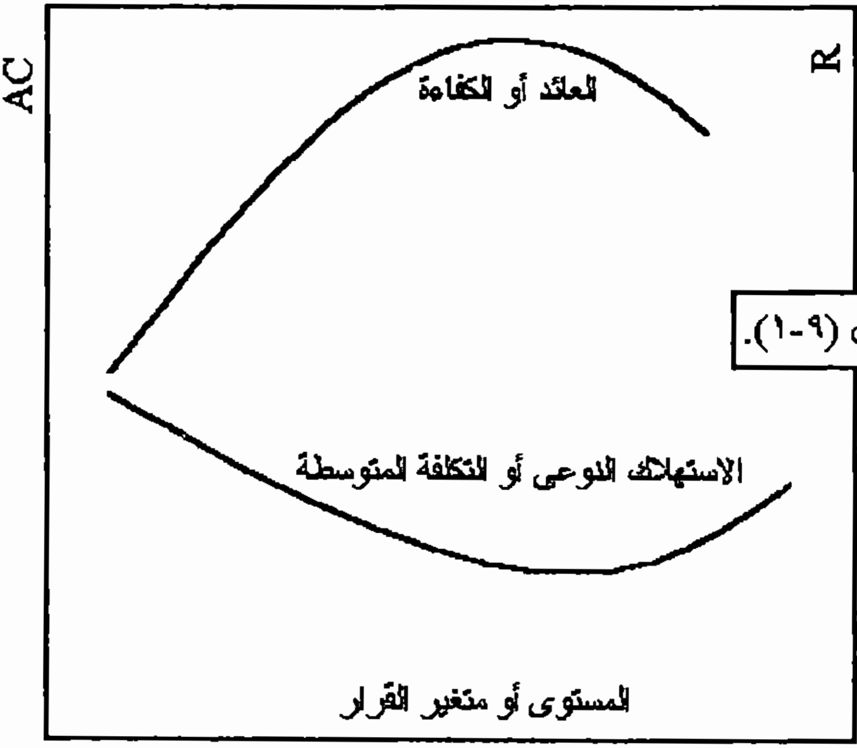
٩ المثليات المقيدة

Constrained Maxima

الدنيا مليئة بـالمتغيرات المتواصلـة فيمـا يسـمى بديناميكـا الحيـاة وأنشـطتها ومؤثراتـها العديدة. ووسط هذه المتغيرات توجد حالات مرغوبة وأخرى غير ذلك. وقد مكن الله - سبحانه وتعالى ـ الإنسان من التحكم النسبى فـى بعـض هـذه المتغـيرات ليوظفـها فـى تحقيق ما يريد من منافع وأغراض. و فى الدراسات النظرية يوجد ما يسمى بالحـالات المثلى (Optimum Conditions) وهذه المثليات تكون لنماذج بنيـت علـى فـروض معينة؛ لتخطى صعوبات وتعقيدات الواقع. ولذلك فالنتائج المثلى المسـتخلصـة مـن تلـك النماذج إذا ما قارناها بالواقع الفعلى فبالكاد يمكن أن نسميها "قريبـة أو شـبه المثلـى" (Near Optimum) ، وليس أكثر من ذلك.



شكل (٩-١).

وفى معالجة مثل هذه النمـاذج عـادة مـا نستخدم حسـاب التفاضل للوصـول بـالنموذج لأقصـى قيم ممكنـة سـواء لأعلـى (Maximum) أو لأسفل (Minimum)، أنظـر شكل (٩-١)، وذلك هو محور هذا الفصل، ففى الاقتصاد يـود الإنسـان تعظيـم المنفعـة كما يود تقليل التكلفة.
وفى تلك المعالجات يواجه الإنسان العديد من القيود التى تحد مـن اندفاعـه فـى تحقيـق كـل رغباتـه، فلكـل شـىء حـد أو حـدود (قيـود). ولذلـك فالنشـاط البشـرى دومـا مقيـد بالنواميس الكونية وبمحدودية الموارد والطاقات المتاحة. والإنتاجية من الموضـوعـات التى يلزم الوصول بها إلى أقصى قيمها الممكنة.

٩-١ الإنتاجية الهندسية

Engineering Productivity

الإنتاجية (Productivity) هى قضية العصـر ومن أبرز المؤشرات التى تبين مـدى النجاح الفنى لنظم الإنتاج ، وفى نفس الوقت هى من المصطلحـات الفنيـة التـى تلتبس على الكثيرين، ونجدهم يخلطون بين الإنتاجيـة والإنتـاج (Production)، فكثير مـن الناس يتصورون أن زيادة الإنتاج تعنـى بـالضرورة زيـادة الإنتاجيـة أو الربـح، وهـذا التصور غير صحيح ، وفى هذا الجزء نحاول كشف هـذا اللبس بتوضيـح معنـى كـل من المصطلحين.

الإنتاج يهتم بمجمل النشاط لإنتاج سلع أو خدمات. وبلغة أخرى:
Production is concerned with the activity of producing goods and/or services.

