المنطق المتعدد القيم

Many-Valued Logic

1.9 الحاجة إلى تعميم المنطق التقليدي:

يقوم المنطق التقليدي على مبدأ الثنائية، أي أن كل قضية تمتلك بالضبط إحدى قيمتي الصدق: صادقة أو كاذبة. وهذا المبدأ يجد تعبيره في القانونين:

1. الثالث المرفوع $K \vee \neg K$: القضية تكون صادقة أو كاذبة وليس ثمة أمر ثالث.

2. عدم التناقض $\neg(K \wedge \neg K)$: لا يمكن أن تكون القضية صادقة وكاذبة في الوقت نفسه.

ومنذ أن اعتمد المنطق مبدأ أن كل قضية إما أن تكون صادقة أو كاذبة (مبدأ الثالث المرفوع)، فقد ظلت الشكوك تدور حوله. ولقد دفعت أسباب عديدة بالكثير من المناطقة إلى عدم الاقتناع بمبدأ الثنائية هذا وسنوضحها أدناه.

(1) السبب الأول: الممكنات المستقبلية Future Contingents

لقد قام لوكاتشيفيج، عام 1920، بالخطوة الأولى نحو إدخال قيمة صدق ثالثة بالإضافة إلى قيمتي الصدق والكذب. لقد لاحظ لوكاتشيفيج صعوبات عند تقويم قيم صدق القضايا المعبرة عن الأحداث المستقبلية مثلاً، القضية (غداً سيهطل المطر). فالأحداث المستقبلية هي حتى الآن ليست صادقة أو كاذبة، فقيم صدقها غير معروفة وسيتم تحديد قيم الصدق هذه، عندما تقع هذه الأحداث. المنطق التقليدي ثنائي القيم ليس كافياً لتحديد قيم صدق هذا النوع من الأحداث، ولهذا فمن الطبيعي إدخال قيمة ثالثة غير الصدق المحض والكذب المحض، وهذا يقود إلى المنطق ثلاثي القيم. لقد سمى لوكاتشيفيج هذه القيمة، بالقيمة الممكنة.

لقد كتب لو كاتشيفيج ما يلي:

(أستطيع الافتراض من دون الوقوع في أي تناقض، بأن الفصل في أمر حضوري إلى فارصوفيا في لحظة معينة في السنة القادمة، مثلاً 21 ديسمبر ظهراً، هو في الوقت الحاضر لا يكون إيجابياً ولا سلبياً. وإذاً فمن الممكن، ولكن ليس من الضروري أني سأكون حاضراً في فارصوفيا في الوقت المذكور. وحسب هذا

الافتراض فإن القضية (سأكون في فارصوفيا في 21 ديسمبر ظهراً) يمكن أن تكون في الوقت الحاضر ليست صادقة وليست كاذبة، ذلك أنه إذا كانت صادقة الآن فإن حضوري المستقبلي في فارصوفيا يصبح ضرورياً، وهذا يناقض الافتراض. وإذا كانت كاذبة الآن فإن حضوري المستقبلي في فارصوفيا يصبح مستحيلاً وهذا أيضاً يناقض الافتراض. وإذاً، فالقضية (سأكون في فارصوفيا في 21 ديسمبر ظهراً) في اللحظة الراهنة ليست صادقة وليست كاذبة ويجب أن تمتلك قيمة ثالثة تختلف عن 0 أو الكذب وعن 1 أو الصدق. هذه القيمة يمكننا تسميتها 1/2. إنها تمثل القيمة (الممكنة)[٥١] بالإضافة إلى القيمة (الصادقة) و(الكاذبة)، وبذلك فهي قيمة ثالثة. إن النسق الثلاثي القيم لحساب القضايا تعود جذوره إلى مجرى التفكير هذا)[٥٢].

