٢ المتسلسلات الاقتصادية
Economic Series

المتغيرات الاقتصادية هى ـ بشكل أو بآخر ـ متغيرات فى الزمن أساسا. وفى دراسة وتقييم المشروعات والبدائل، من الناحية الاقتصادية، كثيرا ما يلزم حساب المكافئ المستقبلى (F) أو المكافئ الحاضر (P) لمجموعة أقساط ثابتة (منتظمة نرمز لكل منها بالرمز A) ، أو متدرجة القيمة نرمز لها بالرمز (G). وجملة الأقساط أو الإيداعات تسمى متسلسلة (Series). وأحيانا يلزم حساب العكس، أى الأقساط المكافئة لقيمة مستقبلية (F) أو لقيمة حاضرة (P) موزعة فى أقساط أو إيداعات (Deposits) متسلسلة، قد نحتاجها أو نوظفها فى مشروع ما.

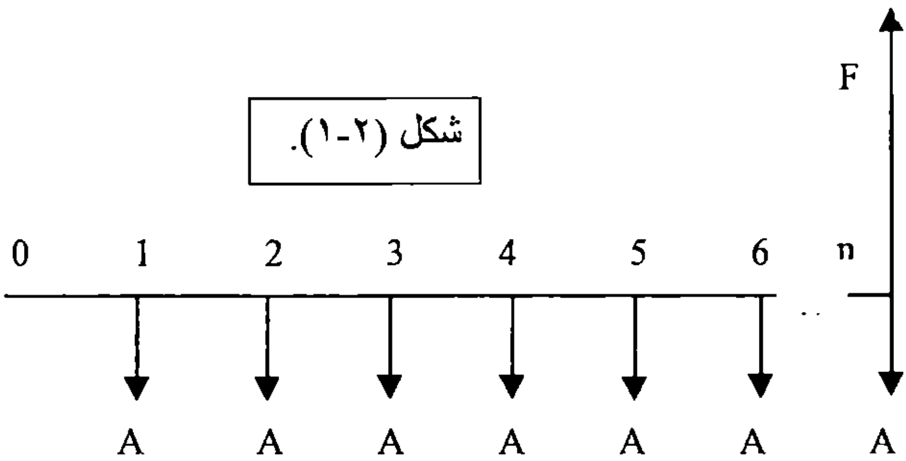
٢-١ المكافئ المستقبلى للأقساط المنتظمة
Fututr Sum of Uniform Series

يمكن تمثيل المكافئ المستقبلى (F)، لمجموعة أقساط منتظمة مقدار كل منها (A)، بيانيا برسم بيانى التدفق النقدى (CFD) لها كما فى شكل (٢-١).

ولتيسير معالجة مثل هذه الحالة، نستخلص صيغة رياضية تربط الأقساط بمجموع قيمها المستقبلية (F).

ولاشتقاق هذه الصيغة نفترض أن القسط قيمته A يودع فى نهاية كل فترة، أى القسط الأول يودع فى نهاية الفترة الأولى والذى يليه يودع فى نهاية الفترة الثانية وهكذا، والأقساط متتابعة (كاملة لا ينقص منها أى قسط) كما هو موضح فى شكل (٢-١)، والقسط الأخير يودع فى نهاية آخر فترة، أى فى التاريخ المستقبلى المحدد لسحب (أو دفع) إجمالى المبلغ بأرباحه، (F).

وفى حالة مخالفة أى من هذه الفروض (الشروط) لا يصح استخدام المعادلات التى سنستنتجها.



شكل (٢-١).

وعلى ذلك فالقسط الأخير (رقم n) لن يمكث شيئا، ولن يحسب لـه أى ربح، ولكن وضعه على الرسم سيسهل اشتقاق الصيغة الرياضية المطلوبة. ومن نافلة القول أن القسط الذى يسبقه (رقم n-1) سيمكث عاما أو فترة، ويحسب لـه ربح فترة واحدة بنسبة i. والذى يسبقه سيمكث فترتان وهكذا ... ويكون مجموع كل الأقساط الموضحة بأرباحها فى المستقبل هى:

$$F=A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots\ldots A(1+i)^{n-1} \qquad (2\text{-}1)$$

$$F= A\ [(1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots (1+i)^{n-1}] \qquad (2\text{-}2)$$

بضرب طرفى المعادلة السابقة (٢-٢) فى (1+i) ينتج المعادلة (٢-٣)

$$F(1+i) = A[(1+i) +(1+i)^2 +(1+i)^3 +\ldots +(1+i)^{n-1} +(1+i)^n] \qquad (2\text{-}3)$$

بطرح المعادلة (٢-٢) من المعادلة (٢-٣) ينتج المعادلة (٢-٤)

$$F^* i = A[(1+i)^n - 1] \qquad (2\text{-}4)$$

التى نضعها على الصورة (٢-٥)

$$F = A\,[(1+i)^n - 1]\,/i \qquad (2\text{-}5)$$

وتكتب على صورة المعامل القياسى كالتالى

$$F/A = [(1+i)^n - 1]\,/i \qquad (2\text{-}6)$$

أو على الصورة المقابلة

$$A/F = i\,/\,[(1+i)^n - 1] \qquad (2\text{-}7)$$

والنسبة A/F أو ما يساويها $[(1+i)^n - 1]\,/\,i$ يسمى معامل إغراق التمويل (رأس المال) Sinking Fond Factor وسوف نستخدمها فى الفصل السابع

وجدير بالذكر أنه لا يلزم للمهندس ولا للدارس أن يحفظ هذه المعادلات لكن المهم أن تكون متاحة تحت يده عند اللزوم سواء فى ورقة أو مُخزنة الكترونيا.