أما **الإنتاجية** فتركز على تحقيق <u>الكفـءالاستخدام</u> للموارد (المدخلات) فى إنتاج السلع والخدمات.
Productivity is concerned with the <u>efficient</u> utilization of resources (inputs) in producing goods and/or services (output).

Example 9-1

Suppose that a company manufacturing electronic calculators produced 10,000 calculators by employing 50 people at 8 hours/day for 25 days. Then, in this case,

Production (volume, Q)= 10,000 calculators

Productivity (of labor) = 10,000/ 50/8/25 = 1 calculator / man-hour.

Quite often the terms **productivity, efficiency,** and **effectiveness** are confused with each other.

معلوم أن الكفاءة فى العمليات الهندسية هى النسبة بين خرج النظام ودخله،والكفاءة هنا حدها الأقصى هو الواحد الصحيح. أى أن

$$\eta \leq 1$$

أما فى مجال الإنتاج فهى النسبة بين الخرج الفعلى وبين الخرج القياسى المنتظر من النظام، وفى هذه الحالة يمكن أن تتجاوز الواحد الصحيح.

Efficiency is the ratio of actual output attained to standard output expected.

فمثلا لو كان متوسط الإنتاج الفعلى لأحد العمال هو ١٢٠ قطعة فى اليوم بينما المقتن هو ١٨٠ قطعة ، ففى هذه الحالة تكون كفاءة هذا العامل

η = 120/180 = 0.6667

أما **الفعالية** فهى تختلف عن الكفاءة:

Effectiveness is the degree of accomplishment of objectives.

بمعنى أن الفعالية تتعلق بدرجة الأداء بينما الكفاءة تتعلق بمدى الاستفادة (توظيف) من الموارد ، وعلى ذلك تكون **الإنتاجية** هى فى الحقيقة توليفة من الكفاءة والفعالية. ونعبر عن هذه التوليفة كما يلى:

Productivity index = Output obtained / Input expended

=Performance achieved / resources consumed
= (Effectiveness) / (Efficiency).

٩-٢ التعريفات الأساسية للإنتاجية

بالنظر لشكل (٩-٢) نتدبر التعريفات التالية:

Partial Productivity is the ratio of output to one class of input.

فكما فى المثال السابق (٩-١) تم حساب إنتاجية العامل بقسمة كمية الإنتاج على ساعات العمال (أو العامل)، والناتج يعد مقياسا لإنتاجية العامل. وأيضا إنتاجية رأس المال تحسب بقسمة كم الإنتاج على رأس المال الداخل فى الإنتاج، وكذلك تحسب إنتاجية الخامات والأرض والماكينات ... إلخ.

شكل (٩-٢). تمثيل للنظام الإنتاجى.

Total-Factor Productivity is the ratio of net output to the sum of associated labor and capital (factor) inputs.

المقصود با net output هو الخرج الكلى مطروحا منه السلع والخدمات الوسيطة التى تشترى من الغير. هذا ويلاحظ أن المقام فى حساب هذه النسبة يتضمن العمالة ورأس المال فقط.

Total Productivity is the ratio of the total output to the sum of all input factors.

وهكذا نجد أن **الإنتاجية الكلية** هى مقياس يعكس التأثير المشترك لكل مدخلات الإنتاج المعتبرة بالنسبة للمنتج.

فى كل التعريفات السابقة كنا نعبر عن كل من المخرجات والمدخلات بدلالات (Terms) طبيعية كالسيارة ومتر الأرض وساعة الماكينة وغيرها، وهنا يلزم التنويه إلى وجوب تحويل قيم هذه الوحدات إلى وحدات نقدية أساسية كالجنيه والمارك والدولار ...إلخ، إذا أردنا التعبير عن الإنتاجية الكلية كنسبة بلا وحدات.

Productivity = Value (Outputs) / Value (Inputs)

وفى هذه الحالة يجب أن تكون الإنتاجية أكبر من الواحد الصحيح لكى يكون هناك ربح.

٩-٣ النموذج الحر
Free Model

فى هذه الحالة تكون قيود الموارد غير موضوعة فى الاعتبار ولذلك نعتبر النموذج حر إلى حد ما من الناحية النظرية. ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالى:

مثال ٩-٢

المطلوب تقرير الكميات المثلى من المنتجين X & Y التى تحقق أقصى عائد بيع.
افترض دالتى الطلب كالتالى:

$r_x = 500 - 2Q_x$ L.E./unit and $r_y = 800 - 4Q_y$ L.E./unit

الحل

دالة العائد الكلى تعبر من بيع المنتجين X & Y :

$$R(X, Y) = r_x Q_x + r_y Q_y$$

$$= (500 - 2Q_x) Q_x + (800 - 4Q_y)Q_y$$

$$= 500Q_x - Q_x^2 + 800Q_y - 4Q_y^2$$

لمعرفة أقصى عائد نفاضل، معادلة العائد (السابقة)، جزئيا بالنسبة ل Q_x و Q_y .

$$\partial R/\partial Q_x = 500 - 4 Q_x = 0$$

$$\partial R/\partial Q_y = 800 - 8 Q_y = 0$$

حل المعادلتين السابقتين يعطى الكميات المثلى للنموذج الغير مقيد:

$Q_x` = 125$ units.

