore \sin 2\theta \cdot (1 - \alpha) = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot (1 + \alpha) = \cos 2\theta \cdot (1 + \alpha)$$

$$\therefore \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = \tan 2\theta$$

وهو المطلوب.

مثال (٣): سلم منتظم طوله ℓ موضوع على أرض أفقية خشنة معامل إحتكاكها μ_1 ويرتكز بطرفه الآخر مستنداً إلى حائط رأسي خشن معامل إحتكاكه μ_2 ، أثبت أن أقل زاوية θ يميل بها السلم على الأفقي في وضع الإتزان تعطي بالعلاقة:

$$\tan \theta = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1}$$



الحل:

إذا كان الطرف A على وشك الحركة

فإن الحركة تكون إلى اليمين وتكون قوة

الإحتكاك النهائي هي: $R_1 \mu_1$ إلى اليسار،

وإذا كان الطرف B على وشك الحركة فإن الحركة

تكون إلى أسفل وتكون قوة الإحتكاك النهائي $R_2 \mu_2$

إلى أعلى كما بالشكل.

معادلات الإتزان:

(١) في إتجاه x :

$$R_2 - \mu_1 R_1 = 0$$

(1)

(٢) في إتجاه y :

$$\mu_2 R_2 + R_1 - W = 0$$

(2)

المعادلتان (1), (2) غير كافيتين لإيجاد $\tan \theta$ المطلوبة فلجأ لمعادلة ثالثة هي

معادلة العزم.

مجموع العزم حول A : القوتان $R_1, \mu_1 R_1$ تمران بـ A فليس لهما عزم

(2)

$$\therefore W \times \frac{\ell}{2} \cos \theta - R_2 \times \ell \sin \theta - \mu_2 R_2 \cdot \ell \cos \theta = 0$$

من (3), (2), (1) نوجد المطلوب $\tan \theta = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1}$ كالآتي:

من (3):

$$\frac{W}{2} \ell \cos \theta = R_2 \ell (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)$$

$$\therefore R_2 = \frac{W \cos \theta}{2(\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} \quad \text{_____ (4)}$$

ومن (1):

$$R_2 = \mu_1 R_1 \rightarrow R_1 = \frac{R_2}{\mu_1}$$

وباستخدام (4):

$$\therefore R_1 = \frac{W \cos \theta}{2 \mu_1 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} \quad \text{_____ (5)}$$

وبالتعويض من (5), (4) في (2):

$$\frac{\mu_1 W \cos \theta}{2 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} + \frac{W \cos \theta}{2 \mu_1 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} = W$$

$$\therefore \frac{\mu_1 \mu_2 \cos \theta}{2 \mu_1 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} + \frac{\cos \theta}{2 \mu_1 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} = 1$$

$$\therefore \frac{\cos \theta + \mu_1 \mu_2 \cos \theta}{2 \mu_1 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)} = 1$$

$$\therefore \cos \theta + \mu_1 \mu_2 \cos \theta = 2 \mu_1 (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta)$$

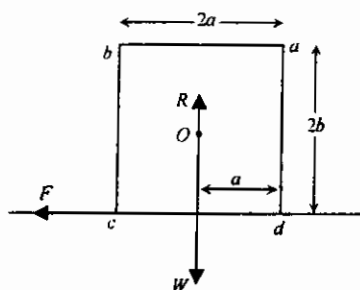
$$\therefore \cos \theta - \mu_1 \mu_2 \cos \theta = 2 \mu_1 \sin \theta$$

$$\therefore \cos \theta (1 - \mu_1 \mu_2) = 2 \mu_1 \sin \theta$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1} = \tan \theta$$

وهو المطلوب.

ثانياً: الإنزلاق والإقلاب



(١) نفرض لدينا صفيحة مستطيلة الشكل

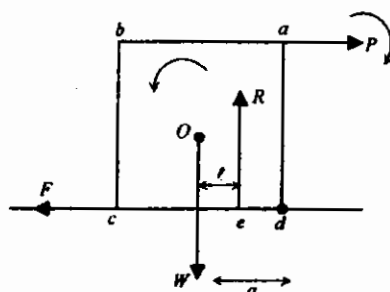
$abcd$ أبعادها $2a, 2b$ ووزنها W يؤثر

في منتصفها O .

وضعت الصفيحة على أرض خشنة ونتيجة

لذلك تتولد قوة احتكاك $\bar{F}$ ورد فعل

عمودي R ، فمن إتزان الصفيحة: $R = W$



(٢) إذا أثرت قوة متزايدة P عند الحرف a

فإنها تكون مع قوة الاحتكاك F إزدواج

يعمل على دوران (أو إنقلاب) الصفيحة

حول نقطة d وينتقل رد الفعل R إلى

النقطة e التي تبعد مسافة ℓ عن مركز

الصفيحة.

ويعمل رد الفعل R مع الوزن W إزدواجاً مضاداً يعمل على

إستقرار الإتزان (أي عدم حدوث إنقلاب).