مثال ٢-١

المسئولون عن مدينة الأمل يبحثون إمكانية تمويل إنشاء حديقة جديدة تقدر تكاليفها بمليون جنيه. من المقترح أن يكون التمويل عن طريق فرض رسم قدره ٥ قروش على كل زجاجة أو علبة مرطبات تباع فى المدينة. من واقع الإحصاءات ينتظر ان تكون الحصيلة ١٢٥٠٠٠ جنيه سنويا، ويمكن استثمار تلك الحصيلة فى مشروع يحقق عائدا سنويا حوالى ١٨%. متى يمكن أن يتوفر المبلغ المطلوب لإنشاء الحديقة؟

i=18%

n	Compound Amount (F/A)
1	1.0000
2	2.1800
3	3.5724
4	5.2154
5	7.1542
6	9.4420
7	12.1415

الحل

بفرض أن حصيلة الرسم يبدأ استثمارها بعد تجميعها فى نهاية كل عام، ونعوض فى المعادلة (٢-٥)؛ لحساب n كالتالى:

$$1,000,000 = 125,000\ [(1.18)^n - 1]/0.18$$

ومنها ينتج أن

$$\underline{n = 5.389246 yr}.$$

معنى ذلك انه بعد حوالى خمس سنوات يمكن إنشاء الحديقة.

* * * * *

وفى حالة استخدام الجدوال يكون دليلنا الرئيسىهو قيمة ($i = 18\%$). نتحرك فى العمود بحثا عن قيمة $F/A=1,000,000/125,000=8$.

للأسف هذه القيمة غير موجودة فى الجدول، لكنها بالتأكيد تقع فى الفراغ الذى يشير إليه السهم المدسوس فى الجدول الموضح على شمال الصفحة السابقة. ومعنى ذلك أن قيمة n تقع بين العامين الخامس والسادس. وبالاستكمال (Interpolation) يمكن حساب قيمة قريبة من التى سبق الحصول عليها حسابيا.

٢-٢ المكافئ الحاضر للأقساط المنتظمة

Present Worth of Uniform Series

أحيانا يلزم حساب المكافئ الحالى (الحاضر) لمجموعة أقساط ستدفع بانتظام فى المستقبل، بمعدل A كل فترة، كما فى حالات البيع بالتقسيط. بالجمع بين المعادلة (١-٢) والمعادلة (٢-٥) يمكن صياغة المعادلة (٢-٨):

$$P = A\,[(1+i)^n - 1]\,/i/(1+i)^n \qquad (2\text{-}8)$$

ويمكن أن تكتب على الصورة

$$P/A = [(1+i)^n - 1]\,/i/(1+i)^n \qquad (2\text{-}9)$$

ونؤكد مرة ثانية أنه لايلزم حفظ هذه المعادلات.

Example 2-2

Engineer Samy deposits L.E. 300 every 3 months for 5 years, how much money will he have in his investment account after the deposit if the if the nominal interest is rate 12% per year compounded quarterly?

Solution

معدل الربح فى هذه الحالة 12/4=3% كل ربع سنة.

وواضح أن المهندس سامى سيودع بانتظام عدد n = 20= 4*5 قسطا، قيمة كل منها A=L.E. 300 . وبالتعويض فى المعادلة (٢-٥) نجد أن

$$F = 300[(1.03)^{20} - 1]/0.03 = \text{L.E. } 8{,}061.112$$

* * * *

والحل باستخدام الجداول سيكون بالبحث عن المعامل (F/A). ويكتب الحل على الصورة التالية:

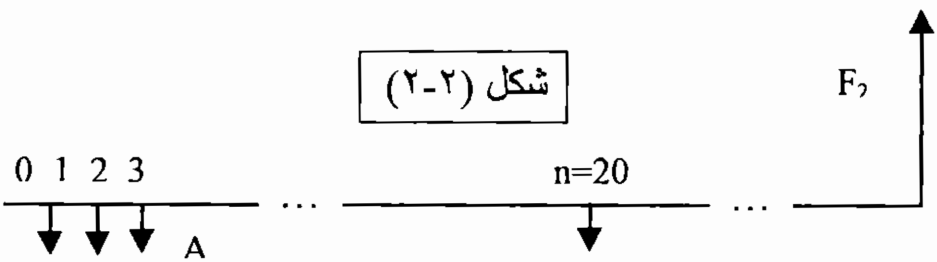
$F = 300^* (F/A, 3\%, 20) = 300\ \underline{(26.870)} = \text{L.E. } 8{,}061$

Example 2-3

A young engineer decides to save for a down payment on new car to be purchased 2.5 years from now. She decides to

deposit \$50 per month into saving account paying 6% nominal interest compounded monthly (use I=6%/12= 0.5%/month). She plans to make a series of 20 regular monthly deposits with the first deposit scheduled for one month from today. Th e account will then receive no more deposits but will receive monthly compound interest on the balance for another 10 months.
Draw the cash flow diagram for this case and calculate, how much will be the account at the end the plan (30-month period)?