$Q_y` = 100$ units.

بالتعويض بهذه القيم فى معادلة العائد ينتج:

$R` = R(125, 100) = 71,250$ L.E.

٩-٤ النموذج المقيد

Constrained Model

كما ذكرنا قبلا، الواقع العملى ملئ بالقيود. وهنا هب أن تدقيق المثال السابق ذكرنا بمحدودية الطاقة الإنتاجية لمعدات الإنتاج خلال مدة زمنية معينة (Capacity, Ca). وهذه المحدودية هى القيد (Constraint) فى هذه الحالة. فكل وحدة من المنتج X يلزمها زمن تشغيل قدره 3.75 hr. على الماكينة، وكل وحدة من المنتج Y يلزمها زمن قدره 3hr. على نفس الماكينة.

مثال ٩-٣

فى المثال السابق (٩-٢) افترض القيد التالى على حجم الإنتاج المتاح، وأعد حل المثال.

$3.75\ Q_x + 3\ Q_y \geqslant 525$ hr.

الحل

المطلوب هو تعظيم (Maximization) إيرادات البيع من المنتجين؛ بإنتاج الكميات التى تحقيق أقصى عائد ممكن مع عدم تجاوز القيد المذكور، (Ca =525 hr.). وبعبارة أخرى

$$\text{Maximize: } R = 500Q_x - Q_x^2 + 800Q_y - 4Q_y^2$$ دالة الهدف

$$\text{Subject to : } 3.75\ Q_x + 3\ Q_y\ ?\ \ 525$$ القيد

واضح من المعادلتين السابقتين أننا أمام مسألة برمجة غير خطية (Nonlinear Programming) وهى أصعب نسبيا فى الحل من المسائل الخطية. ورغم أننا نتعامل مع متغيرين فقط فالإجابة غير واضحة بالمرة. وأسلوب الحل الذى سنتبعه يركز على توضيح بعض أساسيات ومعانى البرمجة الغير خطية.

وفى البداية نختبر مدى التزام الحل السابق بالقيد المذكور، فنعوض بقيم Q_x` و $Q_y$` فى لا متساوية القيد المذكور:

$$3.75\ (125) + 3\ (100) = 768.75\text{hr.}$$

واضح أن القيمة الناتجة أكبر من الطاقة المتاحة (Ca) التى تساوى 525hr. . وعلى ذلك فالحل السابق (الغير مقيد) غير جائز فى هذه الحالة؛ لأنه تجاوز حدود الطاقة المتاحة. ولكن وضح لنا أن الحل الأمثل الجائز $(Q_x^*\ ,\ Q_y^*)$ يجب أن يظل فى حدود الطاقة المتاحة (525hr.) لا يتجاوزها. أى أن

$$3.75\ Q_x^* + 3\ Q_y^* \geqslant 525$$

ونفترض أننا فى الحالة المثلى سنستخدم الطاقة المتاحة بالكامل ونحول اللامتساوية السابقة إلى متساوية على الشكل التالى:

$$3.75\ Q_x^* + 3\ Q_y^* = 525$$

ثم نعيد كتابتها على هيئة معادلة صفرية

$$3.75\ Q_x^* + 3\ Q_y^* - 525 = 0$$

والآن سنصطنع حيلة رياضية تبدأ بإرخاء المتساوية السابقة (أى حذف ال *) وضرب طرفيها فى مضروب مصطنع (λ) يسمى مضروب "لاجرانج" (Lagrangian Multiplier) لتصبح هكذا

$$\lambda\ (3.75\ Q_x + 3\ Q_y\ -\ 525) = \lambda\ (0) = 0$$

وفيما بعد سنلقى مزيدا من الضوء على λ هذه.
ما زالت المعادلة السابقة = 0. وطرح الصفر من دالـة الـهدف أو مـن أى دالـة لايغير منها شيئا، غير أنه سيكبرها من حيث الشكل، لتصبح المعادلة الممتدة هكذا

$$R = 500Q_x - Q_x^2 + 800Q_y - 4Q_y^2\ - \lambda\ (3.75\ Q_x + 3\ Q_y\ -\ 525)$$

والآن سنرى أنه أثناء تعظيم (Maximization) هـذه الدالـة سـتظل ملتزمـة بـالقيد لا تتجاوزه. ونبدأ الآن بالتفاضل الجزئى للمعادلة بالنسبة ل Q_x و Q_y و λ ، ونسـاوى ناتج التفاضل فى كل خطوة بالصفر كالتالى.

$$\partial R/\partial Q_x = 500 - 4\ Q_x\ - 3.75\lambda = 0$$

$$\partial R/\partial Q_y = 800\ - 8\ Q_y - 3\lambda = 0$$

$$\partial R/\partial \lambda = 3.75\ Q_x + 3\ Q_y\ -\ 525 = 0$$

اتضح الآن بجلاء أن المعادلة الأخيرة هى القيد نفسه الـذى سيشـرك فـى بلـورة الحـل؛ ليضمان عدم تجاوز الطاقة القصوى المتاحة. وبحل المعادلات الخطية الثلاث الأخيرة تنتج الكميات المثلى والقيمة المناظرة لمضروب "لاجرانج":

Q_x^* =75.76 units, Q_y^* = 80.3 units and, $\lambda^* = 52.52$

بالتعويض فى دالة الهدف بقيم Q_x^* , Q_y^* الناتجة يتضح أن أقصى عائد ممكن هو

R^* = 64,849 L.E.