ويكون لدينا حالتان:

(أ) إذا تساوت القوتان P, F ووصلت قوة الاحتكاك إلى نهايتها العظمى حيث:

$F = F_{\max} = \mu R$ فإن الصفيحة تنزلق، وتعرف P حينئذ بقوة الإنزلاق (P_1) :

$$P_1 = F_{\max} = \mu R \quad , \quad R = W$$

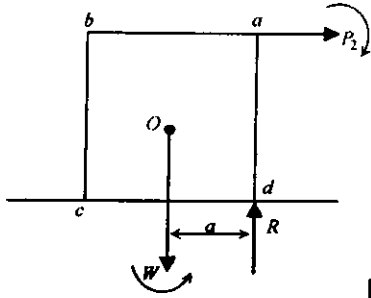
$$\therefore \boxed{P_1 = \mu W}$$

(1)

وبلاحظ أن موضع R (نقطة e) تقع داخل حدود الجسم أي أن:

$$\boxed{\ell < a}$$

(ب) إذا قلت قوة الاحتكاك عن μR أي إذا كانت $F < \mu R$ فإن الجسم لا ينزلق ولكن يكون على وشك الانقلاب، وعندما تتلاشى F وتنتقل نقطة e إلى d يحدث إنقلاب للجسم (الصفیحة) حول d .



وتعرف القوة P حينئذ بقوة الإنقلاب (P_2) حيث: بأخذ العزوم حول d :

$$W \times a - P_2 \times 2b = 0$$

$$\therefore Wa = P_2(2b)$$

$$\therefore P_2 = W \left(\frac{a}{2b} \right) \quad (2)$$

وبلاحظ أن موضع R يكون عند d أي أن $\ell = a$

سؤال: متى يحدث الإنزلاق قبل الإنقلاب أو العكس؟

الإجابة:

أولاً: إذا كانت القوة P أكبر من قوة الاحتكاك النهائية (التي تسبب الإنزلاق) أي إذا كانت $P_2 > P_1$ فإن الجسم يكون على وشك الإنزلاق. وفي هذه الحالة:

$$P_2 > \mu R \rightarrow \frac{P_2}{R} > \mu$$

وفي نفس الوقت: $\ell < a$

ثانياً: إذا كانت القوة P أقل من قوة الاحتكاك النهائية (التي تسبب الإنزلاق) أي إذا كانت $P_2 < P_1$ فإن الجسم يكون على وشك الإنقلاب.

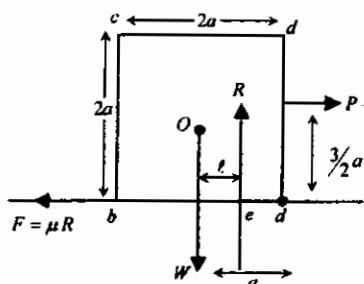
$$P_2 < \mu R \rightarrow \frac{P_2}{R} < \mu$$

وفي هذه الحالة:

وفي نفس الوقت $\ell = a$ (في حالة الإنقلاب).

أمثلة محلولة:

مثال (1): مكعب طول ضلعه $2a$ ووزنه W . تؤثر عند وجهه الأيمن قوة أفقية P تزداد تدريجياً، وتؤثر عند مسافة $\frac{3}{2}a$ من أرضيه أفقيه خشنه معامل احتكاكها $\mu = 0.7$ بحيث تجعل المكعب على وشك الحركة. أدرس حالي الإنزلاق والإنقلاب للمكعب.



الحل:

أولاً: بفرض أن المكعب ينزلق نحو اليمين في هذه الحالة (حالة الإنزلاق):

$$F = \mu R$$

ورد الفعل العمودي يؤثر عند e حيث $\ell < a$

معادلات الإتران:

رأسياً:

$$R = W$$

(1)

أفقياً:

$$P = F = \mu R$$

(2)

من (1), (2):

$$P = \mu W = 0.7W$$

(3)

بأخذ العزوم حول e :

$$W \times \ell - P \times \frac{3}{2}a = 0$$

$$\therefore W \ell = \frac{3}{2}Pa$$

(4)

بالتعويض من (3) في (4):

$$W \ell = \frac{3}{2} (0.7 W) a$$

$$\therefore \ell = 1.05 a \rightarrow \boxed{\ell > a}$$

وهذا يخالف الفرض (الجسم في حالة إنزلاق وأن $\ell < a$) وبالتالي فإن المكعب لا ينزلق ولكن ينقلب.

ولإثبات ذلك: ندرس حالة الانقلاب:

$$\text{في هذه الحالة: } \frac{F}{R} < M \leftarrow F < \mu R$$

أيضاً: $\ell = a$ (R يكون عند حرف المكعب a)

معادلات الإتران:

$$R = W \quad \text{_____ (1)}$$

$$P = F \quad \text{_____ (2)}$$

العزوم حول نقطة a :

$$W \times a - P \times \frac{3}{2} a = 0$$

$$\therefore W = \frac{3}{2} P \quad \text{_____ (3)}$$

من (1), (2), (3):

$$R = \frac{3}{2} F$$

$$\therefore \frac{F}{R} = \frac{2}{3} = 0.67$$

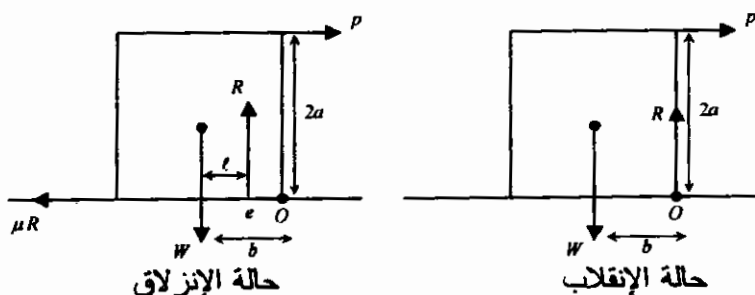
$$\therefore \frac{F}{R} < 0.7 (\mu)$$

$$\therefore \text{تحققت العلاقة } \frac{F}{R} < \mu \leftarrow \boxed{F < \mu R}$$

وذلك فإن المكعب لا ينزلق ولكن ينقلب.

