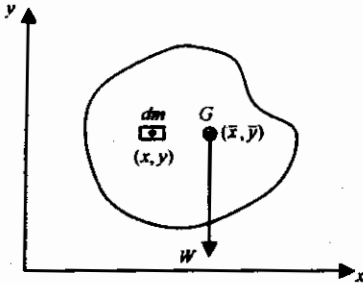


الباب السادس

مركز الثقل

تعريف: يعرف مركز ثقل جسم بأنه تلك النقطة التي يمر بها خط عمل وزن أو ثقل الجسم في جميع أوضاعه.



تعيين إحداثيات مركز الثقل:

نقسم الجسم إلى عناصر صغيرة جداً كتلة كل عنصر dm وإحداثيات مركزه (x, y) فتكون إحداثيات مركز ثقل الجسم هي:

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

ويلاحظ أن التكاملات مأخوذة على الجسم كله (طول أو مساحة أو حجم).

ملحوظة:

(١) في حالة سلك (طول): نفرض أن كتلة وحدة الأطوال λ (الكثافة الطولية).

$$\therefore dm = \lambda \cdot d\ell \quad \text{حيث } d\ell \text{ الطول}$$

(٢) في حالة صفيحة (مساحة): نفرض أن كتلة وحدة المساحات σ (الكثافة المساحية).

$$\therefore dm = \sigma \cdot dS \quad \text{حيث } dS \text{ المساحة}$$

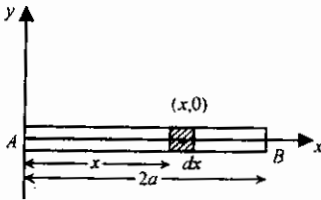
(٣) في حالة حجم: نفرض أن كتلة وحدة الحجوم ρ (الكثافة الحجمية).

$$\therefore dm = \rho \cdot dV \quad \text{حيث } dV \text{ الحجم}$$

أمثلة محلولة:

مثال (١): أوجد مركز ثقل قضيب (سلك مستقيم) منتظم طوله $2a$.

الحل:



نأخذ عنصر طوله dx يبعد مسافة x عن الطرف A فيكون مركز ثقله $(x, 0)$ وتكون كتلة العنصر: $dm = \lambda \cdot dx$ حيث λ الكثافة الطولية وهي كمية ثابتة (القضيب المنتظم).

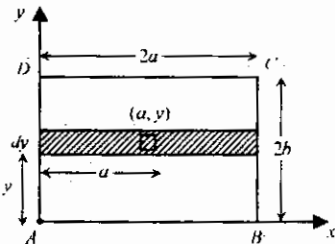
من الواضح أن مركز ثقل القضيب يقع على محور x :

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x (\lambda dx)}{\int \lambda dx} = \frac{\lambda \int x dx}{\lambda \int dx}$$

$$= \frac{\int_0^{2a} x dx}{\int_0^{2a} dx} = \frac{[x^2/2]_0^{2a}}{[x]_0^{2a}} = \frac{1/2[(2a)^2 - 0]}{[(2a) - 0]} = \frac{1/2(4a^2)}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$

أي أن مركز ثقل القضيب يقع في منتصفه.

مثال (٢): أوجد مركز ثقل صفيحة منتظمة على شكل مستطيل أبعاده $2a$, $2b$.



الحل: نأخذ عنصر على شكل قضيب رفيع

منتظم سمكه dy وطوله $2a$ فتكون

$$dS = (2a)(dy)$$

مساحته σ هي الكثافة المساحية

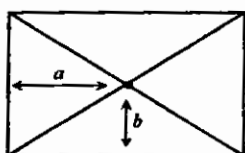
$$dm = \sigma dS = 2a \sigma dy$$

وإحداثيات مركز العنصر: (a, y)

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int a dm}{\int dm} = \frac{a \int dm}{\int dm} = a$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y(2a \sigma dy)}{\int (2a \sigma dy)} = \frac{2a \sigma \int y dy}{2a \sigma \int dy}$$

$$= \frac{\int_0^{2b} y dy}{\int_0^{2b} dy} = \frac{[y^2/2]_0^{2b}}{[y]_0^{2b}} = \frac{1/2[(2b)^2 - 0]}{[(2b) - 0]} = \frac{1/2(4b^2)}{2b} = \frac{2b^2}{2b} = b$$



∴ إحداثيات مركز ثقل المستطيل هي (a, b)

أي أن مركز ثقل المستطيل يقع في نقطة تلاقي القطرين.

مثال (٣): أوجد مركز ثقل سلك على هيئة قوس دائري منتظم زواياه المركزية 2α ، ومن ذلك أوجد مركز ثقل سلك منتظم على شكل نصف دائرة.

الحل: نفرض القوس الدائري AB وزواياه المركزية هي 2α

نستخدم الإحداثيات القطبية وذلك بأخذ العنصر قوس طوله:

$$dl = r d\theta$$

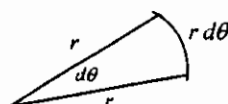
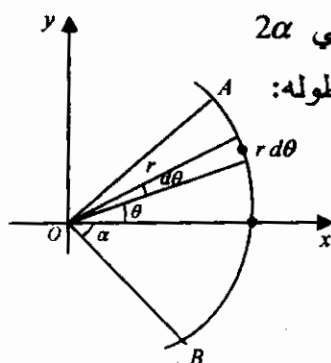
وإحداثيات مركزه: $(r \cos \theta, r \sin \theta)$

كتلة العنصر: $dm = \lambda dl = \lambda r d\theta$

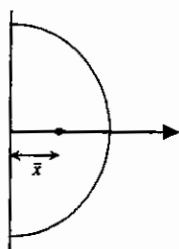
حيث λ الكثافة الطولية لمادة السلك.

من الواضح أن مركز ثقل القوس يقع على نصف

قطر التماثل أي على محور x .



