المنطق المرن

Fuzzy Logic

لنأخذ المفارقة المعروفة بمفارقة الكومة[٥٦]:
حبة واحدة من الرمل ليست كومة.
إضافة حبة واحدة من الرمل إلى ما هو ليس كومة لا تجعله كومة.
إذاً، لا توجد كومات رمل.
المقدمتان تبدوان معقولتين، ولكن من الواضح أن النتيجة كاذبة. فأين الخطأ؟.

المنطق التقليدي (ثنائي القيم) يضع حدوداً قاطعة بين ما هو كومة وما ليس كومة، فبأخذ أي مقدار من الرمل x فإن القضية (x هو كومة) تكون صادقة أو كاذبة. وهكذا فحسب هذا المنطق، فإن المقدمة الثانية من الحجة أعلاه كاذبة، ذلك أنه في لحظة (نقطة) ما فإن إضافة حبة واحدة من الرمل تحوِّل ما هو ليس كومة إلى كومة. وقد يكون من الصعب علينا أن نحدد بدقة تلك النقطة.

المنطق ثلاثي القيم الذي مر بنا، يسمح لنا بالقول إن مقداراً ما يكوّن كومة وآخر لا يكون كومة ومقداراً ثالثاً يكون بين ما هو كومة وما هو ليس كومة. إن مفهوم (الكومة) هو مفهوم غامض[٥٧]، ذلك أنه بالنسبة إلى مقادير ما لا نستطيع القول بصدق ولا بكذب كونها كومة. وسنستطيع القول إنها ضرب من الكومات. وعلى هذا الأساس فإن المقدمة الثانية ليست كاذبة ولكنها ليست صادقة أيضاً. ففي لحظة معينة، فإن إضافة حبة تنقلنا من شيء ليس كومة تماماً إلى شيء هو ضرب من الكومة. وفي لحظة أخرى تنقلنا هذه الإضافة من شيء هو ضرب من الكومة إلى شيء هو كومة تماماً. أي أنه توجد حدود واضحة بين ما هو ضرب من الكومات والكومات.

56- sorites paradox.
57- vague.

إن العديد من الفلاسفة لا يعتقدون فقط بأن مفهوم الكومة غامض (أي عدم وجود حدود قاطعة بين ما هو كومة وما هو ليس كومة) وإنما يعتقدون بعدم وجود حدود قاطعة بين الكومة وضرب من الكومة أو بين ضرب من الكومة وما ليس بكومة. ففي لحظة ما يصبح ما هو، بوضوح، ليس كومة كبيراً كفاية، بحيث لا نستطيع أن نؤكد فيما إذا كنا نسميه كومة أو ليس كومة.

لقد بقيت مفارقة الكومة لأمد طويل ينظر إليها بغرابة. ولكن الفلاسفة المعاصرين ينظرون إليها كشيء اعتيادي. فمعظم المحمولات التي تصف العالم هي غامضة، فالأسماء مثل: جبل، تل، والصفات مثل: أنيق، ذكي، قصير، والأفعال مثل: يبتسم، يغضب، والظروف مثل: بوضوح، بقوة، لا توجد نقطة محددة يصبح التل عندها جبلاً والجدول نهراً. ويمكننا تصور سلسلة من الظلال اللونية بين الأحمر والبرتقالي. إن الألوان والارتفاعات مرتبة بشكل متصل، حيث تكون الحدود غامضة.

لقد ظهر المصطلح (مرن) بالمعنى الذي نستخدمه هنا لأول مرة عام 1965 في مقال للعالم الأمريكي لطفي زادة (الإيراني الأصل)، والذي يعتبر مؤسس المنطق المرن كتعميم لا نهائي متصل بمنطق لوكاتشيفيج الثلاثي القيم، حيث يمكن أن تكون قيم صدق القضايا أي عدد حقيقي بين 0 و1. يمكننا تصور قيم الصدق هذه كدرجات صدق. فالقضية التي قيمة صدقها 0 تكون كاذبة تماماً، أما التي قيمة صدقها 0.2 فهي خمس صادقة.

1.10 المجموعات المرنة Fuzzy Sets:

نظرية المجموعات المرنة تتعامل مع المجموعة الجزئية A للمجموعة الكلية (الشاملة) U، حيث يكون الانتقال من الانتماء التام للمجموعة A إلى عدم الانتماء إليها بشكل تدريجي وليس منقطعاً (نقصد بالمنقطع وجود القيمة 1 ثم مباشرة القيمة 0). المجموعات الجزئية المرنة لا تمتلك حدوداً حاسمة.