مثال (٢): جسم على شكل متوازي مستطيلات إرتفاعه $2a$ وطول قاعدته $2b$ ، وضع على منضدة أفقية خشنة معامل الإحتكاك بينها وبين الجسم μ ، فإذا أثرت قوة أفقية متزايدة P في منتصف حرف علوي لأحد الأوجه الرأسية بحيث تكون عمودية على هذا الحرف وازداد مقدار القوة حتى أختل التوازن، أثبت أن الجسم ينقلب أو ينزلق تبعاً لكون $\mu \geq \frac{b}{2a}$

الحل:



معادلات الإتزان: إذا كان الجسم على وشك الإنزلاق:

$$R = W \quad (1)$$

$$P = \mu R \quad (2)$$

من (1), (2)

$$P = \mu W = P_1 \quad (3)$$

حيث P_1 قوة الإنزلاق.

إذا كان الجسم على وشك الانقلاب: بأخذ العزوم حول O :

$$W \times b - P \times 2a = 0$$

$$\therefore W b = 2a P$$

$$\therefore P = \frac{W b}{2a} = P_2 \quad (4)$$

حيث P_2 قوة الانقلاب.

إذا أختل التوازن بالإنزلاق:

$$P_2 > P_1$$

الإنزلاق يحدث قبل الانقلاب وشرط ذلك:

من (4)، (3):

$$\frac{Wb}{2a} > \mu W$$

$$\therefore \mu < \frac{b}{2a}$$

شرط حدوث الإنزلاق:

إذا أختل التوازن بالإنقلاب: الانقلاب يحدث قبل الإنزلاق وشرط ذلك هو:

$$P_2 < P_1$$

من (4)، (3):

$$\frac{Wb}{2a} < \mu W$$

$$\therefore \mu > \frac{b}{2a}$$

شرط حدوث الانقلاب:

وهو المطلوب.

مثال (٣): وضعت صفيحة منتظمة على شكل مربع بحيث كان مستواها رأسياً،

وأحد أحرفها ينطبق على خط أكبر ميل لمستوى خشن يميل على الأفقي

بزواوية 30° . فإذا أثرت قوة أفقية P على أعلى نقطة من الصفيحة بحيث كانت

تعمل إلى أعلى المستوى، وتم زيادة هذه القوة بالتدريج حتى أختل توازن

الصفيحة.

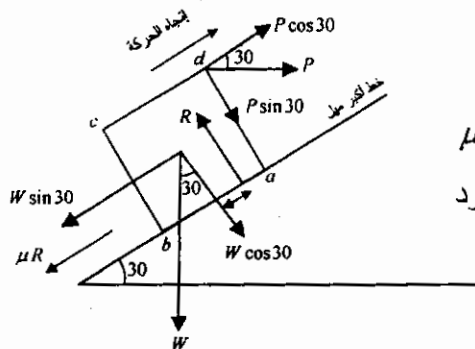
أثبت أن الصفيحة تتقلب قبل أن تنزلق إذا كان معامل الاحتكاك:

$$\mu > \frac{3 - \sqrt{3}}{7 + \sqrt{3}}$$

الحل:

أولاً: ندرس حالة الإنزلاق

قوة الاحتكاك تكون نهائية وتساوي μR
بتحليل القوة في إتجاه المستوى والعمود
عليه



(أ) في إتجاه المستوى:

$$P \cos 30 - W \sin 30 - \mu R = 0$$

(1)

(ب) في الإتجاه العمودي:

$$R - W \cos 30 - P \sin 30 = 0$$

(2)

وحيث أن $\sin 30 = \frac{1}{2}$, $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن (1), (2) تصبح:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} P - \frac{1}{2} W = \mu R$$

(3)

$$\frac{1}{2} P + \frac{\sqrt{3}}{2} W = R$$

(4)

بضرب (4) في μ :

$$\frac{1}{2} \mu P + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu W = \mu R$$

(5)

$$\therefore P(\sqrt{3} - \mu) - (1 + \mu\sqrt{3})W = 0$$

فمن (5), (3) بالطرح:

$$\therefore P = \frac{1 + \mu\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \mu} W = P_1 \quad (\text{قوة الإنزلاق})$$

(6)

ثانياً: ندرس حالة الانقلاب:

إذا كان الجسم على وشك الانقلاب فإن R تكون عند a فباخذ العزوم حول a فإن:

$$P \cos 30 \times 2\ell - W \cos 30 \times \ell - W \sin 30 \times \ell = 0$$

(حيث 2ℓ طول ضلع المصفيحة)

$$\therefore P \times \frac{\sqrt{3}}{2} (2\ell) - W \times \frac{\sqrt{3}}{2} (\ell) - W \times \left(\frac{1}{2}\right)(\ell) = 0 \quad \therefore \sqrt{3}P = \frac{W}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore P = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} W = P_2 \quad \text{(قوة الانقلاب)} \quad \text{_____ (7)}$$

والآن: لكي تتقلب الصفحة فإن: $P_2 < P_1$ (شرط الانقلاب)

$$\therefore \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} W < \frac{1 + \mu\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \mu} W \rightarrow \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1 + \mu\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \mu}$$

$$\therefore 2\sqrt{3}(1 + \mu\sqrt{3}) > (1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \mu)$$

$$\therefore 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\mu}\right) > (1 + \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{\mu} - 1\right)$$

$$\therefore 6 + \frac{2\sqrt{3}}{\mu} > \frac{\sqrt{3}}{\mu} - 1 + \frac{3}{\mu} - \sqrt{3}$$

$$\therefore 7 + \frac{\sqrt{3}}{\mu} > \frac{3}{\mu} - \sqrt{3} \rightarrow 7\mu + \sqrt{3} > 3 - \mu\sqrt{3}$$

$$\therefore \mu(7 + \sqrt{3}) > 3 - \sqrt{3} \rightarrow \mu > \frac{3 - \sqrt{3}}{7 + \sqrt{3}}$$

وهو المطلوب.

مثال (٤): وضع مخروط دائري قائم مصمت زاوية رأسه 2θ بحيث تلامس قاعدته

مستوى مائل خشن يميل بزاوية α على الأفقي، فإذا أثرت قوة P عند رأس

المخروط في اتجاه المستوى فأثبت أن المخروط ينزلق قبل أن ينقلب إذا كانت :

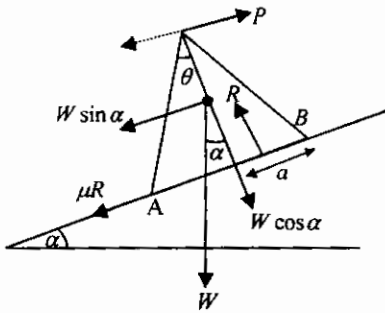
$$1. \quad \mu < \tan \theta - \frac{3}{4} \tan \alpha$$

في حالة ما إذا كانت القوة P تؤثر إلى أعلى .

$$2. \quad \mu < \tan \theta + \frac{3}{4} \tan \alpha$$

في حالة ما إذا كانت القوة P تؤثر إلى أسفل .

الحل:



باعتبار أن مركز ثقل المخروط المصمت يقع على محوره ويقسمه بنسبة 3 : 1 من جهة القاعدة فهو يبعد عن القاعدة بمقدار $\frac{h}{4}$ حيث h ارتفاع المخروط (أنظر الباب الخاص بمركز الثقل) .

الحالة الأولى: إذا كانت P تؤثر إلى أعلى المستوى .

يكون الجسم على وشك الانزلاق إذا كان :

$$P = W \sin \alpha + \mu R \quad (1)$$

$$R = W \cos \alpha \quad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن :

$$P = W(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (3)$$

وهي قوة الانزلاق.

يكون الجسم على وشك الانقلاب عندما تؤثر R عند B وتتلاشى قوة الاحتكاك ،

$$P \cdot h - a \cdot W \cos \alpha - \frac{h}{4} \cdot W \sin \alpha = 0 \quad \text{فبأخذ العزوم حول } B :$$

حيث a نصف قطر قاعدة المخروط .

وبالقسمة على h واعتبار أن $a = h \tan \alpha$

$$\therefore P = W \left(\frac{a}{h} \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha \right) = W (\tan \theta \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha) \quad (4)$$

وهي قوة الانقلاب .

وينزلق المخروط قبل أن ينقلب إذا كانت قوة الانزلاق أصغر من قوة الانقلاب

$$\therefore W (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) < W (\tan \theta \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha)$$

ومنها (بعد الاختصار) نجد أن : $\mu < \tan \theta - \frac{3}{4} \tan \alpha$

الحالة الثانية: إذا كانت P تؤثر أسفل المستوى

(فيكون الاحتكاك μR في عكس الإتجاه أي أعلى المستوى) :

ويكون الجسم على وشك الإنزلاق إذا كان :

$$P + W \sin \alpha = \mu R \quad \text{_____} (5)$$

$$R = W \cos \alpha \quad \text{_____} (6)$$

من (6) ، (5) نجد أن :

$$P = W(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) \quad \text{_____} (7)$$

وهي قوة الإنزلاق .

ويكون الجسم على وشك الانقلاب عندما تؤثر R عند B وتتلاشى قوة الاحتكاك ،

فبأخذ العزوم حول B :

$$\therefore P \cdot h - a \cdot W \cos \alpha + \frac{h}{4} \cdot W \sin \alpha = 0$$

وبالقسمة على h واعتبار أن $a = h \tan \theta$

$$\therefore P = W(\tan \theta \cos \alpha - \frac{1}{4} \sin \alpha) \quad \text{_____} (8)$$

وهي قوة الانقلاب .