وهو أقل من الناتج فى حالة حل مثال النموذج الغير مقيد، R` = 71,250 L.E.

والآن للسائل أن يسأل: ماذا تعنى λ؟

والجواب: λ فى هذا المثال، هى رمز التغير فى العائد الذى يناظر التغير الطفيف فى طاقة (أو سعة) الماكينة (Ca)، أى أن λ هى دالة التغير الحدى (Marginal Revenue Function).

وكنوع من المراجعة للاطمئنان على حسن الفهم نزيد الطاقة المتاحة (Ca) بمقدار ساعة واحدة ثم نعيد حل المسألة وسنجد أن R^* قد زادت بمقدار 52.52L.E. ، أى بمقدار قيمة λ^*. وعلى الطالب أن يجرب ذلك بنفسه كتمرين.

وللمراجعة السريعة نعوض فى معادلة العائد الحدى للمنتج X

$$\partial R/\partial Q_x = 500 - 4\ Q_x$$

بالقيمة $Q_x^*=75.75$ ، فنجد أن العائد الحدى يساوى 196.96 L. E.

وحيث أن الوحدة من المنتج X تستغرق 3.75hr. من زمن الماكينة فيكون العائد الحدى للساعة = $\lambda^* = 196.96/3.75=52.52$.

وجدير بالذكر أن الفروق الطفيفة فى الأرقام الناتجة سببها هو أن قيمة λ تتغير من نقطة إلى التى تجاورها مباشرة، أنظر شكل (٩-٣)، فتجدها تتناقص باستمرار مع زيادة طاقة الماكينة.

وبعبارة أخرى، العائد الحدى يتناقص مع زيادة طاقة الماكينة، والسبب فى ذلك هو لا-خطية (Non-linearity) دالة الهدف.

ومن الممكن استنتاج دالة λ بدلالة طاقة الماكينة (Ca) إذا وضعنا Ca مكان ال 525 أثناء حل المسألة فنتنتج

$$\lambda = 165.66 - 0.2155\ Ca$$

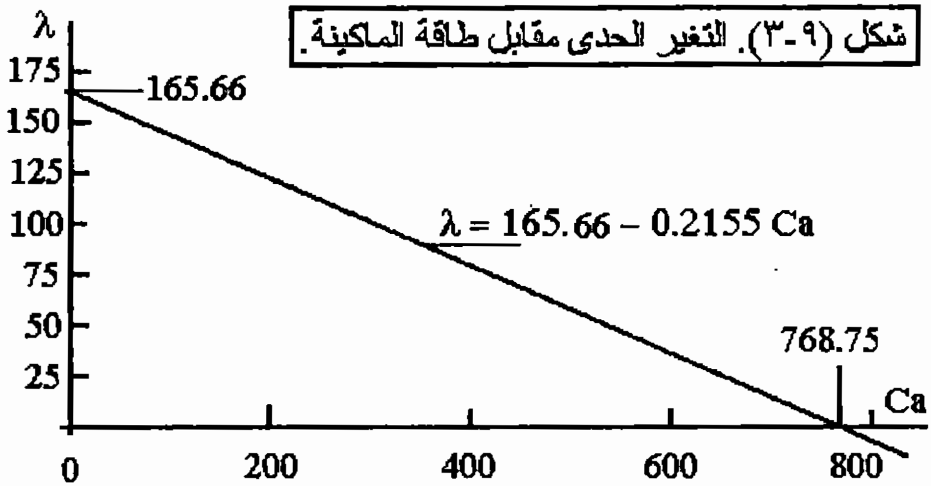
وهذه الدالة موضحة بيانيا فى شكل (٩-٣)، وفيه يلاحظ أن قيمة λ تتناقص باستمرار حتى تصل للصفر (تتلاشى) عندما تصل Ca لنقطة 768.75hr.

وتلك هى نقطة الحل الغير مقيد

$Q_x` = 125$ units.

$Q_y` = 100$ units.

عند تلك النقطة يصل العائد الكلى إلى قيمته القصـوى حيث العـائد الحـدى = صفر. وبعد ذلك يصبح العائد الحدى سالبا ويتناقص العائد الكلى.



شكل (٩-٣). التغير الحدى مقابل طاقة الماكينة.