$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int (r \cos \theta) (\lambda r d\theta)}{\int (\lambda r d\theta)} = \frac{\lambda r^2 \int \cos \theta d\theta}{\lambda r \int d\theta} \\ &= r \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = r \frac{[\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = r \frac{[\sin \alpha - \sin(-\alpha)]}{[\alpha - (-\alpha)]} \\ &= r \frac{[\sin \alpha + \sin \alpha]}{[\alpha + \alpha]} = r \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha} = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}\end{aligned}$$



حالة خاصة: إذا كان القوس على شكل نصف دائرة فإن:

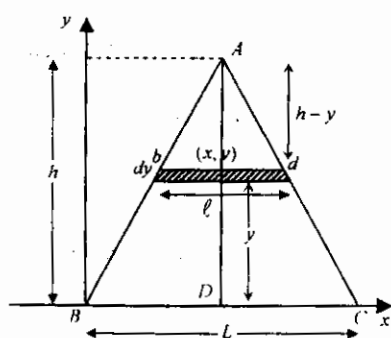
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

ويكون مركز الثقل في هذه الحالة:

$$\bar{x} = r \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = r \frac{1}{\pi/2} = \frac{2r}{\pi}$$

وهو المطلوب.

مثال (٤): أوجد مركز ثقل صفيحة مستوية منتظمة الكثافة على شكل مثلث.



الحل: لتكن h هي إرتفاع المثلث، L هي طول

قاعدته، نأخذ العنصر على شكل شريحة مستطيلة

طولها l وعرضها dy فتكون مساحتها

$$dS = l dy \text{ وكتلتها } dm = \sigma dS = \sigma l dy$$

حيث σ الكثافة المساحية.

ومركز ثقلها هو النقطة (x, y) .

من الواضح أن مركز ثقل المثلث يقع على المستقيم المتوسط المار بالرأس A (أي

المستقيم AD).

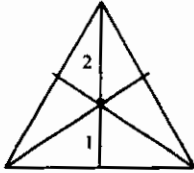
$$\therefore \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int \sigma \ell y dy}{\int \sigma \ell dy} = \frac{\sigma \int \ell y dy}{\sigma \int \ell dy} \quad \text{---(1)}$$

ومن تشابه المثلثين ABD , ABC

$$\frac{\ell}{L} = \frac{h-y}{h} \quad \therefore \ell = \frac{L}{h}(h-y)$$

بالتعويض عن ℓ في (1):

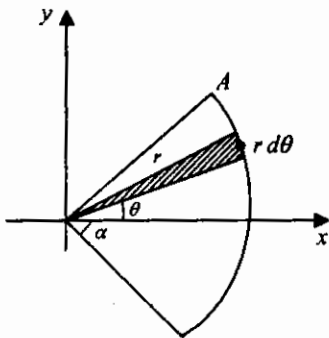
$$\begin{aligned} \therefore \bar{y} &= \frac{\int y \cdot L/h(h-y) dy}{\int L/h(h-y) dy} = \frac{L/h \int y(h-y) dy}{L/h \int (h-y) dy} \\ &= \frac{\int_0^h (yh - y^2) dy}{\int_0^h (h-y) dy} = \frac{[y^2 h/2 - y^3/3]_0^h}{[hy - y^2/2]_0^h} = \frac{h^3/2 - h^3/3}{h^2 - h^2/2} = \frac{h^3/6}{h^2/2} = \frac{h}{3} \end{aligned}$$



أي أن مركز ثقل المثلث يقع على بعد ثلث الارتفاع من جهة القاعدة أي يقسم الارتفاع بنسبة 1:2 من جهة القاعدة.

أي أنه يقع على ملتقي المستقيمتين المتوسط للمثلث.

مثال (٥): أوجد مركز ثقل قطاع دائري زاويته المركزية 2α ومن ذلك أوجد



مركز ثقل صفيحة على شكل نصف دائرة.

الحل: القطاع الدائري هو عبارة عن صفيحة

مستوية يحدها قوس دائري زاويته

المركزية 2α فمن التماثل: مركز ثقل

القطاع يقع على محور التماثل

(محور x).

نأخذ العنصر مساحة صغيرة جداً على شكل مثلث قاعدته $r d\theta$ وأرتفاعه r فتكون مساحته:

$$dS = \frac{1}{2} (\text{الأرتفاع} \times \text{القاعدة}) = \frac{1}{2} (r d\theta)(r) = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$dm = \sigma ds = \frac{1}{2} \sigma r^2 d\theta \text{ وكثافته:}$$

حيث σ الكثافة المساحية.

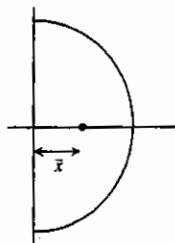
ومركز ثقله (يقع على بعد $\frac{2}{3}$ من الرأس) أي أن إحداثياته هي:

$$\left(\frac{2}{3} r \cos \theta, \frac{2}{3} r \sin \theta \right)$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int (2/3 r \cos \theta) (1/2 \sigma r^2 d\theta)}{\int (1/2 \sigma r^2 d\theta)}$$

$$= \frac{2}{3} r \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{2}{3} r \frac{[\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

حالة خاصة: مركز ثقل صفيحة على شكل $\frac{1}{2}$ دائرة (نصف قرص).



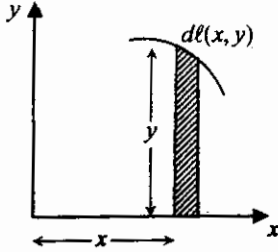
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ نضع}$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{3} r \left(\frac{2}{\pi} \right) = \frac{4r}{3\pi}$$

وهو المطلوب.

مركز ثقل السطوح الدورانية

تعريف: يعرف السطح الدوراني بأنه السطح الناتج عن دوران منحنى حول أحد المحورين، ويكون المحور الذي يتم الدوران حوله هو محور تماثل.



في حالة الإحداثيات الكرتيزية:

نأخذ العنصر عبارة عن قوس من المنحنى طوله dl عند (x, y) فإذا دار العنصر حول محور x دورة كاملة فإنه يكون حلقة مساحتها:

$$ds = \text{الطول} \times \text{السّمك}$$

$$= 2\pi y \times dl$$

وكتلتها: $dm = \sigma ds$ حيث σ هي للكثافة المساحة.

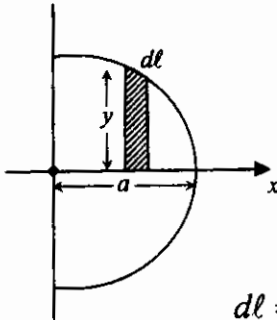
وبلاحظ أن: طول قوس من منحنى في الإحداثيات الكرتيزية يعطي بالعلاقة:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

حيث $y' = \frac{dy}{dx}$ وتعطي من معادلة المنحنى $y = f(x)$.