وينزلق المخروط قبل أن ينقلب إذا كانت قوة الإنزلاق أصغر من قوة الانقلاب .

$$\therefore W(\mu \cos \alpha - \sin \alpha) < W(\tan \theta \cos \alpha - \frac{1}{4} \sin \alpha)$$

$$\mu < \tan \theta + \frac{3}{4} \tan \alpha \quad \text{ومنها (بعد الاختصار) نجد أن :}$$

وهو المطلوب .

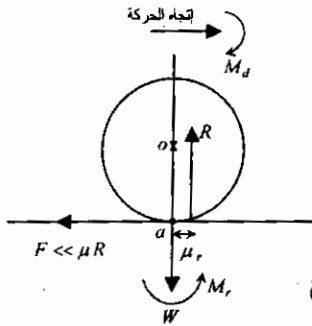
ثالثاً: التدرج

إذا كان لدينا شكلاً دائرياً (كرة أو أسطوانة دائرية) تتحرك حركة تدرجية هي عبارة عن سلسلة من الانقلابات المتتالية بحيث أن:

(أ) قوة الاحتكاك تكون أقل بكثير

$$F \ll \mu R$$

جداً عن قيمتها العظمى



(ب) رد الفعل العمودي R يبعد عن الوزن W

بمسافة صغيرة جداً تسمى ذراع مقاومة التدرج

(أو معامل احتكاك التدرج) μ_r .

ويلاحظ أن R تكون دائماً في النصف القريب من إتجاه الحركة.

(ج) إلى جانب عزم التدرج M_d يوجد عزم الاحتكاك الناتج عن التدرج M_r

$$M_r = \mu_r R$$

ويضاد إتجاه الحركة الدورانية لكي يحافظ على إتزان الجسم أثناء التدرج.

مثال (١): أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها 50 cm ووزنها 200 تتدرج

بإنتظام على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية α

حيث $\tan \alpha = \frac{1}{20}$ ، فإذا كان معامل الاحتكاك (الإنزلاقي) بين الأسطوانة

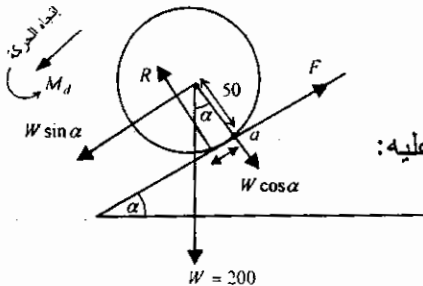
والمستوى $\mu = 0.5$ فأثبت أن الحركة هي حركة تدرجية وأوجد معامل

احتكاك التدرج (μ_r) للأسطوانة.

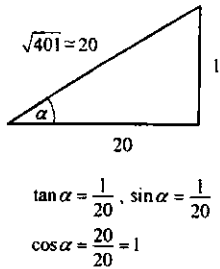
الحل:

بالتحليل في إتجاه المستوى المائل والعمودي عليه:

(أ) في إتجاه المستوى:



$$F - W \sin \alpha = 0$$



$$\therefore F = W \sin \alpha = 200 \times \frac{1}{20} = 10 \quad (1)$$

(ب) في الإتجاه العمودي:

$$R - W \cos \alpha = 0$$

$$\therefore R = W \cos \alpha = 200 \times 1 = 200 \quad (2)$$

إثبات أن الحركة تدرجية :

$$\text{نثبت أن } \mu R \ll F, \text{ أي أن } \mu \ll \frac{F}{R}$$

من (1), (2):

$$\frac{F}{R} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} \ll \frac{1}{2}, \quad \mu = 0.5 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ الحركة هي حركة تدرجية.

ولإيجاد معامل إحتكاك التدرج μ_r :

نأخذ العزوم حول نقطة التماس a :

$$W \sin \alpha \times 50 - R \times \mu_r = 0$$

$$\therefore 200 \times \frac{1}{20} \times 50 - 200 \times \mu_r = 0$$

ومنها نوجد μ_r :

$$\boxed{\mu_r = 2.5}$$

ويلاحظ أن: μ_r صغيرة جداً بالنسبة للمسافة $r(50)$. وهو المطلوب.

مثال(٢): في المثال السابق إذا أثرت قوة P في مركز الأسطوانة موازية للمستوى

المائل فإن الأسطوانة تتدرج صاعدة إلى أعلى المستوى، فإذا علم أن معامل

إحتكاك التدرج $\mu_r = 2.5$ فأوجد القوة P وتحقق من أن الحركة تدرجية.

الحل:

بالتحليل في إتجاه المستوى والعمودي عليه

(أ) في إتجاه المستوى:

$$P - F - W \sin \alpha = 0$$

$$\therefore F = P - W \sin \alpha = P - 200 \times \frac{1}{20} = P - 10 \quad (1)$$

(ب) في الإتجاه العمودي:

$$R - W \cos \alpha = 0$$

$$\therefore F = W \cos \alpha = 200 \times 1 = 200 \quad (2)$$

بأخذ العزوم حول نقطة التماس a : $R \times \mu_r + W \sin \alpha \times 50 - P \times 50 = 0$

$$\therefore 200 \times 2.5 + 200 \times \frac{1}{20} \times 50 - P \times 50 = 0$$

$$\therefore 500 + 500 - 50P = 0$$

$$\therefore 50P = 1000$$

$$\therefore P = \frac{1000}{50} = 20 \quad (3)$$

وهو المطلوب الأول.

