مدخـل

يمثل هذا الكتـاب مـدخلاً إلـى المنطـق غيـر التقليـدي وتطبيقاتـه. والمنطـق التقليدي هو الذي يصح فيه مبدأ الثالث المرفوع، أي أن القضـية تكون صـادقة أو كاذبة وليس ثمة قيمة صدق أخرى، ولهذا سمي أيضـاً المنطق ثنـائي القيم. وهذا المنطق يدرسه عادة الطلبة المبتدئون في الجامعات العربيـة. ولكننـا نـرى أنـه من المهم، بل من اللازم أن تبدأ هذه الجامعات بإصلاح تدريس المنطق فيها، ومواكبة الجامعـات العالميـة، وذلـك بتـدريس المنطـق غيـر التقليـدي لأهميتـه فـي الفلسـفة والرياضيات وعلوم الحاسوب.

إن المنطق غير التقليدي يكون توسيعاً للمنطق التقليدي إذا أضيفت مفردات لغوية جديدة لمفردات المنطق التقليـدي، كمـا فـي منطـق الجهـة حيث تضـاف (مـن الضروري أن)، (من الممكن أن) وتضـاف (دائماً سيكون الحال أن)، (أحياناً يكون الحـال أن) فـي منطـق الـزمن وتضـاف (مـن المعـروف أن)، (مـن المعتقد أن) فـي منطقي المعرفة والاعتقاد على الترتيب، وتضـاف (من اللازم أن)، (من المسموح أن) في منطق الأخلاق. وبرفقة هذه الإضـافات تـدخل بـديهيات أو قواعد اشـتقاق لتغطيتها.

إن المنطق غيـر التقليدي يكـون بـديلاً للمنطـق التقليـدي إذا امتلك المفردات اللغويـة نفسـها للمنطـق التقليدي ولكـن ببـديهيات أو قواعد اشـتقاق مختلفـة. ويمثـل المنطق المتعدد القيم والمنطـق الحدسـي والمنطـق المـرن أمثلـة علـى هذا المنطـق غير التقليدي.

يخصص الفصل الأول لمنطق قضايا الجهة أو منطق الضرورة والإمكانية، ويظهر هنا المنطق غير التقليدي، كتوسيع للمنطق التقليدي، لأننا في إطار المنطق التقليـدي الـذي يسـتخدم جـداول الصـدق لدراسـة دلالتـه لا نسـتطيع دراسـة دلالـة القضايا التي تتصدرها الكلمات: من الضروري، من الممكن. قمنا في هذا الفصل بدراسة دلالة مثل تلك القضايا، وذلك باستخدام نماذج كريبكـة، حيـث يحـدد صـدق وكذب الصيغ في عوالم ممكنة أخرى بالإضافة إلى العالم الواقعي. ولقد اسـتخدمنا المخططـات لتسـهيل عمليـة فهم المـادة المعروضـة، لا سيما العلاقـة الثنائيـة التـي

ترتبط بواسطتها العوالم الممكنة بعضها ببعض. وبعد أن أعطينا تعريف صدق الروابط، أعطينا أمثلة عديدة لإيجاد قيم صدق الصيغ المركبة، باستخدام تعريفي مؤثر الضرورة L ومؤثر الإمكانية M. إن أهمية هذا الفصل تكمن في كون الفصلين السادس والسابع يمثلان تطبيقات له. كما برهنا باستخدام نماذج كريبكة أن خواص العلاقة الثنائية تجد تعبيرها بواسطة صيغ معينة.

تدخل أشجار الصدق الموجهة - الفصل الثاني - كوسيلة أخرى لدراسة دلالة المنطق غير التقليدي ولتحديد صحة الحجج. في هذا الفصل تدخل 4 قواعد اشتقاق جديدة على أشجار الصدق في منطق القضايا التقليدي (غير الجهوي) وهي قواعد: الضرورة ونفيها والإمكانية ونفيها. تستخدم أشجار الصدق كأداة بديلة لنماذج كريبكة، يجري تطويرها عبر فصول الكتاب، حيث تكون أكثر سلاسة من تلك النماذج.