٩-٥ أمثلة عملية

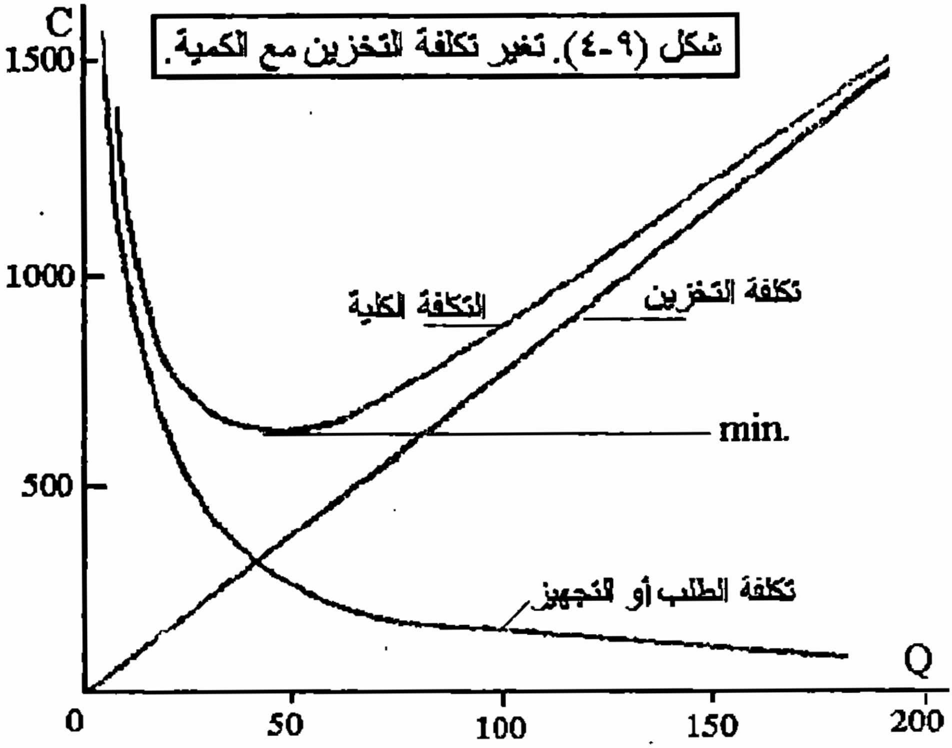
فى الحياة العملية يواجه المهندس العديد من المسـائل التـى تتطلـب حسـاب الحالـة شبه المثلى (الاقتصاديـة) مـع الالـتزام بـالأصول والشـروط الفنيـة للمسـألة. وفـى معظـم الحالات يلزم التوفيق بين بعض المتناقضـات، لأن خصـائص وديناميكيـات المؤثـرات تجعل بعضـها يرتفع بينما البعض الآخر ينخفض، أو هكذا الأحوال تتقلب.

وفيما يلى نعرض عدة أمثلة تطبيقية تبحث عن المستويات المثلى.

المثال الأول: التكاليف المتوسطة

هو محاولة تقليل التكاليف الكلية للتجـهيز والتخزيـن والشـراء. وفيـه يلاحـظ أن تكلفـة تخزيـن القطعـة تزيـد بزيـادة مسـتوى المخـزون (الكميـة). وأيضـا يلاحـظ أن نصيـب

القطعة من تكاليف الإحضار أو التجهيز للإنتاج تقل مع زيادة الكمية، كما هو مبين فى شكل (٩-٤)، وهذا هو التعارض. أما متوسط التكاليف الكلية فتأخذ شكل حرف ال ن أو حرف ال U، أى أنها ذات قاع (حد أدنى .Min). والحالة المثلى (للقرار) فى هذا المثال هى التى تصل بنصيب القطعة من التكلفة إلى الحد الأدنى.



شكل (٩-٤). تغير تكلفة التخزين مع الكمية.

المثال الثانى: تكاليف الصيانة

فى هذا المثال (شكل ٩-٥) تتضح أيضا المتناقضات، حيث تعلو المتغيرات وتهبط، وفى الإجمال نجد أن منحنى التكاليف الكلية للصيانة يتقعر ليكون له قيمة دنيا (.Min) بينما منحنى الإنتاج والإتاحية (Availability) يتحدبان ليكون لكل منهما قيمة قصوى (.Max). تلك هى متغيرات النواتج على المحاور الرأسية، أما المحور الأفقى فيمثل مستوى الصيانة الوقائية فى اتجاه ومستوى الأعطال فى الاتجاه المعاكس، لأن مستوى الأعطال يتناسب عكسيا مع مستوى الصيانة الوقائية. ومن

