منطق قضايا الجهة

Modal Propositional Logic

قبل أن نقوم بدراسة منطق قضايا الجهة تركيباً ودلالة، سنقوم بمراجعة تركيب ودلالة لغة حساب القضايا التقليدي.

1.1 تركيب لغة حساب القضايا التقليدي:

تتكون أبجدية لغة حساب القضايا التقليدي من:

- الحروف اللاتينية الكبيرة: وهذه الحروف ودلائلها... $A, B, C,\ldots,A_1, A_2,\ldots$ وندعوها بالمتغيرات القضائية.

- رموز الدوال المنطقية (الروابط): $\urcorner$ (النفي)، $\wedge$ (الوصل)، $\vee$ (الفصل)، $\rightarrow$ (الاستلزام)، $\leftrightarrow$ (الاستلزام الثنائي).

- القوسان (و) وهما قوس الفتح وقوس الإغلاق على الترتيب.

وهكذا فإن أبجدية لغة حساب القضايا التقليدي تتكون من:

$A, B, C,\ldots,A_1, A_2,\ldots$ ، $\urcorner$، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$، (،)

إن تركيب (نحو) لغة حساب القضايا يعرف بواسطة القواعد التالية لبناء الصيغ وهي:

(1) كل متغير قضائي يكون صيغة.

(2) إذا كانت α و β صيغتين فإن كلاً مما يأتي يكون صيغة.

$$\urcorner\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

(3) أي تتابع آخر من الرموز لا يكون صيغة.

يتم تكوين الصيغ المركبة من الصيغ البسيطة أو الذرية (وهي الصيغ التي ليس فيها رابط) بواسطة تكرار تطبيق القاعدة (2). وهكذا فمثلاً بواسطة القاعدة (1) نرى أن K و L صيغتان ذريتان. وينتج عن هذا وبواسطة القاعدة (2) أن $(K \wedge L)$ صيغة. وإذاً بواسطة القاعدة (2) أيضاً تكون $\neg(K \wedge L)$ صيغة. كمثال آخر، فإنه بواسطة القاعدة (1) تكون K صيغة وبالتالي وبواسطة القاعدة (2) تكون $\neg K$ صيغة ومرة أخرى بواسطة (2) تكون $\neg\neg K$ صيغة (نستطيع الاستمرار بإضافة رمز النفي بالعدد الذي نرغبه) وفعلاً فإن $\neg\neg\neg\neg\neg\neg K$ تكون صيغة.

نلاحظ أن القاعدة (2) تشترط في كل مرة ندخل فيها أحد الروابط الثنائية (أي أحد الروابط: $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$) ندخل أيضاً بالمقابل زوجاً من الأقواس، وهكذا تكون مثلاً $(K \wedge \neg L)$ صيغة بينما $K \wedge \neg L$ ليست صيغة، لكن زوج من الأقواس يحصر كل شيء آخر في الصيغة لا يكون في الحقيقة ضرورياً لجعل معنى الصيغة أكثر وضوحاً. وهكذا فسنتبنى طريقة نحذف بواسطتها الأقواس الخارجية أحياناً في حالة عدم وقوع التباس. إن حذف الأقواس الخارجية هو الانحراف الوحيد عن قواعد بناء الصيغ الذي نسمح به. وهكذا فسنكتب $(K \leftrightarrow L) \rightarrow M$ عوضاً عن $((K \leftrightarrow L) \rightarrow M)$.

نشير إلى أن الحروف اليونانية $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ وهذه الحروف ودلائلها $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \beta_1, \beta_2 \ldots$ ليست من اللغة الشيئية (لغة حساب القضايا) وإنما من ما وراء لغة[1] حساب القضايا، وهي اللغة التي تشرح لغة حساب القضايا.

إن القواعد الثلاث أعلاه تمكننا من التمييز بين تتابع الرموز الذي يكون صيغاً والتتابع الذي لا يمثل صيغة.

مثال:

كل تتابع من الرموز مما يأتي لا يمثل صيغة $\wedge L$ $\rightarrow$ $\neg K$ ، $K \leftrightarrow L$) $\vee K$.

الكثير من المناطقة يستخدمون مصطلح (الصيغة الجيدة التكوين) مقابل (الصيغة) الذي استخدمناه نحن من أجل الاختصار.

2.1 دلالة لغة حساب القضايا التقليدي:

إن المفهوم المركزي في دلالة لغة حساب القضايا التقليدي هو مفهوم (قيمة الصدق)، فالقضايا تمتلك قيمة صدق T (صادقة) وقيمة صدق F (كاذبة). وأساس هذه الدلالة هو مبدأ الثنائية، أي أن (صادقة) و (كاذبة) هما القيمتان الوحيدتان

1-metalanguage.

وأن كل قضية تمتلك إحدى هاتين القيمتين. تستخدم جداول الصدق لتقويم (تحديد قيم الصدق) الصيغ، حيث تبين الجداول كيفية بلوغ الصيغ قيم صدقها.

نعتمد في بناء جداول صدق الصيغ الأكثر تركيباً على الجداول الأساسية لصدق الروابط التي مرت بنا، ويتم هذا البناء كالتالي:

1- ترتب المتغيرات القضائية التي تتركب منها الصيغة حسب الترتيب الأبجدي في الأعمدة الأولى من الجدول اعتباراً من اليسار إلى اليمين.

2- نضع تحت كل متغير قيم الصدق التي يتقبلها في كل التعيينات المختلفة. وعدد هذه التعيينات، المساوي لعدد الأسطر الأفقية، هو 2^n (حيث n عدد المتغيرات القضائية).

3- نقوم بتوزيع قيم الصدق فنضع تحت المتغير الأول $2^n/2$ (T) و $2^n/2$ (F) ونكرر بالتناوب $2^n/4$ (T) و $2^n/4$ (F) تحت المتغير الثاني و $2^n/8$ (T) و $2^n/8$ (F) تحت المتغير الثالث... وهكذا إلى أن نصل إلى المتغير الأخير، حيث نوزع بالتناوب مرة T ومرة F حتى تمتلئ جميع الأسطر الأفقية للجدول.

4- نقوم بتقويم الصيغ الفرعية التي تتركب منها الصيغة الكلية وفقاً للجداول الأساسية للروابط، ثم نقوم بتقويم الصيغ التي هي أكثر تركيباً إلى أن نصل إلى تقويم الصيغة المطلوبة.