الفصل الثالث مخصص لبناء الأنساق العادية لمنطق قضايا الجهة، وهي الأنساق: K، T، D، S_4، S_5، B، ويبرهن أن K أساسها وأن الأنساق الأخرى هي توسيعات إلى K، حيث تستخدم أشجار الصدق الموجهة لبرهان ذلك. وتعطى العديد من مبرهنات هذه الأنساق.

يغطي الفصل الرابع، الاستلزام الدقيق ومضادات الواقع. تبدأ دراسات الاستلزام الدقيق بتبيان أفضليته على الاستلزام التقليدي (المادي)، ويمكن تعريفه باستخدام مفهوم الضرورة. أما تحديد صحة الصيغ وصحة الحجج فيتم عن طريق أشجار الصدق الموجهة ولهذا الغرض تدخل قاعدتان تتعلقان بالاستلزام الدقيق وقاعدتان تتعلقان بالاستلزام الثنائي الدقيق. وأخيراً، يبنى نسق الاستلزام الدقيق. أما مضادات الواقع فتوضح أولاً أفضلياتها على الاستلزام الدقيق، ثم يتم إعطاء تعريف صدق صيغها باستخدام العوالم الممكنة، يدخل مفهوم العوالم الممكنة القريبة الشبه من العالم الواقعي.

في الفصل الخامس يتم توسيع منطق قضايا الجهة إلى منطق المحمولات الجهوي، حيث تضاف قواعد جديدة لقواعد أشجار الصدق الجهوية السابقة، لتغطية المكممين: الكلي والجزئي. أما توسيع هذا المنطق ليشمل مفهوم الهوية، فيتطلب إضافة قاعدتين اثنتين.

منطق الزمن ومنطق الأخلاق تتم مناقشتهما وبناؤهما في الفصل السادس كتطبيقين لمنطق الجهة، فيعرض الزمن على أنه تتابع مرتب خطياً من اللحظات الزمنية، التي تمثل العوالم الممكنة. يدرس تركيب هذا المنطق بإضافة المؤثرين الزمنيين G و H ليقابلا المؤثر الجهوي L وإضافة المؤثرين الزمنيين F وP ليقابلا المؤثر الجهوي M. تستخدم نماذج كريبكة لدراسة دلالة منطق الزمن، حيث تمثل (قبل) العلاقة الثنائية في هذه النماذج. لبناء منطق الأخلاق يضاف مؤثران هما مؤثر الإلزام ليقابل المؤثر الجهوي L، ومؤثر السماح ليقابل M. تعطى قواعد صدق الروابط في كل من المنطقين وتبرهن بعض المبرهنات.

منطق المعرفة ومنطق الاعتقاد تتم دراستهما في الفصل السابع كتطبيقين آخرين لمنطق الجهة، حيث يتم إدخال المؤثرين K ليعني (من المعروف أن) وB ليعني (من المعتقد أن)، ليقابلا المؤثر الجهوي L. الخيارات المعرفية تمثل العوالم الممكنة في منطق المعرفة وتتم دراسة أوجه التشابه والاختلاف بين المنطقين.

الفصل الثامن مخصص لدراسة المنطق الحدسي. في هذا المنطق، يتم استبدال مفهوم الصدق، الذي يمثل المفهوم المركزي للدلالة عادة بمفهوم البرهان. وهكذا، فالقضية الصادقة عند الحدسيين هي القضية المبرهنة، والقضية الكاذبة عندهم هي القضية المدحضة. تستخدم أشجار الصدق الجهوية بعد تحويرها لدراسة دلالة المنطق الحدسي، فتعطى 5 قواعد اشتقاق لهذه الأشجار، ثم يبنى نسق كامل لهذا المنطق.

يعرض المنطق المتعدد القيم في الفصل التاسع، حيث تثبّت الأسباب التي تدفع بالكثير من المناطقة لتبنيه، لنصل إلى المنطق ثلاثي القيم فندرس: دلالة بوشفار، كلين، لوكاتشيفتج. تتم مقارنة هذه الدلالات مع بعضها البعض. يعمم المنطق الثلاثي القيم إلى المنطق المتعدد القيم، حيث تعطى العلاقات التي يتم بواسطتها تعريف الروابط. يربط هذا المنطق المتعدد القيم بالمنطق اللانهائي أو المتصل الذي هو موضوع الفصل الأخير.