للتحقق من أن الحركة تنحرجية:

$$\text{نثبت أن } \mu < \frac{F}{R}, \text{ أي } \frac{F}{R} < \frac{1}{2} \quad [\mu = \frac{1}{2}]$$

$$F = P - 10 = 20 - 10 = 10 \quad \text{بالتعويض من (3) في (1):}$$

$$\frac{F}{R} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} < \frac{1}{2}$$

وهو المطلوب ثانياً.

مسائل على الباب الرابع

(١) سلم AB طوله $3m$ ووزنه 400 وحدة يؤثر عند نقطة C التي تبعد مسافة $1m$ عن طرفه السفلي B الذي يستند على أرض خشنة معامل الاحتكاك بينها وبين السلم $\mu = 0.4$ ، فإذا كان السلم يستند بطرفه A على حائط أملس على ارتفاع $2.4m$ من سطح الأرض، فإلى أية مسافة يمكن لرجل وزنه 640 أن يصعد على السلم قبل أن يبدأ السلم في الانزلاق.

(٢) قضيب منتظم ثقل وزنه W يستند على مستويين CA, CB يميلان بزاوية 45° على الأفقي ومتصلان عند C ، وكان المستوى CA خشناً ومعامل احتكاكه μ والمستوى CB أملساً، بين أن القضيب يمكن أن يتزن في أي وضع وهو مائل بزاوية θ على المستوى الأملس بحيث تكون θ محصورة بين $\tan^{-1}(1 \pm 2\mu)$.

(٣) سلم منتظم يرتكز بأحد طرفيه على أرض خشنة معامل احتكاكها μ وبالطرف الآخر على حائط أملس فإذا كانت الأرض تميل على الأفقي بزاوية α فأثبت أنه إذا كان السلم على وشك الانزلاق فإن زاوية ميله على الرأسية تعطي بالعلاقة: $\tan \theta = 2 \tan(\lambda - \alpha)$ حيث λ زاوية الاحتكاك ($\mu = \tan \lambda$).

(٤) صفيحة مربعة الشكل وضعت بحيث كان مستواها رأسياً وحرفها BC ينطبق على خط أكبر ميل لمستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ بحيث كانت B إلى أعلى، فإذا جذبت الصفيحة من الركن A بقوة أفقية تزداد تدريجياً، فأثبت أن الصفيحة تتقلب قبل أن تنزلق إذا كان معامل الاحتكاك $\mu > \frac{4}{53}$.

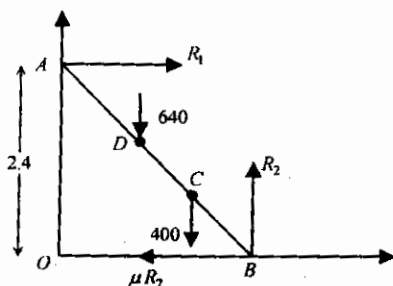
(٥) جسم مقطعه على شكل مسدس $ADCDEF$ طوله ضلعه a ووزنه W يستقر على مستوى مائل خشن زاوية ميله 30° ومعامل إحتكاكه μ . عين القوة الأفقية اللازمة لاجداث الانقلاب حول الحرف A ، وأثبت أن الشرط اللازم لكي ينزلق للجسم قبل أن ينقلب هو أن يكون: $\mu < \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

(٦) صفيحة مربعة الشكل $ABCD$ وضعت على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية α حيث $\alpha < \frac{\pi}{4}$ وبحيث ينطبق الضلع AB على خط أكبر ميل ويكون مستوى الصفيحة رأسياً.

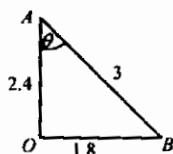
أثرت قوة متزايدة أفقية (P) في نقطة D بحيث يقع خط عملها في مستوى الصفيحة. أعلى المستوى، فإذا كان معامل الإحتكاك هو μ حيث $\mu < \tan \alpha$ فأوجد القوة اللازمة لكي تبدأ الصفيحة في الإنزلاق وكذلك القوة اللازمة لكي تبدأ الصفيحة في الانقلاب، أثبت أيضاً أن الصفيحة تنقلب أو تنزلق أولاً على حسب ما إذا كانت $\frac{2\ell^2 - \ell + 1}{\ell^2 - \ell + 2} > \mu$ حيث $\ell = \tan \alpha$.