مثال:

تقويم الصيغة:

$$(K\rightarrow L)\leftrightarrow (\urcorner K\vee \urcorner L)$$

K	L	$\urcorner L$	$K\rightarrow L$	$\urcorner K$	$\urcorner K\vee\urcorner L$	$(K\rightarrow L)\leftrightarrow (\urcorner K\vee \urcorner L)$
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

إن جدول صدق أي صيغة يشير إلى قيمة صدق (T أو F) للصيغة من أجل كل تعيين لقيم صدق المتغيرات القضائية التي تتركب منها الصيغة (التعيينات في المثال أعلاه: TT، TF، FT، FF). وبالتالي فإن كل صيغة تسبب دالة صدق والتي عدد متغيراتها هو عدد المتغيرات القضائية المختلفة نفسها التي تتركب منها الصيغ. وهكذا فإن جدول الصدق هو تمثيل تخطيطي لدالة صدق.

3.1 اعتماد القضايا على سياقاتها:

تعتبر القضايا في المنطق التقليدي (الثنائي القيم) أنها لا تعتمد (مستقلة) عن الزمان والمكان. وهكذا، فقد اعتبرت أنها صادقة أو كاذبة من دون قيد أو شرط. فالقضايا مثل:

الماء السائل ملائم لظهور الحياة (1)

كذلك فإن القضية الرياضية:

$6 + 12 = 18$ (2)

هي قضايا لا يعتمد صدقها أو كذبها على الحالة (الظرف: الزمان والمكان) التي يتم تقويمها (تحديد قيم صدقها) بها، ولكن معظم القضايا ليست كذلك. فمثلا القضية:

يلقي الأستاذ محاضرته (3)

لا تمتلك خاصية القضيتين (1) و (2) أعلاه، أي أنها تعتمد على الحالة (الزمان والمكان) التي يتم بها تقويمها ونسميها قضية ظرفية أو (حالاتية)[٢]. وإن أي محاولة لتكييفها بحيث لا يصبح صدقها أو كذبها متغيراً من حالة إلى أخرى، تكون محاولة غير مجدية. فمثلاً، يمكننا توسيع (3) كالتالي:

في مارس وفي الساعة 10 يلقي الأستاذ محاضرته (4)

ولكن (4) تبقى ظرفية، لأنه قد تم ذكر الزمن الذي ألقيت به المحاضرة، ولكن لم يذكر المكان الذي ألقيت فيه. وحتى لو تم ذكر هذا المكان وليكن مثلاً، (في جامعة بغداد) فإننا نتساءل: في أي قاعة أو أي غرفة أو مدرّج ألقيت المحاضرة؟ وبين أي لحظتين من الزمن على وجه الدقة ألقيت؟.

من الواضح أننا نستطيع الاستمرار في توسيع القضية (3) أكثر فأكثر. وعوضاً عن فعل ذلك فإنه يبدو من الطبيعي أكثر تفسيرها على خلفية السياق الذي استخدمت فيه القضية. هذا السياق الذي يقدم الـ (هنا) و (الحين)[٣]، اللذين يعتمد عليهما صدق القضية الظرفية. وهكذا، فمثلاً القضية:

السماء تمطر (5)

تكون صادقة في سياق ظرفي معين (لحظة زمنية، مكان معين) إذا حدث أنها تمطر في ذلك السياق. أما القضية في الماضي مثل:

السماء أمطرت (6)

فإنها تعود إلى لحظة زمنية قبل الآن (الحين). وهكذا، فإن (6) أكثر تعقيداً حيث إنها تحتاج إلى سياقين (لحظتين زمنيتين واحدة في الماضي وأخرى اللحظة الآنية) وليس إلى سياق واحد (لحظة زمنية واحدة). وهكذا نتوصل إلى أنه: عند تفسير قضية في أي سياق معين فمن الضروري غالباً أخذ سياقات أخرى بالحسبان.

2- situational.

3- (here), (now).

4.1 العوالم الممكنة Possible worlds:

بإضافة الرمز N إلى رموز لغة حساب القضايا التقليدي ووضعه قبل الصيغة α، فإننا نحصل على صيغة جديدة $N\alpha$.

يسمى N مؤثراً(٤)، وهكذا نستطيع بناء الصيغ مثل:

$$N(NP \to Nq),\ Np \leftrightarrow Q, \qquad N\,NP \to NP,\ P \wedge NP$$

إن تفسيرات المؤثر N تكون، مثل: أنا أعرف أن، دائماً سيكون الحال أن، مرة كان الحال أن، من الضروري أن، من الممكن أن،....

باستخدام التفسير الأول يكون نص الصيغ الثلاث الأولى، حيث P متغير قضائي كالتالي:

الصيغة الأولى: P و أنا أعرف أن P.

الصيغة الثانية: إذاً أنا أعرف أنني أعرف أن P فإنني أعرف أن P.

الصيغة الثالثة: أنا أعرف أن P إذا وفقط إذا كانت Q.

إن السياقات التي يجب أخذها بالحسبان تعتمد على التفسير المعطى للمؤثر N، فإذا كان اهتمامنا منصباً على التعابير الزمنية مثل: دائما ستكون الحالة أن، ومرة كانت الحالة أن، فإن السياقات تكون لحظات من الزمن، أما إذا كان اهتمامنا منصباً على التعابير الجهوية(5)، مثل: من الضروري أن، من الممكن أن، فإنه يمكن مطابقة السياقات التي يجب أن تؤخذ بالحسبان مع جميع الحالات الممكنة. موضوعنا هنا يكمن في أن مجموعة السياقات K التي سنختارها للعمل بها تعتمد كثيراً على التفسير (المعنى) المعطى للمؤثر N.

مما ذكر أعلاه، يتبين أننا سنعوض دلالة حساب القضايا التقليدي والتي تأخذ الصيغ فيها قيمتي صدق مطلقة (1 أو 0) بنظام تعيِّن فيه دوال الصدق قيم صدق نسبة إلى سياق ما k (مأخوذاً من مجموعة السياقات K). وهكذا فإن ما تعلمناه بالنسبة إلى قيمتي صدق الروابط في حساب القضايا التقليدي سيبقى من دون تغيير، فمثلاً الصيغة $\neg\alpha$ ستأخذ القيمة 1 في سياق معين، إذا أخذت α القيمة 0 في السياق نفسه.

إن مجموعة جميع السياقات K تستخدم فقط عندما نبدأ بتقويم صيغة على الشكل $N\alpha$ في سياق معين k، وذلك لأن صدق أي صيغة $N\alpha$ في سياق k يعتمد على صدق α ليس فقط في السياق k نفسه، وإنما كذلك في سياقات أخرى k' من

4- operator.
5- modal.

K. فمثلاً إن صدق التعبير (مرة كانت الحالة P) يعتمد على وجود سياق ما (لحظة زمنية) 'k أبكر (أسبق) من السياق الحاضر (لحظة زمنية) k والذي كانت فيه P صادقة.