(2) السبب الثاني: المفارقات الدلالية Semantic Paradoxes

تزودنا المفارقات الدلالية ببراهين قوية مضادة لمبدأ الثنائية. ومفارقة (الكذاب)[٥٣] إحداها والتي تأتي بأشكال متعددة. واحد من هذه الأشكال سنعرضه أدناه والمتعلق بالقضية:

هذه القضية كاذبة (1)

لنفرض أن (1) صادقة، إذاً ما تقوله يكون صحيحاً، وإذاً القضية كاذبة. ولنفرض الآن أن (1) كاذبة، إذاً ما تقوله ليس صحيحاً، وإذاً القضية صادقة. وبالتالي، فإن (1) تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت كاذبة. وهكذا لا نستطيع الحكم على قضية (هذه القضية كاذبة) بالصدق أو الكذب ولابد من قيمة ثالثة. وهذا يناقض مبدأ الثنائية، فهي صادقة وكاذبة في الوقت نفسه، أي أن مفارقة الكذاب تقود عن طريق استدلال صحيح إلى تناقض ولهذا سميت مفارقة. القيمة الثالثة هنا تسمى هرائية أو بلا معنى[٥٤].

(3) السبب الثالث: الغموض Vagueness

تبدو الكثير من التعبيرات أنها غامضة. لنأخذ المثالين التاليين:

1- هل هذه الرواية طويلة؟. 2- هل هذه المدينة كبيرة؟.

بعض الروايات تكون طويلة جداً، مثلاً رواية الحرب والسلام (تولستوي) وأخرى ليست طويلة بالتأكيد، مثلاً رواية قصة موت معلن (غابرييل غارسيا ماركيز). ولكن توجد روايات أخرى تقع فيما بينهما ومن الصعب القول فيما إذا كانت طويلة أم لا. وبالمثل، فإن لندن مدينة كبيرة بالتأكيد، بينما مدينة صور

51- possible.
52- rescher, n. – many – valued logic, gregg revivals, hampshire, 1993.
53- liar paradox.
54- meaningless.

ليست كبيرة بالتأكيد. ولكنه من الصعب القول إن المدن: دمشق، وهران، الإسكندرية كبيرة أم صغيرة.

الآن لنأخذ القضيتين:

(3) هذه الرواية طويلة. (4) هذه المدينة كبيرة.

هل هما صادقتان أم كاذبتان؟. من الصعب إعطاء جواب، ويمكن أخذ موقفين حول ذلك. فيمكن القول إنهما صادقتان أو كاذبتان ولكن من الصعب علينا تحديد ذلك ومشكلتنا هنا تكمن في عدم معرفتنا: أين توجد الحدود بين ما هو طويل وما هو غير طويل، وبين ما هو كبير وغير كبير. وهكذا فعند الجواب عن (1) و (2) نجد أن كلمة (نعم) أو (لا) ليستا كافيتين. وسنقول شيئاً ما مثل (طويلة باعتدال)، (بينَ بينْ)، (نوعاً ما كبيرة). وإذاً لا يمكننا القول إن (3) صادقة أو كاذبة والشيء نفسه بالنسبة إلى (4). وإذاً لابد من قيم أخرى تتوسط الصدق والكذب أو نقرر وجود (درجات) من الصدق والكذب.

إن ما ذكرناه من الأسباب الثلاثة أعلاه تسند فكرة وجود قضايا ليست صادقة وليست كاذبة. وهذه الأسباب تبرر ظهور المنطق المتعدد القيم، المنطق بأكثر من قيمتي صدق. في الفقرات القادمة من هذا الفصل سنعرض بالتفصيل لأنساق من هذا المنطق، والتي تشترك جميعها في رفض قانون الثالث المرفوع، وتسمح للقضايا بأن تكون صادقة أو كاذبة أو ليست صادقة وليست كاذبة. كما أن فكرة وجود درجات من الصدق تحتم بناء نظرية وراءها، وسنقوم بذلك في الفصل الأخير من الكتاب - المنطق المرن.

(4) السبب الرابع: المنطق الحدسي Intuitionistic Logic

يعتقد الفيلسوف الإنجليزي م. دوميت، كما رأينا سابقاً، بأن معنى القضية هو طريقة برهانها وبالتالي فإن الصدق يعني البرهنة أو الإثبات، أما الكذب فيعني الدحض. إن هذا يقود إلى منطق يرفض قانون الثالث المرفوع، لأنه ليست جميع القضايا مبرهنة أو مدحضة، وبالتالي توجد قضايا ليست صادقة وليست كاذبة وإنما غير محددة. كذلك، فإن هذا المنطق يرفض قانون النفي المزدوج $\neg\neg K \rightarrow K$. ولقد ظهر هذا المنطق الحدسي كمنطق للرياضيات وأصبح مهماً، بشكل خاص، لعلوم الحاسوب حيث يكون مفيداً لمنطق البرامج.