مثال: لتكن المجموعة A هي مجموعة الشوارع الطويلة في مدينة ما. لنرمز بواسطة U لمجموعة الشوارع، رمزياً نكتب:

U = {x :يكون شارع x}

ماذا عن عناصر مجموعة الشوارع الطويلة؟. قبل كل شيء، هل هي مجموعة بالمعنى العادي؟ ثم كم هو طول (الشوارع الطويلة)؟. هل الشارع الذي طوله 1 كم يكون شارعاً طويلاً؟، إذا كان الجواب بنعم، فهل يوجد أي فرق بين الشارع الذي طوله ¾ كم وبين الشارع الذي طوله 1 كم؟. الحقيقة، أننا لا نعرف كيف نجيب عن هذه الأسئلة، وذلك لأن (مجموعة الشوارع الطويلة) لا تؤلف مجموعة بالمعنى العادي. إن معظم مجموعات الأشياء التي نصادفها في العالم الواقعي هي مجموعات مرنة وليست محددة بشكل قاطع (حاسم). هذه المجموعات لا تمتلك معياراً معرفاً بدقة للانتماء لها. في مثل هذه المجموعات،

ليس من الضروري بالنسبة إلى شيء ما أن ينتمي أو لا ينتمي إلى المجموعة، لوجود درجات (وسطية) من الانتماء. هذا هو مفهوم المجموعات المرنة. إنها مجموعة تملك صفة الاستمرار في درجات الانتماء.

نظرية المجموعات المرنة هي تعميم لنظرية المجموعات العادية المعروفة لكل دارس. أي أن كل ما هو موجود في هذه الأخيرة يظهر كحالة خاصة في الأولى. وبسبب هذه الخاصية العمومية، فإن لنظرية المجموعات المرنة قابلية أكثر على التطبيق بالمقارنة مع نظرية المجموعات العادية. المجموعة المرنة هي المجموعة التي تسمح بوجود (الانتماء الجزئي) لها.

2.10 دالة الانتماء وتعريف المجموعة المرنة Function and the Membership :definition of fuzzy set

إن تحديد انتماء أو عدم انتماء عناصر إلى مجموعة عادية A $(A \subset U)$ يمكن أن يتم بواسطة دالة الانتماء $\mu_A(x)$ ، التي تأخذ القيمتين 0 و1 فقط، واللتين تؤشران فيما إذا كانت العناصر تنتمي أو لا تنتمي إلى A. نستطيع كتابة دالة الانتماء هذه $\mu_A(x)$ كما يلي:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x \in A \\ 0 & \text{إذا كانت } x \notin A \end{cases} \qquad (1)$$

وإذاً تكون $\{0, 1\} = \mu_A(x)$ وعلى هذا الأساس يبنى المنطق التقليدي لأن التعبير عن الانتماء هنا ينحصر في 1 (للصدق) و 0 (للكذب).

الآن لنفرض أن دالة الانتماء $\mu_A(x)$ تأخذ قيماً من المجال المغلق $[0, 1]$.

في هذه الحالة لا يكون مفهوم الانتماء عادياً (1 أو 0)، وإنما يصبح هذا المفهوم (مرناً) أي أنه يمثل انتماءً جزئياً أو نقول بتمثيله لدرجات انتماء، أي أنه دالة انتماء تأخذ قيمها بين 0 و1 بالإضافة إلى القيمتين 0 و 1.

لنأخذ المجموعة العادية A والمجموعة الشاملة U. المجموعة المرنة $\mathcal{A}$ تعرف بواسطة مجموعة الأزواج المرتبة:

$$\mathcal{A}=\{(x,\ \mu_A(x)) : x \in A,\ \mu_A(x) \in [0, 1]\} \qquad (2)$$

حيث $\mu_A(x)$ هو دالة تسمى دالة الانتماء التي تعين درجة انتماء كل عنصر x من A إلى المجموعة المرنة $\mathcal{A}$. التعريف (2) يربط كل عنصر من A

مع عدد حقيقي $\mu_A(x)$ من المجال [0, 1]. العدد الحقيقي هذا هو درجة انتماء x إلى المجموعة A.

أصبح واضحاً أن المجموعة المرنة A هي مجموعة أزواج مرتبة. تكون المركبة الأولى x عناصر من مجموعة عادية والمركبة الثانية $\mu_A(x)$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال [0،1]. أي أن الفرق بين المجموعات العادية والمجموعات المرنة هو أن الأولى تعرف بواسطة ذكر عناصرها أو ذكر صفتها المشتركة، أما الثانية فتعرف بواسطة ذكر كل عنصر منها مرتبطاً بعدد حقيقي $0 \le n \le 1$.

سوف نطابق أي مجموعة مرنة مع دالة انتمائها ونستخدم هذين المفهومين تبادلياً. وسنرمز للمجموعات المرنة بواسطة الحروف المائلة $A,B,...$. أما دوال انتمائها المناظرة فسنرمز لها بواسطة $\mu_A(x), \mu_B(x)$,...

مثال: لتكن A مجموعة (أصدقاء أحمد) التالية:

A = {خالد، سعد، ماجد، محمد}

A مجموعة عادية جزئية من المجموعة الشاملة U: جميع أصدقاء أحمد.

المجموعة المرنة A هنا تعبر عن مدى قرب أصدقاء أحمد منه:

A = {(خالد،0.1)، (سعد،0.5)، (ماجد،0.3)، (محمد،0.7)}

هنا يكون: μ_A (خالد) = 0.1 ، μ_A (سعد) = 0.5 ، μ_A (ماجد) = 0.3 ، (μ_A (محمد)= 0.7.