وبصورة عامة: إن تحديد أي من السياقات نأخذها بالحسبان عند تقويم صدق صيغة Nα في سياق ما k يعتمد على التفسير المعطى إلى N، ويعتمد كذلك على مميزات خاصة للسياق k الذي يحدث فيه التقويم، ذلك أن مجموعة اللحظات الزمنية السابقة إلى k تكون مختلفة بالنسبة إلى اللحظات المختلفة لـ k.

إن مجموعة السياقات 'k ذات الصلة بالتقويم في k تسمى السياقات القابلة للموصولية[٦] أو الموصولة من k، وهكذا فإن قيمة صدق Nα في k تعتمد على قيم صدق α في السياقات 'k الموصولة من k، فمثلاً إذا كان N يعني (من الضروري أن) فإن α يجب أن تكون صادقة في جميع السياقات الموصولة من k، إذاً أريد أن تكون Nα صادقة في k. أما إذا كان N يعني (من الممكن أن) فإنه يكفي أن تكون α صادقة في أي من السياقات الموصولة من k حتى تكون Nα صادقة في k.

نستطيع الآن إعطاء التعريف أدناه:

تعريف 1: النموذج[٧] S يتألف من:

(1) مجموعة K غير خالية من السياقات.

(2) علاقة ثنائية R معرفة على K $(R \subseteq K \times K)$ هي علاقة الموصولية.

(3) دالة تقويم V تعين قيمة صدق V(P,k) لكل متغير قضائي P في كل سياق k، حيث $k \in K$.

انطلاقاً من هذا التعريف يمكننا وضع تعريف يعطي قيمة الصدق V(α,k) للصيغة α في السياق k للنموذج S. حسب هذا التعريف، فإن الروابط المعروفة لدينا سابقاً (⌉،∧،∨،←،↔) تحتفظ في هذا التعريف بما درسناه عنها، بينما ما يخص المؤثر N فيعتمد على التفسير المعطى له.

من المناسب أحياناً إعطاء مخطط السياقات وعلاقة الموصولية. ويتم تمثيل السياقات باستعمال النقاط، أما الأسهم فتستخدم للإشارة إلى أي السياقات موصولة من أي السياقات الأخرى، والمثال التالي يبين مثل هذا المخطط.

- السياق b موصول فقط من السياق a.

6- accessible.

٧- مثل هذا النموذج يسمى نموذج كريبكة Kripke model.

- السياقان c,d موصولان من b.

- السياقان e,f موصولان من c.

- لا يوجد أي سياق موصول من e.

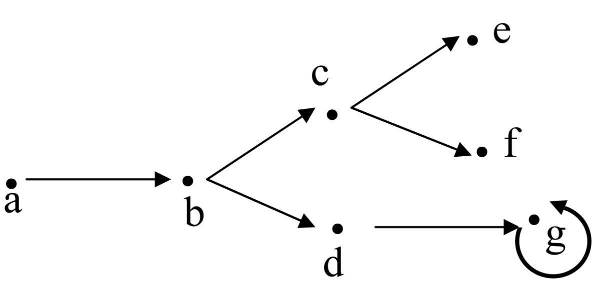
- لا يوجد أي سياق موصول من f.

- السياق g موصول من نفسه.

إن المفاهيم الجهوية[٨] المدروسة في منطق قضايا الجهة مأخوذة من الفلسفة أكثر منها من اللغة الاعتيادية. فالتعابير الجهوية في اللغة الاعتيادية هي مثلاً: يجب، يستطيع. أما الفلسفة فلها موجهاتها التقليدية: من الضروري أن، من الممكن أن. والحقيقة أن منطق الجهة ينشغل بالأشكال[٩] التي يمكن أن تكون فيها الأشياء صادقة أو كاذبة، وعلى وجه الخصوص إمكانيتها وضرورتها. ولهذا نقول: إن منطق الجهة هو منطق الضرورة والإمكانية. سنرمز بواسطة L للموجه: من الضروري أن، وبواسطة M للموجه: من الممكن أن. إذا كان لدينا L في لغتنا المنطقية فلا نحتاج إلى M كرمز أولي، ذلك أن القول: من الممكن P يكافئ القول: ليس من الضروري أن ليس P ولهذا يمكننا إعطاء التعريف (اختصاراً نكتب تع) التالي:

$$\forall \alpha : M\alpha \equiv \text{تع} \urcorner L \urcorner \alpha$$

وهكذا فلكل تفسير إلى L يوجد تفسير يقابله إلى M. فمثلاً، إذا كان LP يعني: من اللازم أخلاقياً أن P، فإن MP سيعني: من المسموح أخلاقياً أن P (أو ليس من اللازم أنه ليسP). وإذا كان LP يعني: سيكون دائماً الحال أن P، فإن MP يعني: سيكون أحياناً الحال أن P (أو لن يكون دائماً الحال ليس P)، وهكذا.



وإذا أخذنا M كرمز أولي فيمكننا تعريف L كالتالي: $\urcorner M \urcorner$. وبالتالي فإن اختيار L أو M كرمز أولي هو مسألة تفضيل شخصي. أما نحن فسنعتبر L أولياً و M معرفاً. الاستحالة هي أيضاً من

8- modal concepts.

9- modes.

المفاهيم الجهوية، بالإضافة إلى الضرورة والإمكانية ولن نستخدمها هنا، لأنه من السهل التعبير عنها على أنها M ˥ أو ˥L. القضايا التي هي ليست ضرورية وليست ممكنة (مستحيلة) تسمى عارضة.

لقد ناقشنا في هذه الفقرة، الأفكار الأساسية التي تكمن خلف دلالة العوالم الممكنة والسياقات التي أشرنا إليها سابقاً، سنسميها منذ الآن: العوالم الممكنة. أما ماذا نقصد بالعوالم الممكنة، فإنها مسألة تكتسي بعض الأهمية وقضية مثيرة للجدل في الميتافيزيقا وفي تطبيقات منطق الجهة على نظريات المعنى بالنسبة إلى اللغة الطبيعية (العادية). ولكنه، من حسن الحظ، فإنه من وجهة نظر المنطق فلا تكتسي هذه المسألة أي أهمية. فجميعنا يمكن أن يتصور الأشياء بشكل مختلف. فمثلاً، تستطيع أن تتصور أن كل الأشياء على حالها تماماً ماعدا أنك أطول بسنتمتر واحد. إن ما تصورته هنا، هو حالة مختلفة، أو عالم ممكن. طبعاً، العالم الواقعي هو أيضاً عالم ممكن، ويوجد عدد غير محدد آخر من هذه العوالم: عندما يكون طولك أكبر بسنتمترين، بثلاثة سنتمترات، عندما يكون شعرك بلون آخر، عندما يكون ميلادك ببلد آخر، ...إلخ.