حلول بعض المسائل

المسألة (١):



نفرض أن وزن الرجل يؤثر عند D حيث $\overline{DB} = S$ هذه المسافة تتغير تبعاً لتغير قوة الاحتكاك بين السلم والأرض حتى تصل إلى قيمتها القصوى وهي μR_2 .



$$\begin{aligned} (OB)^2 &= (3)^2 - (2.4)^2 = 3.24 \\ \therefore OB &= 1.8 \\ \sin \theta &= \frac{1.8}{3} = 0.6 \end{aligned}$$

معادلات الإتران:

أفقياً:

$$R_1 = \mu R_2 = 0.4 R_2 \quad (1)$$

رأسياً:

$$R_2 = 640 + 400 = 1040 \quad (2)$$

من (1), (2):

$$R_1 = 0.4(1040) = 416 \quad (3)$$

$$\sum M_B = 0$$

بأخذ العزوم حول B :

$$\therefore 400 \times \overline{CB} \sin \theta + 640 \times \overline{DB} \sin \theta - R_1 \times 2.4 = 0$$

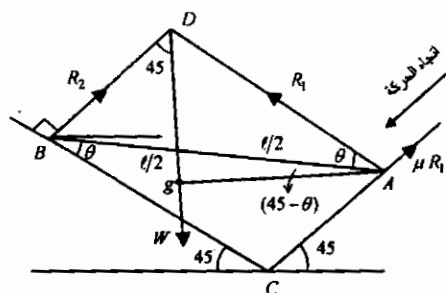
$$\therefore 400 \times 1 \times 0.6 + 640 \times S \times 0.6 - 416 \times 2.4 = 0$$

$$\therefore 240 + 384S - 998.4 = 0 \quad \rightarrow \quad 384S = 758.4$$

$$\therefore S = 1.975 \text{ m}$$

وهي أقصى مسافة يمكن أن يصعد بها الرجل على السلم قبل أن يبدأ السلم في الإنزلاق (أي وهو في حالة إتران).

المسألة (٢):



ليكن طول القضيب l ورد الفعل R_1 عند A عمودي على CA
ورد الفعل R_2 عند B عمودي على CB ويوازي CA .

في حالة الإتزان النهائي يكون الاحتكاك

عند $A = \mu R_1$ وهو إلى أعلى إذا إنزلت A إلى أسفل والعكس بالعكس.

بالتحليل في الإتجاهين المتعامدين CA, CB نحصل على:

في إتجاه CA :

$$R_2 = W \cos 45^\circ \mp \mu R_1 \quad (1)$$

حيث الإشارة (-) عندما تنزلق A إلى أسفل، الإشارة (+) عندما تنزلق A أعلى.

في الإتجاه CB :

$$R_1 = W \sin 45^\circ \quad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1):

$$R_2 = W \cos 45^\circ \mp \mu W \sin 45^\circ = \frac{W}{\sqrt{2}} (1 \mp \mu) \quad (3)$$

وبأخذ العزوم حول A :

$$-R_2 \times \overline{DA} + W \times \overline{gA} = 0$$

$$\therefore -R_2 \times l \cos \theta + W \times \frac{l}{2} \cos(45 - \theta) = 0$$

وبالتعويض عن R_2 من (3):

$$\frac{W}{\sqrt{2}} (1 \mp \mu) l \cos \theta = W \times \frac{l}{2} \cos(45 - \theta)$$

$$\therefore \cos(45 - \theta) = \frac{2}{\sqrt{2}} (1 \mp \mu) \cos \theta = \sqrt{2} (1 \mp \mu) \cos \theta$$

$$\therefore \cos 45 \cos \theta + \sin 45 \sin \theta = \sqrt{2} (1 \mp \mu) \cos \theta$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} (1 \mp \mu) \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta + \sin \theta = 2 (1 \mp \mu) \cos \theta$$

$$\therefore \sin \theta = 2 (1 \mp \mu) \cos \theta - \cos \theta = (1 \mp 2\mu) \cos \theta$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = 1 \mp 2\mu$$

وعلى هذا فإن الزاوية θ في حالة الاحتكاك النهائي تكون محصورة بين:

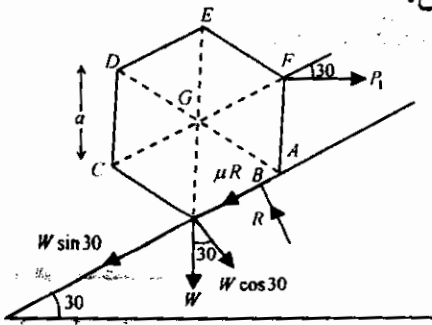
$$\theta = \tan^{-1} (1 \pm 2\mu)$$

وهو المطلوب.

المسألة (5):

المسدس $AOCDEF$ وزنه W يقع في مركزه المتوسط G ويستند بضلعه

OA على المستوى المائل، ويكون لدينا حالتان:



(1) إذا كان المسدس على وشك الانزلاق

القوة P_1 الأفقية هي القوة اللازمة

لإحداث الانزلاق أعلى المستوى (أي

جعل المسدس على وشك الانزلاق

إلى أعلى)

في هذه الحالة رد الفعل R يكون في موضع ما على يسار A ويكون الاحتكاك

في أقصى قيمة له (μR) .

بالتحليل في اتجاه المستوى والعمودي عليه:

$$P_1 \cos 30 - W \sin 30 - \mu R = 0$$

$$R - W \cos 30 - P_1 \sin 30 = 0$$

بحذف R بين (1), (2) نحصل على:

$$P_1 = W \frac{1 + \sqrt{3} \mu}{\sqrt{3} - \mu} \quad (3)$$

وهي قوة الإنزلاق.

