الباب الخامس

تطبيقات إستاتيكية (2)

في هذا الباب سوف نواصل التطبيقات الإستاتيكية فندرس التطبيقات الآتية

(١) إتزان الأجسام المتصلة بمفاصل ملساء.

(٢) إتزان الشبكيات (الجمالونات).

(٣) إتزان الخيوط والسلاسل.

أولاً: إتزان الأجسام المتصلة بمفاصل ملساء:

عندما يتصل جسمان بمفصل أملس فإن هذا يعني تثبيت نقطة من الجسم الأول بنقطة من الجسم الثاني بحيث يمكن للجسمين أن يدورا حول هذه النقطة، ويكون رد فعل المفصل على أحد الجسمين يساوي ويضاد رد فعل المفصل على الجسم الآخر .

وفي حل المسائل الخاصة بالمفاصل الملساء نعتبر المفصل كأنه نقطة، ونظراً لأن رد الفعل يكون عادة مجهول المقدار والإتجاه فإنه من الأنسب أن نمثله بمركبتين متعامدتين تمران بهذه النقطة، ونمثل رد الفعل على الجسم الآخر بمركبتين مساويتين ومضادتين لهاتين المركبتين .

ولتوضيح هذه المركبات في الشكل نفصل بين الجسمين عند المفصل (أي نترك فراغاً) وندرس إتزان كل جسم على حده .

وسوف نوضح هذه المفاهيم بعدد من الأمثلة المحلولة فيما يلي .

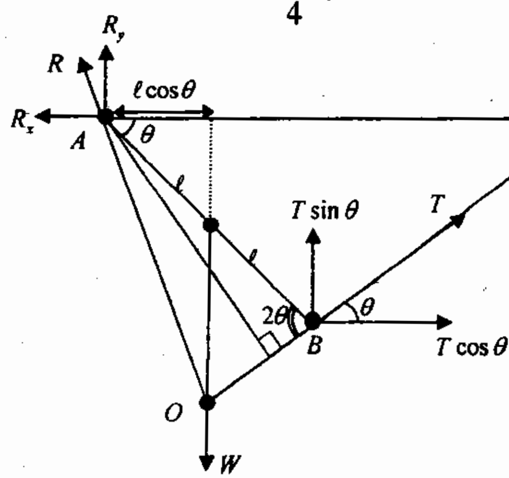
ونلاحظ أننا سوف نستخدم الطرق التقليدية في حل المسائل (أي بدون إستخدام المتجهات في الغالب) حيث نحدد القوى وإتجاهاتها على الرسم، ونوجد محصلة القوى بجمع قيمها كل بإشارته الدالة على إتجاهه، وعند إيجاد العزم نضرب القوى

في ذراع العزم (العمودي على إتجاه القوى) وتكون إشارة العزم موجبة إذا كان إتجاهه ضد حركة عقارب الساعة، وسالبة إذا كان إتجاهه مع حركة عقارب الساعة.

أمثلة محلولة:

مثال(١): قضيب منتظم AB وزنه W وطوله 2ℓ يتحرك حول مفصل أملس A ويميل بزاوية θ مع الأفقي فإذا حفظ القضيب في حالة إتزان بواسطة خيط غير مرن يتصل بالنقطة B ويميل على الأفقي بنفس الزاوية θ، أوجد الشد في الخيط وأثبت أن رد الفعل عند المفصل يعطي من :

$$R=\frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}$$



الحل:

رد الفعل عند المفصل A غير معروف فنفرض أن له مركبتين هما R_x, R_y كما في الرسم .

القضيب متزن تحت تأثير القوى الثلاث : T, W, R والتي يجب أن تتلاقي في نقطة واحدة هي O .

بكتابة معادلات الإتزان:

في الإتجاه الأفقي:

$$-R_x + T\cos\theta = 0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

في الإتجاه الرأسي:

$$R_y + T\sin\theta - W = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

وبأخذ العزوم حول المفصل A :

$$T\times 2\ell\sin 2\theta - W\times\ell\cos\theta = 0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

حيث الزاوية $A\hat{B}O = 2\theta$ الخارجة عن المثلث ACB (نظرية هندسية)

من (3) :

$$\therefore \quad T = \frac{W\cos\theta}{2\sin 2\theta} = \frac{W\cos\theta}{4\sin\theta\cos\theta} = \frac{W}{4\sin\theta}$$

وبالتعويض عن قيمة T في (2) ،(1) نحصل على الآتي:

$$R_x = T\cos\theta = \frac{W\cos\theta}{4\sin\theta} = \frac{W}{4}\cot\theta$$

$$R_y = W - T\sin\theta = W - \frac{W\sin\theta}{4\sin\theta} = W - \frac{W}{4} = \frac{3}{4}\ W$$

ويكون رد الفعل عند المفصل هو :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\frac{W^2}{16}\cot^2\theta + \frac{9}{16}W^2}$$

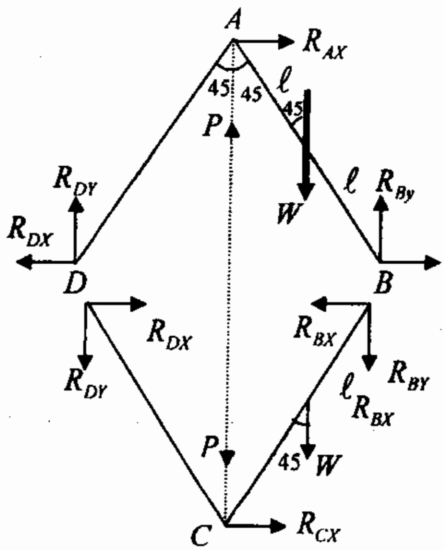
$$= \frac{W}{4}\sqrt{\cot^2\theta + 9} = \frac{W}{4}\sqrt{(\cos ec^2\theta - 1) + 9}$$

$$= \frac{W}{4}\sqrt{\cos ec^2\theta + 8}$$

وهو المطلوب .

مثال(٢): أربعة قضبان متماثلة في الطول والوزن تكون إطـاراً مربعـاً $ABCD$ بواسطة المفاصل الملساء عند A,B,C,D، فإذا وضع الإطار رأسياً مرتكزاً عند أسفل نقطة منه (C) وحفظ الشكل من الإنطباق بواسطة قضيب خفيف يـصل النقطتين A,C . أوجد الضغط في القضيب AC وردود الأفعال عند المفاصل .

الحـل:



نتصور أن الإطار المربع قد تم قطعة إلى نصفين متماثلين بقطاع يمر بالمفصلين A,C .

نفرض أن طول كل قضيب هو 2ℓ ووزنهW .

نكتفي بدراسة القضيبين AB,BC لأن الجسم متماثل بالنسبة للمستقيم AC .

يلاحظ أن الضغط في القضيب يكون في الإتجاه المبين عكس الشد في الخيط .

الضغط في القضيب الشد في الخيط

من إتزان القضيب AB يتضح أن :

$R_{By} = W - P/2$ حيث الضغط P قُسّم إلى نصفين أحدهما يخص القضيب AB على حده والأخر يخص القضيب AD على حده وبذلك فإن: $P = 2(W + R_{By})$

بأخذ العزوم للقضيب AB حول A نحصل على الآتي:

$$R_{By} \times 2\ell \sin 45 + R_{BX} \times 2\ell \cos 45 - W \times \ell \sin 45 = 0$$

$$\therefore \quad R_{BX} + R_{By} = \frac{W}{2} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

وبأخذ العزوم للقضيب BC حول C :

$$R_{BX} \times 2\ell \cos 45 - R_{By} \times 2\ell \sin 45 - W \times \ell \sin 45 = 0$$

$$\therefore \quad R_{By} - R_{BY} = \frac{W}{2} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

من (1) , (2) ينتج أن:

$$R_{BX} = \frac{W}{2}, \; R_{By} = 0$$

ولما كان : $p = 2\ (W + R_{By})$

فبالتعويض عن R_{By} فإن : $\boxed{P = 2W}$

وهو الضغط في القضيب الأوسط AC

ومن هذا يتضح أن ردود الأفعال عند المفاصل الأربعة A,B,C,D كلها أفقية وكل منها يساوي $\frac{W}{2}$ ، وذلك من التماثل حيث $R_{AX} = R_{BX} = \frac{W}{2}$, $R_{CX} = R_{BX} = \frac{W}{2}$

وبالنسبة للنصف الآخر من الشكل : $R_{DX} = \frac{W}{2}$, $R_{Dy} = 0$

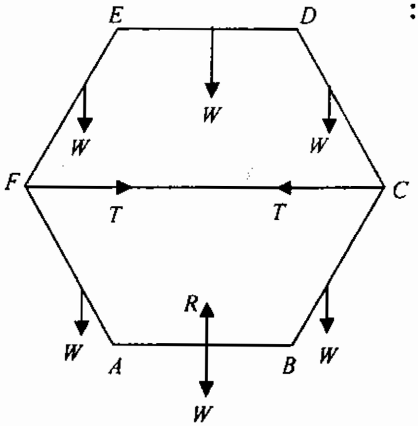
مثال(٣): يتكون المسدس المنتظم $A\ B\ C\ D\ E\ F$ من ستة قضبان متساوية متصلة مع بعضها إتصالاً مفصلياً أملساً .وضع الشكل في مستوى رأسي بحيث يلامس AB منضدة أفقية ويصل خيط خفيف بين C,F لحفظ شكل المسدس . أوجد الشد في الخيط، ورد الفعل عند المفصل E

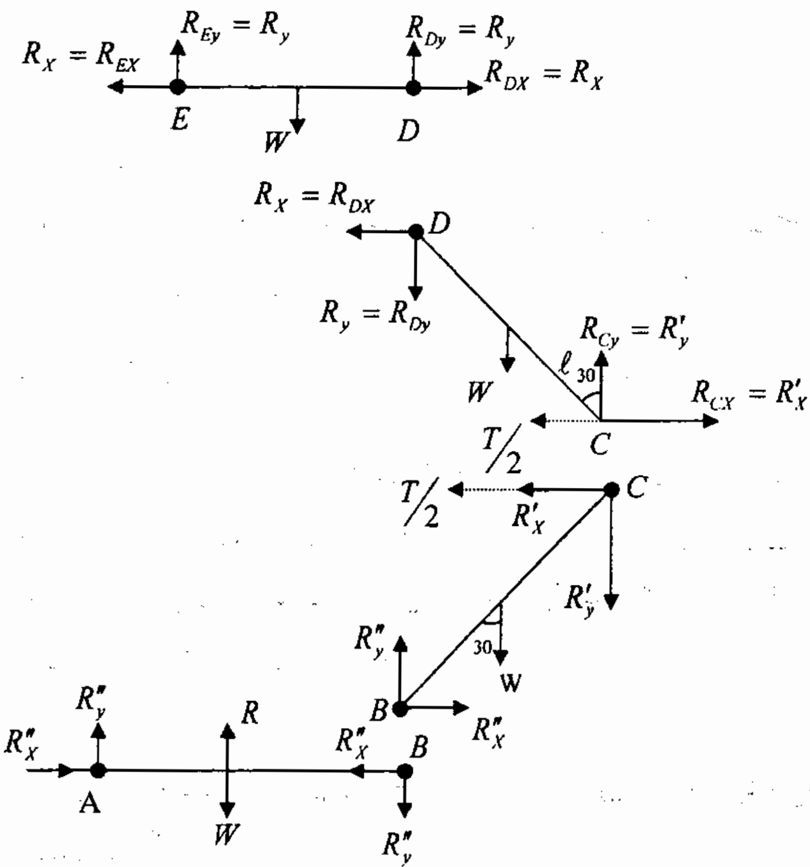
الحــل:

نفرض أن وزن كل قضيب W وطوله 2ℓ وأن رد فعل المنضدة هو R فمن إتزان المجموعة ككل نجد أن :

$\therefore\ R = 6W$ ______(1)

ندرس كل قضيب على حده :





من إتزان DE :

$$R_{Dy} = R_{Ey} = R_y$$

$$2R_y = W$$

$$\therefore \; R_y = \frac{W}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(2)$$

من إتزان DC :

$$R'_y = W + R_y = W + \frac{W}{2} = \frac{3W}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(3)$$

$$R'_x = R_x + \frac{T}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(4)$$