إن جميع الأسباب التي استعرضناها أعلاه تشير إلى وجود فائدة من إدخال، على الأقل قيمة صدق واحدة جديدة بالإضافة إلى قيمتي الصدق والكذب. لندخل

الآن قيمة واحدة ولنسميها I أو (غير محددة)[٥٥]. إن إدخال هذه القيمة الثالثة يتطلب مراجعة جوهرية لجداول الصدق وقواعد تقويم حساب القضايا، ذلك أننا سنعيِّن للمتغير القضائي ليس فقط القيمة T أو F وإنما I أيضاً. كذلك فإن علينا تحديد تعامل الروابط مع هذه القيمة الجديدة، لا سيما وإنه لا توجد طريقة تعامل واحدة. سنفترض أن الصيغ المركبة تمتلك القيم T أو F عندما تكون قيم صدق مركباتها T أو F. ولكن ما قيم الصدق التي ستأخذها الصيغ المركبة في حالة أن تأخذ إحدى مركباتها القيمة I؟. في هذه الحالة يوجد حلان:

1. القيمة I (عدم التحديد) لجزء من الصيغة ينتقل إلى الصيغة كلها. وهكذا، فإذا كانت الصيغة تحوي جزءاً يمتلك القيمة I، فإن الصيغة كلها تمتلك القيمة I.

2. إذا كانت قيمة صدق الصيغة كلها هي T أو F (قيم محددة) على جداول الصدق التقليدية من أجل صدق أو كذب بعض المركبات، حتى إذا كانت مركبات أخرى تأخذ القيمة I، فإن الصيغة كلها ستأخذ القيمة T أو F (قيم محددة).

إن الفرق بين هذين الحالين يصبح واضحاً في حالة صيغ الفصل. فلنفرض أن المتغير القضائي K يمتلك القيمة T، و L يمتلك القيمة I، فما هي قيمة $K \vee L$؟. حسب الحل الأول فإن عدم التحديد (أي القيمة I) سينتقل إلى الصيغة كلها وهكذا ستأخذ $K \vee L$ القيمة I، ولكن حسب الحل الثاني وكما نعرف فإن صدق إحدى المفصولتين سيكون كافياً تقليدياً لصدق صيغة الفصل كلها، وهكذا فإن $K \vee L$ ستأخذ القيمة T.

لقد فضل بعض المناطقة الحل الأول والبعض الآخر فضل الحل الثاني. سنعالج نحن الحلين بالإضافة إلى حل ثالث. لقد وضع العالم بوشفار نسقاً ثلاثي القيم على أساس الحل الأول. أما العالم كلين فقد وضع نسقاً آخر ثلاثي القيم على أساس الحل الثاني. أما العالم لوكاتشيفيج على الضد من كلين وبوشفار فقد أبقى على بعض الصيغ التكرارية في المنطق التقليدي (ثنائي القيم)، فمثلاً:

$$K \rightarrow K ,\ K \rightarrow (K \vee L) ,\ (K \wedge L) \rightarrow K ,\ K \rightarrow \urcorner\urcorner K$$

هي صيغ تكرارية في نسقه أيضاً. ولكنه لم يُبقِ على التكرارية التقليدية لصيغة الثالث المرفوع $K \vee \urcorner K$ وعلى تكرارية عدم التناقض $\urcorner(K \wedge \urcorner K)$.

2.9 المنطق الثلاثي القيم 3-Valued Logic:

1.2.9 دلالة بوشفار Bochvar's Semantics:

B_3

55- indeterminate.

في عام 1930 اقترح العالم الروسي بوشفار دلالة لحساب القضايا حسب الحل الأول. وقدمها كحل لمفارقة الكذاب وبما أن تفسيره للقيمة الثالثة هو (بلا معنى)، فإن الصيغ في دلالته تكون بلا معنى إذا كانت إحدى مركباتها بلا معنى.