أمثلة محلولة

مثال (١): أوجد مركز ثقل قشرة نصف كروية (نصف كرة مجوفة).



الحل: نأخذ العنصر dl عبارة عن جزء من

دائرة (قوس دائري) معادلتها: $x^2 + y^2 = a^2$

حيث a نصف قطر الدائرة.

الطول dl يعطي بالعلاقة:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

حيث y' يمكن إيجادها من معادلة الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$.

فبالتفاضل بالنسبة لـ x :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = y'$$

$$\therefore d\ell = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx$$

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore d\ell = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (1)$$

إذا دار العنصر $d\ell$ حول محور x دورة كاملة فإنه يكون حلقة مساحتها: $ds = 2\pi y \cdot d\ell$ وكتلتها:

$$dm = \sigma ds = 2\pi \sigma y d\ell$$

وحيث أن محور x هو محور تماثل فإن مركز النقل يقع عليه:

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot (2\pi \sigma y d\ell)}{\int 2\pi \sigma y d\ell} = \frac{\int x y d\ell}{\int y d\ell} \quad (2)$$

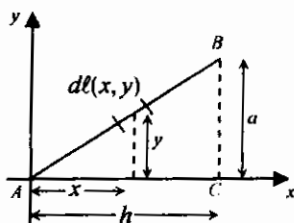
$$d\ell = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{وبالتعويض عن}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx} = \frac{\int_0^a x dx}{\int_0^a dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a}{[x]_0^a} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a} = \frac{a}{2}$$

أي أن مركز ثقل النصف كرة المجوفة (القشرة نصف الكروية) يقع على بعد $\frac{a}{2}$

من المركز. وهو المطلوب.

مثال (٢): أوجد مركز ثقل سطح مخروطي (مخروط دائري قائم أجوف) نصف قطر قاعدته a وأرتفاعه h .



الحل: ينتج السطح المخروطي (المخروط الدائري القائم الأجوف) من دوران المستقيم AB المبين بالشكل حول محور x دورة كاملة.

نأخذ العنصر dl عند النقطة (x, y) فإذا دار حول محور x دورة كاملة فإنه يكون حلقة مساحتها: $dS = 2\pi y \cdot dl$ ، وكتلتها $dm = \sigma dS = 2\pi \sigma y \cdot dl$

الطول dl يعطي بالعلاقة: $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$

حيث y' يمكن إيجادها من معادلة المنحنى (المستقيم AB) كالآتي:

$$\text{من هندسة الشكل: } y = \frac{a}{h}x \leftarrow \frac{x}{y} = \frac{h}{a}$$

$$\therefore dy = \frac{a}{h} dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{h} = y'$$

$$\therefore dl = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{h}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{h^2}} dx = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} dx$$

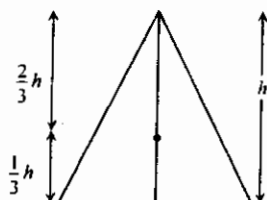
وحيث أن محور x هو محور تماثل فإن مركز الثقل يقع عليه:

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot (2\pi \sigma y dl)}{\int 2\pi \sigma y dl} = \frac{\int x y dl}{\int y dl}$$

$$dl = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} dx \text{ وعن } y = \frac{a}{h}x$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x \cdot \left(\frac{a}{h}x\right) \cdot \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} dx}{\int \left(\frac{a}{h}x\right) \cdot \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{h} dx} = \frac{\int_0^h x^2 dx}{\int_0^h x dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h$$

أي أن مركز ثقل المخروط الأجوف (السطح المخروطي) يقع على محور تماثله



وعلى مسافة تساوي $\frac{1}{3}h$ من القاعدة

أو $\frac{2}{3}h$ من الرأس، حيث h هي

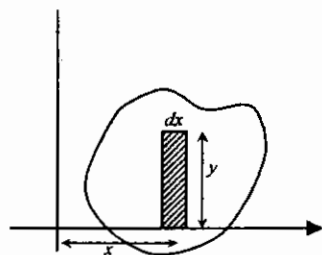
ارتفاع المخروط. وهو المطلوب.

مركز ثقل الحجوم الدورانية:

تعريف: يعرف الحجم الدوراني بأنه الحجم الناتج عن دوران مساحة حول أحد

المحورين، فإذا كان الدوران حول محور x مثلاً فإن مركز الثقل يقع على هذا

المحور كمحور تماثل.



في حالة الإحداثيات الكرتيزية:

نأخذ العنصر جزء من المساحة على

شكل مستطيل طوله y وعرضه dx ، فإذا

دار دورة كاملة حول محور x فإنه يكون

قرصاً حجمه:

السلك $\times$ المساحة $dV =$

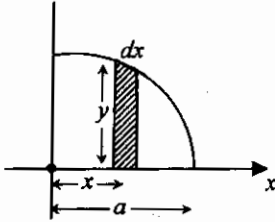
$$= \pi y^2 \times dx$$

وتكون كتلته: $dm = \rho dV$ حيث ρ الكثافة الحجمية

$$\therefore \boxed{dm = \pi \rho y^2 dx}$$

أمثلة محلولة:

مثال (1): أوجد مركز ثقل نصف كرة مصمتة نصف قطرها a .



الحل: تتولد نصف الكرة من دوران مساحة على شكل $\frac{1}{4}$ دائرة حول أحد حافتيها،

وليكن الدوران حول محور x

نأخذ العنصر مستطيل مساحته $y dx$

فإذا دار حول محور x فإنه يكون قرصاً حجمه: $dV = \pi y^2 dx$ ، وكثافته

$$dm = \rho dV = \pi \rho y^2 dx$$

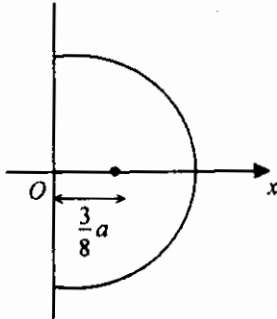
ومن معادلة الدائرة المولدة للكرة:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\therefore y^2 = a^2 - x^2 \rightarrow dm = \pi \rho (a^2 - x^2) dx$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot \pi \rho (a^2 - x^2) dx}{\int \pi \rho (a^2 - x^2) dx} = \frac{\int x (a^2 - x^2) dx}{\int (a^2 - x^2) dx}$$

$$= \frac{\int_0^a (xa^2 - x^3) dx}{\int_0^a (a^2 - x^2) dx} = \frac{\left[\frac{x^2 a^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a}{\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a} = \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2}{3} a^3} = \frac{3}{8} a$$

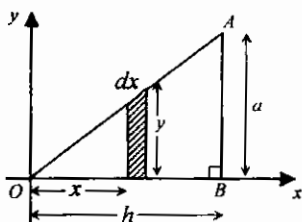


أي أن مركز ثقل نصف الكرة

المصمتة يقع على محور تماثلها

ويبعد مسافة $\frac{3}{8}a$ من مركز الكرة.