وبأخذ العزوم حول C نحصل على الأتي :

$$W + \ell \sin 30 + R_y \times 2\ell \sin 30 + R_x \times 2\ell \cos 30 = 0$$

$$\therefore \; \frac{W}{2} + R_y + \sqrt{3}\, R_x = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(5)$$

بالتعويض من (2) في (5):

$$R'_x = \frac{-W}{\sqrt{3}}$$

وبالتعويض في (4)

$$R'_x = \frac{-W}{\sqrt{3}} + \frac{T}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(6)$$

من إتزان CB :

$$\therefore \; R''_y = R'_y + W = \frac{3W}{2} + W = \frac{5W}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(7)$$

$$R''_x = R'_y + \frac{T}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(8)$$

وبأخذ العزوم حول C نحصل على :

$$R''_x \times 2\ell \cos 30 + W \times \ell \sin 30 - R''_y \times 2\,\ell \sin 30 = 0$$

$$\therefore \; \sqrt{3}\, R''_x + \frac{W}{2} - R''_y = 0$$

وبالتعويض عن R''_y من (7) :

$$\therefore\ R''_y = \frac{2W}{\sqrt{3}} \qquad \_\_\_\_(9)$$

وبالتعويض من (9)، (6) في (8) نحصل على الشد T بالصورة : $T = \sqrt{3}\ W$

وبالتعويض في (6) مرة أخرى:

$$\therefore\ R'_x = \frac{W\sqrt{3}}{6} \qquad \_\_\_\_(10)$$

ويمكن تخليص ردود الأفعال التي حصلنا عليها كما يلي :

$$R_x = \frac{-W}{\sqrt{3}}, R'_x = \frac{W\sqrt{3}}{6} \quad , R''_x = \frac{2W}{\sqrt{3}}$$

$$R_y = \frac{W}{2},\ R'_y = \frac{3W}{2},\ R''_y = \frac{5W}{2}$$

بالإضافة طبعاً إلى الشد في الخيط وهو

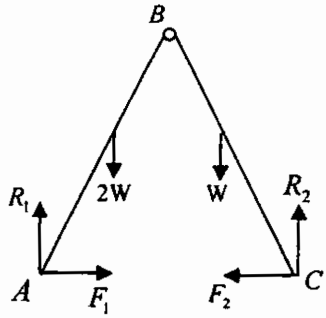
$$T = W\sqrt{3}$$

ويكون رد الفعل عند المفصل E هو :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_{xy}^2} = \sqrt{\frac{W^2}{3} + \frac{W^2}{4}} = W\sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{W}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): قضبان منتظمان AB,BC متساويان في الطول ومتصلان اتصالا مفصليا أملسا عند B . وضع القضيبان في مستوى رأسي بحيث يرتكز الطرفان A,C على مستوى أفقي خشن، فإذا كان وزن AB يساوي ضعف وزن BC فأثبت أنه لا يمكن أن يكون الإحتكاك نهائياً عند الطرفين A,C في وقت واحد. وإذا ما حدث عند أحدهما فيجب أن يكون عند الطرف C . ثم أوجد معامل الاحتكاك إذا علم أن أكبر قيمة للزاوية بين القضيبين في حالة الإتزان هي $\pi/2$.



الحــل:

نفرض أن قوة الاحتكاك : مثلا $F_1 = F_2 = F$

فمن إتزان القضيبين كمجموعة واحدة:

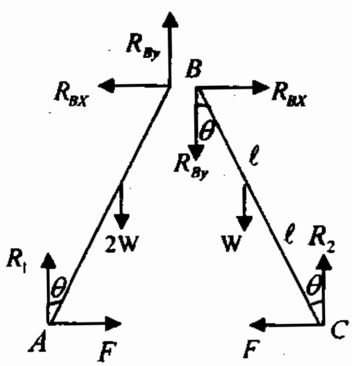
$$\therefore R_1 + R_2 = 3W \qquad \_\_\_\_(1)$$

وبدراسة اتزان كل قضيب على حده بعد أخذ مقطع يمر بالمفصل B.

فمن اتزان القضيب BC :

$$R_2 = R_{By} + W \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$R_{BX} = F \qquad \_\_\_\_(2)$$



وبأخذ العزوم حول C:

$$\therefore R_{By} \times 2\ell \sin\theta + W \times \ell \sin\theta - R_{BX} \times 2\ell \cos\theta = 0$$

$$\therefore 2R_{By} \sin\theta + W \sin\theta - 2R_{BX} \cos\theta = 0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

ومن اتزان القضيب AB :

$$R_1 + R_{BY} = 2W \qquad \_\_\_(4)$$

وبأخذ العزوم حول A :

$$\therefore R_{By} \times 2\ell \sin\theta + R_{BX} \times 2\ell \cos\theta - 2W \times \ell \sin\theta = 0$$

$$\therefore 2R_{By} \sin\theta + 2R_{BX} \cos\theta - 2W \sin\theta = 0 \qquad \_\_\_\_(5)$$

فمن (5) ، (3) بالجمع نحصل على :

$$4R_{By} \sin\theta - W \sin\theta = 0 \quad \therefore R_{By} = \frac{W}{4} \qquad \_\_\_(6)$$

وبالتعويض في (4) :

$$\therefore R_1 = 2W - \frac{W}{4} = \frac{7}{4} W$$

وبالتعويض في (1) : $\therefore R_2 = \frac{W}{4} + W = \frac{5}{4}W$

ومن (3) نجد أن :

$$2R_{BX}\cos\theta = (2R_{By} + W)\sin\theta$$

$$\therefore R_{BX} = (R_{By} + \frac{W}{2})\tan\theta = (\frac{W}{4} + \frac{W}{2})\tan\theta = \frac{3}{4}W\tan\theta = F$$

ومن هذا نرى أن الاحتكاك النهائي عند A هو :

$$F_A = \mu R_1 = \frac{7}{4}\mu W$$

وأن الاحتكاك النهائي عند C هو : $F_c = \mu R_2 = \frac{5}{4}\mu W$

ويتضح من هذا أن $F_c < F_A$ أي أن الاحتكاك النهائي عند C أقل منه عند A وهذا يعني أن الطرف C ينزلق قبل الطرف A أي أن الاحتكاك النهائي يكون عند C قبل A . وهو المطلوب أولا .

ويتضح من العلاقة $F = \frac{3}{4}W\tan\theta$ أن الاحتكاك F يزيد كلما إزدادت $\tan\theta$ أي كلما زادت θ. وتصل F إلى الاحتكاك النهائي μR_2 عندما تكون الزاوية θ مساوية لنهايتها العظمى $(\theta = 45^\circ)$ وذلك لأن أكبر زاوية يتزن معها القضيبين هي 90°. وعليه فإن :

(7)____ $F_c = \frac{3}{4}W\tan 45 = \frac{3}{4}W$

وأيضاً فإن :

(8)____ $F_c = \mu R_2 = \frac{5}{4}\mu W$

فبمساواة (8) ، (7) نجد أن : $\mu = \frac{3}{5}$

وهو المطلوب ثانياً .

ثانياً : إتزان الشبكيات (الجمالونات)

تتكون الشبكية من مجموعة من القضبان :

(١) تقع كلها في مستوى واحد .

(٢) تتصل مع بعضها عند نهاياتها بمفاصل ملساء .

(٣) يكون التحميل عند النهايات فقط أي عند نقط الاتصال .

(٤) تهمل أوزان القضبان المكونة للشبكية غالباً .

ولدراسة إتزان الشبكيات : نستخدم طريقتين :

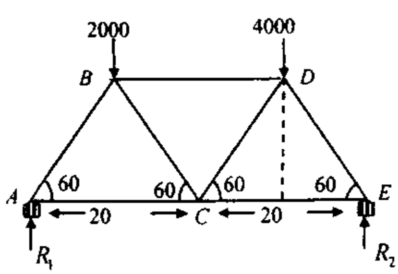
(١)طريقة المفاصل: وفيها ندرس إتزان أي مفصلة (نبدأ بالتي عندها أقل عدد من القوى المجهولة) في الشبكية ثم نستمر من مفصلة لأخرى حتى نعين كل القوى المجهولة.

(٢)طريقة المقاطع: وفيها نعمل مقطعاً خلال الشبكية يحتوى الأجزاء التي فيها القوى غير معلومة . وندرس إتزان هذا المقطع ومن ذلك يمكن تعيين القوى المجهولة .

ملحوظة : يمكن استخدام إحدى الطريقتين السابقتين أو كلاهما معا في حل المسائل .

كما سنرى في الأمثلة الآتية :

مثال(١): في الشبكية المثلثية البسيطة المبينة بالشكل عين القوى وردود الأفعال في كل جزء من الشبكية .



الحل : نستخدم طريقة المفاصل .

ندرس إتزان الشكل ككل :

بأخذ العزوم حول A :

$$\therefore R_2\times 40-4000\times 30-2000\times 10=0$$

$$\therefore R_2=3500$$

وبأخذ العزوم حول E :

$$\therefore -R_2 \times 40 + 2000 \times 30 + 4000 \times 10 = 0$$

$$\therefore R_1 = 2500$$

<u>ندرس إتزان المفصلة A :</u>

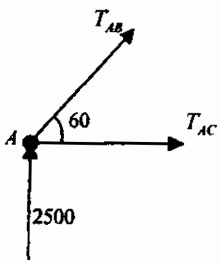
القوى الأفقية :

$$T_{AC} + T_{AB} \sin 60 = 0 \quad \_\_\_\_(1)$$

القوى الرأسية :

$$2500 + T_{AB} \sin 60 = 0 \quad \_\_\_\_(2)$$

ومن (2) :

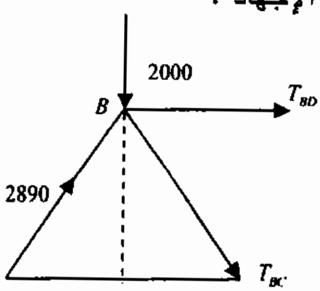


$$\therefore \; T_{AB} = -2890$$

ومعنى إشارة – أن القوة T_{AB} تكون عكس الإتجاه المفروض أي أنها تكون قوة ضغط (تضغط على المفصلة) وليست شداً .

وبالتعويض في (1) نجد أن $T_{AC} = 1450$ وهي قوة شد كما هي مفروضة .

<u>ملحوظة:</u> تسمى قوة الشد أو الضغط في القضبان عادة بقوة الإجهاد .



<u>ندرس إتزان المفصلة B :</u>

القوى الأفقية:

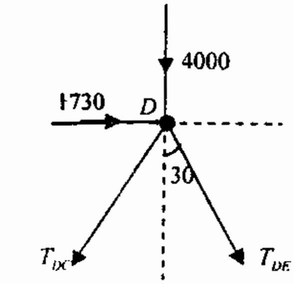
$$T_{BD} + T_{BC} \cos 60 + 2890 \cos 60 = 0 \quad \_\_\_(3)$$

القوى الرأسية :

$$-2000 - T_{BC} \sin 60 + 2890 \sin 60 = 0 \quad \_\_\_(4)$$

من (4): $\therefore T_{BD} = 577$ (وهي قوة شد كما هو مفروض)

وبالتعويض في(3): $\therefore T_{BD} = -1730$ (وهي قوة ضغط نظراً للإشارة –)



<u>ندرس إتزان المفصلة D :</u>

القوى الأفقية :

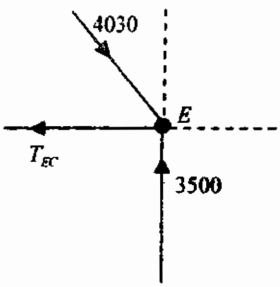
$$1730 + T_{DE}\cos 60 - T_{DC}\cos 60 = 0 \qquad \_\_\_\_(5)$$

القوى الرأسية :

$$-4000 - T_{DE}\sin 60 - T_{DC}\sin 60 = 0 \qquad \_\_\_\_(6)$$

من (6) , (5) : بحل المعادلتين نحصل على :

$T_{DE} = -4030$ (ضغط) و $T_{DC} = -577$ (ضغط)



<u>وأخيراً ندرس إتزان المفصلة E :</u>

حيث القوة T_{EC} هي القوة الوحيدة الباقية غير المعلومة

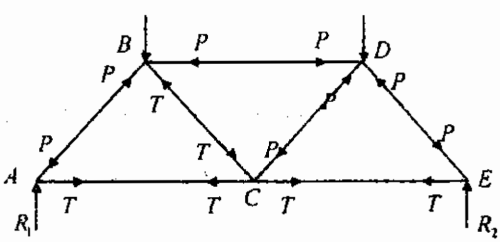
القوى الأفقية :

$$-T_{EC} + 4030\cos 60 = 0$$

$$\therefore T_{EC} = 2020$$

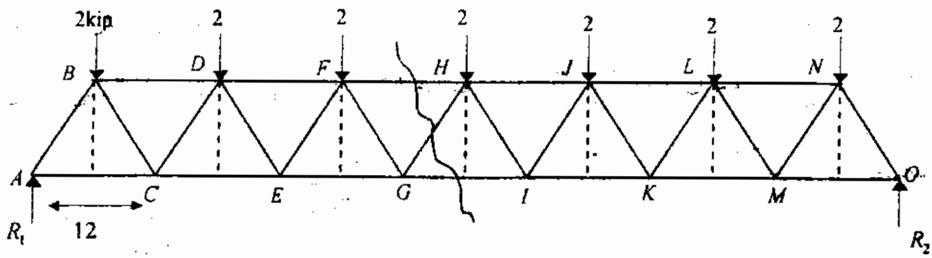
وهي قوة شد كما أفترضنا (حيث الإشارة الناتجة موجبة) .