لقد تم التوصل إلى تناقض من مفارقة الكذاب، وذلك بسبب استخدامنا لفرضية أن (هذه القضية كاذبة) تكون صادقة أو كاذبة، وبالتالي فليس من المستغرب أن تكون محاولة التغلب على هذا التناقض بنفي هذه الفرضية (الصدق أو الكذب). لقد اقترح بوشفار من أجل التعامل مع مفارقة الكذاب تبني دلالة ثلاثية القيم، وحيث تكون فيها تفسير القيمة الثالثة I على أنها (بلا معنى). الجدولان أدناه يعكسان هذه الدلالة.

K	L	$K \wedge L$	$K \vee L$	$K \rightarrow L$	$K \leftrightarrow L$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	I	I	I	I	I
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
F	I	I	I	I	I
I	T	I	I	I	I
I	F	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I

$\neg K$	K
F	T
T	F
I	I

في حساب القضايا التقليدي (الثنائي القيم) يكون عدد أسطر جداول صدق الصيغ مساوياً إلى 2^n (n عدد المتغيرات القضائية). أما في حساب القضايا الثلاثي القيم فإن عدد أسطر جداول صدق الصيغ فهو 3^n (n عدد المتغيرات القضائية). نرى من الجدولين أعلاه أن عدد أسطر النفي $\neg K$، هو $3^1 = 3$، أما عدد أسطر الروابط الأخرى (الثنائية) فهو $3^2 = 9$.

نلاحظ من جدولي صدق B_3 أن بوشفار يتبنى، فعلاً، الحل الأول، فمثلاً بالنسبة للصيغة $K \rightarrow L$ نجد أن قيمتها تكون I، في حالة كون قيمة K هي I وقيمة L هي I.

ومن الواضح أن بوشفار لا يتبنى الحل الثاني، ذلك أنه عندما تكون K كاذبة فهذا يكفي تقليدياً أن تكون $K \rightarrow L$ صادقة، ولكننا نجد من السطر السادس أن $K \rightarrow L$ ليست صادقة. وفي الحقيقة فإن الصيغة التي هي تكرارية تقليدياً لا تكون تكرارية وفق دلالة بوشفار. فمثلاً، الصيغة $K \rightarrow K$ تكرارية تقليدياً، ولكنها عند بوشفار تأخذ القيمة I عندما تأخذ K القيمة I. إن كل صيغة من صيغ حساب

القضايا التقليدي تأخذ قيمة I في حالة كون إحدى متغيراتها القضائية تأخذ القيمة I.

نستطيع توسيع تعريف التكرارية فنقول إن الصيغة التكرارية هي الصيغة التي لا تكون كاذبة في أي من أسطر جدول صدقها، أي التي تكون صادقة أو غير محددة في كل أسطر جدول صدقها. بهذا التوسيع تكون جميع الصيغ التكرارية تقليدياً تكرارية في دلالة بوشفار.

من المهم الإشارة إلى أن بعض صور الحجج التي يشك فيها العديد من المناطقة، والتي هي صحيحة في حساب القضايا التقليدية، تصبح غير صحيحية في دلالة بوشفار. لنأخذ، مثلا ما يسمى (مفارقتي الاستلزام المادي):

$$L \quad K\to L$$

$$\neg K \vdash K\to L$$

فعلى الرغم من صحتهما في حساب القضايا التقليدي، ولكننا نجدهما غير صحيحتين في دلالة بوشفار. فبالنسبة إلى الأولى نستطيع إعطاءها مثالاً مضاداً، وذلك بأخذ L صادقة وK غير محددة، وهكذا تصبح المقدمة صادقة والنتيجة غير محددة (ليست صادقة). أما بالنسبة إلى الثانية فمثالها المضاد يكون بأخذ K كاذبة وL غير محددة، وهكذا تصبح المقدمة صادقة والنتيجة غير محددة (ليست صادقة).

2.2.9 دلالة كلين Kleen Semantics:

K_3

لقد تبنى كلين الحل الثاني الذي مر بنا أعلاه، أي: إذا كانت قيمة صدق الصيغة تقليدية (T أو F) من أجل صدق أو كذب بعض مركباتها، فإن الصيغة كلها تأخذ قيماً تقليدية حتى إذا كانت مركبات أخرى لها تأخذ القيمة غير المحددة I. لقد أعطى كلين تفسيراً لقيمته الثالثة I على أنها (غير معرّفة) ووجدها في التطبيقات الرياضية، فمثلاً لنأخذ المحمول (الدالة القضائية) K_x، حيث إن K_x معرفة على جزء من مدى x. ليكن K_x:

$1 \leq 1/x \leq 5$. إذاً، K_x ستكون:

1. صادقة عندما تقع x بين 1/5 و 1.
2. غير معرفة عندما $x = 0$.
3. كاذبة في الحالات الأخرى ($x \neq 0$ و $(x < 1/5) \vee (1 < x)$).