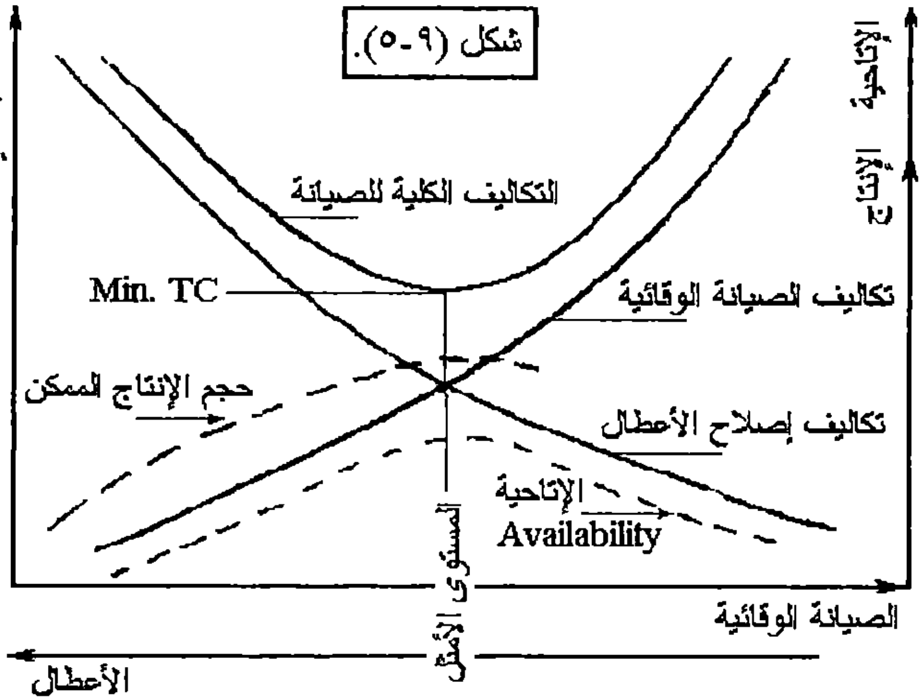
شكل (٩-٥) نجد أن من يفهم الصيانة على أنها مجرد إصلاح الأعطال بعد حدوثها ويهمل الصيانة الوقائية، فمعنى ذلك هو التحرك على منحنى التكاليف الكلية ناحية الشمال، ومن يغالى فى الصيانة الوقائية سيتحرك على نفس المحنى لأعلى من ناحية اليمين.

وجدير بالذكر أن تكاليف تعطل (فقدان) الإنتاج أثناء فترات إصلاح الأعطال لم توضع فى الاعتبار فى شكل (٩-٥). وفى الدراسات المتخصصة لاقتصاديات الصيانة يجب حساب ذلك ووضعه فى الاعتبار.

المثال الثالث: التصميم المثالى

المهندس الواسع الأفق لا يعتبر التصميم مجرد خطوات حسابية للتأكد من المتانة أو طاقة التحمل أو تغطية السعة المطلوبة، ولكن التصميم فى جوهره هو فن الوصول للصورة المثلى (Optimum).

شكل (٩-٥).

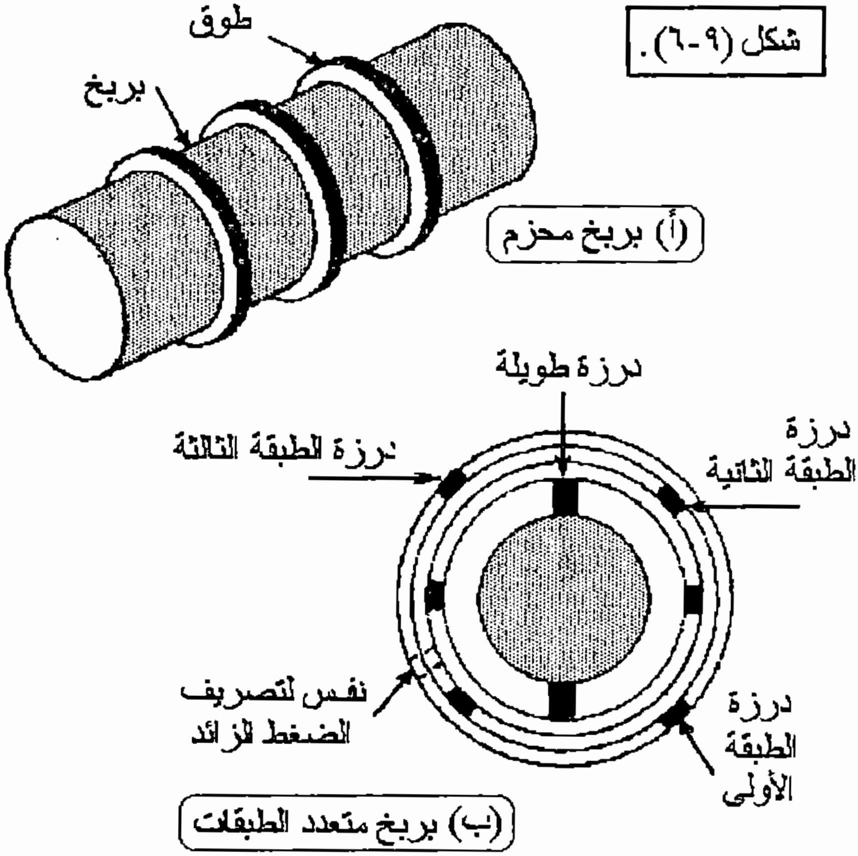


وهذا المثال يعرض جانبا من حالة التصميم الأمثل لبرابخ (أنابيب Penstocks) لتوصيل المياه فى مشروع "سباريجيرى Sabarigiri" بالهند، وذلك لتوصيل المياه

للتوربينات المائية ؛ لتوليد الطاقة الكهربائية. وعلى المصمم فى مثل هذه الحالة أن يضع فى اعتباره تكاليف الإنشاء وأيضا المفاقيد الهيدروليكية المصاحبة للتشغيل؛ للوصول للحالة الأكثر اقتصادا.