مثال (٢): أوجد مركز ثقل مخروط دائري قائم مصمت نصف قطر قاعدته a وارتفاعه h .



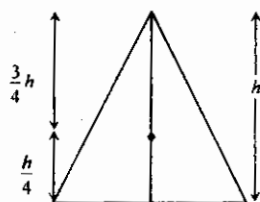
الحل: يتولد المخروط الدائري القائم المصمت من دوران مساحة على شكل مثلث قائم الزاوية حول أحد الضلعين المجاور للزاوية القائمة.

نأخذ العنصر مستطيل مساحته $y dx$ فإذا دار حول محور x فإنه يكون قرصاً حجمه $dV = \pi y^2 \cdot dx$ ، وكتلته $dm = \rho dV = \rho \pi y^2 dx$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x (\rho \pi y^2 dx)}{\int \rho \pi y^2 dx} = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx}$$

$$\boxed{y = \frac{a}{h} x} \leftarrow \frac{x}{h} = \frac{y}{a}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x \left(\frac{a}{h} x\right)^2 dx}{\int \left(\frac{a}{h} x\right)^2 dx} = \frac{\int x \left(\frac{a^2}{h^2} x^2\right) dx}{\int \frac{a^2}{h^2} x^2 dx} = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3}{4} h$$



أي أن مركز ثقل المخروط المصمت يقع على محور تماثله ويبعد عن القاعدة بمسافة $\frac{1}{4} h$ ، وعن الرأس بمسافة $\frac{3}{4} h$ وهو المطلوب.

مراكز أثقال الأجسام ذات الكثافة المتغيرة:

مثال (١): أوجد مركز ثقل قضيب غير منتظم الكثافة بتغير كثافته مع مربع البعد عن أحد طرفيه.



الحل: باعتبار أن طول القضيب l وأن A هي نقطة الأصل، فتكون الكثافة:

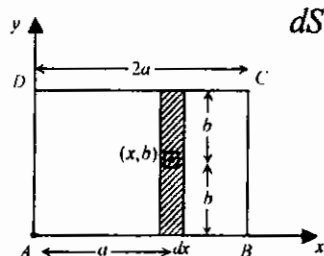
$$\lambda \propto x^2 \rightarrow \therefore \lambda = \mu x^2$$

حيث x بعد العنصر dx من طرف القضيب A ، كتلة العنصر $dm = \lambda dx$ من التماثل: مركز ثقل القضيب يقع على محور x حيث:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x (\lambda dx)}{\int \lambda dx} = \frac{\int x \cdot \mu x^2 dx}{\int \mu x^2 dx} \\ &= \frac{\int_0^l x^3 dx}{\int_0^l x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4} \right]_0^l}{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l} = \frac{\frac{l^4}{4}}{\frac{l^3}{3}} = \frac{3}{4} l \end{aligned}$$

أي أن مركز الثقل يقع على بعد $\frac{3}{4}$ طول القضيب من الطرف A .

مثال (٢): صفيحة على شكل مستطيل $ABCD$ أبعادها $AB = 2a$ ، $AD = 2b$ ، فإذا كانت مادة الصفيحة ذات كثافة تتناسب مع مربع بعدها من AD .



الحل: نأخذ العنصر مستطيل مساحته: $dS = (2b)(dx)$

ومركز ثقله يقع في منتصفه أي عند النقطة (x, b) .

كثافة مادة العنصر: $\sigma \propto x^2$

$$\therefore \sigma = \mu x^2$$

وتكون الكتلة: $dm = \sigma ds$ ، وبذلك فإن إحداثيات مركز ثقل الصفيحة تكون:

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \bar{y} = \frac{\int b dm}{\int dm}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x (2\sigma b dx)}{\int 2\sigma b dx} = \frac{\int x (2\mu x^2 \cdot b dx)}{\int 2(\mu x^2) b dx}$$

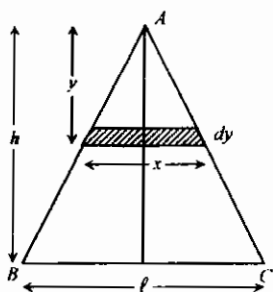
$$= \frac{\int_0^{2a} x^3 dx}{\int_0^{2a} x^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a}}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a}} = \frac{\frac{1}{4}(2a)^4}{\frac{1}{3}(2a)^3} = \frac{3}{2}a$$

$$\bar{y} = \frac{\int b dm}{\int dm} = \frac{b \int dm}{\int dm} = b$$

∴ إحداثيات مركز ثقل الصفيحة هي: $(\frac{3}{2}a, b)$.

مثال (٣): أوجد بعد مركز ثقل صفيحة على شكل مثلث عن الرأس A إذا كانت

كثافة مادة الصفيحة تتناسب مع البعد عن A .



الحل: نأخذ العنصر شريحة على شكل

مستطيل مواز لقاعدة المثلث

مساحته: $ds = x dy$ ، وكثافته $\sigma = \mu y$

حيث y بعد العنصر عن الرأس A .

فإذا كان h هو ارتفاع المثلث، l هو طول القاعدة BC ، فإن

$$\boxed{x = \frac{l}{h} y} \leftarrow \frac{x}{l} = \frac{y}{h}$$

من الواضح أن مركز الثقل يقع على المستقيم المتوسط الواصل من الرأس A إلى القاعدة.