إن الحل الثاني يجد تعبيره هنا في الجدولين التاليين المختلفين عن جدولي صدق بوشفار.

K	L	$K\wedge L$	$K\vee L$	$K\to L$	$K\leftrightarrow L$
T	T	T	T	T	T

K	$\neg K$

T	F	F	T	F	F
T	I	I	T	I	I
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
F	I	F	I	T	I
I	T	I	T	T	I
I	F	F	I	I	I
I	I	I	I	I	I

T	F
F	T
I	I

لنقارن بين ما ينتج عن دلالة بوشفار وبين دلالة كلين:

1- الصيغ التكرارية في حساب القضايا التقليدي تكون غير تكرارية في نسق كلين، كما هو الحال في دلالة بوشفار، لأنه، وكما هو الحال في دلالة بوشفار، فإن أي صيغة في حساب القضايا التقليدي تأخذ جميع مركباتها القيمة I فإنها هي أيضاً تأخذ القيمة I. وإذاً، فمن أجل أي صيغة يوجد دائماً تعيين (هو إعطاء I إلى جميع المتغيرات القضائية) تكون حسبه الصيغة غير صادقة.

2- تختلف دلالة كلين عن دلالة بوشفار في أنها تجعل أكثرية صور الحجج في حساب القضايا التقليدي ومن ضمنها مفارقات الاستلزام المادي صحيحة. ولكن توجد بعض الاستثناءات، فمثلاً صورة الحجة $K \quad L \nvDash L$ صحيحة في حساب القضايا التقليدي ولكنها خاطئة عند كلين، فإذا أخذنا K صادقة وL غير معرفة، فإننا نحصل على مثال مضاد.

3- تعطي دلالة كلين قيمتي الصدق التقليدية T وF لصيغ مركبة أكثر مما تعطيه دلالة بوشفار (قارن جدولي صدق الروابط في كليهما).

3.2.9 دلالة لوكاتشيفيج Lukasiewicz Semantics:

L_3

وضع لوكاتشيفيج، الذي كان المؤسس الأول للمنطق الثلاثي القيم، دلالته عام 1920 والتي يفسر فيها القيمة الثالثة على أنها (وسطية) أو (ممكنة) وتأخذها القضايا المستقبلية التي هي، كما مر بنا، ليست صادقة وليست كاذبة. لقد أعطت هذه الدلالة قيماً تقليدية (T وF) للصيغ المركبة بكمية أكبر مما مر بنا، والحل عند لوكاتشيفيج هو حل ثالث جوهره المزج بين الحلين الأوليين. دلالة لوكاتشيفيج تجد تعبيرها في الجدولين أدناه:

K	L	$K \wedge L$	$K \vee L$	$K \rightarrow L$	$K \leftrightarrow L$
T	T	T	T	T	T

$\neg K$	K

F	T
T	F
I	I

T	F	F	T	F	F
T	I	I	T	I	I
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
F	I	F	I	T	I
I	T	I	T	T	I
I	F	F	I	I	I
I	I	I	I	T	T

لنقارن الآن بين دلالات بوشفار، كلين، لوكاتشيفيج:

1. تتطابق دلالتا كلين ولوكاتشفيتج باستثناء أن كلين يجعل الاستلزام والاستلزام الثنائي غير محددين عندما تكون مركباتهما غير محددتين، بينما يجعلهما لوكاتشفيتج صادقين.

2. يجعل لوكاتشفيتج بعض الصيغ في حساب القضايا تكرارية في الوقت الذي لا تكون كذلك عند كلين وبوشفار، مثل:

$$K \rightarrow K,\ K \leftrightarrow \rceil\rceil K,\ (K \wedge L) \rightarrow L$$

3. تبقي دلالة لوكاتشفيتج، كما هو الحال في دلالة كلين، على صحة أكثر صور الحجج المعروفة في حساب القضايا التقليدي باستثناء بعضها، مثلاً: $K \vdash \rceil L \vee L$، حيث صورة الحجة هذه غير صحيحة، لأن مقدمتها صادقة في حين أن نتيجتها غير محددة، وذلك عندما تكون K صادقة وL غير محددة. ولكن $K \vdash L \rightarrow L$ تبقى صحيحة.