إن الزوج (محمد،0.7) يشير إلى أن محمد هو الأكثر قرباً إلى أحمد، وذلك لأن درجة انتمائه (0.7) أكبر من بقية درجات انتماء الأسماء الأخرى. كذلك فإن (خالد،0.1) يشير إلى أن خالد هو الأقل قرباً إلى أحمد، وذلك لأن درجة انتمائه (0.1) الأصغر من بقية درجات انتماء الأسماء الأخرى.

3.10 العلاقات والعمليات الأساسية على المجموعات المرنة:

لتكن A و B مجموعتين مرنتين من المجموعة الشاملة U ومعرفتان كما يلي:

$$A = \{(x,\ \mu_A(x))\},\ \mu_A(x) \in [0, 1]$$

$$B = \{(x,\ \mu_B(x))\},\ \mu_B(x) \in [0, 1]$$

يتم إدخال العلاقات والعمليات على A وB بواسطة العلاقات والعمليات على دالتي انتمائهما $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ على الترتيب.

1. علاقة التساوي:

تسمى المجموعتان المرنتان A وB متساويتين ونكتب $(A = B)$ إذا وفقط إذا كان لكل $x \in U$:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad (3)$$

أما إذا وجد x بحيث أن $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ فإن $A \neq B$

2. علاقة التضمن:

المجموعة المرنة A تسمى مجموعة جزئية من (متضمنة في) المجموعة المرنة B ونكتب $(A \subseteq B)$ إذا كان لكل $x \in U$:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad (4)$$

مثال:

لتكن المجموعة الشاملة U هي مجموعة أطوال الأشخاص (بالسنتيمترات) والمجموعة المرنة A هي (طويل) والمجموعة المرنة B هي (مناسب) كالتالي:

$U = \{130, 140, 150, 160, 170, 180, 190\}$

$A =\{(130,0),(140,0.1),(150,0.2),(160,0.4),(170,0.5),(180,1),(190,1)\}$

$B = \{(130,0), (140,0.3), (150,0.8), (160,1), (170,1), (180,1), (190,1)\}$

نرى أن $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ لكل $x \in U$: وإذاً A متضمنة (محتواة) في B.

إن $A = B$ تعني أن A مجموعة جزئية من B و B مجموعة جزئية من A .

أي أن:

$B \subseteq A$ و $A \subseteq B$ أو $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ لكل $x \in U$ و $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$ لكل $x \in U$ يعني $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ لكل $x \in U$.

3. عملية التكميل (المجموعة المكملة):

المجموعة المرنة $\bar{A}$ تسمى مكملة للمجموعة المرنة A إذا كان:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

أو أن

$$\mu_{\bar{A}}(x) + \mu_A(x) = 1 \qquad (5)$$

مثال 1: لنجد المجموعة المكملة للمجموعة المرنة:

$A = \{(1,0.1), (2, 0.4), (3, 0.8)\}$

وباستخدام (5) نحصل على:

$$\mu_{\bar{A}}(1) = 1 - \mu_A(1) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\mu_{\bar{A}}(2) = 1 - \mu_A(2) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\mu_{\bar{A}}(3) = 1 - \mu_A(3) = 1 - 0.8 = 0.2$$

وإذاً المجموعة المكملة:

$$\bar{A} = \{(1, 0.9), (2, 0.6), (3, 0.2)\}$$

مثال 2:

لتكن المجموعة الشاملة U هي مجموعة أعمار الأشخاص (بالسنين) والمجموعة المرنة A صغير السن والمرنة B كبير السن، كالتالي:

$$U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

$$A = \{(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)\}$$

$$B = \{(10,0),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.5),(50,0.7),(60,0.9),(70,1),(80,1)\}$$

ولنجد $\bar{A}$ و $\bar{B}$ كما يلي:

$$\bar{A} = \{(10,0),(20,0.2),(30,0.4),(40,0.8),(50,0.9),(60,1),(70,1),(80,1)\}$$

$$\bar{B} = \{(10,1),(20,0.9),(30,0.7),(40,0.5),(50,0.3),(60,0.1),(70,0),(80,0)\}$$

4. عملية التقاطع:

تقاطع المجموعتين المرنتين A وB تكتب $(A \cap B)$ ودالة انتمائه $\mu_{A\cap B}(x)$ تعرَّف كما يلي:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \ x \in U \qquad (6)$$

مثال:

لنجد $A \cap B$ حسب المثال الأخير. المجموعة المرنة صغير السن وكبير السن هي:

$$A \cap B = \{(10,0),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)\}$$

نرى أن الانتماء إلى المجموعة (صغير السن وكبير السن) تعني بشكل خاص الأشخاص الذين يبلغون الثلاثين من العمر.

5. عملية الاتحاد:

اتحاد المجموعتين A وB تكتب $(A \cup B)$ ودالة انتمائه $\mu_{A \cup B}(x)$ تعرف كما يلي:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \ x \in U \qquad (7)$$

مثال:

المجموعة المرنة $A \cup B$ حسب المثال السابق هي:

$$A \cup B = \{(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.5),(50,0.7),(60,0.9),(70,1),(80,1)\}$$

نلاحظ أنه حتى أربعين سنة تكون درجة الانتماء من صنف صغير السن واعتباراً من أربعين سنة تكون من صنف كبير السن.