Solution



شكل (٢-٢)

المهندسة الشابة تضع لنفسها خطة استثمارية لتجديد سيارتها بعد ٣٠ شهرا، ففكرت فى إيداع مبلغ A (٥٠ دولارا) شهريا لمدة ٢٠ شهرا، وسوف تترك الحساب بعد ذلك بالمصرف لمدة ١٠ أشهر ليحصل فوائد شهرية لحين حلول موعد تجديد السيارة. معدل الفائدة المذكور هو0.5% شهريا، وبيانى التدفق النقدى سيكون كما فى شكل (٢-٢).

مع إيداع القسط الأخير يتجمع فى الحساب مبلغ F نحسبه من المعادلة (٢-٥)

$F_1 = 50\,[(1.005)^{20} - 1]/\,0.005 = \$1,049.$

هذا المبلغ سيترك لمدة ١٠ أشهر أخرى

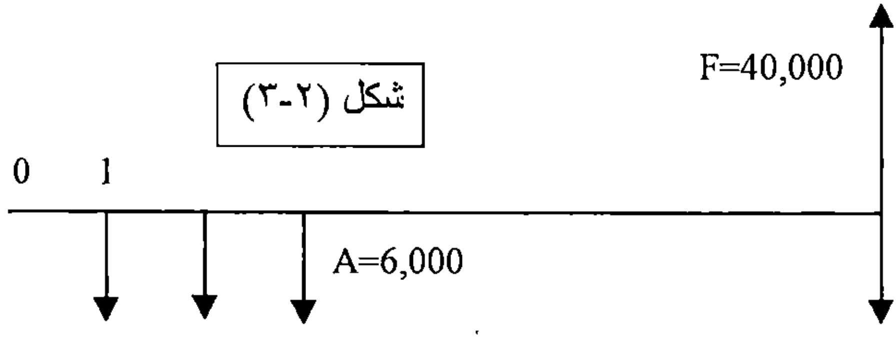
$F_2 = 1049(1.00)^{10} = \$1,103$

Example 2-4

A new retirement community will need to add a second unit to the new water treatment plant when the population reaches 40,000. The community has just been built and is starting out now with zero population. An average of 6,000 new residents are expected to move to the community each year. The estimated birth rate for the community is 8 per 1,000 and the death rate is 14 per 1,000 resulting in a negative annual increase of -6 per 1,000 (so i = - 0.006). How long will it be before the second unit is needed for the new water treatment plant?

Solution

المحطة الثانية ستلزم حين يبلغ عدد سكان مستعمرة أصحاب المعاشات ٤٠ألف نسمة. وهذا يعنى أن F فى هذه المسألة تساوى ٤٠ألف، وعدد الجدد الذين يصلون للمستعمرة كل سنة كدفعة جديدة تضاف A=6,000.
وأيضا فى هذه المسألة i = - 0.006. والرسم البيانى سيكون شبيها ببيانى التدفق النقدى شكل (٢-٣).



بالتعويض فى المعادلة (٢-٦) ينتج

$$40,000/6,000 = [(1-0.006)^n - 1]/-0.006$$

n = 6.8 yr.

Example 2-5

How much money should you be willing to pay now for investment that yield L.E. 1,000 per year for 5 years starting next year, at an interest rate of 16% compounded annually?

Solution

المطلوب حساب المبلغ الذى يُدفع الآن (P) ويتم استرداده علـى خمسـة أقسـاط سـنوية (A=1,000, i=16% and n=5) بدءا من العام القادم.

ويمكن الحل إما بالتعويض المباشر فى المعادلة (٢-٨)، أو باستخدام الجداول.

$$P = A\,[(1+i)^n - 1]\,/i/(1+i)^n \qquad (2\text{-}8)$$

$$P = 1{,}000[(1.16)^5 - 1]\,/0.16/(1.16)^5 = \text{L.E. } 3{,}274.29$$

* * * *

أو باستخدام الجداول كالتالى:

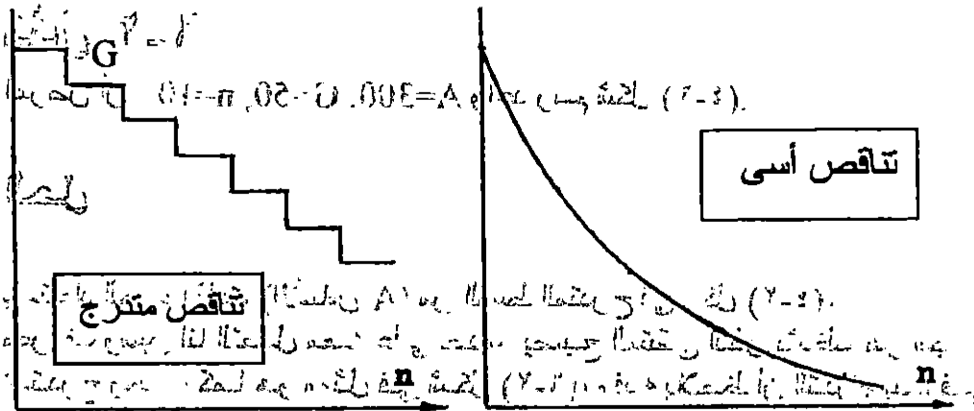
P =1,000 (P/A, 16%,5)= 1,000 (3.2743) = L.E. 3,274.3

٢-٣ مكافئ المتسلسلة المتدرجة

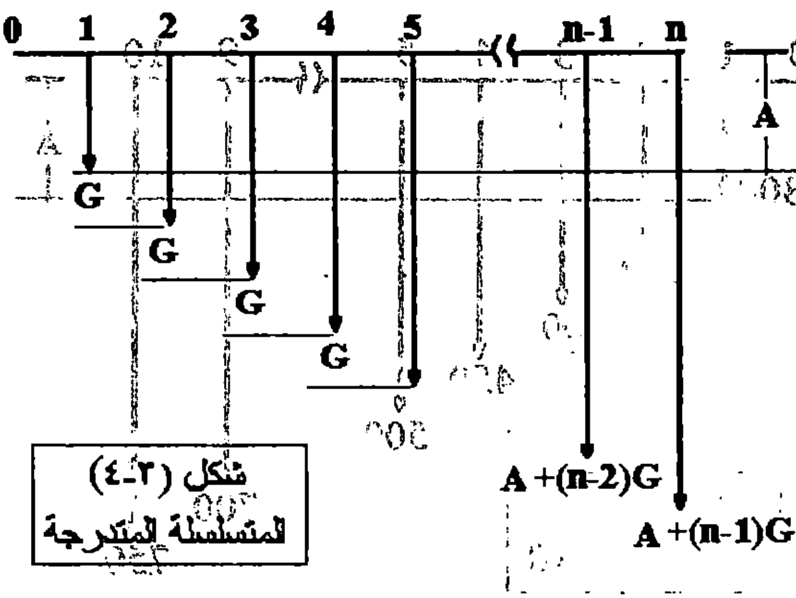
Equivalent of the Gradient Series

المقصود بالمتسلسلة المتدرجـة هـى التـى تزيـد أو تنقص بمعـدل شـبه ثـابت، وهـذه الزيادة تناظر العجلة الثابتة التى تتغير بها السرعة فى مجال الميكانيكا. وهذا التـدرج الحاد فى الزيادة أو النقص يعد مثاليا (نظريا) بعيد عن الواقع، فالواقع يكون تغيره شبه متصل، بمعدل قريب من التغير الأسى.

مقدار الزيادة أو النقص (G)هو الذى نسميه التدرج، ولننظر للمثال الموضح فى شـكل (٢-٤).



وواضح من شكل (٢-٤) أن المتسلسلة المتدرجة تتكون من متسلسلة منتظمة (ذات قسط ثابت A) مركب عليها تدرج خطوته G. ولمزيد من التوضيح نأخذ المثال



شكل (٢-٤)
المتسلسلة المتدرجة

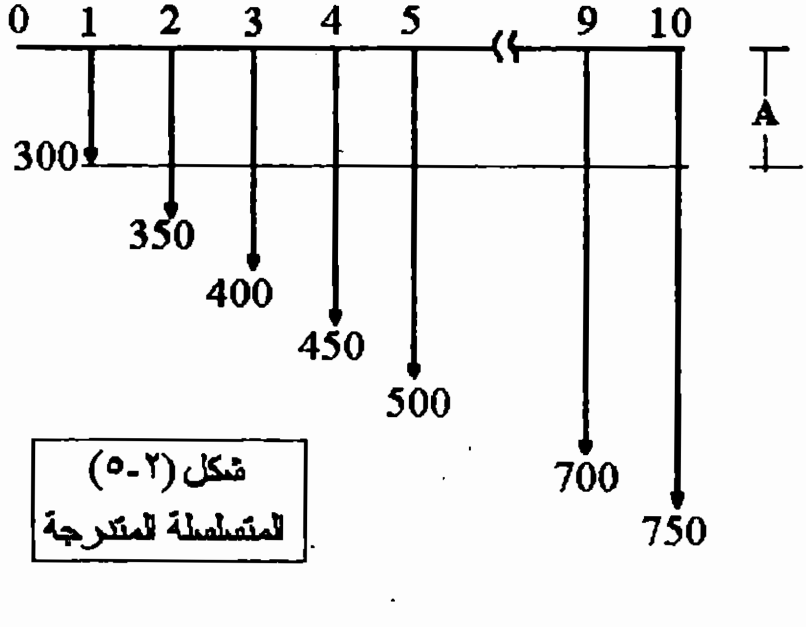
الرقمى التالى.