وبذلك نكون قد عينا كل القوى (أو الإجهادات) سواء شدود أو ضغوط في القضبان المختلفة المكونة للشبكية، ونلخص نتائجنا في الشكل الآتي :



حيث T تمثل شد ، P تمثل ضغط

<u>مثال (٢) :</u> في الشبكية المبينة والمكونة من مثلثات متساوية الأضلاع طول كل ضلع 12 قدماً، عين القوى(الإجهاد) في القضبان: IK , HG , GI , FH



<u>الحـــل:</u> نوجد أولاً R_2 , R_1 :

بأخذ العزوم حول O :

$$\therefore -R_1 \times 84 + 2 \times (78 + 66 + \ldots\ldots) = 0$$

$$\therefore R_1 = 7$$

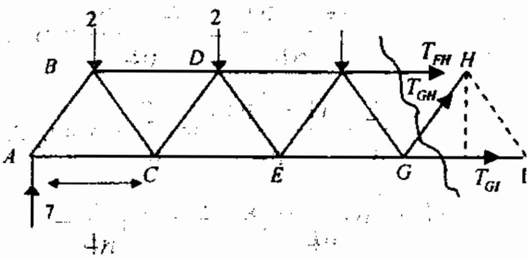
وبالمثل بأخذ العزوم حول A : $\therefore R_2 = 7$

نبدأ بالحل بإستخدام طريقة المقاطع :

فنأخذ مقطعاً يمر بأكبر عدد من القضبان المجهول القوى فيها .

وليكن المقطع الذي يمر بالقضبان $GI\ ,\ HG\ ,\ FH$

وندرس الجزء الذي على يمين أو يسار المقطع .



ونفرض القوى في القضبان قوى شد

فإذا ظهرت إشارة − تكون

القوى ضغط .

نأخذ الجزء على يسار المقطع :

وبأخذ العزوم حول G :

$$\therefore -T_{FH} \times 12\sin 60 + 2 \times (6 + 18 + 30) - 7 \times 36 = 0$$

$\therefore T_{FH} = -13.9$ (ضغط)

وبأخذ العزوم حول H :

$$\therefore T_{GI} \times 12\sin 60 + 2 \times (12 + 24 + 36) - 7 \times 42 = 0$$

$\therefore T_{GI} = 14.4$ (شد)

ومن إتزان القوى الرأسية :

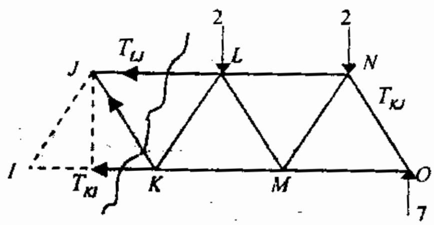
$\therefore -2-2-2+7+T_{GH}\cos 30=0$

$\therefore T_{GH}=-1.15$ (ضغط)

ولإيجاد القوى في القضيب IK :

نأخذ المقطع المبين بالشكل وهو يمر بالقضيب IK

وبأخذ العزوم حول J :



$\therefore -T_{KI}\times 12\sin 60-2\times(12+24)+7\times 30=0$

$\therefore T_{KI}=13.3$ (شد)

وبذلك نكون قد أوجدنا الإجهاد في القضبانِ المبينة مقداراً وإتجاهاً وهي :ـ

$T_{FH}=13.9$ (ضغط) ، $T_{GI}=14.4$ (شد)

$T_{HG}=1.15$ (ضغط) ، $T_{KI}=13.3$ (شد)

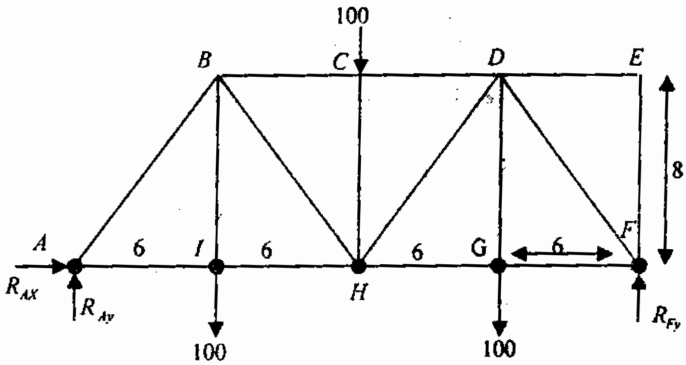
وهو المطلوب.

مثال(٣): الشبكية المستوية المبينة بالرسم محملة بأثقال كل منها 100 باوند لأسفل عند المفصلات I,C,G . أوجد ردود الأفعال عند A,F وكذلك الإجهادات المـؤثرة في القضبان BI,CH,DG,GH

الحـل: من دراسة الإتزان العام للشبكية ككل :

$R_{Ay}=0$

$R_{Ay}+R_{Fy}=300$



وبأخذ العزوم حول A :

$$\therefore R_{Fy}\times 24-100\times 8-100\times 12-100\times 6=0$$

$$\therefore R_{Fy}=150$$

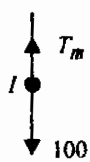
وبأخذ العزوم حول F :

$$\therefore -R_{Ay}\times 24+100\times 18+100\times 12+100\times 6=0$$

$$\therefore R_{Ay}=150$$

<u>ولإيجاد القوى في القضبان</u> : نستخدم طريقتي المفاصل والمقاطع معاً :

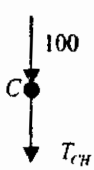
من إتزان المفصلة I : القوى الرأسية :



$$T_{IB}-100=0$$

$$\therefore T_{IB}=100 \quad (\text{شد})$$

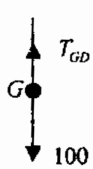
من إتزان المفصلة C : القوى الرأسية :



$$-T_{CH}-100=0$$

$$\therefore T_{CH}=-100 \quad (\text{ضغط})$$

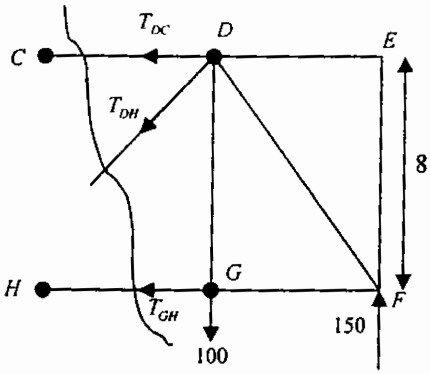
من إتزان المفصلة G : القوى الرأسية :



$$T_{GD}-100=0$$

$$\therefore T_{GD}=100 \quad (\text{شد})$$

و لإيجاد الإجهاد في القضيب GM: نأخذ مقطعاً يمر بالقضيب المذكور كما بالشكل:



فبأخذ العزوم حول D :

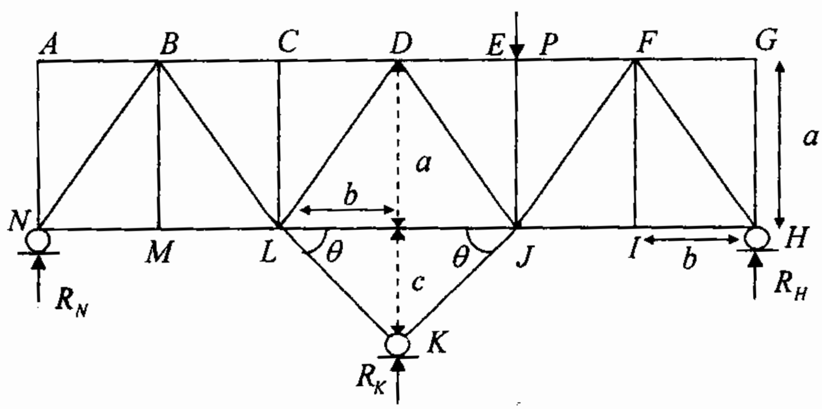
$$\therefore -T_{GH} \times 8 + 150 \times 6 = 0$$

$$\therefore T_{GH} = 112.5 \quad (\text{شد})$$

وبذلك نكون قد أوجدنا الإجهاد في القضبان المطلوبة .

مثال(٤): في الشبكية المبينة (وتعرف بشبكية ويكريت) أحسب ردود الأفعال عند الحوامل N,K,H

ماذا تؤول إليه هذه الردود عندما a=2c .



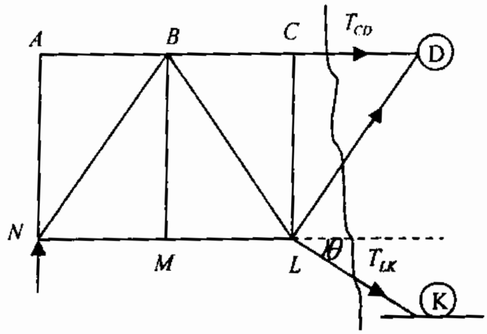
الحــل:

المطلوب حساب ردود الأفعال : R_N, R_K, R_H ، فمن إتزان الشبكية ككل نجد أن :

$$P = R_N + R_K + R_H \qquad \_\_\_\_(1)$$

ندرس الشبكية باستخدام طريقتي المقاطع والمفاصل كالتالي :

أولاً : نأخذ مقطعاً على يمين القضيب CL كالمبين :



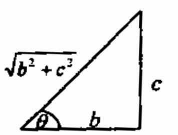
وبأخذ العزوم حول D (نقطة خارج المقطع)

$$-R_N \times 3b + T_{LK}\cos\theta \times (a+c) = 0$$

$$-R_N \times 3b + T_{LK}\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} \times (a+c) = 0$$

$$\therefore \quad -R_N + \frac{a+c}{3\sqrt{b^2+c^2}}T_{LK} = 0$$

$$\therefore \quad R_N = \frac{a+c}{3\sqrt{b^2+c^2}}T_{LK} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$



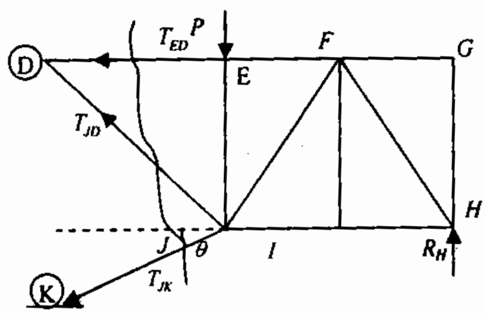
$\tan\theta = \frac{c}{b}$

$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$

$\sin\theta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$

ثانياً : نأخذ مقطعاً على يسار القضيب EJ كالمبين :

نأخذ العزوم حول D (نقطة خارج المقطع)