يمكننا توضيح مفهوم العوالم الممكنة ببساطة، كالتالي: نحن نعيش في أحد العوالم الممكنة وهو العالم الواقعي. يمكن اعتبار الروايات الخيالية كوصف للعالم الممكن المختلف عن عالمنا الواقعي. وبعض الروايات الخيالية تشبه كثيراً عالمنا الواقعي ولكن بعضها الآخر بعيدة عن عالمنا الواقعي. وهكذا، فإذا قال أحدهم: (من الممكن أن تعيش فيلة مجنحة في الهند). فإن هذا القول يكون صادقاً فقط في حالة وجود عالم ممكن تعيش فيه فيلة مجنحة في الهند. إن القضايا في العوالم الممكنة تكون صادقة في عالم، وليست صادقة دون تحديد العالم كما هو الحال في منطق حساب القضايا التقليدي.

5.1 تركيب ودلالة قضايا الجهة:

يقوم تركيب قضايا الجهة على إضافة المؤثرين L وM إلى رموز لغة حساب القضايا التقليدي وفق القاعدة التالية:

إذا كان α أي صيغة من حساب القضايا التقليدي، فإن $L\alpha$ و $M\alpha$ صيغتان أيضاً.

وهكذا، فإن $ML\alpha \to \alpha, L\,\alpha \to LL\alpha$ صيغتان. تقرأ الأولى: إذا كانت من الضروري α فإنه من الضروري أن تكون من الضروري α. وتقرأ الثانية: إذا كان من الممكن أن تكون من الضروري α فإن α.

إن فكرة العوالم الممكنة تمكننا من دراسة دلالة المفاهيم الجهوية: الضرورة والإمكانية، وهكذا فإن صدق $L\alpha$ و$M\,\alpha$ في أي عالم معين يعتمد على صدق α في عوالم ممكنة أخرى. وليس من الضروري أخذ جميع العوالم الممكنة في الحسبان. وصورياً يمكن التعبير عن هذا بواسطة علاقة موصولية والتي تبين أي العوالم تؤخذ في الحسبان.

نستطيع الآن إعطاء التعريف التالي:

تعريف 2: النموذج S لمنطق قضايا الجهة يتألف من:

(1) مجموعة غير خالية W من العوالم الممكنة.

(2) علاقة ثنائية R، حيث $R \subseteq W \times W$ هي علاقة الموصولية معرفة على عناصر W، أي أن R تحدد فيما إذا كان $w\,R\,w'$ أم لا من أجل أي w، w' (ليس بالضرورة مختلفين) من W.

(3) دالة تقويم V تعين قيمة صدق $V(P,w)$ لكل متغير قضائي P في كل عالم w، حيث $w \in W$.

تسمى مجموعة العوالم الممكنة W مع العلاقة الثنائية R بالإطار[١٠] F أي أن F هو (W,R) وهكذا، فإن النموذج S يتألف من الإطار F بالإضافة إلى دالة الصدق V، أي أن النموذج S هو الثلاثية (W, R, V) حيث (W,R) هو الإطار وV هو دالة الصدق. سنكتب $V(P,w) = 1$ إذا عين V القيمة 1 إلى P في w وسنكتب $V(P,w) = 0$ إذا عين V القيمة 0 إلى P في w.

من المفيد ذكر التوضيحات التالية:

1. يمكن الحصول على نماذج مختلفة بالإطار F نفسه، وذلك بتغيير دالة الصدق (التقويم) V.

10- frame.

2. تثبت في الإطار فقط العوالم الممكنة التي يتم التعامل معها، وأي من تلك العوالم تكون موصولة مع أي من العوالم الأخرى.

إن ما يفعله تعريف الصدق هو تحديد أي من قيمتي الصدق يجب أن تنسب إلى الصيغة المركبة (ليست ذرية) في كل من العوالم الممكنة. وبعبارة أخرى فإن هذا التعريف يحدد في نموذج معين، كيفية توسيع دالة الصدق المتوافرة للمتغيرات القضائية، لتكون دالة الصدق، التي تطبق على جميع الصيغ في اللغة المدروسة.

سنعطي الآن تعريف الصدق بالنسبة إلى منطق قضايا الجهة كالتالي:

تعريف 3: إذا كان S هو النموذج (W, R, V) حيث (W, R) هو الإطار و V هو دالة الصدق فإنه:

(1) لكل متغير قضائي P ولكل $w \in W$، إما $V(P,w) = 1$ أو $V(P,w) = 0$.

(2) قاعدة النفي $[V\neg]$: لكل صيغة α ولكل $w \in W$ ، $V(\neg\alpha, w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 0$ و إلا $V(\neg\alpha, w) = 0$.

(3) قاعدة الفصل $[V\vee]$ لكل صيغتين α و β ولكل $w \in W$، $V(\alpha \vee \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 1$ أو $V(\beta,w) = 1$ و إلا $V(\alpha \vee \beta,w) = 0$.

(4) قاعدة الضرورة $[VL]$: لكل صيغة α ولكل $w \in W$، $V(L\alpha,w) = 1$ إذا كان لكل $w' \in W$ حيث إن $w R w'$، $V(\alpha, w') = 1$ وإلا $V(L\alpha,w) = 0$.

سنعطي أيضا القواعد التالية لسهولة الرجوع إليها على الرغم من أنها غير ضرورية، لأن جميع الصيغ أدناه يمكن كتابتها بواسطة الرموز الأولية: $\neg$ ، $\vee$، L.

(5) قاعدة الوصل $[V\wedge]$: لكل صيغتين α و β، ولكل $w \in W$، $V(\alpha\wedge \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 1$ و $V(\beta,w) = 1$ وإلا $V(\alpha\wedge \beta,w) = 0$.

(6) قاعدة الاستلزام $[V\rightarrow]$: لكل صيغتين α و β ولكل $w \in W$، $V(\alpha\rightarrow \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 0$ أو $V(\beta,w) = 1$ وإلا $V(\alpha\rightarrow \beta,w) = 0$.

(7) قاعدة الاستلزام الثنائي $[V\leftrightarrow]$: لكل صيغتين α وβ ولكل $w \in W$، $V(\alpha\leftrightarrow \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\beta,w) = V(\alpha,w)$، وإلا $V(\alpha\leftrightarrow \beta,w) = 0$.