مثال ٢-٦

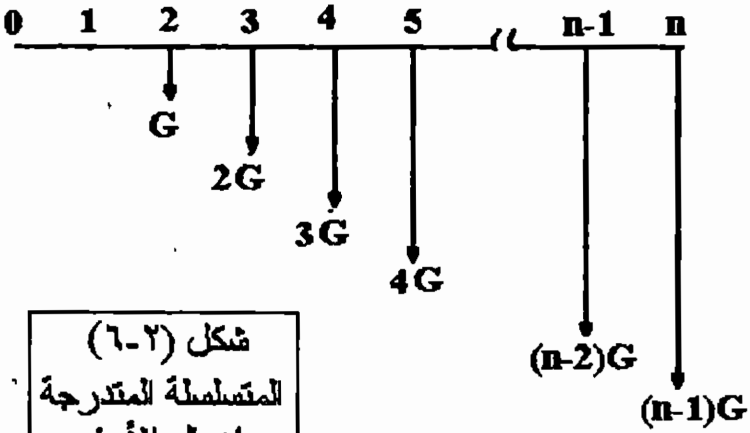
افترض أن: A=300, G=50, n=10 وأعد رسم شكل (٢-٤).

الحل

باستبعاد الجزء الثابت (الأساس A) من القسط المتدرج فى شكل (٢-٤)، باعتبار أنه معروف وسبق لنا التعامل معه على حده، يصبح المتبقى الذى يشغلنا هو الجزء المتدرج وحده، كما هو ممثل فى شكل (٢-٦)، وفيه يلاحظ أن التدرج يبدأ فى الاعتبار من الفترة 1 ليظهر فى الفترة رقم 2، وقبل ذلك فهو غير موجود، وهذا شكل اصطلاحى شائع ويمكن عمل غيره إن لزم الأمر، ولكن يجب مراعاة مدى توافقه مع المعادلات المصاحبة له.



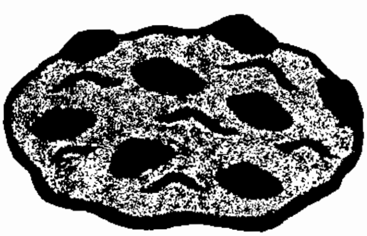
شكل (٢-٥)
المتسلسلة المتدرجة



شكل (٢-٦)
المتسلسلة المتدرجة
بإهمال الأساس
الثابت A.

والتدرج يمكن حسابه بتوزيع الزيادة خلال مدة زمنية معينة على عدد الأقسام التى تحتويها المدة، كما فى المثال التالى.

مثال ٢-٧



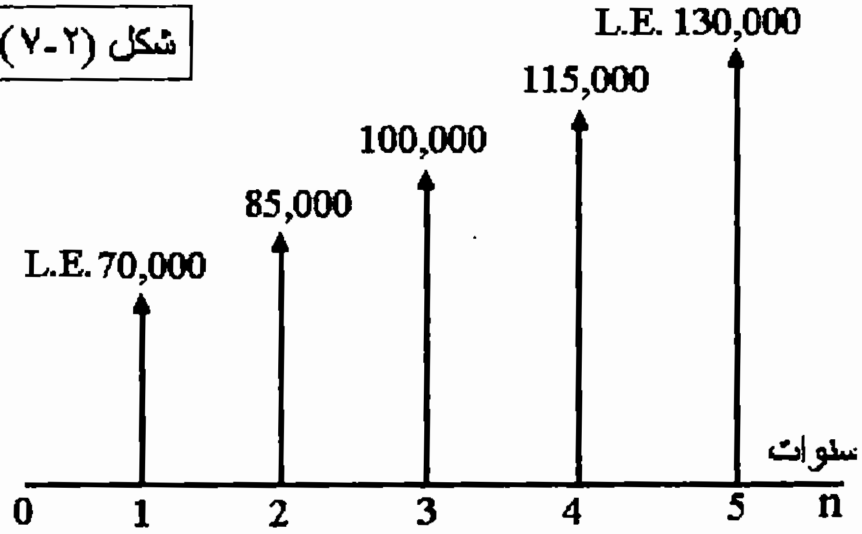
شركة، إنتاج مخبوزات وفطائر وحلويات فى مدينة جديدة، تتوقع زيادة المبيعات من ٧٠ ألف جنيه العام القادم، إلى ١٣٠ألف جنيه على مدى ٥ سنوات من الآن. احسب التدرج (G) وارسم بيانى التدفق النقدى، بفرض أن الزيادة ستكون متدرجة بانتظام.

الحل

من بيانات المثال، $n=5$.