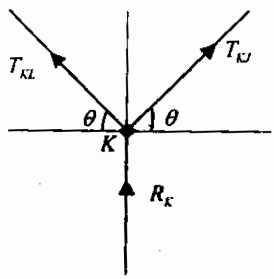
$$\therefore\ R_H \times 3b - P\times b - T_{JK}\cos\theta \times (a+c) = 0$$

$$\therefore\ R_H \times 3b - P\times b - T_{JK}\cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}(a+c) = 0$$

$$\therefore\ R_H = \frac{1}{3}p + \frac{(a+c)}{3\sqrt{b^2+c^2}}T_{JK} \qquad \_\_\_\_(3)$$

نلاحظ أن المعادلات (3) , (2) , (1) تحتوي على خمسة مجاهيل ولتحديدها تماماً يلزمنا معادلتين أخرتين :

ندرس إتزان المفصل K :



القوى الأفقية :

$$T_{KJ}\cos\theta - T_{KL}\cos\theta = 0$$

$$\therefore T_{KJ} = T_{KL} \qquad \_\_\_(4)$$

القوى الرأسية :

$$R_K + T_{KJ}\sin\theta + T_{KL}\sin\theta = 0$$

$$\therefore R_K + 2T_{KJ}\sin\theta = 0$$

$$\therefore R_K + 2T_{KJ}\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = 0$$

$$\therefore R_K = -\frac{2c}{\sqrt{b^2+c^2}}T_{KJ} \qquad \_\_\_\_(5)$$

وبالتعويض من (5) ,(4), (3) , (2) في (1) نحصل على الآتي :

$$P = \frac{1}{3}P + \frac{a+c}{3\sqrt{b^2+c^2}}T_{KJ} - \frac{2c}{\sqrt{b^2+c^2}}T_{KL} + \frac{a+c}{3\sqrt{b^2+c^2}}T_{KJ}$$

$$\therefore P = \frac{a-2c}{\sqrt{b^2+c^2}}T_{KJ} \qquad \therefore T_{KJ} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a-2c}P$$

وبالتعويض في (2) :

$$\therefore \quad R_N = \frac{1}{3}P\left(\frac{a+c}{a-2c}\right)$$

وبالتعويض في (3) :

$$\therefore \quad R_H = \frac{1}{3}P\left[1+\frac{a+c}{a-2c}\right]$$

وبالتعويض في (5) :

$$\therefore \quad R_K = -2P\left(\frac{c}{a-2c}\right)$$

وهي ردود الأفعال المطلوبة .

وفي الحالة الخاصة : عندما $a = 2c$ فإن ردود الأفعال السابقة تؤول كلها إلى ما لا نهاية . وتسمى هذه الحالة بالحالة الحرجة .

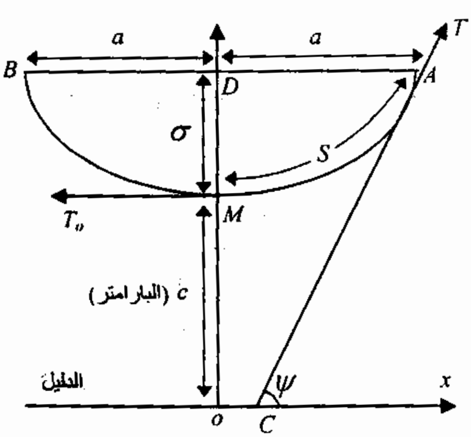
ثالثاً : اتزان الخيوط و السلاسل

يقال لخيط أنه ذو قابلية تامة للانثناء إذا كان هذا الخيط لا يبذل أية مقاومة عند محاولة ثنيه ، وفي هذه الحالة تكون القوى المؤثرة على الخيط عند أي مقطع عمودي على طوله هي قوة واحدة تعمل في اتجاه المماس للخيط عند هذا المقطع . ويمكن اعتبار السلسلة المكونة من حلقات صغيره جدا ومتماثلة وتامة الملاسة كخيط قابل للانثناء .

وكمثال للسلاسل أو الخيوط ذات القابلية التامة للانثناء منحنى السلسلة أو الكتينه (catenary) ويعرف كالتالي :

هو المنحنى الذي تتخذه سلسلة إذا علقت من نقطتين في خط أفقي واحد المسافة بينهما أصغر من طول السلسلة ، وتكون السلسلة متزنة تحت تأثير ثقلهما فقط .

تعريفات هامة:



تسمى أسفل نقطة (M) برأس السلسة

وتسمى المسافة AB بين نقطتي التعليق بالمقياس (span) وطوله 2α

ويسمى عمق M من الخط AB بسهم (sag) السلسلة $\sigma(\sigma = DM)$

وتسمى المسافة من رأس السلسلة حتى محور x (الذي يسمى بالدليل) بارامتر السلسلة (c) .

<u>لدراسة اتزان منحنى السلسلة :</u>

ليكن طول السلسلة = $2S$ والشد عند A هو T والشد الأفقي عند M هـو T_o وليكن w هو وزن وحدة الأطوال من السلسلة ، والزاوية التي يصنعها الشد T مع الأفقي هي ψ.

فباعتبار أن T_o = وزن طول من السلسلة قدرة c (البارامتر) فإن $T_o = wc$

بالتحليل في الاتجاه الأفقي :

$$T\cos\psi = T_o = wc \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$T\sin\psi = wS \qquad \_\_\_\_(2)$$

بالقسمة : $\tan\psi = \frac{S}{c}$ ومنها : $\boxed{S = c\tan\psi}$

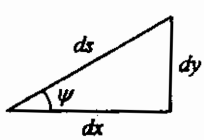
وتعرف هذه العلاقة بين S,ψ بالمعادلة الذاتية لمنحنى السلسلة .

<u>أمثلة محلولة على خواص منحنى السلسلة:</u>

<u>مثال(١):</u> أثبت أن المعادلة الكرتيزية لمنحنى السلسلة تكتب بالصورة :

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

<u>الحـل:</u> من المعادلة الذاتية للمنحنى



$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$S = c\tan\psi = c\frac{dy}{dx} = cy'$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = c\frac{d^2y}{dx^2} = c\frac{dy'}{dx}$$

ولكن :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = \sqrt{1 + y'2}$$

$$\therefore \sqrt{1 + y'^2} = c\frac{dy'}{dx} \qquad \rightarrow \qquad \therefore \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{c}$$

وبالتكامل :

$$\therefore \sinh^{-1} y' = \frac{x}{c} + const.$$

<u>ولإيجاد الثابت :</u> عند رأس الكتينة M : $x=0\ ,\ \psi=0\ \ \therefore y'=0$

$$\therefore \sinh^{-1} 0 = 0 + const. \quad \rightarrow \quad const. = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} \sinh 0 = 0 \\ \cosh 0 = 1 \end{array} \right.$$

$$\sinh^{-1} y' = \frac{x}{c} \quad \rightarrow \quad y' = \sinh\frac{x}{c}$$

وبالتكامل مرة ثانية :

$$y = c\cosh\frac{x}{c} + const.$$

وعند رأس الكتينة M : $x=0\ ,\ y=c$

$$\therefore c = c\cosh 0 + const. = c + const. \ \rightarrow \ const. = 0$$

$$\boxed{\therefore y = c\cosh\frac{x}{c}}$$

و هو المطلوب .

<u>مثال(٢):</u> أوجد العلاقات الآتية لمنحنى السلسلة (الكتينة):

(أ) العلاقة بين s,x بالصورة : $s = c\sinh\frac{x}{c}$

(ب) العلاقة بين s,y بالصورة : $y^2 = s^2 + c^2$

أو بالصورة : $y + s = ce^{\frac{x}{c}}$

(ت) العلاقة بين y,x,s بالصورة : $x = c\ln(\frac{y+s}{c})$

<u>الحل:</u>

<u>(أ) العلاقة بين s,x :</u>

$$s = c\tan\psi = c\frac{dy}{dx} = cy' = c\sinh\frac{x}{c}$$

وذلك لأن : $\frac{dy}{dx} = y' = c[\frac{1}{c}\sinh\frac{x}{c}] = \sinh\frac{x}{c} \leftarrow y = c\cosh\frac{x}{c}$

وبذلك تكون :

$$\boxed{s = c\sinh\frac{x}{c}}$$

(ب) العلاقة بين s,y :

حيث أن $y = c\sinh\frac{x}{c}$

$$\therefore y^2 = c^2\cosh^2\frac{x}{c} = c^2(1+\sinh^2\frac{x}{c})$$

$$= c^2 + c^2\sinh^2\frac{x}{c} = c^2 + s^2$$

حيث : $s = c\sinh\frac{x}{c}$

$$\therefore \boxed{y^2 = s^2 + c^2}$$

أيضا : حيث أن

$$y = c\cosh\frac{x}{c} \quad , \quad s = c\sinh\frac{x}{c}$$

فبالجمع :

$$e^x = \sinh x + \cosh x$$

$$2\cosh x = e^x + e^{-x}$$

$$2\sinh x = e^x - e^{-x}$$

$$y + s = c[\sinh\frac{x}{c} + \cosh\frac{x}{c}] = ce^{\frac{x}{c}}$$

$$\therefore \boxed{y + s = ce^{\frac{x}{c}}}$$

(ج) حيث أن $y = c\cosh\frac{x}{c}$ فإن : $x = c\cosh^{-1}\frac{y}{c}$

وحيث أن

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$\therefore s^2 = y^2 - c^2$$

$$\cosh^{-1}[\frac{y}{x}] = \ln[\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}] = \ln[\frac{y+\sqrt{s^2}}{c}] = \ln[\frac{y+s}{c}]$$

$$\boxed{x = c\ln(\frac{y+s}{c})}$$

ملاحظات:

١) العلاقة بين السهم σ والبارامتر c هي (من الشكل) : $y = \sigma + c$

٢) الشد عند أسفل نقطة M : $T_o = wc$ أي وزن جزء طوله c السلسلة .

٣) الشد عند نقطة A (T): من العلاقتين : $T\sin\psi = ws$, $T\cos\psi = wc$

بالتربيع والجمع:

$$T^2 = w^2(c^2+s^2) = w^2y^2 \qquad \therefore T = wy$$

أي وزن جزء طوله y من السلسلة (أي بعد النقطة A عن الدليل) .

مثال(٣) : أثبت الآتي لمنحنى السلسلة :

(١) البارامتر c يعطى بالعلاقة : $c = \dfrac{s^2-\sigma^2}{2\sigma}$

(٢) المقياس 2α يعطى بالعلاقة : $2\alpha = 2c\ln\left(\dfrac{y+s}{c}\right)$

الحل:

[١] حيث أن :

$$y^2 = s^2 + c^2 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$y = \sigma + c \to y^2 = (\sigma+c)^2 = \sigma^2 + 2\sigma c + c^2 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

بمقارنة (٢) و (١) :

$$s^2 = \sigma^2 + 2\sigma c$$

$$\therefore c = \frac{s^2-\sigma^2}{2\sigma}$$

[٢] حيث أن

$$x = c\cosh^{-1}\frac{y}{c} \leftarrow y = c\cosh\frac{x}{c}$$

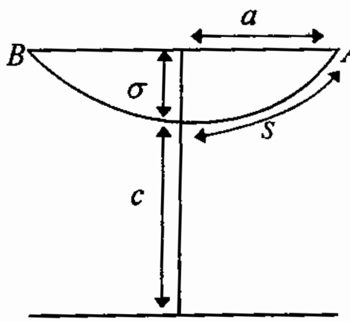
$$\therefore x = c\ln\left[\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}\right] = c\ln\frac{y+s}{c}$$

وحيث أن $x = 2\alpha$ فإن :

$$2\alpha = 2c\ln\frac{y+s}{c}$$

مثال(٤): أوجد المعادلات التقريبية لمنحنى الكتينة بالصورة :

$$y = c + \frac{x^2}{2c} \ , \ \sigma = \frac{a^2}{2c} \ , \ s^2 = \sigma^2 + a^2$$



الحـــل:

نحصل على تلك المعادلات التقريبية إذا كانت c كبيرة جدا بالنسبة إلى x (كما في حالة أسلاك التليفون والتلغراف)

$$y = c\cosh\frac{x}{c} = \frac{c}{2}[e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}]$$

$$= \frac{c}{2}[\{1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \ldots\} + \{1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \ldots\}] = \frac{c}{2}[2 + \frac{x^2}{c^2} + \ldots] = c + \frac{x^2}{c^2}$$

$$\therefore y = c + \frac{x^2}{2c} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

وذلك بإهمال $\frac{x^4}{c^3}$ والقوى الأعلى حيث c كبيره جدا بالنسبة إلى x .