فإذا كان بعده عن A هو $\bar{y}$ فإن:

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y \sigma ds}{\int \sigma ds} = \frac{\int y \cdot (\mu y) (x dy)}{\int (\mu y) (x dy)} = \frac{\int y^2 x dx}{\int y x dy}$$

وبالتعويض عن $x = \frac{\ell}{h} y$ فإن:

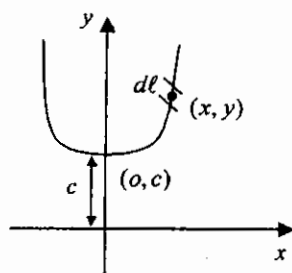
$$\bar{y} = \frac{\int y^2 (\frac{\ell}{h} y) dy}{\int y (\frac{\ell}{h} y) dy} = \frac{\int_0^h y^3 dy}{\int_0^h y^2 dy} = \frac{[\frac{y^4}{4}]_0^h}{[\frac{y^3}{3}]_0^h} = \frac{3}{4} h$$

وهو المطلوب.

أمثلة عامة على مركز الثقل

مثال (١): أوجد مركز ثقل قوس من منحنى الكتينة $y = c \cosh \frac{x}{c}$ يقع بين

الرأس $(0, c)$ وأي نقطة على المنحنى (x, y) .



الحل: القوس المطلوب إيجاد مركز ثقله محصور بين

الرأس $(0, c)$ والنقطة (x, y) على المنحنى

نأخذ عنصر طوله dl عند (x, y)

وباستخدام معادلة المنحنى $y = c \cosh \frac{x}{c}$

$$\therefore dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{c}} dx = \cosh \frac{x}{c} dx$$

وتكون إحداثيات مركز ثقل القوس:

$$\bar{x} = \frac{\int x \lambda dl}{\int \lambda dl} = \frac{\int x dl}{\int dl} = \frac{\int_0^x x \cosh \frac{x}{c} dx}{\int_0^x \cosh \frac{x}{c} dx}$$

تكامّل البسط :

$$\begin{aligned}\int_0^x x \cosh \frac{x}{c} dx &= \int_0^x x c [d(\sinh \frac{x}{c})] = xc \sinh \frac{x}{c} \Big|_0^x - \int_0^x c \sinh \frac{x}{c} \\ &= xc \sinh \frac{x}{c} - c^2 \cosh \frac{x}{c} + c^2\end{aligned}$$

تكامّل المقام :

$$\begin{aligned}\int_0^x \cosh \frac{x}{c} dx &= c \sinh \frac{x}{c} \\ \therefore \bar{x} &= \frac{xc \sinh \frac{x}{c} - c^2 \cosh \frac{x}{c} + c^2}{c \sinh \frac{x}{c}} = \frac{x \sinh \frac{x}{c} + c(1 - \cosh \frac{x}{c})}{\sinh \frac{x}{c}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_0^x y \lambda dl}{\int_0^x \lambda dl} = \frac{\int_0^x y dl}{\int_0^x dl} = \frac{\int_0^x (c \cosh \frac{x}{c}) \cosh \frac{x}{c} dx}{\int_0^x \cosh \frac{x}{c} dx} \\ &= \frac{\int_0^x c \cosh^2 \frac{x}{c} dx}{\int_0^x \cosh \frac{x}{c} dx}\end{aligned}$$

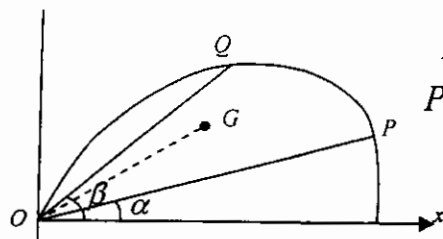
تكامّل البسط :

$$\begin{aligned}\int_0^x \cosh^2 \frac{x}{c} dx &= \int_0^x \frac{1}{2} (1 + \cosh \frac{2x}{c}) dx = \frac{1}{2} (x + \frac{c}{2} \sinh \frac{2x}{c}) \\ \therefore \bar{y} &= \frac{\frac{c}{2} (x + \frac{c}{2} \sinh \frac{2x}{c})}{c \sinh \frac{x}{c}} = \frac{x + \frac{c}{2} \sinh \frac{x}{c}}{2 \sinh \frac{x}{c}}\end{aligned}$$

مثال (٢): إذا كانت نقطة Q تمثل قطب منحنى اللمنسكيت $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ،

وكانت G هي مركز ثقل أي قوس PQ من المنحنى

أثبت أن OG ينصف الزاوية POQ حيث O نقطة الأصل



الحل: نفرض أن : $Q\hat{O}x = \beta$, $P\hat{O}x = \alpha$

نوجد أولاً إحداثيات مركز الثقل G للقوس PQ

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} , \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm}$$

حيث : $dm = \lambda d\ell$

$$d\ell = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

(طول قوس في الإحداثيات القطبية)

ولكن من معادلة المنحنى : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

$$\therefore 2r dr = -2a^2 \sin 2\theta d\theta$$

فبالتفاضل:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a^2}{r} \sin 2\theta$$

$$\therefore d\ell = \sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r^2} \sin^2 2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{r^4 + a^4 \sin^2 2\theta}}{r} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 \cos^2 2\theta + a^4 \sin^2 2\theta}}{r} d\theta = \frac{a^2}{r} d\theta$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} x d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} d\theta} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} r \cos \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} d\theta} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \cos \theta d\theta}{\frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} y d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} d\theta} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} r \sin \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^2}{r} d\theta} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta d\theta}{\frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}} \quad \text{_____ (2)}$$

إن حساب التكامل في المقام في العلاقتين (2) ، (1) ليس ضرورياً لأن المطلوب هو إثبات أن OG ينصف الزاوية POQ أي إثبات أن

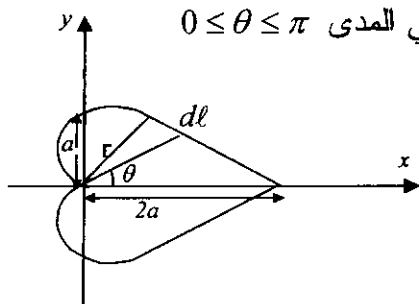
$$\tan G\hat{O}X = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\frac{\alpha}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \cos \theta d\theta} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \beta - \sin \alpha} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$G\hat{O}X = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{أي أن}$$

وهو المطلوب .