التدرج = $G = gain/(n-1)=(130,000-70,000)/4 = L.E.\ 15,000$

شكل (٢-٧)



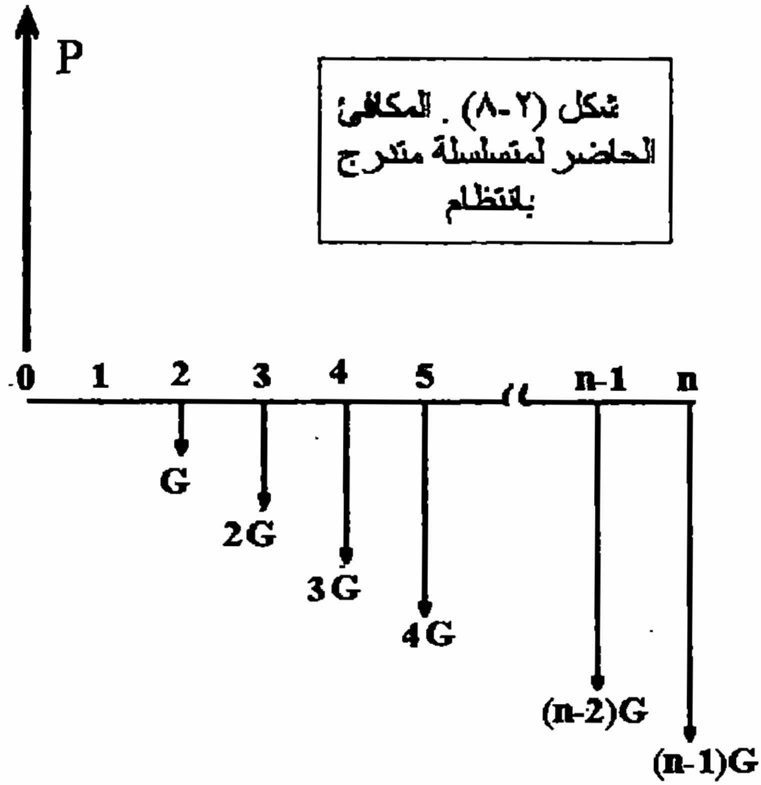
والمكافى الحاضر (P) للمتسلسلة المتدرجة (بعد تجنيب الأساس الثابت A) لعدد n من السنوات، بترتيب ونظام الأقساط الموضحة فى شكل (٢-٨)، يمكن حسابه من المعادلة (٢-١٠).

$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \qquad (2\text{-}10)$$

والمعادلة السابقة يمكن أن تكتب على صورة المعامل القياسى كالتالى:

$$(P/G, i, n) = \frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i\,(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \qquad (2\text{-}11)$$

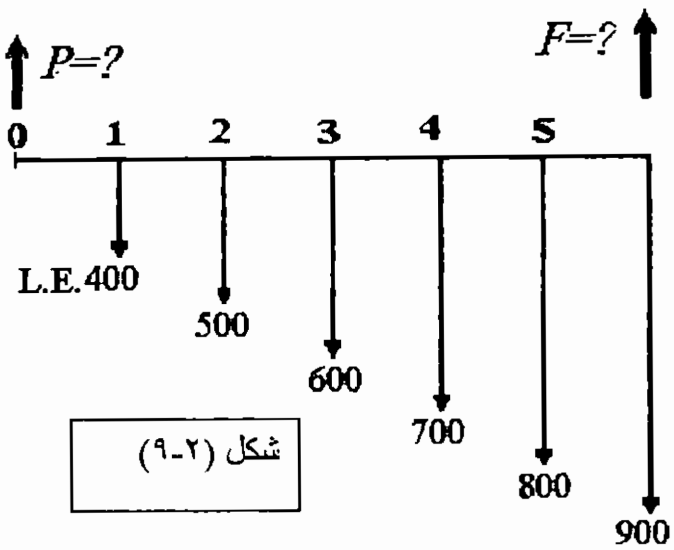
وبمعلومية المكافئ الحاضر P يمكن تحويل المكافئ إلى أقساط متساوية (منتظمة) قيمة كل منها A ، تكافئ في مجموعها الأقساط المتدرجة، كما سبق أن أوضحنا في مطلع هذا الفصل. وأيضا بمعلومية المكافئ الحاضر P يمكن حساب المكافئ المستقبلي F.



شكل (٢-٨). المكافئ الحاضر لمتسلسلة متدرج بانتظام

Example 2-8

Assume i=10% and determine the present worth (P) and the future worth (F) of the following diagram.



شكل (٢-٩)

الحل

نقسم المتسلسلة إلى متسلسلتين:

أ- الأولي متسلسلة منتظمة قسطها $A=400$. ونرمز لقيمتها الحاضرة بالرمز P_A. وتحسب من المعادلة (٢-٨) بالتعويض المباشر أو باستخدام الجداول.

$$P_A=P= 400\ [3.7907868] =L.E.\quad 1,516.315$$

ب. الثانية متسلسلة متدرجة درجتها $G=100$ ونرمز لقيمتها الحاضرة بالرمز P_G. وقيمته نحسبها من المعادلة (٢-١٠) أو (٢-١١) كالتالى:

بالتعويض المباشر فى المعادلة (٢-١٠)

$$P_G=P= (100/0.1)\ [3.7907868 - 3.1046066]=L.E.\ 686.12$$

أو من الجداول

$$P_G=P= 100\ (6.862) = L.E.\ 686.2$$

والمكافئ الكلى الحاضر لمجموع المتسلسلتين هو P_T. وهو يساوى

$$P_T = P_A + P_G = L.E. \quad 2,202.43$$

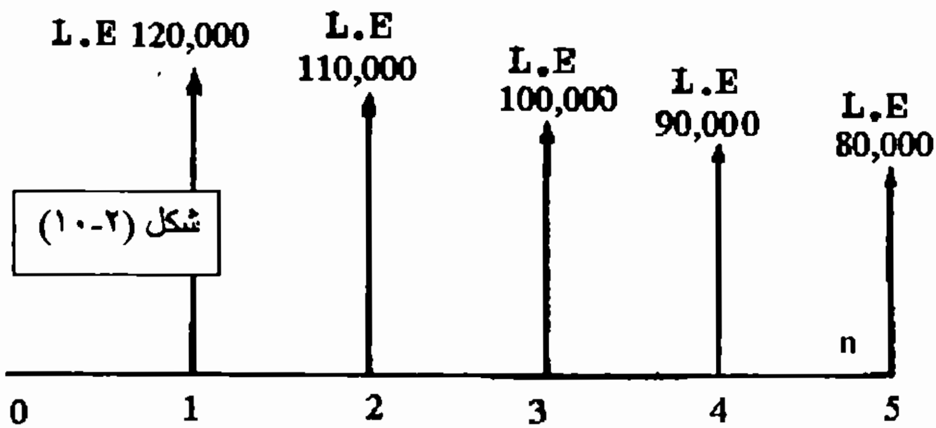
والمكافئ المستقبلى لمجموع المتسلسلتين هو

$$F_T = P(1+i)^n = 2,202.43*1.61051 \;= L.E. \;\; 3,547.06$$

* * * * *

مثال ٢ـ٩

تتوقع إحدى الشركات أن تكون حصيلة مبيعاتها فى نهاية العام الحالى ١٢٠ ألف جنيه. ومن المتوقع أن تتناقص حصيلة البيع تدريجيا؛ بسبب المنافسة الشديدة بالسوق، لتصل لحوالى ٨٠ ألف جنيه سنويا فى نهاية السنوات الخمس القادمة. احسب معدل التناقص وارسم بيانى التدفق النقدى.



شكل (٢-١٠)

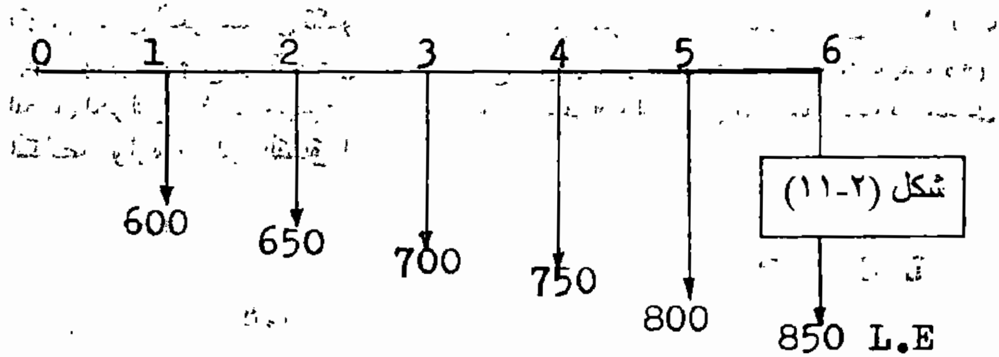
الحل

التناقص = ١٢٠ ـ ٨٠= ٤٠ ألف جنيه.

معدل التناقص =٤٠ \ (٥-١) = ١٠ آلاف جنية سنويا.

مثال ٢-١٠

احسب القيمة الحاضرة للمبالغ المتسلسلة على بيانى التدفق النقدى الموضح بالشكل. افترض $i=10\%$.



شكل (٢-١١)

الحل

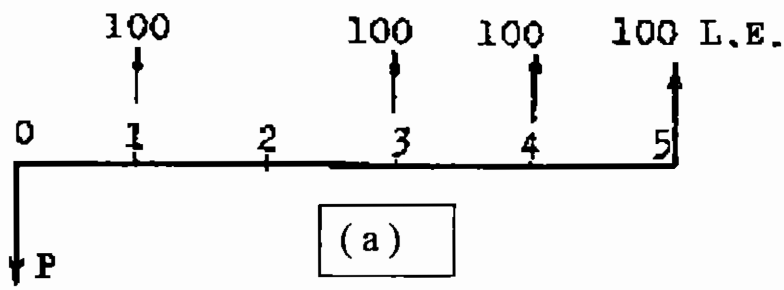
$$P_T = P_A + P_G$$

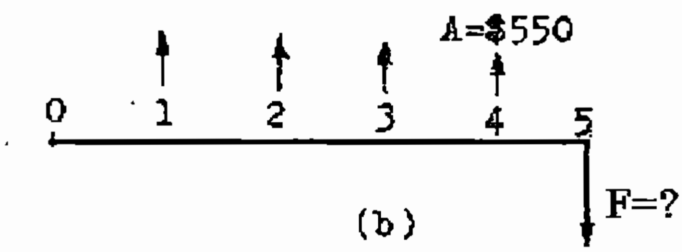
$$P_T = 600\,[P/A, 10\%, 6] + 50[P/G, 10\%, 6] = \text{L.E. } 3{,}097.38$$