تصلح المعادلة (١) فقط إذا كانت c كبيرة جداً ، σ صغيره جداً .

وبالتعويض في (١) عن إحداثيات نقطة تعليق الكتينة : $x = a \ , \ y = c + \sigma$

$$\therefore c + \sigma = c + \frac{a^2}{2c} \ \rightarrow \ \sigma = \frac{a^2}{2c} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

أيضا حيث أن:

$$s^2 = y^2 - c^2 = (c^2 + 2\sigma c + \sigma^2) - c^2 = \sigma^2 + 2\sigma c$$

ولكن : $a^2 = 2\sigma c$

$$\therefore s^2 = \sigma^2 + a^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

المعادلات (3)،(2)،(1) هي المعادلات التقريبية لمنحنى السلسة، وهو المطلوب .

مثال(٥): أوجد المعادلتان البارامتريتان لمنحنى السلسلة بالصورة :

$$x = c\ln(\sec\psi + \tan\psi) \qquad , \qquad y = c\sec\psi$$

حيث ψ هو البارامتر .

الحل : حيث أن :

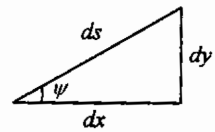
$$s = c\tan\psi = c\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{d\psi} = \sin\psi \cdot c\sec^2\psi = c\sec\psi\tan\psi$$

$$\therefore dy = c\sec\psi\tan\psi\, d\psi \;\rightarrow\; y = c\sec\psi + const.$$

$$s = c\tan\psi$$

$$\frac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$$



وعند $\psi = 0$ فإن: $y = c \leftarrow const. = 0 \leftarrow \boxed{y = c\sec\psi} \therefore$

أيضا :

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{d\psi} = \cos\psi \cdot c\sec^2\psi = c\sec\psi$$

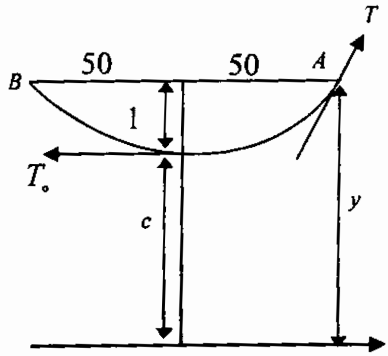
$$\therefore dx = c\sec\psi\, d\psi \rightarrow x = c\int\sec\psi\, d\psi = c\ln(\sec\psi + \tan\psi) + const.$$

وعند $\psi = 0$ فإن: $x = 0 \leftarrow const. = 0 \leftarrow$ $\boxed{x = c\ln(\sec\psi + \tan\psi)}$

وهو المطلوب .

أمثلة عامة على منحنى السلسلة

مثال(١):



أثبت أن أكبر شد في سلك يزن 0.150 باوند لكل ياردة ومعلق بين نقطتين في خط أفقي المسافة بينهما 100 قدم وعمق أسفل نقطة قدم واحد هو حوالي 62.5 وزن باوند .

الحل :

من المعادلات التقريبية لمنحنى السلسلة :

$$y = c + \frac{x^2}{2c}$$

أكبر قيمة للشد تكون عند A

حيث: $x = 0\ ,\ y = c + 1$

$$\therefore c + 1 = c + \frac{(50)^2}{2c} \qquad \therefore 1 = \frac{2500}{2c} \qquad \therefore c = 1250$$

$$\therefore y_A = 1250 + 1 = 1251$$

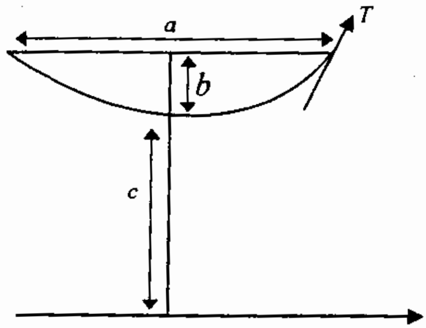
وزن وحدة الأطوال :

$$w = \frac{0.15}{3} = 0.05\, p/ft$$

$$\therefore T_A = w y_A = 0.05 \times 1251 = 62.55\, p.wt$$

مثال(٢) : سلك تلغراف معلق بين عمودين المسافة بينهما α قدم وعمق أسفل نقطة هو b ، أثبت أن الشد عند طرف السلك يبلغ $(\frac{a^2}{8b} + b)w$ حيث w هو وزن وحدة الأطوال من السلك .

الحل :



$$y = c + b$$

$$x = \frac{1}{2}\alpha$$

من المعادلة التقريبية لمنحنى السلسة :

$$y = c + \frac{x^2}{2c} = c + \frac{a^2}{8c}$$

$$\therefore c + b = c + \frac{a^2}{8c} \qquad \therefore c = \frac{a^2}{8b}$$

$$\therefore y = c + b = \frac{a^2}{8b} + b$$

وإذا كانت w هي وزن وحدة الأطوال فإن :

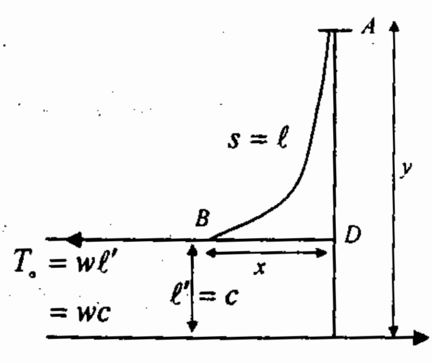
$$T = wy = (\frac{a^2}{8b} + b)\, w$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): سلك منتظم طوله ℓ معلق من نقطة ثابتة A والطرف الآخر من السلك B تؤثر عليه قوة أفقيه مساوية لوزن جزء من السلسلة قدرة ℓ' .

أثبت أن البعدين الأفقي والرأسي بين A,B هما :

$$\ell' \sinh^{-1}\frac{\ell}{\ell'} \quad , \quad \sqrt{\ell^2 + \ell'^2} - \ell'$$



الحل :

البعد الرأسي بين A,B = $y - \ell' = y - c$

البعد الأفقي بين A,B = x

$$y^2 = s^2 + c^2$$

$$= \ell^2 + \ell'^2$$

حيث $s=\ell$, $c=\ell'$ $\leftarrow$ $\therefore y=\sqrt{\ell^2+\ell'^2}$

∴ البعد الرأسي : $AD=y-\ell'=\sqrt{\ell^2+\ell'^2}-\ell'$

أيضاً : $s=c\sinh\frac{x}{c}$ $\leftarrow$ $\therefore \ell=\ell'\sinh\frac{x}{\ell'}$

$$\therefore \frac{\ell}{\ell'}=\sinh\frac{x}{\ell'}$$

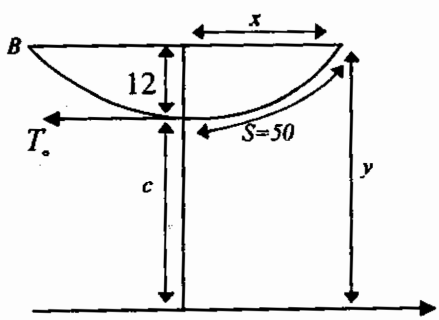
$$\therefore \frac{x}{\ell'}=\sinh^{-1}\frac{\ell}{\ell'}$$

$$\therefore x=\ell'\sin^{-1}\frac{\ell}{\ell'} \qquad \therefore x=\ell'\sin h^{-1}\frac{\ell}{\ell'}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٤) :</u> خيط ثقيل يزن $5lb/ft$ وطوله $100\,ft$ فما هو البعد بين نقطتي التعليق (في نفس المستوى) بحيث لا يزيد السهم عن $12ft$ وما هو أقل شد (عند أسفل نقطة) في هذه الحالة .

<u>الحل:</u>



$$y=c+12 \qquad \text{\_\_\_\_\_(I)}$$

$$\therefore y^2=(c+12)^2$$

$$=12^2+2\times 12c+c^2 \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

أيضا :

$$y^2=s^2+c^2=(50)^2+c^2 \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

بمقارنة $(1),(2)$ نجد أن :

$$12^2+2\times 12c+c^2=50^2+c^2$$

ومنها: $c=98$

بالتعويض في (I) : $y=98+12=110$

أيضاً :

$$x = c\log(\frac{y+s}{c}) = 98\log(\frac{110+50}{98})$$
$$= 98\log(1.6) = 98\times 0.2 = 19.6 \cong 20$$

.: المسافة بين نقطتي التعليق $2x = 2\times 20 = 40$

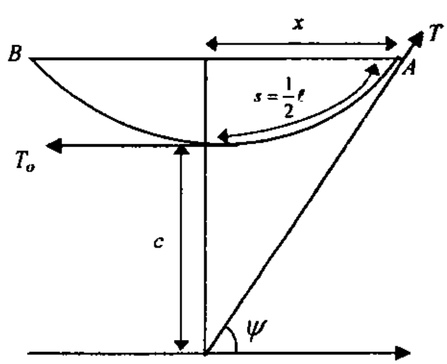
وزن وحدة الأطوال $w = 5lb/ft$

أقل قيمة للشد هو عند أسفل نقطة : $T_\circ = wc = 5\times 98 = 490$

مثال(٥): سلسلة منتظمة طولها ℓ معلقة من نقطتين A,B في نفس الخط الأفقـــي، إذا كان الشد عند نقطة التعليق $n =$ (الشد عند أسفل نقطة) .

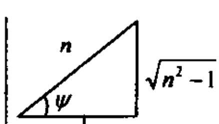
أثبت أن المسافة AB تساوي $\frac{\ell}{\sqrt{n^2-1}}\log[n+\sqrt{n^2-1}]$

الحل: الشد عند أسفل نقطة :



$$T_o = T\cos\psi = nT_o\cos\psi$$
$$\therefore \cos\psi = \frac{1}{n}$$

أيضاً : $s = c\tan\psi$



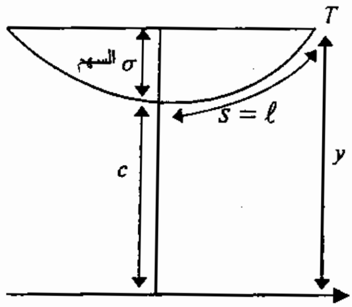
$$\frac{1}{2}\ell = c\cdot\sqrt{n^2-1} \qquad \therefore c = \frac{\ell}{2\sqrt{n^2-1}}$$

$$\therefore x = c\log(\tan\psi + \sec\psi) = \frac{\ell}{2\sqrt{n^2-1}}\log(\sqrt{n^2-1}+n)$$

$$\therefore AB = 2x = \frac{\ell}{\sqrt{n^2-1}}\log(n+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}})$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٦):</u> علق خيط منتظم من نقطتين في مستوى أفقي واحد وكان سهم الكتينة $=\frac{1}{n}$ ، x طول الخيط . أثبت أن نسبة الشد عند نهاية الخيط إلى وزن الخيط $=\frac{n^2+4}{8n}$



<u>الحل:</u> السهم :

$$\sigma = y-c=\frac{1}{n}\times 2\ell$$

حيث $2\ell=$ طول الخيط

$$\therefore y=c+\frac{2\ell}{n}$$

ولكن :

$$y^2=c^2+s^2=c^2+\ell^2$$

$$\therefore (c+\frac{2\ell}{n})^2=c^2+\ell^2 \;\therefore c^2+\frac{4\ell^2}{n^2}+\frac{4c\ell}{n}=c^2+\ell^2$$

$$\therefore \frac{4c\ell}{n}=\ell^2-\frac{4\ell^2}{n^2}$$

$$\therefore c=\frac{n\ell}{4}-\frac{\ell}{n}$$

$$\therefore c=\frac{n^2\ell-4\ell}{4n}=\frac{\ell(n^2-4)}{4n}$$

$$\therefore y=c+\frac{2\ell}{n}=\frac{\ell(n^2-4)}{4n}+\frac{2\ell}{n}$$

$$=\frac{\ell}{4n}[n^2-4+8]=\frac{\ell}{4n}(n^2+4)$$

الشد عند نهاية الخيط :

$$\therefore T=wy=\frac{w\ell}{4n}(n^2+4)$$

ويكون وزن الخيط W هو:

$$W=2\,w\ell$$

حيث w وزن وحدة الأطوال من الخيط

∴ النسبة المطلوبة :

