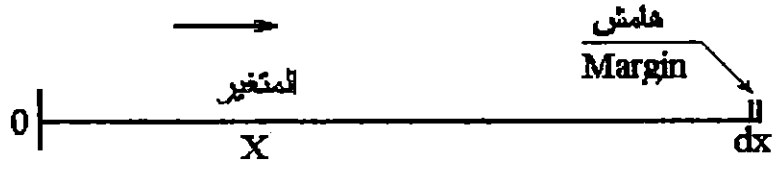
٨ التحليل الحدى

Marginal Analysis

التحليل الحدى من الأساليب الهامة فى التحليل والتدقيق العلمى للعديد من المسائل والأنشطة الهندسية والصناعية والاقتصادية. فالدنيا كلها متغيرات يموج بعضها فى بعض، ودوما يلزم ضبط المتغيرات وتوجيه الدفة نحو الهدف. كل نقطة على امتداد المتغير (X مثلا) يمكن أن تعتبر نقطة تحول، حتى ولو كان التحول (أو التغير) طفيفا، والتغير الطفيف هو المقصود بالتغير الحدى. والمقصود بالحد أو الهامش (Margin) هو الحافة الخارجية للشىء موضع الدراسة، كما هو ممثل فى الشكل التالى. والتغير الطفيف (الحدى) فى أحد المدخلات (X) يتبعه تغير ما فى الخرج الكلى (Total Product, TP). والمتغير الذى نملك تغييره مباشرة يسمى متغير القرار، Decision Variable.



ويوجد قاسم مشترك فى كل مسائل أو موضوعات اتخاذ القرار من الناحية الحدية Marginal Decision Making، ودائما ما يبرز السؤال التالى: **هل الأمر (التغيير) يستحق أم لا؟** وهذا هو محور ما يسمى بالتحليل الحدى. فحين يطرح موضوع تحسين الجودة نسبيا، أو التدقيق فى حماية البيئة، أو زيادة الاهتمام بالصيانة الوقائية، أو تركيب مكيفات أكثر للعنابر، أو شراء حاسبات إضافية لتحسين الإدارة بالمخازن. . . إلخ، فى أمثال هذه الحالات وغيرها يلزم مقارنة التكاليف الحدية المطلوبة بالفوائد المرجوة، وهذا هو صميم التحليل الحدى...

ومما سبق يتضح أن التحليل الحدى لصيق جدا بالرياضة الكلاسيكية المستخدمة فى الوصول بالمسائل للحالة المثلى (Optimization). والتغير الحدى يناظر التغير

المتناهى الصغر فى عمليات التفاضل (Calculus). ولذلك فمعظم هذا الفصل سيتحول إلى صور تفاضلية

٨-١ القيم الكلية والحدية والمتوسطة

Total, Marginal, and Average

العلاقات بين المتغيرات الكلية والحدية والمتوسطات فى غاية الأهمية فى التحليل الاقتصادى، وهذه العلاقات موضحة فى شكل (٨-١). فشكل (8-1a) يوضح طبيعة التغير أو الناتج الكلى عموما ، (TP) مقابل تغير أحد مدخلات النظام الإنتاجى(X) وثبات باقى المدخلات الأخرى. أما شكل (8-1b) فيمثل التغير الحدى المناظر (MP) وكذلك تغير المتوسط (AP) .

وجدير بالذكر أن أى تغير له سقف لا يتعداه، ولذلك فالناتج الكلى يصل لقمته (السقف) عند نقطة C ثم يعود فيتناقص برغم استمرار تزايد المدخل X . والسبب الرئيسى وراء ذلك هو أن تغير X وحده مع ثبوت باقى المدخلات يُخل بتناسب المدخلات مما يُبعد النظام عن الحالة المثلى شيئا فشيئا، وبذلك يقل العائد (الناتج).