تمارين

١. وضح لماذا لا يصح تطبيق معادلات المتسلسلات المنتظمة، لحساب F أو P على أى من الحالات التالية:

(a), (b) and (c)



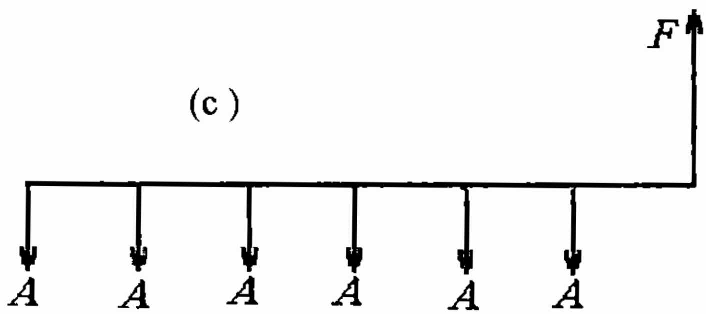


٢. مهندس يريد أن يشترى وحدة سكنية، وأمامه خياران:

- يشترى الآن نقدا بمبلغ ٣٠ألف جنيه

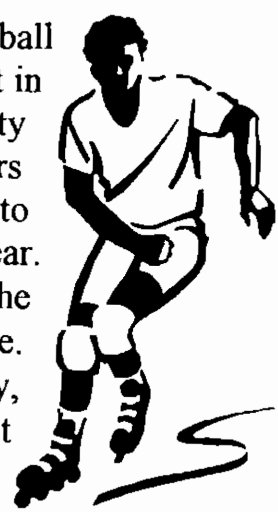
- يدفع نصف هذا المبلغ الآن ثم يدفع ٨ أقساط متساوية قيمة كل منها ٣١٠٠جنيها. مع العلم بان هذا المهندس لديه شركة تحقق عائدا سنويا حوالى ٢٠%. فأى الخيارين أفضل بالنسبة له؟

(الإجابة: الخيار الثانى أفضل وقيمته الحاضرة ٢٦٨٩٥,٣٢جنيها)



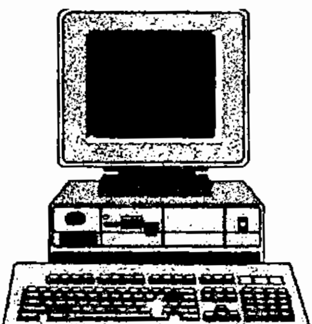
(c)

3. The stadium seats in a faculty football stadium are expected to need replacement in another nine years from today. The faculty has been anticipating this and five years ago began depositing $1,000 per year into an account bearing interest at 6% per year. It is now the end of the fifth year and the fifth annual deposit has just been made. The bank announces that beginning today, all funds on deposit has will bear interest at 7%. The faculty board, realizing that costs are increasing, decides to raise their deposits to $2,000 per year, beginning with the deposit due one year from today.



As consulting engineer to the faculty board, you are requested to quickly calculate how much the account will total at the end of nine more years if the deposits remain at \$2,000 per year and interest remain at 7%?
(<u>Ans</u>. \$34,316) .

٤. إحدى الشركات استدانت ١٠٠ ألف دولار أمريكى (P)، لشراء شبكة حاسبات، على أساس أن السداد على أقساط شهرية متساوية عددها ٤٠ قسطا (n)، وذلك بفائدة مركبة قدرها (i=1.5%) شهريا.



أ. ارسم بيانى التدفق النقدى.

ب. احسب قيمة القسط (A).

ج. احسب مقدار المتبقى من أصل القرض بعد مرور عامين.

د. احسب مقدار الفائدة المركبة على (ضمن)القسط الأول، وضمن القسط العاشر.

٥. شركة الحرية للمقاولات قررت استبدال كراكة المحجر بأخرى أحدث بعد ٤ سنوات بدءا من ١ – ٧ –١٩٩٩ . تكلفة الاستبدال تقدر بحوالى ٣٥٠ ألف جنيه عام ٢٠٠٣ بإذن الله. متوسط طاقة الكراكة ٢٥٠ متر مكعب فى الساعة وتعمل بمتوسط ٢٤٠ ساعة عمل شهريا. يوجد اقتراح لتمويل مشروع الاستبدال بتجنيب ١٠ قروش

من أجر كل متر مكعب تتجزه الكراكة الحالية، وتودع الحصيلة المجمعة فى نهاية كل شهر فى حساب استثمارى بمتوسط عائد ١% يركب شهريا.

والمطلوب معرفة ما إذا كانت القيمة المستقبلية للمبلغ المتجمع فى نهاية المدة (٤٨ شهرا) ستكفى لتغطية تكلفة الاستبدال أم لا؟