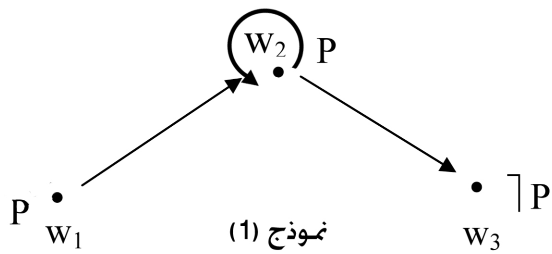
(8) قاعدة الإمكانية $[VM]$: لكل صيغة α ولكل $w\in W$، $V(M\alpha,w) = 1$ إذا وجد $w' \in W$ حيث إن $w R w'$، $V(\alpha,w') = 1$ وإلا $V(M\alpha,w) = 0$.

من الواضح أن الروابط الخمسة في المنطق التقليدي ($\neg$ ، $\vee$ ، $\wedge$ ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$) تمتلك المعنى نفسه كما هو الحال هنا. أما بالنسبة إلى M و L فيستخدم مفهوم العوالم الممكنة. نلاحظ هنا حسب (4) أنه (من الضروري) يعني الصدق في كل العوالم الموصولة، بينما وحسب (8) فإن (من الممكن) يعني الصدق في عالم واحد على الأقل من العوالم الموصولة.

سنأخذ أمثلة تطبيقية على (4) و (8) من التعريف 3 أعلاه.

مثال 1:

لنأخذ النموذج التالي:



نموذج (1)

يمكننا قراء ة هذا النموذج كالتالي: توجد 3 عوالم ممكنة فقط: w_1, w_3, w_2، أي أن $W=\{w_1, w_2, w_3\}$. الأسهم تبين علاقة الموصولية بين العوالم كالتالي:

w_2 موصول من w_1 ، w_2 موصول من نفسه، w_3 موصول من w_2. ولا يوجد أي عالم موصول من w_3، وهكذا فبكتابة العلاقة R كمجموعة من الأزواج المرتبة فإننا نحصل على:

$$R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_2), (w_2, w_3)\} \subseteq W \times W$$

أو أن

$$w_1 R w_2, w_2 R w_2, w_2 R w_3$$

إننا نتعامل هنا مع لغة ذات متغير قضائي واحد P، كما أن النموذج المعطى يبين دالة الصدق كالتالي:

$$V(P, w_1) = V(P, w_2) = 1, V(P, w_3) = 0$$

سنحاول الآن إيجاد قيم صدق الصيغتين المركبتين MP و LP في العوالم المختلفة w_1, w_2, w_3.

1. قيم صدق MP و LP في w_1:

(أ) بما أن $w_1 R\ w_2$ و $V\ (P,\ w_2) = 1$، فإذاً $V(MP,\ w_1) = 1$، أي أن MP صادقة في w_1، (حسب القاعدة [VM]).

(ب) بما أن w_2 هو العالم الوحيد الموصول من w_1، فإذاً $V(LP,\ w_1) = 1$ (حسب القاعدة [VL]).

أي أن LP صادقة في w_1.

2. قيم صدق MP و LP في w_2:

(أ) بما أن P صادقة في w_2 و $w_2\ R\ w_2$، فإذاً $V(MP,\ w_2) = 1$ (حسب القاعدة [VM]) أي أن MP صادقة في w_2.

(ب) بما أن $w_2\ R\ w_3$ و P كاذبة في w_3، فإذاً $V(LP,\ w_2) = 0$ (حسب القاعدة [VL]) أو أن LP كاذبة في w_2.

قبل أن نتحقق من صدق MP وLP في w_3، حيث لا يوجد أي عالم موصول من w_3، لابد من التوضيح أدناه، حيث يسمى w_3 بالنهاية الميتة[11] لعدم وجود أي عالم موصول منه.

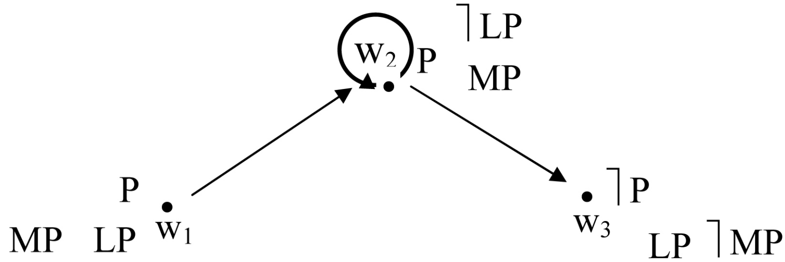
إن القاعدة [VL] تنص على أن $L\alpha$ تكون صادقة في عالم w إذا كانت الصيغة α نفسها صادقة في كل العوالم الموصولة من w. إننا نفسر هذا ليعني أنه: إذا لم يوجد أي عالم يكون موصولاً من w، فإن $L\alpha$ تكون صادقة في العالم w مهما كانت α (حتى لو كانت α هي الصيغة الكاذبة دائماً $P\wedge\urcorner P$). من السهولة ملاحظة لماذا نعتبر $L\alpha$ صادقة في النهايات الميتة، وذلك بواسطة رؤية لماذا يكون نفيها $\urcorner L\alpha$ كاذباً في تلك النهايات: بما أن $\urcorner L\alpha$ تكافئ $M\urcorner\alpha$ وبما أنه حسب [VM] فإن أي صيغة على الشكل $M\beta$ تكون صادقة في عالم w فقط إذا وجد عالم موصول من w. وهكذا، ولعدم وجود مثل هذا العالم فإن $M\beta$ أو $M\urcorner\alpha$ تكون كاذبة وبالتالي $\urcorner L\alpha$ تكون كاذبة أيضاً. وإذاً، $L\alpha$ تكون صادقة في النهايات الميتة. والآن نعود إلى صدق MP وLP في w_3، حيث إن w_3 هو نهاية ميتة، لعدم وجود أي عالم موصول منه.

3. قيم صدق MP و LP في w_3:

بما أنه لا توجد عوالم ممكنة موصولة من w_3، فإنه حسب التوضيح أعلاه تكون LP صادقة في w_3، وذلك لأن w_3 نهاية ميتة. وحسب التوضيح نفسه تكون MP كاذبة في w_3، وذلك لأن w_3 نهاية ميتة.

11- dead end.

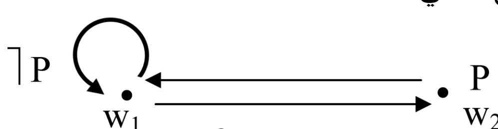
نستطيع الآن إضافة الصيغ المركبة، التي حددنا قيم صدقها إلى المخطط في هذا المثال كالتالي:



لقد برهنا أن LP صادقة وMP صادقة في w_1، فأضفنا هاتين الصيغتين إلى w_1؛ وبرهنا أن MP صادقة في w_2 فأضفنا MP، ولكن LP كاذبة فأضفنا $\neg LP$ إليه؛ أما في w_3، فلقد برهنا أن LP صادقة بينما MP كاذبة، فأضفنا LP و $\neg MP$ إليه.