3.9 تعميم المنطق ثلاثي القيم: المنطق المتعدد القيم:

يمكن استخدام علاقات حسابية للتعبير عن قيم صدق روابط المنطق الثنائي، وذلك باستخدام 0 كرمز للكذب، 1 كرمز للصدق وبإضافة ½ كرمز للقيمة الثالثة، وذلك من أجل التعبير عن الروابط نفسها في المنطق ثلاثي القيم، الذي تصبح مجموعة قيم صدقه $T_3 = \{0, ½, 1\}$.

لتكن V(K) ترمز إلى قيمة صدق K، و V(L) ترمز إلى قيمة صدق L و V(K Λ L)، V(K V L)، V(K → L)، V(K ↔ L) ترمز إلى قيم صدق الوصل، والفصل، والاستلزام، والاستلزام الثنائي على الترتيب. إذاً نحصل على العلاقات:

$$V(\rceil K) = 1 - V(K) \quad (1)$$

$$V(K \wedge L) = \min(V(K), V(L)) \quad (2)$$

$$V(K \vee L) = \max(V(K), V(L)) \quad (3)$$

$$V(K \rightarrow L) = \min(1, 1 + V(L)) - V(K) \quad (4)$$

$$V(K \leftrightarrow L) = 1 - |V(K) - V(L)| \quad (5)$$

من أجل تعميم المنطق الثلاثي القيم، نسمح للقضية بأن تأخذ أكثر من ثلاث قيم. لنفرض أنه من أجل $n \geq 3$ (حيث n عدد طبيعي) تمثِّل قيم الصدق بواسطة أعداد كسرية من المجال [0,1]. قيم الصدق هذه تشكل مجموعة صدق T_n كالتالي:

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, ..., \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\} \qquad (6)$$

مثال 1:

لنأخذ نسق لوكاتشفيتج الثلاثي القيم حيث نعوض $n = 3$ في (6).

إذاً $T_3 = \{0, ½, 1\}$. لنفرض أن K وL تمتلكان القيمتين $V(K) = ½$ و $V(L) = 1$ على الترتيب. من العلاقات (1) إلى (5) وباستخدام مجموعة قيم الصدق T_3 نجد أن:

$$V(\urcorner K) = 1 - ½ = ½$$

$$V(K \wedge L) = \min(½, 1) = ½$$

$$V(K \vee L) = \max(½, 1) = 1$$

$$V(K \rightarrow L) = \min(1, 1 + 1 - ½) = \min(1, 3/2) = 1$$

$$V(K \leftrightarrow L) = 1 - |½ - 1| = 1 - |-½| = 1 - ½ = ½$$

مثال 2:

لنأخذ النسق الثماني القيم حيث نعوض $n = 8$ في (6). إذاً مجموعة قيم الصدق:

$$T_8 = \{0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 1\}$$

لنفرض أن K و L تمتلكان القيمتين $V(K)=3/7$ و $V(L)=2/7$ على الترتيب. من العلاقات (1) إلى (5) وباستخدام مجموعة قيم الصدق T_8 نجد أن:

$$V(\urcorner K) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$V(K \wedge L) = \min(3/7, 2/7) = 2/7$$

$$V(K \vee L) = \max(3/7, 2/7) = 3/7$$

$$V(K \rightarrow L) = \min(1, 1 + 2/7 - 3/7) = \min(1, 6/7) = 6/7$$

$$V(K \leftrightarrow L) = 1 - |3/7 - 2/7| = 1 - |1/7| = 6/7$$

إن سبب تبنينا للعلاقة (1) هو أنه إذا كانت K صادقة تماماً فإن $\urcorner$ K تكون كاذبة تماماً. ومن المعقول الافتراض أنه إذا كانت K هي ¾ صادقة فإن $\urcorner$ K تكون ¼ صادقة. وهكذا أو بشكل عام فإن:

$$V(K) + V(\urcorner K) = 1$$

أو أن

$$V(K) - V(\urcorner K) = 1$$

أما بالنسبة إلى العلاقة (2)، فإنه يبدو أن صدق الوصل يكون بقدر أقل من صدق معطوفاته.