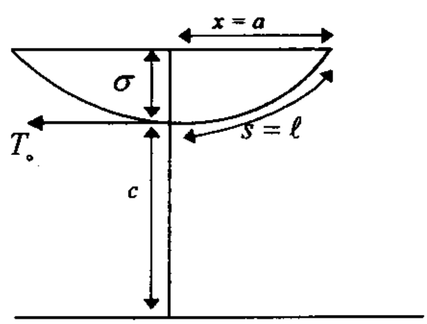
$$\frac{T}{W}=\frac{w\ell(n^2+4)}{2w\ell}=\frac{n^2+4}{8n}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٧):</u> سلسلة طولها 2ℓ مثبت طرفيها في نقطتين في المستوى الأفقي على بعد $2a$. إذا كانت ℓ أكبر قليلاً من α فاثبت أن الشد عند أسفل نقطة من السلسلة يساوي تقريبا وزن جزء من السلسلة طوله $\sqrt{\dfrac{\alpha^3}{6(\ell-\alpha)}}$ وأن انخفاض أسفل نقطة من السلسة عن طرفها أي السهم هو : $\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{6\alpha(\ell-\alpha)}$

<u>الحل:</u>

حيث أن ℓ أكبر من α بمقدار صغير جدا فإن c تكون كبيرة جداً وتكون المعادلة التقريبية للسلسلة :



$$s=c\sinh\frac{x}{c}=c[\frac{x}{c}+\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{c^3}+\cdots]\ =x+\frac{x^3}{6c^2}$$

$$\therefore \ell=\alpha+\frac{\alpha^3}{6c^2}$$

$$\therefore\ \ell-\alpha=\frac{\alpha^3}{6c^2}\qquad \therefore c^2\,\frac{\alpha^3}{6(\ell-\alpha)}\qquad \therefore c=\sqrt{\frac{\alpha^3}{6(\ell-\alpha)}}$$

ويكون الشد عند أسفل نقطة

$$T_o=wc=w\sqrt{\frac{\alpha^3}{6(\ell-\alpha)}}$$

ولإيجاد السهم : $\therefore \sigma = y - c$ $\qquad \sigma = c + \sigma$

ولكن : $y = c\cosh\frac{x}{c} = c[1 + \frac{x^2}{2c^2} + ...] = c + \frac{x^2}{2c}$

(المعادلة التقريبية لسلسلة)

$$\therefore y = c + \frac{\alpha^2}{2c} \qquad \therefore y - c = \frac{\alpha^2}{2c} = \sigma$$

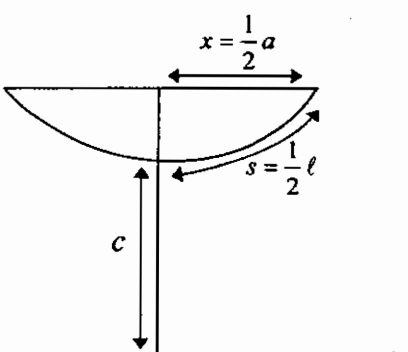
$$\therefore \sigma = \frac{\alpha^2}{2}\sqrt{\frac{6(\ell - \alpha)}{\alpha^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{6\alpha(\ell - \alpha)}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٨) :</u> علق سلك تلغراف طوله ℓ بين عمودين على بعد α من بعضهما بحث كان الشد في نهايته أقل ما يمكن فأثبت أن : $\ell = \frac{\alpha}{\lambda}\sinh\lambda$

حيث λ هي جذر المعادلة $\lambda\tanh\lambda = 1$

<u>الحل :</u>



$$s = c\sinh\frac{x}{c}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\ell = c\sinh\frac{\alpha}{2c}$$

$$\therefore \ell = 2c\sinh\frac{\alpha}{2c}$$

وبوضع $\frac{\alpha}{2c} = \lambda$ فإن : $\ell = \frac{\alpha}{\lambda}\sinh\lambda$

الشد عند نهاية السلك هو : $T = wy$

$$y^2 = c^2 + s^2 \qquad \therefore y = \sqrt{c^2 + s^2} = \sqrt{c^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$

$$T = w\sqrt{c^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$

وهذا يكون أقل ما يمكن (نهاية صغرى) عندما :

$$\frac{dT}{dc}=0$$

$$\therefore \frac{d}{dc}\left[w(c^2+\frac{\ell^2}{4})^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$\therefore \frac{d}{dc}\left[w(c^2+c^2\sinh^2\frac{\alpha}{2c})^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$\therefore \frac{d}{dc}\left[c^2(1+\sinh^2\frac{\alpha}{2c})\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\therefore \frac{d}{dc}\left[c^2\cosh^2\frac{\alpha}{2c}\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\therefore \frac{d}{dc}\left[c\cosh\frac{\alpha}{2c}\right]=0$$

$$\therefore c\times\sinh\frac{\alpha}{2c}\times(\frac{-\alpha}{2c^2})+\cosh\frac{\alpha}{2c}\times 1=0$$

وبالقسمة على $\cosh\frac{\alpha}{2c}$:

$$\therefore \frac{\alpha}{2c}\tanh\frac{\alpha}{2c}=1$$

وبوضع $\lambda=\frac{\alpha}{2c}$ $\leftarrow$ $\therefore \lambda\tan\lambda=1$

وهو المطلوب.

مسـائـل على الباب الخامس

(١) سلمان منتظمان $AB\ ,BC$ متساويان في الطول وزنيهما W,W' $(W \rangle W')$ يتصلان إتصالاً مفصلياً أملساً عند B وذلك بمفصل أملس . إرتكز السلمان على أرض خشنة بحيث كانت $A\hat{B}C = 2\theta$. أثبت أن رد الفعل المحصل عند A يضع زاوية مع الرأسي أصغر من الزاوية التي يصنعها رد الفعل المحصل عند C مع الرأسي . وبفرض أن معاملي الإحتكاك عند C, A متساويان وكل منهما μ . أثبت أن الإنزلاق يتم عند C إذا زيدت $\hat{\theta}$ إلى $\hat{\phi}$ حيث $\mu(W + 3W') = (W + W')\tan\phi$

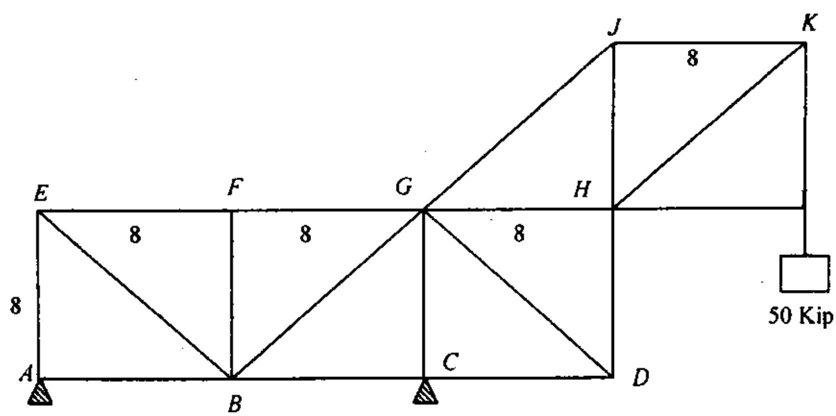
(٢) BC , AB قضيبان متساويان طولاً ووزناً ويتصلان عند B بمفصل أملس . وصل منتصفي القضيبين بخيط غير مرن بحيث تكون الزاوية $A\hat{B}C = 90°$ وعندما يكون الخيط مشدوداً . فإذا علقت المجموعة من نقطة A فأثبت أن AB يضع مع الرأسي زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ وأن الشد في الخيط = $\frac{3W}{\sqrt{5}}$ وأن رد فعل المفصل هو $\frac{W\sqrt{10}}{5}$ في إتجاه يصنع زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ مع الأفقي .

(٣) ستة قضبان متساوية منتظمة متصلة بمفاصل ملساء لتكون المسدس $ABCDEF$. علق الإطار من منتصف AB بحيث كان AB أفقياً وحفظ شكل المسدس بواسطة خيطين واصلين بين A , D وبين B , E أثبت أن مقدار الشد في كلا الخيطين هو $W\sqrt{3}$ حيث W هي وزن أي من القضبان وإذا أثر على القضيبين CD,EF إزدواجان متساويان مقداراً ومتضادان إتجاهاً قيمة عزم كل منهما G بحيث يتضاعف مقدار الشد في كلا الخيطين . فأحسب G ، وأوجد رد فعل المفصل عند F في الحالتين .

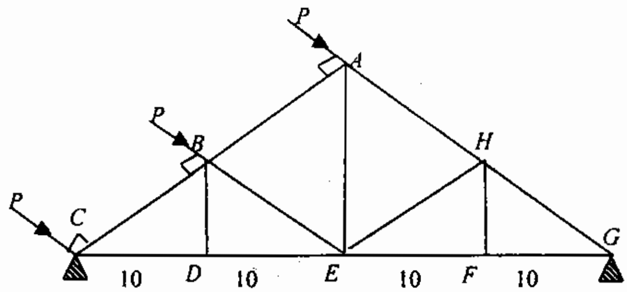
(٤) ثلاثة قضبان منتظمة ومتساوية في الطول ووزن كل منها W تتصل إتصالاً مفصلياً بحيث تكون مثلثاً متساوي الأضلاع _ إذا علق المثلث من منتصف أحد القضبان فأثبت أن رد الفعل عند المفصل الأسفل يساوي $\frac{\sqrt{3}}{6}W$ وأن رد الفعل عند كل من المفصلين الآخرين يساوي $\sqrt{\frac{13}{12}}\ W$.

(٥) BC , AB قضيبان منتظمان ومتساويان في الطول، ومتصلان بمفصل أملس عند B ويرتكز الطرف C على أرض خشنة بينما الطرف A يكون مرتفعاً عن المستوى، ويؤثر عليه قوة شد في مستوى القضيبين، فإذا كانت α, β زاويتا ميل القضيبين BA, BC على الأفقي على الترتيب، فأثبت أن أقل قيمة لمعامل الإحتكاك لحفظ الإتزان للمجموعة هي : $\frac{2}{\tan\beta - 3\tan\alpha}$.

(٦) في الشبكية المبينة بالرسم والتي تحمل وزناً مقداره 50 كليو باوند (Kip) عند I . أوجد القوى في القضبان GJ, DG, CD مستخدماً طريقتي المقاطع والمفاصل في آن واحد .



(٧) في الشبكية الموضحة بالرسم عين مقدار ونوع الإجهادات في القضبان BA, AE, EH, EF



(٨) حبل يزن $2lb/ft$ علق بين نقطتين البعد الأفقي بينهما $300ft$ والبعد الرأسي بينهما $20ft$، وكان انخفاض أسفل نقطة في الحبل عن المستوى المار بين نقطتي التعليق هو $30ft$. أوجد أكبر شد في الحبل (عند أعلى نقطة) .

(٩) سلك طوله $155ft$ علق بين نقطتين في مستوى أفقي واحد والمسافة بينهما $150ft$ أثبت أن أقل شد في السلك يبلغ 1.08 من وزن السلك كله .

(١٠) خيط ثقيل منتظم طوله 90 بوصه (inch) يتدلى على وتدين موضوعين عند ارتفاعين مختلفين بحيث كان طولي الجزئيين المتدليين رأسيا 30,33 بوصه على الترتيب . أثبت أن رأس منحنى السلسلة الذي يعمله الخيط يقسم الخيط كله نسبة 4:5 وأوجد المسافة الأفقية بين الوتدين .

(١١) طائرة من الورق (للأطفال) تطير على ارتفاع z ومربوطة بخيط طوله ℓ ووزن وحدة الأطوال منه w على شكل منحنى السلسلة رأسها على الأرض . أثبت أن ميل الخيط على الأفقي عند الطائرة هو $2\tan^{-1}\frac{z}{\ell}$ وأن الشد في الخيط عند الطائرة وعند الأرض هما على الترتيب : $w' = \frac{\ell^2 - z^2}{2z}$, $w\frac{\ell^2 + z^2}{2z}$.