بفرض أن كمية المياه (Q) المطلوب تصريفها معروفة وسرعة المياه فى البربخ

شكل (٩-٦).

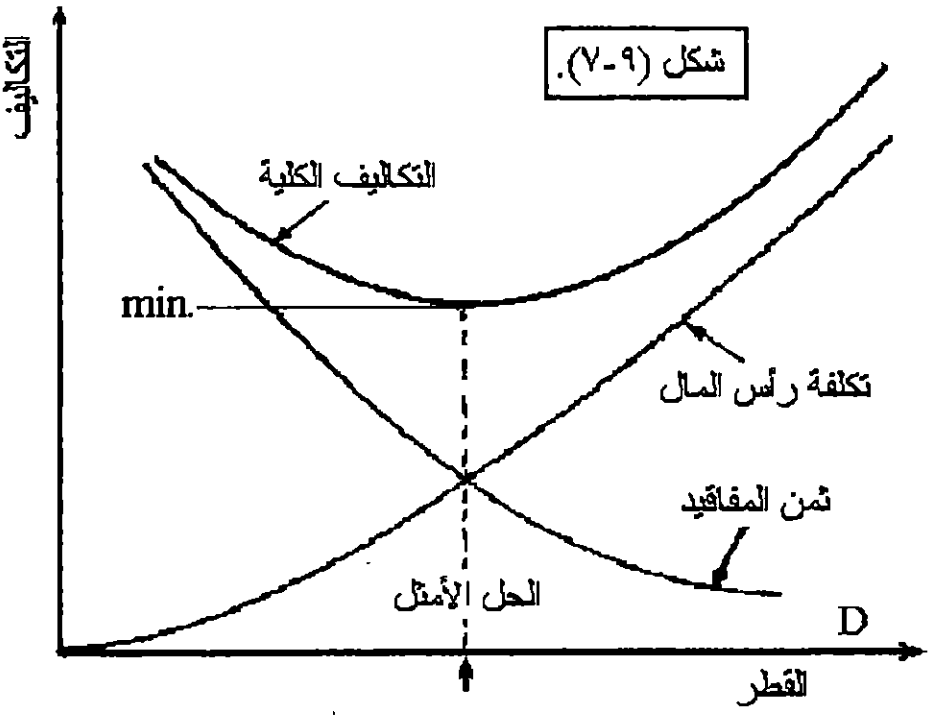


ستؤثر كثيرا على المفاقيد الهيدروليكية، بسبب الاحتكاك (H_f). ولذلك فمساحة مقطع البربخ تعتبر عامل حاكم لاقتصاديات المشروع. كثرة عدد الأنابيب يزيد كمية الصلب اللازمة لإنشاء المشروع وبالتالى يرفع التكاليف.
المفاقيد الاحتكاكية (الهيدروليكية) تتناسب عكسيا مع الأس الخامس لقطر البربخ كما فى المعادلة التالية:

$$H_f = \frac{FLQ^2}{12.1D^5}$$

بتحديد كمية المياه اللازم تصريفها (Q) نجد أنفسنا أمام متغيران متعاكسان:
- تكلفة رأس المال (الإنشاء).
- ثمن المفاقيد الاحتكاكية.

ومجمل الصورة يمكن تمثيلها كما فى شكل (٩-٧).



شكل (٩-٧).

منحنى التكاليف الكلية – هنا - يشمل تكلفة الإنشاء (رأس المال) وثمن المفاقيد الهيدروليكية. والقطر الأمثل هو الذى يناظر أقل تكلفة كلية كما هو موضح فى شكل (٩-٧).

تمارين

1.If a restaurant were to generate food services valued at L.E. 4500 per day and to incur total costs L.E. 3000 per day, what would be the measure of productivity?

2. Consider the ABC Company. The data for output produced and inputs consumed for a particular time period are given below:
Output = L.E. 1000
Human input = L.E. 300
Material input = L.E. 200
Capital input = L.E. 300
Enrgy input = L.E. 100
Other expense input = 50
Assume that the company purchase all its materials and services, including the energy, machinery and equipment (on lease), and other services such as marketing , advertising, information processing, consulting..etc. Calculate the partial productivities, total -factor productivity, and total productivity.
(Ans. L.E. /L.E. 3.33, 5, 3.33 , 10, (350/(300+300) , and 1.053)

٣. لمثال (٩-٢) احسب وارسم تغير دالة العائد الكلى مقابل تغير طاقة الماكينة.