مثال 2:

لنأخذ النموذج التالي:



نموذج (2)

سنحاول إيجاد قيم صدق الصيغة LMP في النموذج.

نلاحظ من تخطيط النموذج أن $W = \{w_1, w_2\}$

و $R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_1)\}$

$V(P, w_1) = 0 , V(P, w_2) = 1$

1. قيمة صدق LMP في w_1:

حتى تكون LMP صادقة في w_1، فيجب أن تكون:

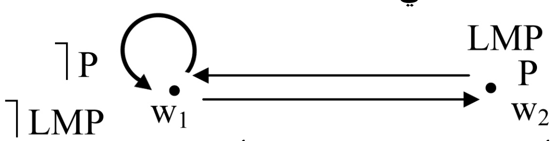
$\forall w', w_1 R w', V(MP, w') = 1$

نحن نعلم أن $w_1 R w_1$ و $w_1 R w_2$، فإذاً يجب أن تكون MP صادقة في w_1 و w_2، وبما أن P صادقة في w_2 و $w_1 R w_2$، فإذاً MP صادقة في w_1. لكن MP كاذبة في w_2، لأن P كاذبة في w_1 و $w_1 R w_2$. إذاً LMP كاذبة في w_1.

2. قيمة صدق LMP في w_2:

حتى تكون LMP صادقة في w_2 يجب أن تكون MP صادقة في جميع العوالم الموصولة من w_2. يوجد عالم واحد موصول من w_2 هو w_1، إذاً يجب أن تكون MP صادقة في w_1. وبما أن P صادقة في w_2 و $w_1 R w_2$ فإذاً MP صادقة في w_1. وهكذا فإن LMP صادقة في w_2.

نستطيع الآن إضافة الصيغتين المركبتين، اللتين حددنا قيم صدقهما إلى المخطط في هذا المثال كالتالي:



لقد برهنا أن LMP كاذبة في w_1، فأضفنا $\neg$ LMP إليه. وبرهنا أن LMP صادقة في w_2، فأضفنا LMP إليه.

مثال 3:

لنجد قيم صدق $ML\neg P$ في النموذج 2.

سنحاول تحديد في ما إذا كانت الصيغة $ML\neg P$ صادقة أم كاذبة في كل من w_1 و w_2.

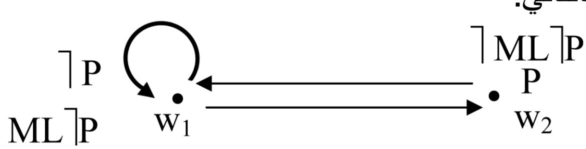
(1) قيمة صدق $ML\neg P$ في w_1:

تكون هذه الصيغة صادقة في w_1 إذا وجدت بعض العوالم الممكنة (عالم واحد على الأقل) w' بحيث إن $w_1 R w'$ و $L\neg P$ صادقة في w'. يوجد w_1 و w_2 حيث $w_1 R w_2$ و $w_1 R w_1$. الآن حتى تكون $L\neg P$ صادقة في w_1 فيجب أن تكون $\neg P$ صادقة في كل العوالم الموصولة من w_1. نرى أن w_1 موصول من w_1 و w_2 موصول من w_1. $\neg P$ صادقة في w_1 ولكنها كاذبة في w_2. وإذاً $L\neg P$ كاذبة في w_1 وبالتالي فإن $ML\neg P$ كاذبة في w_1. ولكن الصيغة $L\neg P$ صادقة في w_2، لأن $w_2 R w_1$ فقط و$\neg P$ صادقة في w_1. وهكذا، تكون $ML\neg P$ صادقة في w_1.

(2) قيمة صدق $ML\neg P$ في w_2:

هذه الصيغة كاذبة في w_2، لأن w_1 موصول فقط من w_2. وهكذا، فيجب أن تكون $L\neg P$ صادقة في w_1. وهذا غير ممكن لأن $w_1 R w_2$ و P صادقة في w_2. إذاً $ML\neg P$ كاذبة في w_2.

نستطيع الآن إضافة الصيغة المركبة، التي حددنا قيم صدقها إلى المخطط في هذا المثال كالتالي:



لقد برهنا أن $ML\neg P$ صادقة في w_1، فأضفنا MLP إليه؛ وبرهنا أن $ML\neg P$ كاذبة في w_2، فأضفنا $\neg ML\neg P$ إليه.

تعريف 4: الصيغ التي تكون صادقة في كل العوالم الممكنة لنموذج S نسميها صحيحة[١٢] في ذلك النموذج.

نعبر عن ذلك رمزياً $V(S(\alpha)) = 1$، حيث α أي صيغة.

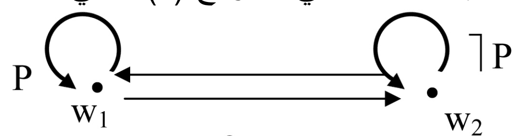
تقسم الصيغ الصحيحة في S إلى نوعين:

1. الصيغ التي تعتمد صحتها على نوعية معينة لدالة الصدق V.

2. الصيغ التي لا تعتمد صحتها على نوعية V.

مثال 4:

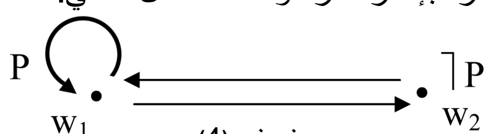
لنأخذ الصيغة $MP \wedge M\neg P$ في النموذج (3) التالي:



نموذج (3)

هذه الصيغة هي من النوع الأول، فإذا غيرنا قيمة صدق P في w_2 إلى 1 أي أن $V(P, w_2) = 1$ ، تصبح هذه الصيغة غير صحيحة (خاطئة). لكن الصيغة $LP \rightarrow P$ تبقى صحيحة حتى في هذه الحالة. وبما أنها صادقة في كل العوالم الممكنة بغض النظر عن نوعية V فإنها تكون من النوع الثاني.

إن صحة الصيغة $LP \rightarrow P$ يمكن أن تتغير فقط عندما نبدّل الشيء الأساسي للنموذج الذي هو إطاره بإطار آخر، ولنأخذ المثال التالي:



نموذج (4)

نلاحظ هنا تغير علاقة الموصولية R حيث إن w_2 لم يعد موصولاً من نفسه، بينما بقي V على حاله. نرى أن LP صادقة في w_2، ولكن P كاذبة فيه. إذاً $LP \rightarrow P$ تكون كاذبة في w_2، أي أن

$$V(LP \rightarrow P\ ,\ w_2) = 0$$

هذا النموذج يسمى مثال - مضاد[١٣] لصحة $LP \rightarrow P$.