منحنى التغير الحدى يشتق من منحنى التغير الكلى بالتفاضل ، أى أن

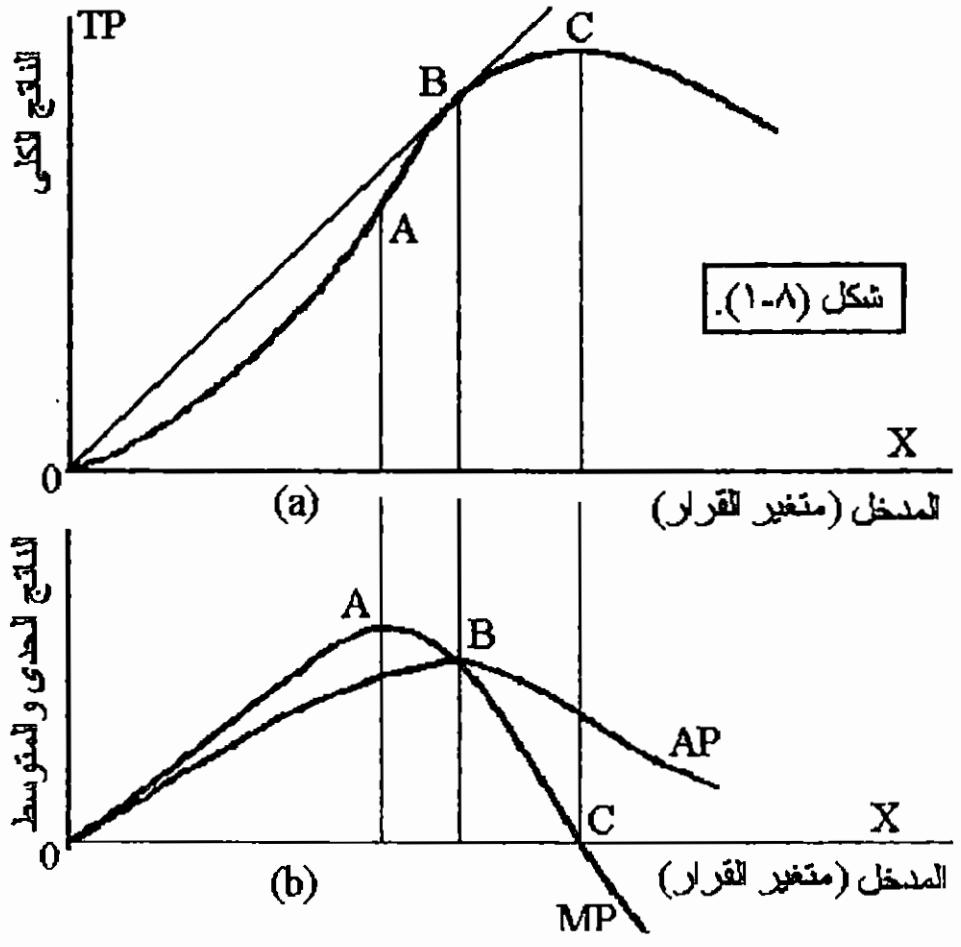
$$MP_x = dTP/dx \qquad (8\text{-}1)$$

بمعنى أن المتغير الحدى يمكن التعبير عنه بميل منحنى التغير الكلى عند كل نقطة من نقاط المنحنى. ويلاحظ - فى هذا الشكل - تصاعد ميل منحنى الناتج الكلى بين نقطتى 0 و A ، ويتناقص بعد ذلك حتى يصل لمستوى الصفر عند نقطة C حيث يصبح سالبا بعدها. ويلاحظ أيضا سرعة تغير منحنى الناتج الحدى (MP) بالمقارنة مع منحنى الناتج المتوسط (AP) ، فمنحنى الناتج الحدى هو الذى يسبق ويجر منحنى الناتج المتوسط ، ويتساويان عند نقطة B التى عندها يصل المتوسط لقيمته العظمى، ثم يتبع ال MP فى الهبوط.

متوسط الناتج (AP) هو خارج قسمة الناتج الكلى (TP) على المتغير(X) ، أى أن

$$AP = TP/X \qquad (8\text{-}2)$$

وما ينطبق على معادلات الناتج يمكن عمل مثله لمعادلات التكاليف والربح وغيره.



Example 8-1

Suppose that the average height of a basketball team is 185 cm. If a new (marginal) member 210 cm tall joins, the average height of the team increases. If the marginal member is exactly 185 cm

tall, the average height remains the same. If he is shorter than 185 cm, the average height declines.

واضح أن اللاعب الجديد الذى سيلتحق بفريق كرة السلة يمثل التغير الحدى وهذا التغير يناظره تغير فى مجموع أطوال أعضاء الفريق، وفى متوسط طول أعضاء الفريق.