نرى مما ذكر أعلاه أن:

$$A \cup \bar{A} = \{(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.8),(50,0.9),(60,1),(70,1),(80,1)\}$$

$$A \cap \bar{A} = \{(10,0),(20,0.2),(30,0.4),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)\}$$

أي أن $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq \mu_U(x) = 1$ أو $A \cup \bar{A} \neq U$

كذلك فإن $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq \mu_\Phi(x) = 0$ أو $A \cap \bar{A} \neq \Phi$

يتبين أن قانون (الثالث المرفوع) وكذلك مبدأ عدم التناقض لا يصحان بالنسبة إلى المجموعات المرنة. أما في نظرية المجموعات العادية فإن كل عنصر يمتلك أو لا يمتلك خاصية معينة ونعبر عن ذلك بواسطة 1 أو 0. في عالمنا الواقعي توجد عناصر تمتلك الصفة بدرجات بين 0 و1 أي أنه توجد ظلال رمادية كثيرة بين الأبيض والأسود. إن عدم وجود قانون (الثالث المرفوع) بالنسبة للمجموعات المرنة يجعلها أكثر عمومية من المجموعات العادية، ويجعلها مناسبة جداً لوصف الغموض (عدم الدقة) في العالم الواقعي ولوصف العمليات على المعلومات غير التامة وغير الواضحة. يقول كاندل[٥٨]: (إن الفكرة المركزية لفلسفة أفلاطون تكمن في وجود عناصر غير دقيقة في العالم الواقعي. إن المفاهيم الدقيقة تقابل ذلك النوع من الأشياء المستخدمة في الرياضيات البحتة بينما (البناءات غير الدقيقة) هي الغالبة في الحياة الواقعية. نحن نعتقد أن البناءات غير

58-Kandel, a.- fuzzy mathematical techniques and applications, addison-wesley, 1980.

الدقيقة غنية بما يكفي من العمليات والخواص الرياضية لتصبح أداة حقيقية من أجل بناء أنواع جديدة من الحالات. بالإضافة إلى ذلك فإن الخواص الرياضية هذه تجهزنا بمؤشر عملي عند القيام بالاستدلالات الفلسفية والتقنية معاً).

6. عملية الفرق:

فرق المجموعتين A وB نكتب $(A-B)$ ودالة انتمائه $\mu_{A-B}(x)$ تعرف كما يلي:

$$\mu_{A-B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{\bar{B}}(x)), \ x \in U \qquad (8)$$

مثال:

لنجد $A-B$ و $B-A$ حسب المثال السابق كما يلي:

$A - B = \{(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)\}$

$B - A = \{(10,0),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.5),(50,0.7),(60,0.9),(70,1),(80,1)\}$

نرى أن $B - A \neq A - B$ بشكل عام.

باستخدام (6) يمكن كتابة (8) هكذا:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\bar{B}}(x)$$

كذلك من التعريف (8) وباستخدام (6) نحصل على:

$$\mu_{B-A}(x) = \min(\mu_B(x), \mu_{\bar{A}}(x)) = \mu_{\bar{A}\cap B}(x) \qquad (9)$$

من المهم ملاحظة أن عمليات: التكميل (5)، التقاطع (6)، الاتحاد (7) على المجموعات المرنة تقابل على الترتيب، النفي، الوصل، الفصل في المنطق اللانهائي القيمة.

7. عملية الجداء الديكارتي:

سندخل عمليتين للجداء الديكارتي للمجموعتين المرنتين $A(x)$ و $B(y)$:

$$A(x) = \{(x, \mu_A(x)), \ \mu_A(x) \in [0, 1], \ x \in A \subset U_1\}$$

$$B(y) = \{(y, \mu_B(y)), \ \mu_B(y) \in [0, 1], \ y \in A \subset U_2\}$$

1. الجداء الديكارتي الأصغر:

نعرِّف هذا الجداء الذي نكتبه $A \boxtimes B$ كما يلي:

$$A \boxtimes B = \{(x,y), \min(\mu_A(x)), \mu_B(y)), (x,y) \in A \times B\}$$

وهذا يعني القيام بالجداء الديكارتي العادي $A\times B$ ونربط مع كل زوج (x,y) قيمة انتماء هي الأصغر بين $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$.

2. الجداء الديكارتي الأعلى:

نعرف هذا الجداء الذي نكتبه $A \boxtimes B$ كما يلي:

$$A \boxtimes B = \{(x,y), \max(\mu_A(x)), \mu_B(y)), (x,y) \in A\times B\}$$

هنا قيمة انتماء كل زوج (x,y) هي القيمة الأعلى بين $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$.