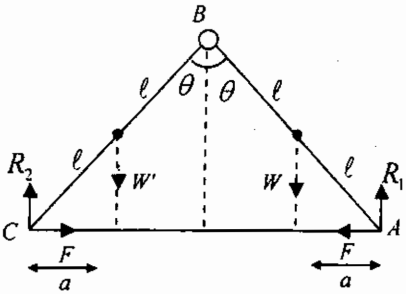
(١٢) ثبت الطرف A من السلسلة المنتظمة ABD حيث $w = 2p/ft.$ ثـــم مــرت السلسلة فوق وتد أملس عند B وترك الجزء DB متدليا رأســيا، فــإذا كانــت $AB = BD = 20\,ft$ فأوجد مركبة الشد الأفقية في أي نقطة من AB إذا كان :

(أ) منسوب نقطة B أعلى من منسوب نقطة A بـــ 15 قدم .

(ب) منسوب نقطة B أسفل من منسوب نقطة A بـــ 15 قدم .

حلول بعض المسائل

<u>المسألة(١):</u> بدراسة إتزان المجموعة ككل :



$$R_1 + R_2 = W + W' \qquad \_\_\_(1)$$

وبأخذ العزوم حول C :

$$R_1 \times 4a - W \times 3a - W' \times a = 0$$

$$\therefore R_1 = \frac{3}{4}W + \frac{1}{4}W' \qquad \_\_\_(2)$$

من (1) ، (2) :

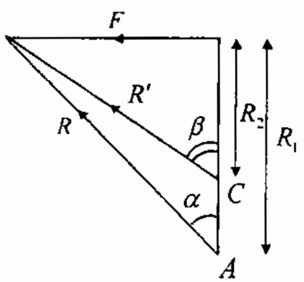
$$\therefore R_2 = W + W' - R_1 = \frac{1}{4}W + \frac{3}{4}W' \qquad \_\_\_(3)$$

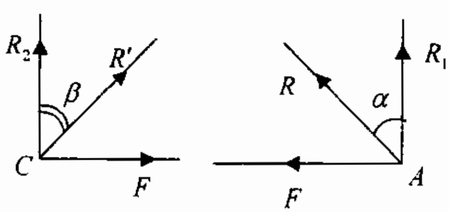
ولما كان $W > W'$ فإن $W - W' > O$ أي أن: كمية موجبة $= W - W'$

$$\therefore R_1 - R_2 = \frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W' = \frac{1}{2}(W - W') =$$ كمية موجبة

أي أن $R_1 > R_2$

وبرسم المثلث المبين بالشكل والذي قاعدته تمثل بقوة الإحتكاك F فإننا نجد أن : الزاوية α (زاوية ميل رد الفعل المحصل R عند A مع الرأسي) أقل من الزاوية β (زاوية ميل رد الفعل R' عند C مع الرأس)

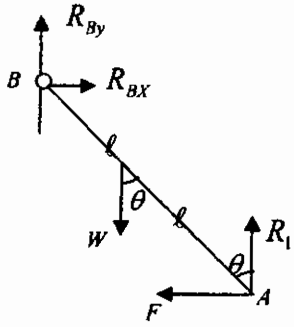




ولإيجاد قوة الإحتكاك F :

ندرس إتزان أحد الفرعين وليكن AB .

نفرض أن رد الفعل عند المفصل B له المركبتان R_{BX}, R_{By} فمن الإتزان نجد أن:



المركبات الأفقية :

$$R_{BX} = F \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

المركبات الرأسية :

$$R_{By} + R_1 = W \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

وبأخذ العزوم حول B :

$$\therefore R_1 \times 2\ell \sin\theta - W \times \ell \sin - F \times 2\ell \cos\theta = 0$$

$$\therefore F = (R_1 - \frac{W}{2}) \tan\theta \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

وبالتعويض عن R_1 في (5) :

$$R_{By} = W - R_1 = \frac{1}{4}(W - W') \qquad \text{\_\_\_\_(7)}$$

وبالتعويض عن R_1 في (6) :

$$\therefore F = \frac{1}{4}(W + W')\tan\theta \qquad \text{\_\_\_\_(8)}$$

وكلما زادت الزاوية θ (α في حالة الطرف A ، β في حالة الطرف C)، كلما اقتربت F من F_∞ (الإحتكاك النهائي) وعند F_∞ فإن $\theta = \phi$، ولكن $\alpha > \beta \leftarrow$ وبذلك فإن F_∞ تصل عند الطرف C قبل الطرف A

وفي حالة الإحتكاك النهائي (F_∞) :

$$F_\infty = \mu R_2 = \frac{1}{4}(W + W')\tan\phi$$

وبالتعويض عن R_2 من (3) نحصل على الآتي :

$$\mu(\frac{1}{4}W + \frac{3}{4}W') = \frac{1}{4}(W + W')\tan\phi$$

$$\therefore \mu(W + 3W') = (W + W')\tan\phi$$

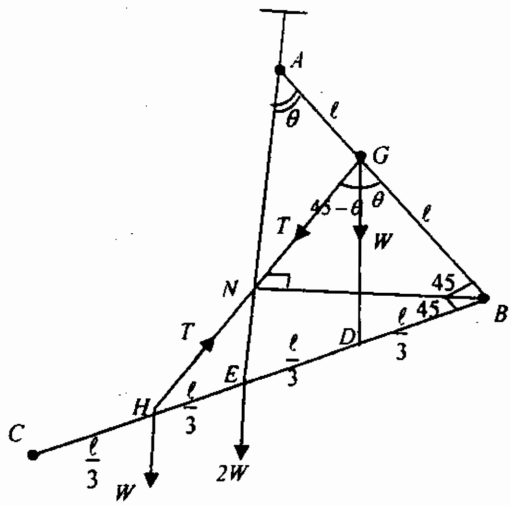
وهو المطلوب .

المسألة(٢): من هندسة الشكل يتضح أن :

في المثلث ABE : G منتصف AB وبذلك تكون:

D منتصف BE

$$\therefore BD = DE$$



وفي المثلث EDH: فإن N منتصف GH

$$\therefore DE = EH$$

$$\therefore BD = DE = EH = \frac{\ell}{3}$$

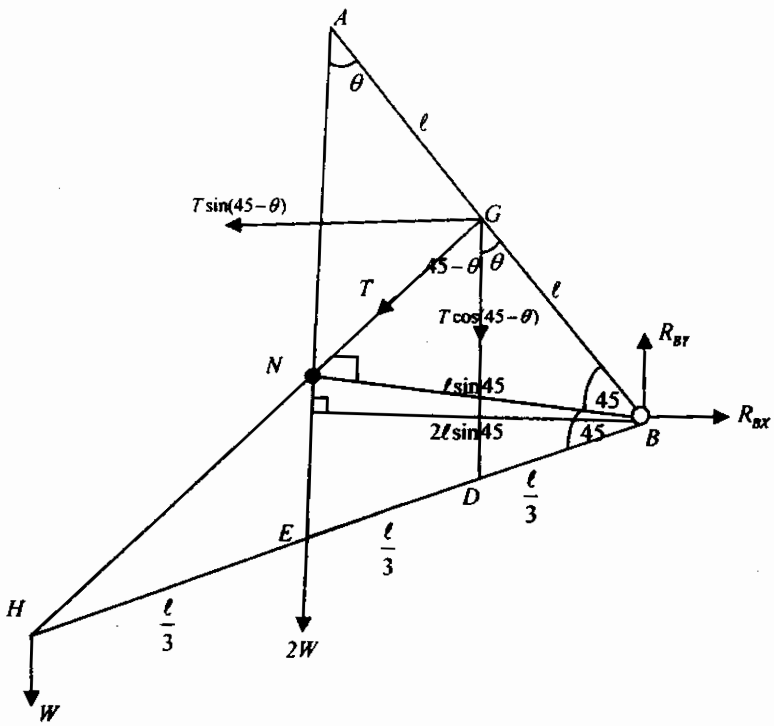
وفي المثلث ABE أيضاً :

$$\tan\theta = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{2\ell}{3}}{2\ell} = \frac{1}{3}$$

ومن هذا يتضح أن القضيب AB يصنع مع الرأسي زاوية $\tan^{-1}\frac{1}{3} = \theta$

وهو المطلوب أولاً .

والآن ندرس إتزان السلم AB :



المركبات الأفقية :

$$R_{BX} = T\sin(45-\theta)$$
$$= T[\sin 45\cos\theta - \cos 45\sin\theta]$$
$$= T[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}] = T[\frac{2}{\sqrt{20}}] = \frac{T}{\sqrt{5}} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

المركبات الرأسية :

$$2W + R_{BY} = W + T\cos(45-\theta)$$
$$\therefore R_{BY} = -W + T\cos(45-\theta) = -W + T\times\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

وبأخذ العزوم حول B :

$$-2W\times 2\ell\sin\theta+W\times\ell\sin\theta+T\times\ell\sin 45=0$$

$$\therefore\ -3W\sin\theta=-T\cdot\sin 45$$

$$\therefore\ 3W\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=T\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ T=3W\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\frac{3W}{\sqrt{5}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(3)$$

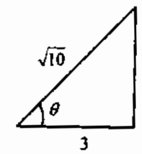
$\tan\phi=\frac{1}{3}$

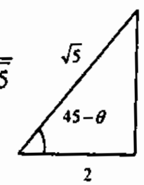
$\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\phi\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin=(45-\phi)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(45-\phi)=\frac{2}{\sqrt{5}}$





من(3) , (1) :

$$\therefore R_X=\frac{T}{\sqrt{5}}=\frac{3W}{5} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

من (3) , (2) :

$$\therefore R_y=-W+\frac{2T}{\sqrt{5}}=\frac{W}{5} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

وبذلك فإن رد الفعل عند المفصل يكون :

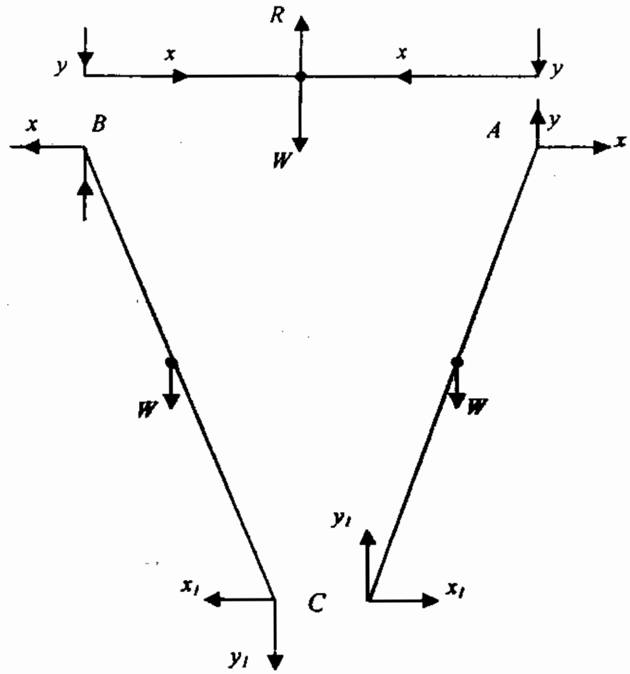
$$R=\sqrt{R_X^2+R_y^2}=\sqrt{\frac{9W^2}{25}+\frac{W^2}{25}}=\frac{W}{5}\sqrt{10}$$

ويصنع زاوية مع الأفقي α حيث :

$$\alpha=\tan^{-1}(\frac{R_{By}}{R_{BX}})=\tan^{-1}\frac{\frac{W}{5}}{\frac{3W}{5}}=\tan^{-1}(\frac{1}{3})$$

وهو المطلوب .

المسألة(٤): نفرض أن طول كل قضيب هو 2ℓ فمن الواضح أن المجموعة متماثلة حول الرأسي المار بالنقطة C ، أي أن رد الفعل عند A يساوي رد الفعل عند B .