المفصولات تكون صادقة بقدر أعلى من صدق مفصولاته. هذا ما تعكسه العلاقة (3) أعلاه.

أما فيما يخص العلاقة (4) فإنها تبدو أكثر تعقيداً. إن الفكرة العامة هي أنه: إذا كان التالي على الأقل صادقاً بقدر صدق المقدم فإن الاستلزام يكون صادقاً (يأخذ القيمة 1). أما إذا كان التالي أقل صدقاً من المقدم فإن الاستلزام لا يأخذ القيمة 1. فالصدق التام (القيمة 1) ينقص بما يساوي الفرق بين صدق التالي وصدق المقدم.

إن صدق $K \leftrightarrow L$ يكون 1 إذا كان $V(K) = V(L)$ وفي الحالات الأخرى، فإن صدق الاستلزام الثنائي يقل بما يساوي الفرق بين صدقي K و L.

من السهولة تبيان أن قانون الثالث المرفوع لا يصح في المنطق المتعدد القيم كالتالي:

$$V(K \vee \neg K) = \max (V(K), 1 - V(K))$$

وهكذا فإن $V(K \vee \neg K) = 1$ فقط عندما تكون $V(K) = 0$ أو $V(K) = 1$.

باستخدام تعريف النفي أعلاه، نستطيع برهان قيمة صدق النفي المضاعف للصيغة على أنه يساوي قيمة صدق الصيغة نفسها:

$$\begin{aligned} V(\neg\neg\alpha) &= 1 - V(\neg\alpha) \\ &= 1 - (1 - V(\alpha)) \\ &= V(\alpha) \end{aligned}$$

كذلك يمكن برهان قانون دي مورغان:

$$V(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = V(\neg(\alpha \vee \beta))$$

سنترك هذا البرهان للقارئ كتمرين.

إذا تم تمثيل قيم الصدق بواسطة الأعداد الحقيقية في المجال [0,1] وبما أن هذه المجموعة لانهائية فإذاً $T_\infty = [0,1]$، ∞ يرمز إلى (ما لانهاية). في هذه الحالة فإن المنطق المتعدد القيم يسمى المنطق اللانهائي القيم أو المنطق المتصل، ذلك أن مجموعة الأعداد الحقيقية متكاثفة، أي أنه بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد حقيقي آخر هو الوسط الحسابي للعددين (مجموع العددين مقسوم على 2). يوجد تقابل بين هذا المنطق وما سندرسه في الفصل الأخير: المجموعات المرنة، التي يؤسس عليها المنطق المرن.

4.9 جداء الأنساق في المنطق المتعدد القيم:

نستطيع الحصول على نسق منطقي متعدد القيم كنتيجة للجداء الديكارتي لنسقين آخرين كالتالي:

ليكن S1 و S2 نسقين متعددي القيم وليكن S1xS2 هو الجداء الديكارتي لهذين النسقين. ولتكن مجموعة قيم الصدق V_1 هي مجموعة قيم صدق S1 و V_2

هي مجموعة قيم صدق S2. إن مجموعة قيم صدق S1xS2 ستكون الزوج المرتب على الشكل (V_1 , V_2).

مثال: إذا اخذنا S1 على أنه النسق الثنائي القيم C2 والذي مجموعة قيم صدقه T1={1,0} وكذلك S2 هو هذا النسق نفسه، فإننا نحصل على مجموعة الأزواج المرتبة:

$$T1 \text{ x } T2 = \{1, 0\} \text{ x } \{1, 0\} = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

والتي تمثل مجموعة قيم صدق النسق $C2xC2=C_2{}^2$ نلاحظ أننا بهذا الجداء قد حصلنا على نسق رباعي القيم، ومجموعة قيم صدقه هي مجموعة الأزواج المرتبة الأربعة أعلاه.

تستخدم أنساق الجداء، إذا أريد إيجاد قيم صدق الصيغ (تقويم الصيغ) وفق نواحٍ مستقلة عن بعضها البعض ومختلفة، ولتقديم قيم الصدق هذه بشكل مشترك.