مثال:

لنأخذ المجموعتين المرنتين:

$A = \{(x_1, 0), (x_2, 0.1), (x_3, 1)\}$
$B = \{(y_1, 0.3), (y_2, 1), (y_3, 0.2), (y_4, 0.1)\}$

<u>الجدولان التاليان يمثلان الجداء الديكارتي الأصغر والأعلى</u>:

	y / x	y1	y2	y3	y4
$A \boxtimes B \equiv$	x1	0	0	0	0
	x2	0.1	0.1	0.1	0.1
	x3	0.3	1	0.2	0.1

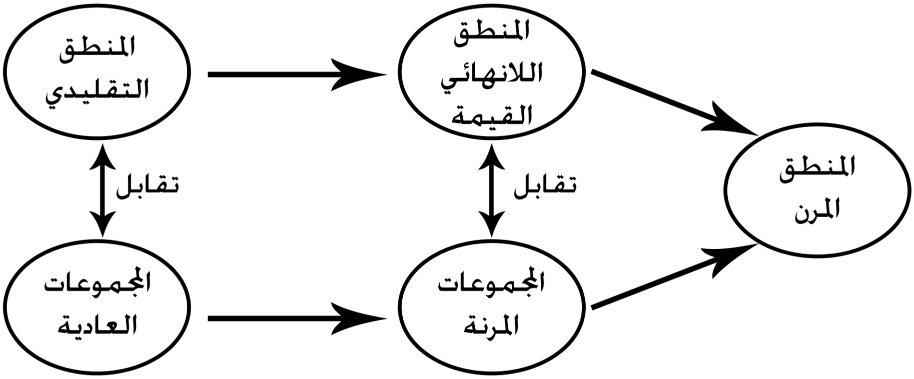
	y / x	y1	y2	y3	y4
$A \boxtimes B \equiv$	x1	0.3	1	0.2	0.1
	x2	0.3	1	0.2	0.1
	x3	1	1	1	1

4.10 موضوع المنطق المرن:

المنطق المرن يمثل توسيعاً للمنطق اللانهائي القيم، وهذا الأخير بدوره يمثل تعميماً للمنطق التقليدي (الثنائي القيم). وبالمقابل تمثل نظرية المجموعات المرنة التي هي أداة المنطق المرن تعميماً لنظرية المجموعات العادية.

الموضوعات الرئيسة للمنطق المرن هي: المتغيرات اللغوية، المحوِّرات اللغوية، قواعد الاشتقاق، الاستدلال المرن. إن المنطق المرن يركز على المتغيرات اللغوية في اللغة العادية، ويهدف إلى وضع أسس الاستدلال المرن للقضايا غير الدقيقة.

المخطط أدناه يبين نشوء المنطق المرن من المنطق اللانهائي القيمة ومن المجموعات المرنة، وهذان الأخيران ينشأان من المنطق التقليدي والمجموعات العادية على الترتيب.



المتغيرات اللغوية هي المتغيرات التي تكون قيمها هي الكلمات أو القضايا في اللغة العادية أو في اللغات الصناعية.

مثال: لنأخذ الكلمة: (العمر) من اللغة العادية وباستخدام المجموعات المرنة يمكننا إعطاء وصف تقريبي لها. (العمر) هو متغير لغوي قيمه لغوية وليست عددية وهي المجموعات المرنة، مثلاً: شاب، ليس شاباً، شاب جداً، منتصف العمر، عجوز، عجوز جداً، ليس شاباً جداً، وليس عجوزاً جداً ...إلخ. وهذه المجموعات تعرف بواسطة دالة انتماء.

5.10 المحوِّرات اللغوية Linguistic Modifiers:

لتكن $x \in U$ و A مجموعة مرنة معرفة بواسطة دالة الانتماء $\mu_A(x)$.

نرمز بواسطة m للمحوِّر اللغوي. الكلمات التالية تمثل أمثلة على المحورات اللغوية: ليس، جداً، باعتدال. الرمز mA يعني مجموعة مرنة محوَّرة بواسطة المحور m والتي دالة انتمائها $\mu_{mA}(x)$.

تعريف كل من المحورات: ليس، جداً، باعتدال يكون حسب العلاقات التالية:

ليس:

$$\mu_{A\text{ ليس}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (1)$$

جداً:

$$\mu_{A\text{ جدا}}(x) = (\mu_A(x))^2 \qquad (2)$$

باعتدال:

$$\mu_{\text{باعتدال} A}(x) = (\mu_A(x))^{1/2} \qquad (3)$$

مثال: لنأخذ المجموعة المرنة A التي تصف سرعة سيارة x (كم/سا) بواسطة المتغير اللغوي (سريع) المعرف كما يلي:

A={(0,0), (20,0.02), (40,0.08), (60,0.2), (80,0.5), (100,0.8), (120,0.9), (140,1)}

المجموعة الكلية:

$U = \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120\}$

المتغير اللغوي (سريع) يمكن تحويره ليصبح: ليس سريعاً، سريع جداً، سريع باعتدال. سنجد أولاً (ليس سريعاً):

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(x) = 1- \mu_{\text{سريع}}(x)$$

باستخدام قيم $\mu_{\text{سريع}}(x)$ نجد أن:

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(0) = 1- \mu_{\text{سريع}}(0) = 1- 0 = 1$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(20) = 1- \mu_{\text{سريع}}(20) = 1- 0.02 = 0.98$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(40) = 1- \mu_{\text{سريع}}(40) = 1- 0.08 = 0.92$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(60) = 1- \mu_{\text{سريع}}(60) = 1- 0.2 = 0.8$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(80) = 1- \mu_{\text{سريع}}(80) = 1- 0.5 = 0.5$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(100) = 1- \mu_{\text{سريع}}(100) = 1- 0.8 = 0.2$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(120) = 1- \mu_{\text{سريع}}(120) = 1- 0.9 = 0.1$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(140) = 1- \mu_{\text{سريع}}(140) = 1- 1 = 0$$

إذاً المجموعة المرنة (ليس سريعاً) B يكون كما يلي:

B={(0,1), (20,0.98), (40,0.92), (60,0.8), (80,0.5), (100,0.2), (120,0.1), (140,0)}

بشكل مشابه نجد المجموعة المرنة (سريع جداً) C كما هو مبين أدناه.

$$\mu_{\text{سريع جدا}}(x) = (\mu_{\text{سريع}}(x))^2$$

C={(0,0), (20,0.0004, (40,0.0064), (60,0.04), (80,0.25), (100,0.64), (120,0.81), (140,1)}

المجموعة المرنة D:

$$\mu_{\text{باعتدال سريع}}(x) = (\mu_{\text{سريع}}(x))^{1/2}$$

D={(0,0), (20,0.414), (40,0.283), (60,0.447), (80,0.707), (100,0.894), (120,0.949), (140,1)}

6.10 الصدق Truth:

إن المتغير اللغوي الأهم هو (الصدق)، ويتم تعريفه بواسطة مجموعة مرنة دالة انتمائها $\mu_{\text{صادق}}(x)$ حيث $\mu \in [0, 1]$. سنستخدم كلمة (صادق) عوضاً عن (الصدق). مفهوم (كاذب) نعرفه على أنه (ليس صادقاً). تعريف (صادق) نعطيه كما يأتي:

$$\text{صادق} = \{(x, \mu_{\text{صادق}}(x)): x \in [0,1], \mu_{\text{صادق}}(x) = x, \mu \in [0,1]\}$$

بتطبيق المحورات في (1)، (2)، (3) في الفقرة السابقة على $\mu_{\text{صادق}}(x)$

نحصل على:

$$\mu_{\text{ليس صادق}}(x) = 1 - \mu_{\text{صادق}}(x)$$

$$\mu_{\text{صادق جدا}}(x) = (\mu_{\text{صادق}}(x))^2 = x^2$$

$$\mu_{\text{باعتدال صادق}}(x) = (\mu_{\text{صادق}}(x))^{1/2} = x^{1/2}$$

يمكن إيجاد المتغيرات اللغوية: صادق جداً جداً، كاذب جداً جداً كما يلي:

$$\mu_{\text{صادق جدا جدا}}(x) = (\mu_{\text{صادق جدا}}(x))^2 = x^4$$

$$\mu_{\text{كاذب جدا جدا}}(x) = (\mu_{\text{كاذب جدا}}(x))^2 = (1-x)^4$$

7.10 القضايا المركبة:

تتكون قضايا مركبة من قضيتين ذريتين P و Q مربوطتين بواسطة روابط كالتالي:

القضيتان:

P: x تكون A

Q: y تكون B (1)

حيث A و B هما المجموعتان المرنتان:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in A \subset U_1\} \quad B = \{(y, \mu_B(y)): y \in B \subset U_2\}$$

إن درجات الانتماء $\underset{A}{\mu}(x)$ و $\underset{B}{\mu}(y)$ تمثل قيم صدق القضيتين في (1)، وبالعكس فإن قيم صدق (1) يعبر عنها بواسطة دالتي الانتماء $\underset{A}{\mu}(x)$ و $\underset{B}{\mu}(y)$.

وكمثال على P: المسافة قصيرة جداً. في هذا المثال المتغير اللغوي x هو المسافة وقصيرة جداً هي المجموعة المرنة المحورة A .

1. الوصل: P Λ Q

قيم صدق P Λ Q تعرّف كالتالي:

$$V(P \wedge Q) = \mu_{A \boxtimes B}(x,y) = \min\left(\underset{A}{\mu}(x), \underset{B}{\mu}(y)\right), (x,y) \in A \times B \quad (2)$$

2. الفصل: P V Q

قيم صدق P V Q تعرف كما يلي:

$$V(P \vee Q) = \mu_{A \boxtimes B}(x,y) = \max\left(\underset{A}{\mu}(x), \underset{B}{\mu}(y)\right),(x,y) \in A \times B \quad (3)$$

3. الاستلزام: P → Q

قيم صدق P → Q تعرف كالآتي:

$$V(P \to Q) = \min\left(1, 1- \underset{A}{\mu}(x) + \underset{B}{\mu}(y)\right), (x,y) \in A \times B \quad (4)$$

العلاقات (2) و(3) و(4) تعود في الأصل للعلاقات المقابلة لها في منطق لوكاتشيفيج المتعدد القيم.