ندرس أولاً : إتزان المجموعة

رأسياً :

$$R = 3W \qquad (1)$$

إتزان القضيب AB :

رأسياً :

$$R = W + 2y \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نجد أن :

$$3W = W + 2y \rightarrow 2y = 2W \rightarrow y = W$$

إتزان القضيب AC :

أفقياً :

(3)_____ $x + x_1 = 0$

رأسياً :

(4)_____ $y + y_1 = W$

من (4) بالتعويض عن $y = w$ نجد أن : $y_1 = 0$

نلاحظ أن y_1 هي مركبة رد الفعل المار بخط التماثل، وعليه يمكن تطبيق القاعدة الآتية مباشرة :

« **إذا وجد خط تماثل يمر بمفصل فإن المركبة في إتجاه هذا الخط تتلاشى** »

بأخذ العزوم حول C :

(5)_____ $\therefore W \cdot \ell \cos 60^\circ + x \cdot 2\ell \sin 60 - y \cdot 2\ell \cos 60 = 0$

بالقسمة على $\ell \cos 60$ واعتبار أن $y = w$ نجد أن :

$$W + 2x \tan 60 - 2W = 0 \qquad \therefore 2x(\sqrt{3}) = W \quad \therefore x = \frac{W}{2\sqrt{3}}$$

ومن العلاقة (3) :

$$\therefore x_1 = -x = -\frac{W}{2\sqrt{3}}$$

والإشارة السالبة هنا تعني أن إتجاه x_1 الحقيقي يكون في عكس الإتجاه المفروض على الرسم .

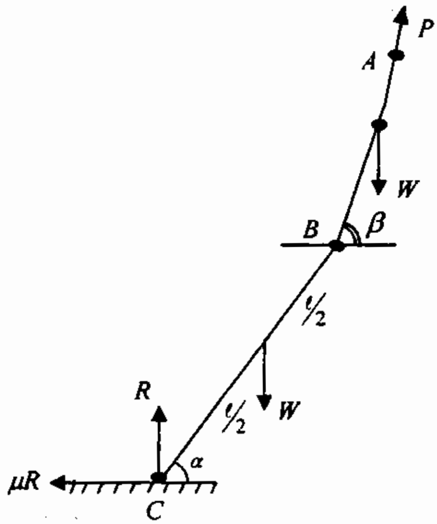
$\therefore$ رد الفعل عند $A =$ رد الفعل عند $B = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{W^2}{12} + W^2} = \sqrt{\frac{13}{12}}\, W$

ويكون رد الفعل عند $C =$

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{\frac{W^2}{12} + 0} = W\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{36}} W = \frac{\sqrt{3}}{6} W$$

وهو المطلوب.

<u>المسألة (٥)</u> : ليكن وزن كل قضيب هو W وطوله ℓ وأن قوة الإحتكاك النهـائي عند C هي μR .



فبدراسة الإتزان للمجموعة ككل وبأخذ العزوم حول A فإن :

$$W\times\frac{\ell}{2}\cos\beta+W\cdot\frac{\ell}{2}(\cos\alpha+2\cos\beta)-R\times\ell(\cos\alpha+\cos\beta)$$
$$-\mu R\times\ell(\sin\alpha+\sin\beta)=0$$
$$\therefore\frac{2R}{W}=\frac{\cos\alpha+3\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta+\mu\sin\alpha+\mu\sin\beta}\qquad\text{\_\_\_\_\_}(1)$$

وبدراسة إتزان القضيب BC وبأخذ العزوم حول B :

$$\therefore W\times\frac{\ell}{2}\cos\alpha-R\times\ell(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=0$$
$$\therefore\frac{2R}{W}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\qquad\text{\_\_\_\_\_}(2)$$

ومن (2) , (1) نحصل على الآتي :

$$\frac{\cos\alpha+3\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta+\mu\sin\alpha+\mu\sin\beta}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=\frac{1}{1+\mu\tan\alpha}$$

وبطرح البسط من المقام في الحدين نحصل على :

$$\frac{\cos\alpha + 3\cos\beta}{-2\cos\beta + \mu\sin\alpha + \mu\sin\beta} = \frac{1}{\mu\tan\alpha}$$

$$\therefore -2\cos\beta + \mu\sin\alpha + \mu\sin\beta = \mu\sin\alpha + 3\mu\tan\alpha\cos\beta$$

$$\therefore -2\cos\beta + \mu\sin\beta = 3\mu\tan\alpha\cos\beta$$

$$\therefore -2 + \mu\tan\beta = 3\mu\tan\alpha \rightarrow \mu(\tan\beta - 3\tan\alpha) = 2$$

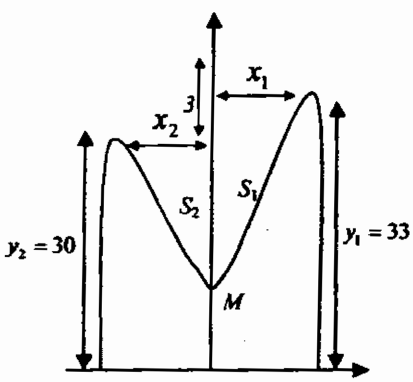
$$\therefore \mu = \frac{2}{\tan\beta - 3\tan\alpha}$$

وهي أقل قيمة لمعامل الإحتكاك لحفظ الإتزان للمجموعة المعطاة .

وهو المطلوب.

<u>المسألة(١٠):</u> طول السلسة = 90

طول الجزئيين الرأسيين = 63



$s_1 + s_2 = 90 - 63 = 27$ ____(1)

ولكن :

$$y^2 = c^2 + s^2$$

$$\therefore 33^2 = c^2 + {s_1}^2$$

$$30^2 = c^2 + {s_2}^2$$

بالطرح : $33^2 - 30^2 = s_1^2 - s_2^2$

$$\therefore (33-30)(33+30) = (s_1 - s_2)(s_1 + s_2)$$

$$\therefore 3 \times 63 = (s_1 - s_2) \times 27$$

$\therefore s_1 - s_2 = 7$ ____(2)

من (٢) ، (١) نجد أن :

$$s_1 = 17 \quad , \quad s_2 = 10$$

.: رأس الكتينة تقسم الخيط كله بنسبة :

$$\frac{y_2+s_2}{y_1+s_1}=\frac{30+10}{33+17}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$$

المسافة الرأسية بين الوتدين = $y_2-y_1=33-30=3$

المسافة الأفقية بين الوتدين هي : x_1+x_2 حيث :

$$x_1+x_2=c\ln\frac{y_1+s_1}{c}+c\ln\frac{y_2+s_2}{c}=c\ln\frac{(y_1+s_1)(y_2+s_2)}{c^2} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

و لإيجاد c : حيث أن :

$$y^2=c^2+s^2$$

$$\therefore 30^2=c^2+10^2$$

$$\therefore c^2=30^2-10^2=800 \qquad \therefore c=20\sqrt{2}$$

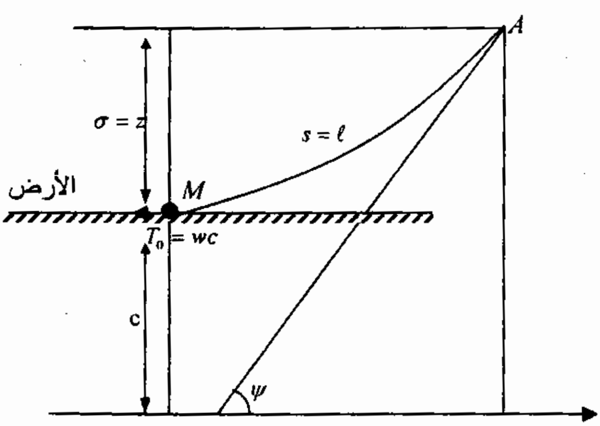
وتصبح المسافة الأفقية بين الوتدين :

$$=20\sqrt{2}\ \ell n\frac{(33+10)(30+10)}{(20\sqrt{2})^2}$$

$$=20\sqrt{2}\ \ell n\frac{50+40}{800}=20\sqrt{2}\ \ell n\frac{5}{2}$$

$$=28.284\times 0.9163=25.92$$

<u>**المسألة (١١) :**</u> نفرض أن الطائرة عند A وأن M على الأرض



$$\therefore y=\sigma+c=z+c$$

حيث $\sigma=z$

$$\therefore y^2=c^2+\ell^2$$

حيث $\ell=s$

$$\therefore (z+c)^2=c^2+\ell^2$$

$$\therefore z^2+2zc+c^2=c^2+\ell^2$$

$$\therefore c=\frac{\ell^2-z^2}{2z}$$

ويكون الشد عند الأرض T_0 حيث :

$$T_0 = wc = w\frac{\ell^2 - z^2}{2z}$$

أيضاً لإيجاد الشد عند الطائرة (عند A) :

$$y_A = c + z = \frac{\ell^2 - z^2}{2z} + z = \frac{\ell^2 + z^2}{2z}$$

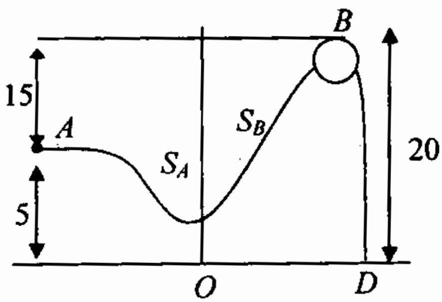
$$\therefore T_A = wy_A = w\frac{\ell^2 + z^2}{2z}$$

ولإيجاد ميل الخيط على الأفقي عند الطائرة أي الزاوية ψ : $s = c\tan\psi$

$$\therefore \tan\psi = \frac{s}{c} = \frac{\ell}{c} = \frac{2\ell z}{\ell^2 - z^2} = \frac{\frac{2z}{\ell}}{1 - \frac{z^2}{\ell^2}} = \frac{2\tan\psi/2}{1 - \tan^2\psi/z}$$

$$\therefore \tan\frac{\psi}{2} = \frac{z}{\ell} \therefore \psi = 2\tan^{-1}\frac{z}{\ell}$$

المسألة(١٢) :



$y_B = 20 \quad , \quad y_A = 5$

$y_B^2 = c^2 + s_B^2$ ___(1)

$y_A^2 = c^2 + s_A^2$ ___(2)

بالطرح :

$$y_B^2 - y_A^2 = s_B^2 - s_A^2$$

$$\therefore 400 - 25 = (s_B + s_A)(s_B - s_A)$$

$$\therefore 375 = 20 \times (s_B + s_A)$$

$s_B - s_A = \frac{375}{20} = 18.75 ft$ ___(3)

ولكن :

$s_B + s_A = 20 ft$ ___(4)

من (3),(4) : $s_A = 0.625 \quad , \; s_B = 19.375$

ولإيجاد c : نعوض في(1) : $c^2 = (20)^2 - (19.375)^2$

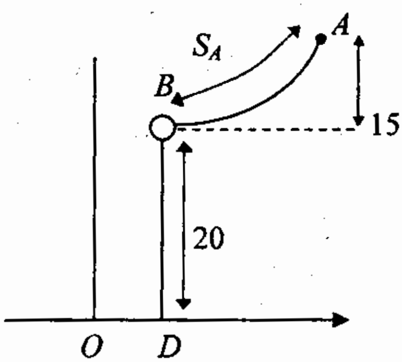
$$\therefore c = \sqrt{(20)^2 - (19.375)^2} = 4.96\,ft$$

$$\therefore T = wc = 2 \times 4.96 = 9.92 \;\; p.ft.$$

الجزء الثاني من المسألة:

$y_A = 35 \quad , \quad y_B = 20$

$s_A - s_B = 20$ ____(5)



$$\therefore y_A^2 - y_B^2 = s_A^2 - s_B^2 = (s_A - s_B)(s_A + s_B)$$

$$\therefore 35^2 - 20^2 = 20 \times (s_A + s_B)$$

$\therefore s_A + s_B = 44.25$ ____(6)

من (6),(5) نجد أن :

$s_A = 30.625 \; , \; s_B = 10.625$

$$\therefore c = \sqrt{y_B^2 - s_B^2} = \sqrt{(20)^2 - (10.625)^2} = 16.94\,ft$$

$$T = wc = 2 \times 16.94 = 33.88\,p.ft.$$