موضوع الفصل العاشر هو المنطق المرن الذي نعتبره التعميم الأخير للمنطق، ويكون بديلاً للمنطق الثنائي القيم. والحقيقة، أن المنطق المرن يمثل ثورة في هذا المجال، حيث أنه يعكس بدقة أكثر التفكير البشري ويسمح بتطبيقات أوسع في مجالات عدة. وبما أن المنطق المرن يؤسس على المجموعات المرنة، فلقد قمنا بدراسة هذه الأخيرة باختصار وباستخدام الأمثلة التوضيحية، حيث تدرس العلاقات والعمليات على المجموعات المرنة. تناقش الموضوعات الرئيسة للمنطق المرن وهي: المتغيرات اللغوية، والمحورات اللغوية، وقواعد الاشتقاق المرنة والاستدلال المرن للقضايا غير الدقيقة.

أخيراً نود أن نشكر الأستاذ "بوشيخي الشيخ" على جهده في مراجعة الكتاب والآنسة عزاش أمينة التي تحملت عناءً كبيراً من أجل التنضيد الضوئي له.

مقدمة رياضية

عندما يعالج المنطق بشكل معاصر، فإن استخدام بعض المفاهيم الرياضية، يصبح شيئاً لا يمكننا تجنبه. ومع ذلك، فإن هذه المفاهيم تستخدم بحدها الأدنى، ومفيدة للقارئ غير المطلع عليها. سنعرض بشكل مختصر لبعض العلاقات والعمليات الأولية على المجموعات، وكذا مفهوم الدالة. ويستطيع القارئ الرجوع إليها فقط، عندما يحتاجها أثناء قراءته للكتاب.

1. المجموعات والعلاقات على المجموعات:

المجموعة مفهوم أولي (لا يعرَّف) ويمكن وصفه بواسطة الأمثلة: مجموعة دول العالم، مجموعة الأعداد الطبيعية. تسمى الأشياء التي تتألف منها مجموعة ما بعناصر هذه المجموعة، فالعدد 4 هو عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية. وتتعين مجموعة ما A بكتابة عناصرها بين قوسين من النوع { }، وتوضع فواصل بين العناصر. يمكن كتابة المجموعة، وذلك بذكر الصفة المميزة التي يتمتع بها كل عنصر من هذه المجموعة كالتالي: $A=\{x/P(x)\}$، حيث إن المتغير x يمثل أي عنصر من المجموعة A والخط المائل / يعني حيث، و $P(x)$ تعني تحقُّق خاصية أو خواص معينة فمثلاً، إذا كانت $A=\{1, 4, 9, 16\}$، فإنه يمكن كتابتها على الشكل:

$$A=\{x/P(x) \equiv x \text{ مربع الأعداد } 1, 2, 3, 4\}$$

إن المجموعة التي ليس لها أي عنصر تسمى المجموعة الخالية، ويرمز لها بواسطة ϕ. إذا كانت المجموعة $A=\{a, b, c\}$، فإننا نقول إن العنصر a ينتمي إلى المجموعة A، ونرمز لذلك بواسطة $a \in A$ (الرمز $\in$ يقرأ: ينتمي