مثال:

لنأخذ القضيتين P و Q كما يلي:

P: x سريع

Q: x خطر

حيث:

$$A = B = U1 = U2 = \{0,20,40,60,80,100,120,140\}$$

$$\underset{\text{سريع}}{\mu}(x) = \{0, 0.02, 0.08, 0.2,0.5,0.80.9,1\}$$

$$\underset{\text{خطر}}{\mu}(y) = \{0,0.04,0.1,0.2,0.4,0.7,1,1\}$$

1. قيمة صدق الوصل P Λ Q، أي قيم صدق: x سريع و x خطر نعرضها في الجدول التالي:

	B							
y / X	0	20	40	60	80	100	120	140
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

A	40	0	0.04	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
	60	0	0.04	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	80	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.5	0.5	0.5
	100	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	0.8	0.8
	120	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	0.9	0.9
	140	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1

الأزواج المرتبة (x_i,y_j)، حيث $x_i \in A$ و $y_j \in B$ في الجداء الديكارتي $A \times B$ وقمنا بكتابة القيمة الأصغر من $\mu_A(x_i)$ و $\mu_B(y_j)$ إلى (x_i,y_j).

لنحسب، مثلاً قيم السطر الثالث في الجدول أعلاه حيث $x = 40$ و y يأخذ قيمة من B:

$$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 > \mu_{\text{خطر}}(0) = 0,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,0) = 0$$

$$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 > \mu_{\text{خطر}}(20) = 0.04,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,20) = 0.04$$

$$\mu_{\text{خطر}}(40) = 0.08 < \mu_{\text{سريع}}(40) = 0.1,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,40), = 0.08$$

$$\mu_{\text{خطر}}(60) = 0.08 < \mu_{\text{سريع}}(40) = 0.2,\ (40,60)\ \mu_{A \boxtimes B} = 0.08$$

$$= 0.08 < \mu_{\text{سريع}}(40) \quad \mu_{\text{خطر}}(80) = 0.2,\ (40,80)\ \mu_{A \boxtimes B} = 0.08$$

$$\mu_{\text{خطر}}(100) = 0.08 < \mu_{\text{سريع}}(40) = 0.8,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,100) = 0.08$$

$$\mu_{\text{خطر}}(120) = 0.08 < \mu_{\text{سريع}}(40) = 0.9,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,120) = 0.08$$

$$\mu_{\text{خطر}}(140) = 0.08 > \mu_{\text{سريع}}(40) = 1,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,140) = 0.08$$

2. قيمة صدق الفصل PVQ أي قيم صدق: x سريع أو x خطر.

		B							
	y / X	0	20	40	60	80	100	120	140
	0	0.00	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1
	20	0.02	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1
A	40	0.08	0.08	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1
	60	0. 2	0. 2	0.2	0.2	0.4	0.7	1	1
	80	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.7	1	1
	100	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1	1
	120	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1

140	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	1	1

لقد استخدمنا لبناء الجدول تعريف $B \boxtimes A$.

3. قيم صدق الاستلزام، أي قيم صدق: إذا كان x سريعاً فإن x خطر.
في الجدول أدناه، حيث لكل زوج $(x_i,y_j) \in A \times B$ حسبنا $1 - \mu_B(x_i) + \mu_B(y_i)$ وبعدها أخذنا هذه القيمة إذا كانت أصغر من 1، وإلا فقد أخذنا 1.

	X \ y	0	20	40	60	80	100	120	140
		B							
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	20	0.98	1	1	1	1	1	1	1
A	40	0.82	0.96	1	1	1	1	1	1
	60	0. 8	0. 84	0.9	1	1	1	1	1
	80	0.5	0.54	0.6	0.7	0.9	1	1	1
	100	0.2	0.24	0.3	0.4	0.6	0.9	1	1
	120	0.1	0.14	0.2	0.3	0.5	0.8	1	1
	140	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1

8.10 الاستدلال المرن Fuzzy Reasoning:

الاستدلال المرن يستخدم المجموعات المرنة والمنطق المرن لتوضيح الاستدلال البشري. هذا الاستدلال يفتقد إلى الدقة المتوافرة في المنطق التقليدي، ولكنه أكثر فعالية في التعامل مع الأنظمة المعقدة وغير المعرفة.

نعلم من المنطق التقليدي أن قاعدة اشتقاق الوضع تنص على أنه:

من P و $P \rightarrow Q$ تنتج Q، أي أنه إذا كانت P و $P \rightarrow Q$ صادقتين فإن Q تكون صادقة أيضاً. تخطيطياً تكتب هكذا:

المقدمة 1: P

المقدمة2: $P \rightarrow Q$

النتيجة: Q

يمكن كتابة قاعدة الوضع أعلاه بشكل تفصيلي هكذا:

المقدمة1: x تكوّن A

المقدمة2: إذا كانت x تكوّن A، فإن y تكوّن B

النتيجة: y تكون B

هنا P: x تكوّن A ، Q: y تكوّن B، حيث A و B مجموعتان عاديتان.