Example 8-2

Find the marginal and the average functions for the following total cost function and, evaluate them at Q = 3 and Q =5.

$$TC = 3\,Q^2 + 7Q + 12$$

الحـــل

فى هذا المثال Q تعتبر كمية الإنتاج

$MC = dTC/dQ = 6Q + 7$

$AC = TC/Q = 3Q + 7 + Q/12$

At Q = 3,
MC=25 and AC = 20

At Q = 5 ,
MC = 37 and AC=24.4

٨-٢ العائد الحدى والربح الحدى

Marginal Revenue and Profit

العائد الحدى (Marginal Revenue, MR) هو زيادة الإيرادات (أو النقود) الناتجة من بيع وحدة أو أكثر، فوق حد (مستوى) معين. وفى حالة ثبات سعر الوحدة (r) يكون العائد الحدى ثابتا وتكون دالة العائد (R) خطية؛ فمع كل وحدة مباعة ـ

من المنتج – يزيد الإيراد (R) بمقدار ثابت قدره r من الجنيهات المصرية(L.E.) مثلا. وبالتالى فزيادة البيع تزيد الربح تلقائيا إذا كان سعر البيع أعلى من تكلفة إنتاج القطعة، وتلك هى الحالة الشائعة.

أما عندما تستبدل العلاقة الخطية بعلاقة غير خطية ، كالعلاقة التالية

$r = 21{,}000/\sqrt{Q}$ L.E./unit

فى هذه الحالة سعر الوحدة (r) غير محدد، إذ يلزم معرفة الكمية المباعة Q حتى يمكن معرفة السعر r باستخدام حساب التفاضل.

وعائد البيع الكلى R يحسب من المعادلة التالية

$$R = r \cdot Q \qquad (8\text{-}3)$$

بالتعويض عن r فى المعادلة السابقة ينتج

$R = Q * 21{,}000/\sqrt{Q} = 21{,}000\sqrt{Q}$

واضح من المعادلة السابقة أن معدل زيادة الإيرادات تتباطأ باستمرار بسبب الخفض الذى يحدث للسعر؛ لبيع كميات أكبر ، أنظر شكل (٨-٢).

$\text{Marginal revenue} = MR = dR/dQ = 21{,}000 / 2\sqrt{Q}$

واضح من شكل (٨-٢) أن أحد أهداف خفض سعر البيع هو زيادة المبيعات؛ لكى يمكن زيادة الاستفادة من طاقة المصنع وتخطى نقطة التعادل الأولى (B) والوصول إلى منطقة الربح. ويلاحظ فى شكل (٨-٢) وجود نقطتى تعادل بسبب الانحناء الموجود فى منحنى الإيرادات (R)، وكما سبق أن أوضحنا فى الفصل السادس (شكل ٦-٤).

وبيانات شكل (٨-٢) هى كالتالى:

التكاليف الثابتة =

$FC = 100{,}000$ L.E. / period

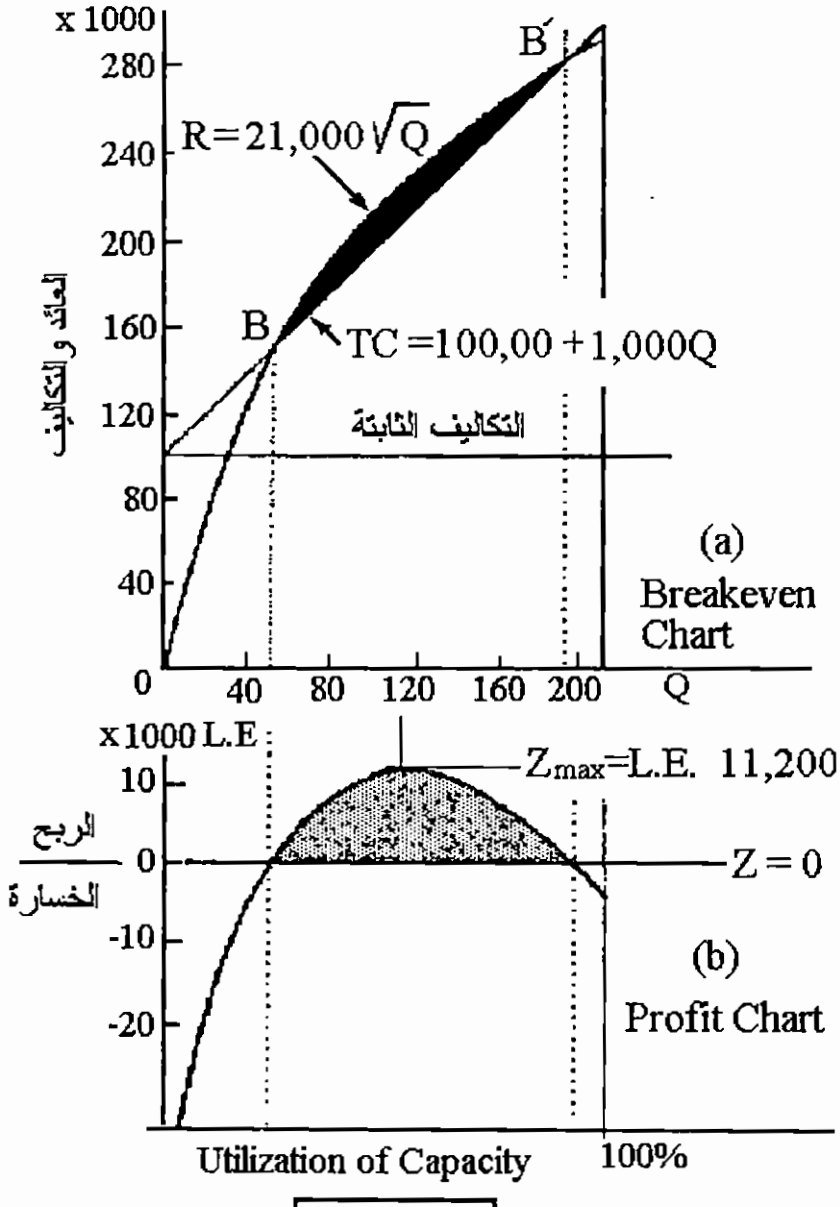
$v = 1000$ L.E./unit (Variable cost) التكاليف المتغيرة.