إلى، أو عنصر من). أما إذا كان العنصر لا ينتمي إلى المجموعة A، فإننا نرمز لذلك بواسطة $a \notin A$. وإذا كانت المجموعة $B=\{a, c\}$، فإننا نلاحظ أن كلاً من عناصر B ينتمي إلى المجموعة A، فنقول إن المجموعة B محتواة في (متضمنة في) المجموعة A، ونرمز لذلك بواسطة $A \subseteq B$. وإذا كانت $B \subseteq A$، ولكن A غير محتواة في B، فإننا نقول إن B محتواة تماماً في A، وعندها نكتب $B \subset A$. وهذا يعني وجود عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى A ولا ينتمي إلى B. إذا كانت $B \subseteq A$، فإننا نقول كذلك إن B مجموعة جزئية منها، وإذا كانت $B \subset A$ فإننا نقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A. المجموعتان A و B تكونان متساويتين ونكتب $A = B$، إذا كانت $A \subseteq B$ و $A \subseteq B$. المجموعة الخالية ϕ محتواة في أي مجموعة أخرى مهما كانت. المجموعة U التي تحقق الشرط $A \subseteq U$ تسمى مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A. نشير إلى أن $\subseteq$، $\subset$، $=$ هي علاقات على المجموعات.

2. العمليات على المجموعات:

أ) الاتحاد: اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة تحوي العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B، ونرمز لهذا الاتحاد بواسطة $A \cup B$. وهكذا فإن $a \in A \cup B$ إذا و فقط إذا كان $a \in A$ أو $a \in B$.

ب) التقاطع: تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة تحوي العناصر، التي تنتمي إلى A و إلى B، ونرمز لهذا التقاطع بواسطة $A \cap B$. وهكذا فإن $a \in A \cap B$ إذا و فقط إذا كان $a \in A$ و $a \in B$.

ج) الإكمال: المجموعة المكملة إلى A بالنسبة إلى B هي مجموعة تحوي كل العناصر التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A، ونرمز لها بواسطة $B–A$. وهكذا، فإن $a \in B – A$ إذا وفقط إذا كان $a \in B$ و $a \notin A$، $\notin$ يقرأ: لا ينتمي.

مثال:

لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية، E هي مجموعة الأعداد الزوجية، O هي مجموعة الأعداد الفردية. إذاً $E \cup O = N$، $E \cap O = \phi$. ولتكن $C = \{x / x \geq 8\}$ إذاً، $E - C = \{0, 2, 4, 6\}$.

3. الجداء الديكارتي والعلاقات الثنائية:

عندما تكون لدينا مجموعتان ثم نقوم بربط كل عنصر من المجموعة الأولى مع كل عنصر من المجموعة الثانية، فإننا نشكّل نوعاً جديداً من الأشياء: الزوج المرتب.

مثال:

لتكن $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3\}$. عناصر المجموعة $A \times B$ هي الأزواج المرتبة:

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$$

وبشكل عام، نعرّف $A \times B$، الذي نسميه الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B كالتالي:

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

أي أن الجداء الديكارتي $A \times B$ هو مجموعة من أزواج مرتبة، تكون مركبتها الأولى من المجموعة A ومركبتها الثانية من المجموعة B، ويعتبر الجداء عملية على المجموعات.

العلاقة الثنائية R من المجموعة A إلى المجموعة B، هي أي مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$، أي أن $R \subseteq A \times B$، ولذلك تكون عناصر العلاقة R هي أزواج مرتبة أيضاً. إذا كان $(x, y) \in R$، فإننا نعبر عن ذلك بالشكل xRy، ونعني بذلك أن المركبة x ترتبط بالمركبة y بواسطة العلاقة R، وإذا كان $(x, y) \notin R$، فإننا نكتب $x \not R y$.

الدالة من A إلى B هي علاقة ثنائية f بين A و B، بحيث أنه لكل x، حيث $x \in A$ يوجد عنصر وحيد y، حيث $y \in B$ و xfy.

أمثلة: $(2,3) \neq (3,2)$، لأن الزوجين يمتلكان العناصر نفسها، ولكن بترتيب مختلف.

لتكن N مجموعة أعداد. إذاً، $N \times N$ هي مجموعة كل الأزواج المرتبة على الشكل (n,m)، حيث n و m ينتميان إلى N. إذا كانت $R = \{(2,3), (3,2)\}$ فإن $R \subseteq N \times N$، وإن R هي علاقة ثنائية بين N ونفسها. إذا كانت $f=\{(n,n^2) / n\in N\}$ فإن f دالة من أعداد إلى أعداد (دالة عددية) وإن $f(n) = n^2$.