9.10 قاعدة الوضع المعممة:

المنطق المرن يرفض قاعدة الوضع أعلاه، وهو بذلك يعطي حلاً لمفارقة الكومة التي ذكرناها.

قاعدة الوضع المعممة في المنطق المرن توضع على الشكل التالي:

المقدمة 1: P'

المقدمة 2: $P \rightarrow Q$

~~النتيجة: Q'~~

أو على الشكل

المقدمة1: x تكوّن A'

المقدمة2: إذا كانت x تكوّن A، فإن y تكوّن B

~~النتيجة: y تكوّن B'~~

هنا P': x تكون A' ، P: x تكون A ، Q: y تكون B، Q': y تكون B' ، معرفة بواسطة المجموعات المرنة A'، A، B، B' والتي تمثّل مفاهيم مرنة.

المجموعتان A وA' متقاربتان ولكنهما ليستا متساويتين والشيء نفسه ينطبق على تالي المقدمة الثانية B والنتيجة B'.

مثال:

المقدمة1: هذه السيارة أكثر سرعة قليلاً.

المقدمة2: إذا كانت السيارة سريعة فإن السيارة تكون خطرة.

~~النتيجة: هذه السيارة أكثر خطورة قليلاً.~~

في هذا المثال لدينا

x تكون A: السيارة تكون سريعة $A=\{(x, \mu_{سريعة}(x))\}$

x تكون A': السيارة تكون أكثر سرعة قليلاً $A' = \{(x, \mu_{أسرعةق}(x))\}$

y تكون B: السيارة خطرة $B = \{(x, \mu_{خطرة}(y))\}$

y تكون B': السيارة أكثر خطورة قليلاً $B' = \{(x, \mu_{أخطورةق}(y))\}$

10.10 تمارين:

(أ) جد المجموعة المكملة للمجموعة المرنة:

$A = \{(4,1), (5, 0.7), (6, 0.5)\}$

(ب) لتكن A,B مجموعتين مرنتين كالتالي:

$A = \{(x_1,0.1), (x_2, 0.6), (x_3, 0.7)\}$

$B = \{(x_1,0.9), (x_2, 1), (x3, 0.1)\}$

احسب:

(1) $\overline{A}\,,\,\overline{B}$ (4) $A \cap \overline{A}$

(2) $A \cup B$ (5) $\overline{A} \cup \overline{B}$

(3) $A \cap B$ (6) $\overline{A \cap B}$

(ج) برهن كلاً مما يأتي بالنسبة إلى المجموعتين A,B في التمرين (2).

(1) $A \cup A = A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

(د) لتكن B مجموعة مرنة تصف سرعة سيارة بواسطة المتغير اللغوي (خطير):

B={(0,0),(20,0.04),(40,0.1),(80,0.4), (100,0.7), (120,1), (140,1)}

باستخدام المحوِّرات اللغوية: ليس، جداً، باعتدال، المعرفة في العلاقات (1)، (2)، (3) في الفقرة (5.10)، جد

$\mu_{\text{ليس خطيراً}}(y)$ $\mu_{\text{خطيراً جداً}}(y)$ $\mu_{\text{خطير باعتدال}}(y)$

(هـ) ليكن المتغير اللغوي (ذكي) معرفاً بواسطة المجموعة المنتهية

ذكي = {(0.5, 0.2), (0.6, 0.4), (0.7, 0.8), (0.8, 0.9), (0.9, 1), (1,1)}

باستخدام المحوِّرات اللغوية: ليس، جداً، باعتدال، المعرفة في العلاقات (1)، (2)، (3) في الفقرة (5.10)، احسب

(1) $\mu_{\text{ليس ذكياً}}(x)$

(2) $\mu_{\text{ذكي جداً}}(x)$

(3) $\mu_{\text{ذكي باعتدال}}(x)$

(ح) ليكن المتغير اللغوي (صادق) معرفاً بواسطة المجموعة المرنة

صادق= {(0.5, 0.2), (0.6, 0.4), (0.7, 0.8), (0.8, 0.9), (0.9, 1), (1,1)}

باستخدام المحوِّرات اللغوية: ليس، جداً، باعتدال، المعرفة في العلاقات (1)، (2)، (3) في الفقرة (5.10)، احسب:

(1) كاذب.

(2) صادق جداً.

(3) صادق باعتدال.

(4) صادق جداً جداً.

(5) ليس كاذباً.

(6) كاذب باعتدال.
(7) كاذب جداً.
(ط) خذ القضيتين الذريتين P و Q المعرفتين كالتالي:
P: x تكون A = الجهد يكون قليلاً.
Q: x تكون B = السرعة تكون قليلة.
المتعلقتين بالجهد والسرعة النهائيتين لمحرك كهربائي والمعرفتين بواسطة دالة الانتماء كما يلي:

x	100	150	200	250	300
$\mu_A(x)$	1	0.8	0.5	0.2	0.1

y	1600	1800	2000	2200	2400
$\mu_B(y)$	1	0.9	0.7	0.3	0

جد:
1. $V(P \wedge Q)$
2. $V(P \vee Q)$
3. $V(P \rightarrow Q)$