مثال (٣): أوجد مركز ثقل سلك على شكل المنحنى القطبي

(الكارديويد) الذي معادلته $r = a(1 + \cos \theta)$ في المدى $0 \leq \theta \leq \pi$



الحل: المنحنى متماثل حول محور x

وعلى ذلك فإن مركز الثقل يقع

على محور التماثل أي أن $\bar{y} = 0$

نأخذ العنصر طوله dl عند النقطة

$(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ومن معادلة المنحنى $r = a(1 + \cos \theta)$

$$\therefore dl = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos \theta} d\theta = \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

وتكون إحداثيات مركز ثقل المنحنى $(\bar{x}, O)$ حيث :

$$\bar{x} = \frac{\int x d\ell}{\int d\ell} = \frac{\int_0^\pi r \cos \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^\pi 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta} = \frac{\int_0^\pi a(1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^\pi 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta}$$

$$= a \frac{\int_0^\pi (1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta}$$

تكمال البسط :

$$I = \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^\pi (2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= \int_0^\pi (4 \cos^5 \frac{\theta}{2} - 2 \cos^3 \frac{\theta}{2}) d\theta$$

$$d\theta = 2d\phi \leftarrow \theta = 2\phi \leftarrow \frac{\theta}{2} = \phi$$

بوضع

$$\theta = 0 \rightarrow \phi = 0, \quad \theta = \pi \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore I = 2 \int_0^\pi (4 \cos^5 \phi - 2 \cos^3 \phi) d\phi$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \phi d\phi &= \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \phi d\phi &= \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \frac{(n-1)(n-3)\dots}{n(n-2)\dots} \times \frac{1}{\pi/2} \quad \begin{matrix} (n \text{ فردية}) \\ (n \text{ زوجية}) \end{matrix}$$

$$\therefore I = 2 \left[4 \cdot \frac{8}{15} - 2 \cdot \frac{2}{3} \right] = \frac{8}{3} \left[\frac{8}{5} - 1 \right] = \frac{8}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

تكامل المقام :

$$\int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi = 2 \sin \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\therefore \bar{x} = a \frac{8/5}{2} = \frac{4}{5} a$$

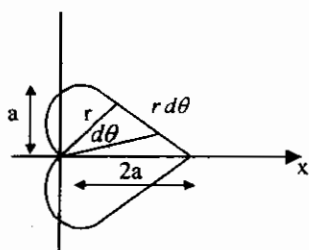
وهو المطلوب.

مثال (٤): أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بمنحنى الكارديويد $r = a(1 + \cos \theta)$

الحل: المنحنى متماثل بالنسبة لمحور x فيكون $\bar{y} = 0$

نأخذ العنصر مثلث مساحته : $ds = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

ومركز ثقله : $(\frac{2}{3} r \cos \theta, \frac{2}{3} r \sin \theta)$



$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \cdot \frac{2}{3} r \cos \theta}{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{2}{3} \frac{\int_0^{\pi} r^3 \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi} r^2 d\theta}$$

$$= \frac{2}{3} a \frac{\int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta}$$

$$= \frac{2}{3} a \frac{\int_0^{\pi} (1 + 3 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta}$$

ولكن :

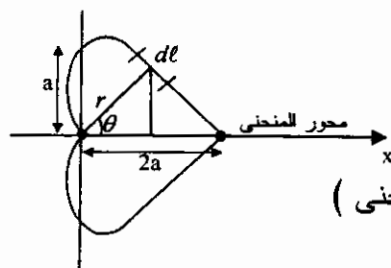
$$\therefore \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 2 \left[\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 2 \left[\frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \right] = \frac{3\pi}{8}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{3} a \frac{(0 + 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{3\pi}{8})}{(\pi + 0 + \frac{\pi}{2})} = \frac{2}{3} a \frac{\frac{15}{8} \pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{5}{6} a$$

وهو المطلوب.

مثال (5): أوجد مركز ثقل المساحة الناتجة عن دوران المنحنىالقطبي $r = a(1 + \cos \theta)$ حول محوره .**الحل:**نأخذ العنصر dl عند $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ فإذا دار دورة كاملة حول محور x (محور المنحنى)فإنه يكون حلقة مساحتها $ds = 2\pi r \sin \theta \cdot dl$

حيث

$$dl = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos \theta} d\theta = \sqrt{2a^2(1 + \cos \theta)} d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2 \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)} d\theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \bar{x} &= \frac{\int x \, dm}{dm} = \frac{\int r \cos \theta \cdot 2\pi r \sin \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int 2\pi r \sin \theta \cdot 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta} = \frac{\int_0^\pi r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^\pi r \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta} \\
 &= \frac{\int_0^\pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 \sin \theta \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^\pi a (1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta} \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \\
 &= a \frac{\int_0^\pi (2 \cos^2 \frac{\theta}{2})^2 \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\int_0^\pi (2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta} \\
 &= a \frac{\int_0^\pi (4 \cos^8 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - 2 \cos^6 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}) d\theta}{\int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta} \\
 &= a \frac{\int_0^\pi [-4 \cos^8 \frac{\theta}{2} d(\cos \frac{\theta}{2}) + 2 \cos^6 \frac{\theta}{2} d(\cos \frac{\theta}{2})]}{\int_0^\pi -\cos^4 \frac{\theta}{2} d(\cos \frac{\theta}{2})} \\
 &= a \frac{-4 [\frac{2}{9} \cos^9 \frac{\theta}{2}]_0^\pi + 2 [\frac{2}{7} \cos^7 \frac{\theta}{2}]_0^\pi}{[-\frac{2}{5} \cos^5 \frac{\theta}{2}]_0^\pi} = 2a \frac{-\frac{4}{9} [0 - 1] + \frac{2}{7} [0 - 1]}{-\frac{1}{5} [0 - 1]} \\
 &= 2a \frac{\frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{1}{5}} = 2a \frac{\frac{5}{63}}{\frac{1}{5}} = 2a \cdot \frac{25}{63} = \frac{50}{63} a
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مسائل على مركز الثقل

(١) أوجد مركز ثقل المساحة المحصورة داخل المنحنى $y = \sin x$ بين $x = 0, x = \pi$.

(٢) أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ ومحور x والمستقيم الرأسى $x = b$.