Q = No. of units produced and sold/period.

التكاليف(الكلية) الخطية = $TC = FC + v\,Q$.

وبالتعويض ينتج

$TC = 100{,}000 + 1{,}000\,Q$



شكل (٨-٢).

وباستدعاء المعادلة (٦-٧) والتعويض فيها ينتج

$$Z = R - TC \qquad (6\text{-}7)$$

$$Z = 21{,}000 \sqrt{Q} - [100{,}000 + 1{,}000\, Q\,]$$

ولتحديد نقاط التعادل (Q_{be}) عند نقطتى B & B´ نساوى Z بالصفر (كما هو معلوم) ونحل المعادلة السابقة فينتج

Q_{be1} =53 units & Q_{be2} = 188 units.

فى مثل هذه الحالة من المهم تعيين نقطة أقصى ربح ، ومن المعلوم سلفا ومن شكل (٨-٢) أنها تقع بين النقطتين B & B´. ويلاحظ من الشكل أن الربح يتزايد بدءا من نقطة B حتى يصل لقيمته القصوى ثم يتناقص حتى يصل للصفر مرة ثانية عند نقطة .

عند نقطة أقصى ربح Z_{max} يكون الربح الحدى (Marginal Profit) أو ميل منحنى الربح مساويا للصفر. ورياضيا نعبر عن ذلك بتفاضل معادلة الربح كالتالى:

$$\text{Marginal Profit} = dZ/dQ = 10{,}500 / \sqrt{Q} - 1{,}000 = 0$$

ومنها ينتج

$$Q = 110 \text{ units}$$

تمارين

١.برهن على أن التكلفة الحدية (MC) تساوى العائد الحدى (MR) عند مستوى الإنتاج الذى يحقق أقصى ربح.

2.Use the MC =MR condition proved in Exercise 1 to find the critical values at which profit will be maximized when

$TC = 0.1Q^3 - 5Q^2 + 220Q + 800$

$TR = 400Q - 5Q^2$

Draw the profit variation versus Q.

٣. وقع بيانات الجدول التالى على بيانى الحجم-التكلفة، واستنتج التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة وارسم تغير كل منهما مع تغير مستوى (حجم) الإنتاج. افترض ما تراه مناسبا.

حجم الإنتاج	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
التكلفة الكلية	٨٠	١٥٠	٢١٠	٢٦٨	٣٢٥	٣٧٥	٤٣١

4.Find the marginal cost function for the following average cost function

$$AC = 1.5Q + 5 + 50/Q .$$

٥. إذا كانت دالة السعر (r) هى

$$r = 45 - 0.5\ Q$$

ودالة التكلفة الكلية هى

$$TC = Q3 - 39.5Q2 + 120Q + 125$$

احسب مستويات الإنتاج التى تحقق:

أ. أقصى إيراد ب. أقصى ربح ج. أقل تكلفة حدية.