12- valid.
13- counter example.

بشكل عام: إذا كانت الصيغة α صحيحة في كل نموذج مبني على أساس إطار F فإننا نقول إن α صحيحة في F.

الصيغ مثل α هذه والتي تعكس خاصية إلى الإطار F غالباً ما تصبح خاصية إلى صنف كامل من الإطارات.

قبل أن نقوم بإعطاء عدة مبرهنات، من المفيد التذكير أدناه، ببعض خواص العلاقات الثنائية، حيث علاقة الموصولية واحدة منها.

1. خاصية الانعكاس Reflexitivity

علاقة الموصولية R تكون انعكاسية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\, w \in W,\ wRw$$

2. الخاصية غير الانعكاسية Ireflexitivity

علاقة الموصولية R تكون غير انعكاسية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\exists\, w \in W,\ w\not R w$$

3. الخاصية التماثل (التناظر) Symmetry

علاقة الموصولية R تكون متماثلة على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\, w, w' \in W\ ,\ (wRw' \rightarrow w'Rw)$$

4. الخاصية غير التماثلية (غير التناظرية) Asymatrical property

علاقة الموصولية R تكون غير تماثلية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\exists\, w, w' \in W\ ,\ (wRw' \not\rightarrow w'Rw)$$

5. خاصية التعدي Transitivity

علاقة الموصولية R تكون متعدية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\, w, w', w'' \in W,\ (wRw' \wedge w'Rw'') \rightarrow wRw''$$

6. خاصية التكافؤ Equivalence relation

علاقة الموصولية R تكون علاقة تكافؤ على W إذا وفقط إذا كانت R انعكاسية ومتماثلة ومتعدية على W.

7. خاصية التسلسل (التمدد) Serial (extendability)

علاقة الموصولية R تكون متسلسلة على W إذا وفقط إذا كان:

$\forall\, w \in W, \exists\, w'$ بحيث إن wRw'

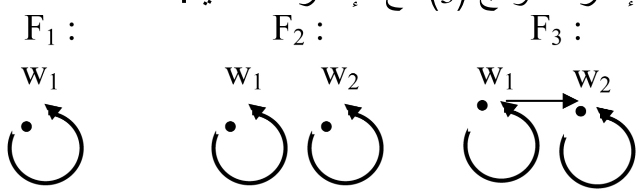
8. خاصية الترابط Connected relation

علاقة الموصولية R تكون مترابطة على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\, w, w', w'' \in W,$$
$$(wRw' \wedge w\, Rw'') \rightarrow (w'\, Rw'' \vee w''R\, w')$$

مثال 5:

لنقارن إطار النموذج (3) مع الإطارات التالية:



نموذج (5)

نلاحظ أن الصيغة $LP\rightarrow P$ صحيحة في جميع الإطارات أعلاه، هذا بالإضافة إلى إطارات أخرى. هذه الإطارات تمتلك خاصية مشتركة مسؤولة عن صحة الصيغة $LP\rightarrow P$. وهذه الخاصية المشتركة هي الخاصية الانعكاسية لعلاقة الموصولية للإطارات. وبالفعل فإن هذه الخاصية تجد تعبيرها بواسطة الصيغة $LP\rightarrow P$، لأنه يمكننا تبيان أن هذه الصيغة تعرِّف صنف الإطارات الانعكاسية وهذا يعني أن:

الصيغة $LP\rightarrow P$ صحيحة في كل إطار يمتلك الخاصية الانعكاسية وبالعكس، أي أنه: إذا كانت $LP\rightarrow P$ صحيحة في إطار فإن هذا الإطار يجب أن يمتلك علاقة موصولية انعكاسية.

مبرهنة 1:

الصيغة $L\alpha\rightarrow\alpha$ صحيحة في الإطارات التي تمتلك علاقة موصولية انعكاسية.

أو أن:

(1) الصيغة $L\alpha\rightarrow\alpha$ تكون صحيحة إذا كان الإطار يمتلك علاقة موصولية انعكاسية.

البرهان:

سنستخدم طريقة البرهان غير المباشر. نفرض أنه من أجل α يوجد إطار علاقة الموصولية فيه R انعكاسية وعالم w بحيث إن $V(L\alpha,w) = 1$ و $V(\alpha, w) =$ 0. الآن وبما أن $V(L\alpha,w) = 1$ فإن $V(\alpha,w') = 1$حسب القاعدة [VL] من أجل كل عالم 'w حيث إن 'wRw. ولكن بما أن R انعكاسية فإن wRw. إذاً $V(\alpha, w) = 1$، وهذا يناقض $V(\alpha, w) = 0$، وهكذا برهنا أن $L\alpha \rightarrow\alpha$ تكون صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها انعكاسية.

يبقى أن نبرهن أنه:

(2) إذا كانت $L\alpha\rightarrow\alpha$ صحيحة في إطار، فإن هذا الإطار يجب أن يمتلك علاقة موصولية انعكاسية أو أن نبرهن ما يكافئ هذا، وهو: إن مثالاً مضاداً للصيغة $L\alpha\rightarrow\alpha$ يمكن إعطاؤه في أي إطار تكون فيه علاقة الموصولية ليست انعكاسية. إن هذا يعني وجود عالم w في إطار F، حيث لا يصح فيه wRw. الآن نعطي المثال-المضاد بواسطة إعطاء نموذج S إطاره F ودالة التقويم له V، حيث V(P,w)=0، بينما V(P,w')=1 من أجل جميع العوالم الأخرى w' في هذا الإطار. وإذاً يصبح لدينا: V(LP,w)=1 و V(P,w)=0وبالتالي يكون V (LP→P,w)=0. وإذاً LP→P ليست صحيحة في S. والنموذج (4) يمثل مثالاً - مضاداً.

بعد البرهان أعلاه، نستطيع القول إن الصيغة LP→P تقابل (تعكس) الخاصية الانعكاسية للعلاقة R. وسنأتي على هذه الصيغة لاحقاً عند بناء النسق T.

الصيغة $L(P\rightarrow Q)\rightarrow(LP\rightarrow LQ)$ صحيحة في كل الإطارات بغض النظر عن خواص علاقة الموصولية فيها. وسنأتي على هذه الصيغة لاحقاً عند بناء النسق K.

الصيغة LP→LLP تقابل خاصية التعدي للعلاقة R. وسنأتي على هذه الصيغة لاحقاً عند بناء النسق S_4.