(٣) أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بالقطع المكافئ $y^2 = 4ax$ ومحور y والمستقيم الأفقى $y = c$.

(٤) أوجد مركز ثقل شبه منحرف قاعدتيه المتوازيتين a, b وأرتفاعه h .

(٥) أوجد مركز ثقل المجسم الدوراني المكافئ الناتج عن دوران القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ حول محور x بين $x = 0, x = h$.

(٦) أوجد مركز ثقل الحجم الناتج عن دوران المساحة المحصورة بين القطع المكافئ $y^2 = 4ax$ ومحور y والمستقيم $y = 2a$ حول محور y دورة كاملة.

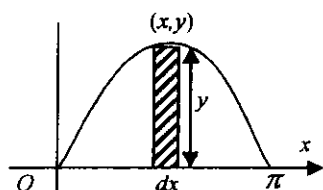
(٧) أوجد مركز ثقل صفيحة منتظمة على شكل $\frac{1}{4}$ قطع ناقص محصورة في الربع الأول.

حلول المسائل

المسألة (١): نأخذ العنصر مستطيل مساحته $ds = y dx$

ومركز ثقله هو $(x, \frac{y}{2})$

إحداثيات مركز ثقل المساحة المذكورة :



$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x \sigma ds}{\int \sigma ds} = \frac{\int x \cdot \sigma y dx}{\int \sigma y dx} = \frac{\int xy dx}{\int y dx} = \frac{\int_0^{\pi} x \sin x dx}{\int_0^{\pi} \sin x dx}$$

تكامل البسط :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= - \int_0^{\pi} x d(\cos x) \\ &= - \left[x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = - \left[-\pi - \sin x \right]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

تكامل المقام :

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{2} \frac{\int y \cdot \sigma y dx}{\int \sigma y dx} = \frac{1}{2} \frac{\int y^2 dx}{\int y dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{\pi} \sin^2 x dx}{\int_0^{\pi} \sin x dx}$$

تكامل البسط :

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} [\pi + 0] = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2$$

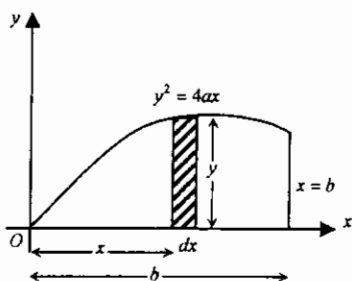
تكمال المقام :

$$\therefore \bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{8} \quad \therefore (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} \right)$$

وهو المطلوب .

المسألة (٢): نقسم المساحة إلى عناصر على شكل مستطيلات وليكن مساحة

$$ds = y dx$$

وإحداثيات مركز العنصر $(x, \frac{y}{2})$ 

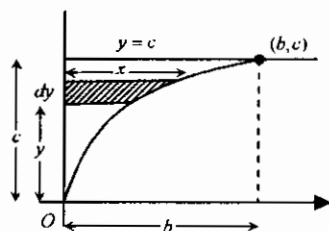
$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x (\sigma y dx)}{\int (\sigma y dx)} = \frac{\int xy dx}{\int y dx}$$

ولكن: $y^2 = 4ax \rightarrow y = \sqrt{4ax}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^b x \sqrt{4ax} dx}{\int_0^b \sqrt{4ax} dx} = \frac{\int_0^b x^{3/2} dx}{\int_0^b x^{1/2} dx} = \frac{\left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^b}{\left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^b} = \frac{3}{5} \frac{b^{5/2}}{b^{3/2}} = \frac{3}{5} b$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2} dm}{\int dm} = \frac{1}{2} \frac{\int y (\sigma y dx)}{\int (\sigma y dx)} = \frac{1}{2} \frac{\int y^2 dx}{\int y dx} = \frac{1}{2} \frac{\int 4ax dx}{\int \sqrt{4ax} dx}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4a \int_0^b x dx}{2\sqrt{a} \int_0^b x^{1/2} dx} = a^{1/2} \frac{\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b}{\left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^b} = a^{1/2} \frac{3}{4} \frac{b^2}{b^{3/2}} = \frac{3}{4} \sqrt{ab}$$



المسألة (٣): نقسم المساحة إلى عناصر على شكل

مستطيلات وليكن مساحة أحدها: $ds = x dy$

وإحداثيات مركز العنصر: $(\frac{x}{2}, y)$

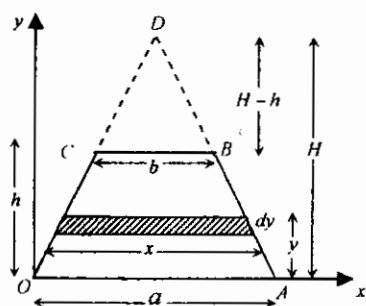
$$\bar{x} = \frac{\int \frac{x}{2} dm}{\int dm} = \frac{1}{2} \frac{\int x (\sigma x dy)}{\int \sigma x dy} = \frac{1}{2} \frac{\int x^2 dy}{\int x dy} = \frac{1}{2} \frac{\int (\frac{y^2}{4a})^2 dy}{\int (\frac{y^2}{4a}) dy} = \frac{1}{8a} \frac{\int_0^c y^4 dy}{\int_0^c y^2 dy}$$

$$= \frac{1}{8a} \frac{[\frac{y^5}{5}]_0^c}{[\frac{y^3}{3}]_0^c} = \frac{1}{8a} \frac{3}{5} \frac{y^5}{c^3} = \frac{1}{8a} \frac{3}{5} c^2 = \frac{1}{8a} \frac{3}{5} [4ab] = \frac{3}{10} b$$

وذلك بكتابة $c^2 = 4ab$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y (\sigma x dy)}{\int (\sigma x dy)} = \frac{\int yx dy}{\int x dy} = \frac{\int y (\frac{y^2}{4a}) dy}{\int (\frac{y^2}{4a}) dy}$$

$$= \frac{\int_0^c y^3 dy}{\int_0^c y^2 dy} = \frac{[\frac{y^4}{4}]_0^c}{[\frac{y^3}{3}]_0^c} = \frac{3}{4} \frac{c^4}{c^3} = \frac{3}{4} c = \frac{3}{4} \sqrt{4ab} = \frac{3}{2} \sqrt{ab}$$