4. A monthly record of operating expenses, and selling price for a new manufacturing plant is summarized in the following equations:
$v= 0.005Q + 4$ $/unit
$r =100 -0.001Q$ $/unit
Fixed costs are considered reasonable at $200,000 per month.

a. Calculate the level of output which produces the greatest profit.
b. Plot the total revenue, total and marginal profit curves.

٥. دالتى الطلب والتكلفة لأحد المنتجات هما على التوالى:

$Q = 2,100 - 38\,r$

$TC = 2,200 + 600Q$

احسب السعر والكمية الذين يحققان أقصى ربح، واحسب أقصى ربح.

٦. هب أن دالتى السعر للمنتجين x & y هما كالتالى :

$r_x = 1,000 - 13Q_x$ and $r_y = 850 - 6Q_y$

وأن طاقة خط الإنتاج مقيدة بالعلاقة التالية:

$$3Q_x + 1.5Q_y \leq 182$$

a. Find the revenue-maximizing quantities of x and y and the max. revenue, assuming that the constraint does not exist.
b. Consider the constraint and resolve the problem.
c. By how much would revenue increase if plant capacity were to rise by one unit, from 182 to 183.

7. for a rough analysis of different bridge designs, it is assumed that costs are proportional to the span length X between piers. As the span length increases, a greater amount of steel is required to support the superstructure. However, fewer piers are required when span lengths are longer. The cost of each span for a certain bridge is

$C_s = 50X^2 + 5,000X - 100,000$

and the cost for a pier is given by

$C_p = 200,000 + 1,000X$

اعتبر الأبعاد بالقدم واحسب البحر (Span) المثل بين كل ركيزتين:

- بطريقة الجدول.
- باستخدام المعادلات الرياضية.

٨. مهندس يصمم خزان مياه اسطوانى الشكل. السعة المطلوبة ٢٠٠ لتر. التكاليف الشاملة للخامات وجلفنة الوجهين تعطى بالعلاقة

$$C_c = 70D^2 + 42/D$$

تكاليف التقطيع واللحامات تحكمها العلاقة

$$C_w = 40D + 2/D^2$$

احسب القطر الأمثل الذى يقلل التكاليف الإجمالية وارسم الخزان بمقياس رسم مناسب.

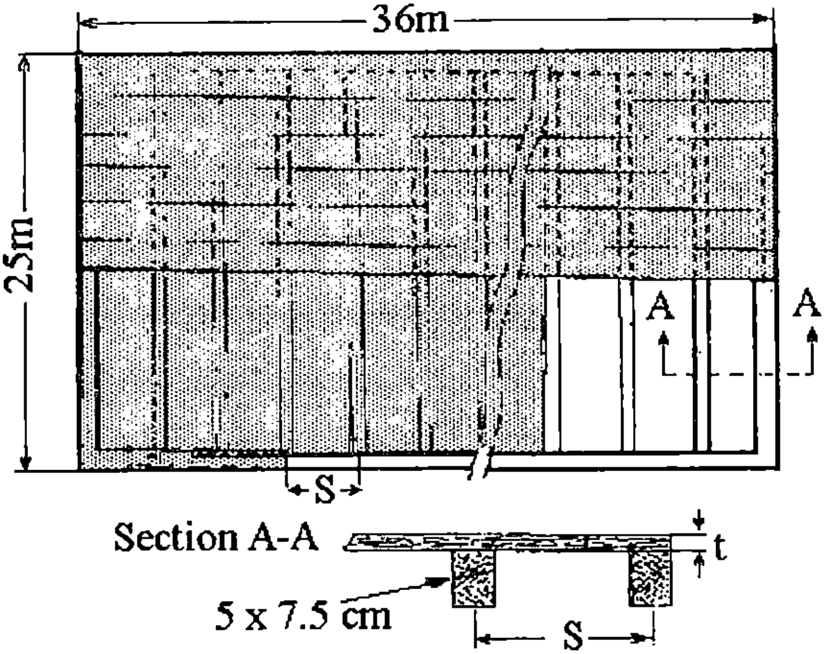
٩. احسب القيم الحرجة التى تقلل التكاليف لدى مؤسسة تنتج السلعتين X & Y إذا علمت أن دالة التكلفة الكلية هى

$$C = 8X^2 - XY + 12Y^2$$

مع العلم بأن المؤسسة ملزمة حسب العقد ألا تقل الكمية المنتجة عن ٤٢ قطعة من الصنفين، أى أن:

$$X + Y = 42 .$$

١٠. المطلوب تغطية أرضية صالة الألعاب بكلية الهندسة بحلوان بالخشب الأبيض (الموسكى). أبعاد الصالة (36 x 25m) موضحة فى الشكل. والهيكل الخشبى (العلفة) مكونة من قضبان مستطيلة (2 X 7.5cm) المقطع تتباعد بخطوة S، يعلو العلفة ألواح متجاورة بسمك t تحدده المعادلة $t = 0.04\ S$؛ حتى لا يحدث ترخيم تحت أرجل اللاعبين.



- احسب الأبعاد التى تجعل كمية الأخشاب اللازمة أقل ما يمكن.
- احسب كمية الخشب اللازمة.