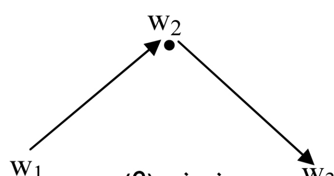
مبرهنة 2:

الصيغة LP→LLP صحيحة في الإطارات التي تكون فيها علاقة الموصولية متعدية.

البرهان:

سنقوم بتبيان أن مثالاً مضاداً للصيغة LP→LLP يمكن دائماً إعطاؤه في الإطارات التي تكون فيها علاقة الموصولية ليست متعدية.

لتكن w_1, w_2, w_3 ثلاثة عوالم (ليست مختلفة بالضرورة)، حيث إن: w_1Rw_2, w_2Rw_3 ولكن لا يصدق w_1Rw_3. هذه الحالة يمكن تمثيلها بالنموذج التالي:



نموذج (6)

في هذا النموذج نختار V، حيث إن $V(P, w_3)=0$ و $V(P, w)=1$ من أجل كل العوالم الأخرى w. إذاً يصبح $V(LP,w_1)=1$، $V(LLP,w_1)=0$ لأن $V(LP,w_2) = 0$.

مبرهنة 3:

الصيغة MP→LMP صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متعدية ومتماثلة.

البرهان:
لنفرض أن الصيغة غير صحيحة في هذه العلاقة وهكذا، فإنه يوجد إطار F في نموذج S علاقة الموصولية R فيه متعدية ومتماثلة ويوجد عالم w حيث إن:

$$(1) \qquad V (MP, w) = 1$$

و

$$(2) \qquad V (LMP, w) = 0$$

من (1) وباستخدام [VM]، يوجد 'w حيث إن 'wRw وأن:

$$(3) \qquad V (P, w') = 1$$

ومن (2) وباستخدام [VL]، يوجد "w حيث إن "wRw وأن:

$$(4) \qquad V (MP, w'') = 0$$

الآن، بما أن "wRw وبما أن R متماثلة، إذاً w"Rw. وبما أن 'wRw و R متعدية يصبح 'w"Rw. وهكذا فباستخدام (4) و[VM] نحصل على:

$$(5) \qquad V (P, w') = 0$$

وهذا يناقض (3). وإذاً الصيغة MP→LMP صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متعدية ومتماثلة.

الصيغة MP→LMP سنأتي عليها لاحقاً عند بناء النسق S_5.

مبرهنة 4:
الصيغة LP→MP صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متسلسلة.

البرهان:
إذا لم تكن LP→MP صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متسلسلة، فإنه يوجد عالم w في النموذج القائم على إطار متسلسل، حيث إن:

$$(1) \qquad V(LP, w) = 1$$

و

$$(2) \qquad V (MP, w) = 0$$

وبما أن R متسلسلة، فإن w يجب أن يكون مرتبطاً بعالم 'w (wRw′)، وبالتالي فحسب (1) و[VL] يجب أن يكون V (P, w') = 1، وحسب [VM] و(2) يكون V (P,w') = 0 وهذا تناقض.

سنأتي على الصيغة LP→MP لاحقاً عند بناء النسق D.

مبرهنة 5:

الصـيغة $LMP \rightarrow P$ صـحيحة فـي كـل الإطـارات التــي تكـون علاقـة الموصولية فيها متماثلة.

البرهان:

ليكن (W, R, V) أي نموذج و(W, R) إطاره، حيث R متماثلة.

ليكن $V (P, w) = 1$ من أجل $w \in W$. الآن، لـيكن w_1 أي عـالم، حيث wRw_1. بمـا أن R متماثلـة فيكـون لـدينا w_1Rw، وبمـا أن$V(P,w) = 1$ وبتطبيق القاعدة [VM] نحصـل علـى $V(MP,w) = 1$. وبمـا أن $V(P,w) = 1$ وبتطبيـق القاعدة [VM] نحصـل على $V(LMP,w) = 1$. وبمـا أن w_1 هـو أي عـالم، فـإذاً $V(LMP,w) = 1$. وهكذا فكلما كانت P صـادقة في أي عالم فإن LMP صادقة أيضاً، شرط أن تكون R متماثلة. وإذاً، $LMP \rightarrow P$ صحيحة في كل إطار متماثل.

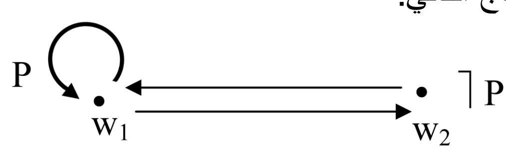
سنأتي على الصيغة $LMP \rightarrow P$ لاحقاً عند بناء النسق B.

6.1 تمارين:

(أ) ترجم القضايا التالية إلى منطق قضايا الجهة:

1. من الممكن ألا تهب الرياح، ولكنه ليس من الضروري ألا تهب.
2. إذا كان ممكن أن تهب الرياح، فإنه من الضروري أن يكون من الممكن أن تهب.
3. إذا كـان مـن الممكـن أن يكـون ضـرورياً أن تهـب الريـاح، فإنـه مـن الضروري أن تهب.
4. إذا كان من الممكن للأشياء ألا تحدث، فإنه من المستحيل لها ألا تحدث.
5. إذا كان من المستحيل للأشياء ألا تحدث، فإنه من الضروري أن تحدث.
6. إذا كـان مـن الممكـن للأشـياء أن تحـدث أو ممكـن ألا تحـدث، فإنهـا لـن تحدث بالضرورة. (إن القضايا 4، 5، 6، مقتبسة من أرسطو[١٤]).

(ب) خذ النموذج التالي:



حدد فيما إذا كانت كل من الصيغ التالية صادقة في w_1، في w_2، وصـحيحة في النموذج بأكمله:

1. $LP \rightarrow LLP$
2. $\neg LP$
3. $P \rightarrow LMP$

14- on interpretation.

(ج) خذ النموذج التالي:

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_1), (w_3, w_4), (w_4, w_2)\}$$
$$V(P, w_1) = V(P, w_3) = V(Q, w_1) = V(Q, w_2) = 1$$
$$V(P, w_2) = V(P, w_4) = V(Q, w_3) = V(Q, w_4) = 0$$

1. ارسم مخطط النموذج.

2. جد قيمة كل مما يأتي:

(أ) $V(LQ, w_1)$

(ب) $V(L \urcorner (P \rightarrow Q), w_2)$

(ج) $V(MLP, w_1)$

(د) $V(MP \wedge MQ, w_1)$

3. حدد فيما إذا كانت كل من الصيغتين التاليتين صحيحتين في النموذج:

(أ) $MLP \vee MMLP$

(ب) $(P \rightarrow MP) \wedge (Q \rightarrow MQ)$