حيث $c^2 = 4ab \leftarrow c = \sqrt{4ab}$

المسألة (٤): نفرض شبه المنحرف OABC

المبين بالشكل ونأخذ العنصر مستطيل

بوازي القاعدتين ومساحته $ds = x dy$

وكتلته $dm = \sigma x dy$

$$\bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y (\sigma x dy)}{\int (\sigma x dy)} = \frac{\int y x dy}{\int x dy} \quad (1)$$

ولإيجاد x بدلالة y : من تشابه المثلثات:

$$\frac{b}{a} = \frac{H-h}{H} \therefore Ha - ha = Hb \therefore H(a-b) = ah \therefore H = \frac{ah}{a-b}$$

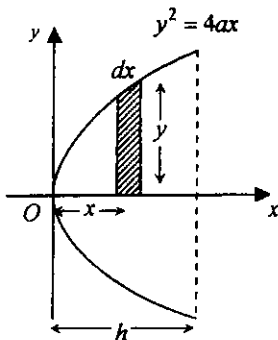
أيضاً فإن:

$$\frac{x}{a} = \frac{H-y}{H} \therefore x = a(1 - \frac{y}{H}) = a[1 - \frac{a-h}{ah} y] = a - \frac{a-b}{h} y$$

بالتعويض في (1):

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int_0^h y[a - \frac{a-b}{h} y] dy}{\int_0^h [a - \frac{a-b}{h} y] dy} = \frac{[\frac{ay^2}{2} - \frac{a-b}{h} \frac{y^3}{3}]_0^h}{[ay - \frac{a-b}{h} \frac{y^2}{2}]_0^h} \\ &= \frac{\frac{ah^2}{2} - \frac{a-b}{h} \frac{h^3}{3}}{ah - \frac{a-b}{h} \frac{h^2}{2}} = \frac{\frac{ah^2}{2} - \frac{a-b}{3} h^2}{ah - \frac{a-b}{2} h} = \frac{\frac{h^2}{3} [\frac{3a}{2} - a + b]}{h[a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}]} \\ &= \frac{\frac{h}{3} \frac{a+b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.



المسألة (٥): نأخذ العنصر مستطيل طوله y وعرضه

dx فإذا دار دورة كاملة حول محور x فإنه يكون

$$\text{قرصاً حجمه: } dV = \pi y^2 \cdot dx$$

$$\text{وكتلته } dm = \pi \rho y^2 dx$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{2} \frac{\int x (\pi \rho y^2 dx)}{\int \pi \rho y^2 dx} = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx} = \frac{\int x (4ax) dx}{\int (4ax) dx}$$

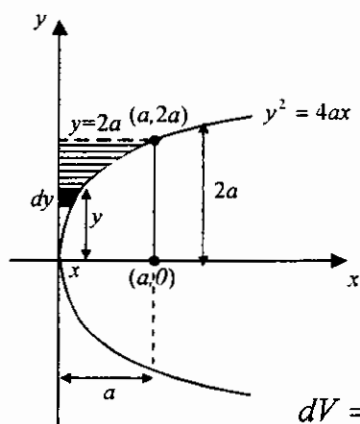
$$= \frac{\int_0^h x^2 dx}{\int_0^h x dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h}{\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h} = \frac{\frac{2}{3} \frac{h^3}{h^2}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} h$$

أي أن مركز ثقل المجسم الدوراني المكافئ يقع في ثلثي ارتفاعه من جهة الرأس 0.

المسألة (٦): لإيجاد مركز ثقل الحجم الناتج عن

دوران المساحة المظللة في الشكل

حول محور y .



نأخذ شريحة على شكل مستطيل مواز

لمحور x وعرضه dy فإذا دارت الشريحة

دورة كاملة حول محور y فإنها تنتج

قرصا حجمه :

$$dV = \pi x^2 \cdot dy \quad \therefore dm = \rho \pi x^2 dy$$

ومركز ثقله على ارتفاع y من محور x :

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \pi x^2 dy \cdot y}{\int \rho \pi x^2 dy}$$

ولكن من معادلة القطع المكافئ : $y^2 = 4ax$

$$\therefore x = \frac{y^2}{4a}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^{2a} \left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 \cdot y dy}{\int_0^{2a} \left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 dy} = \frac{\int_0^{2a} y^5 dy}{\int_0^{2a} y^4 dy} = \frac{\left(\frac{y^6}{6}\right)_0^{2a}}{\left(\frac{y^5}{5}\right)_0^{2a}} = \frac{5(2a)^6}{6(2a)^5} = \frac{5}{6}(2a) = \frac{5}{3}a$$

وهو المطلوب.

المسألة (٧): نأخذ العنصر مستطيل مساحته

$$ds = y dx \text{ ومركز ثقله } \left(x, \frac{y}{2}\right)$$

ومن معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x oy dx}{\int oy dx} = \frac{\int xy dx}{\int y dx} = \frac{\frac{b}{a} \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx}{\frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx}{\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^a x (a^2 - x^2)^{1/2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^a (-2x) (a^2 - x^2)^{1/2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^a = -\frac{1}{3} [(a^2 - a^2)^{3/2} - (a^2 - 0)^{3/2}]$$

$$= -\frac{1}{3} [0 - a^3] = \frac{1}{3} a^3$$

$$I_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

↓

$$\left. \begin{array}{l} dx = a \cos \theta d\theta \leftarrow x = a \sin \theta \text{ نضع} \\ x = 0 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0 \\ x = a \rightarrow \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_2 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot (a \cos \theta d\theta) = \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot (a \cos \theta d\theta) \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} [1 + \cos 2\theta] d\theta = \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 0 \right] = \frac{a^2 \pi}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{1}{3} a^3}{\frac{a^2 \pi}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$$

أيضاً فإن:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int_0^a \frac{y}{2} (\sigma y dx)}{\int_0^a (\sigma y dx)} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx}{\int_0^a y dx} = \frac{\frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx}{\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right) \int_0^a (a^2 - x^2) dx}{\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

$$I_2 = \frac{\pi a^2}{4} \quad (\text{كما سبق})$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right) \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \frac{4b}{3\pi}$$

∴ إحداثيات مركز ثقل الصفيحة المذكورة هي:

$$\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right)$$

وهو المطلوب.