(٢) إذا كان المسدس على وشك الانقلاب

في هذه الحالة لا تصل قوة الاحتكاك إلى نهايتها العظمى، كما أن رد الفعل العمودي R يؤثر عند الحرف A حتى يحفظ المسدس في حالة إتران.

فإذا كانت القوة الأفقية اللازمة لإحداث الانقلاب هي P_2 ، فبأخذ العزوم حول A :

$$P_2 \times a - W \cos 30^\circ \times a = 0$$

ومنها:

$$P_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} W \quad (4)$$

شرط أن يحدث الإنزلاق قبل الانقلاب هو: $P_1 < P_2$

$$\therefore W \frac{1 + \sqrt{3} \mu}{\sqrt{3} - \mu} < \frac{\sqrt{3}}{2} W \rightarrow 2(1 + \sqrt{3} \mu) < \sqrt{3}(\sqrt{3} - \mu)$$

$$\therefore 2 + 2\sqrt{3} \mu < 3 - \sqrt{3} \mu \rightarrow 3\sqrt{3} \mu < 1$$

$$\therefore \boxed{\mu < \frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

وهو المطلوب.

المسألة (٦): سوف تثبت أن للصفحة $ABCD$ تبدأ في الإنزلاق عندما:

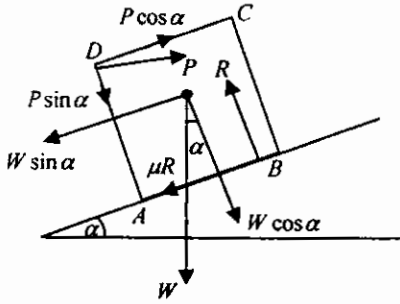
$$P = W \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad (\text{القوة اللازمة للإنزلاق})$$

وأنها تبدأ في الانقلاب عندما:

$$P = W / 2 \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \quad (\text{القوة اللازمة للإنقلاب})$$

وأن الصفحة تنقلب أو تنزلق أولاً على حسب ما إذا كانت

$$\ell = \tan \alpha \quad \text{حيث} \quad \mu > \frac{2\ell^2 - \ell + 1}{\ell^2 - \ell + 2}$$



الإثبات:

ندرس أولاً حالة الإنزلاق :

تكون الصفيحة على وشك الإنزلاق عندما :

$$P \cos \alpha = W \sin \alpha + \mu R \quad (1)$$

$$R = W \cos \alpha + P \sin \alpha \quad (2)$$

بالتعويض عن R من (2)، (1) :

$$\therefore P \cos \alpha = W \sin \alpha + \mu (W \cos \alpha + P \sin \alpha)$$

$$\therefore P (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = W (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

$$\therefore P = \frac{W (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad (3)$$

وهي قوة الإنزلاق.

ندرس ثانياً حالة الانقلاب : تكون الصفيحة على وشك الانقلاب عندما :

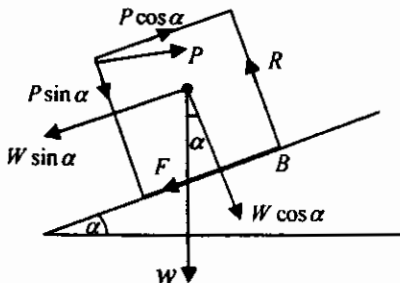
تكون R عند B، فباخذ العزوم حول B (باعتبار 2ℓ طول ضلع المربع) :

$$\therefore P \sin \alpha \cdot 2\ell + W \sin \alpha \cdot \ell + W \cos \alpha \cdot \ell - P \cos \alpha \cdot 2\ell = 0$$

$$\therefore 2P (\cos \alpha - \sin \alpha) = W (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad \text{بالقسمة على } \ell :$$

$$\therefore P = \frac{W}{2} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \quad (4)$$

وهي قوة الانقلاب .



ولكي ينقلب الجسم قبل أن ينزلق فإن قوة الانقلاب

يجب أن تكون أصغر من قوة الإنزلاق أي :

$$\frac{W}{2} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} < W \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

وبالقسمة على $\cos \alpha$ ووضع $\ell = \tan \alpha$ ، فإن :

$$\therefore \frac{\ell+1}{2(1-\ell)} < \frac{\ell+\mu}{1-\mu\ell}$$

$$\therefore 2(1-\ell)(\ell+\mu) < (\ell+1)(1-\mu\ell)$$

$$\therefore 2\ell+2\mu-2\ell^2-2\ell\mu < \ell-\mu\ell^2+1-\mu\ell$$

$$\therefore -2\ell^2+\ell-1 < -\mu\ell^2+\mu\ell-2\mu$$

$$\therefore 2\ell^2-\ell+1 < \mu(\ell^2-\ell+2)$$

$$\therefore \mu > \frac{2\ell^2-\ell+1}{\ell^2-\ell+2}$$

ولكي ينزلق الجسم قبل أن ينقلب فإن قوة الإنزلاق يجب أن تكون أصغر من قوة الانقلاب أي :

$$W \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} < \frac{W}{2} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

ومنها نجد أن :

$$W < \frac{2\ell^2-\ell+1}{\ell^2-\ell+2}$$

وهو المطلوب .