إذا أريد حساب قيمة صدق صيغة ما في نسق الجداء، فيجب أولاً حساب قيمة صدقها في كل من النسقين المكونين لنسق الجداء. قيم الصدق في النسق الأول تصبح المركبة الأولى للزوج المرتب وقيم الصدق في النسق الثاني تكون المركبة الثانية.

جدول صدق الروابط $\rceil, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ يعين بواسطة القاعدتين التاليتين:

$$\rceil (v_1, v_2) = (\rceil v_1, \rceil v_2) \quad (1)$$

$$(v_1, v_2) * (v'_1, v'_2) = (v_1 * v'_1, v_2 * v'_2) \quad (2)$$

حيث * تمثل أي رابط ثنائي.

جداول صدق الروابط الثنائية بالنسبة للنسق الرباعي أعلاه تكون كما يلي أدناه (نكتب 1 عوضا عن (1,1)، 2 عوضاً عن (1,0)، 3 عوضاً عن (0,1)، 4 عوضاً عن (0,0)).

K	$\rceil$K
1	4
2	3
3	2
4	1

	$K \wedge L$				$K \vee L$				$K \rightarrow L$				$K \leftrightarrow L$			
L K	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	2	3	4	1	1	1	1	1	2	3	4	1	2	3	4
2	2	2	4	4	1	2	1	2	1	1	3	3	2	1	4	3
3	3	4	3	4	1	1	3	3	1	2	1	2	3	4	1	2
4	4	4	4	4	1	2	3	4	1	1	1	1	4	3	2	1

5.9 تمارين:

(أ)

أنشئ جدول صدق كل من الصيغ التالية وحدد فيما إذا كانت كل منها تكرارية أم لا في كل من دلالة بوشفار وكلين ولوكاتشفيتج.

(1) $K \vee \neg K$

(2) $\neg(K \wedge \neg K)$

(3) $K \vee \neg K \vee \neg\neg K$

(4) $(K \wedge L) \rightarrow K$

(5) $(K \vee L) \rightarrow L$

(6) $(K \rightarrow L) \rightarrow (\neg L \rightarrow \neg K)$

(7) $(K \leftrightarrow L) \rightarrow (L \rightarrow K)$

(8) $\neg(K \wedge L) \leftrightarrow (\neg K \vee \neg K)$

(ب)

باستخدام جداول الصدق، حدد فيما إذا كانت كل من قواعد الاشتقاق التالية صحيحة أم خاطئة في كل من الدلالات الثلاث:

(1) الوضع

(2) نفي التالي

(3) قياس الفصل

(4) الجمع

(5) القياس الشرطي

(6) عكس النقيض

(7) العطف

(8) الاستيراد والتصدير

(9) تبديل الوصل

(10) تبديل الفصل

(11) تجميع الوصل

(12) تجميع الفصل

(13) توزيع الوصل على الفصل

(14) توزيع الفصل على الوصل

(15) تحصيل الحاصل

(16) الاستلزام الثنائي

(ج)

باستخدام جداول الصدق، حدد فيما إذا كانت صور الحجج التالية صحيحة أم خاطئة في كل من الدلالات الثلاث (نستخدم طريقة المثال المضاد، والتي تصبح هنا عبارة عن تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية بحيث تكون جميع المقدمات صادقة والنتيجة غير صادقة):

(1) المقدمات $\neg(K \wedge L)$، النتيجة $\neg K \vee \neg L$

(2) المقدمات $K \rightarrow L, K$، النتيجة L

(3) المقدمات $K \rightarrow L, \neg L$، النتيجة $\neg K$

(4) المقدمات $K \vee L, \neg K$، النتيجة L

(5) المقدمات $K \leftrightarrow L$، النتيجة $L \rightarrow K$

(6) المقدمات $L \to K$، النتيجة $L \vee K \urcorner$

(7) المقدمات $K \urcorner \wedge K$، النتيجة L

(د)

باستخدام تعاريف قيم: النفي، الوصف، الفصل الواردة في هذا الفصل، برهن أن:

$$V(\urcorner \alpha \wedge \urcorner \beta) = V(\urcorner(\alpha \vee \beta))$$

(هـ)

برهن أن $\alpha \to \alpha$ تكرارية لكل α، باستخدام تعريف قيمة الاستلزام الواردة في هذا الفصل.