أنساق منطق قضايا الجهة

Systems of propositional Modal Logic

سنقوم، في هذا الفصل ببناء ما يسمى الأنساق العادية لمنطق قضايا الجهة وهي الأنساق: K، T، D، S_4، S_5، B، والذي يمثل K نسقها الأساسي، وحيث تظهر الأنساق الأخرى كتوسيعات إلى K، ثم نقوم باستخدام أشجار الصدق لبرهان هذه التوسيعات.

يعرف النسق الصوري (المنطقي) بشكل عام، وذلك بتحديد مكوناته الأساسية كالتالي:

(1) رموز النسق (أبجدية النسق) وبضمنها الرموز الأولية (غير المعرفة).

(2) قواعد بناء الصيغ تبين أي تتابع من رموز النسق تشكل صيغة في النسق.

(3) مجموعة بديهيات النسق، والتي هي مجموعة جزئية من الصيغ في (2).

(4) قواعد الاشتقاق.

(5) مبرهنات النسق، والتي يتم برهانها من بديهياته باستخدام قواعد الاشتقاق.

1.3 الأنساق العادية لمنطق قضايا الجهة:

1.1.3 النسق K:

مكونات النسق K[١٦]

(1) رموز لانهائية للنسق (أبجدية النسق)

(أ) الحروف ...A, B, C, وهذه الحروف ودلائلها ...A_1, A_2,...B_1, B_2, ندعوها المتغيرات القضائية. الرمزان: ⌉، ∨ ندعوهما الرابطين الأوليين والرمز الأولي L يسمى موجّه الضرورة.

(ب) الرمزان (و) ندعوهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

١٦- سمي بالنسق K تكريماً للعالم المنطقي كريبكة.

(2) مجموعة الصيغ التي تتكون حسب القاعدتين:
(أ) المتغيرات القضائية في (1) تكون صيغاً.
(ب) إذا كانت α، β صيغتين فإن $\neg\alpha$، $\beta \vee \alpha$ صيغتان أيضاً.
الرمزان α، β المذكوران في (ب) ليسا من اللغة الشيئية للنسق، وإنما من ما وراء لغة النسق.
تدخل الروابط الأخرى: $\wedge$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$ باستخدام الرابطين الأوليين $\neg$، $\vee$ حسب التعريفات أدناه.
تعريف$_1$:

$K \wedge L \equiv$ تع $\neg(\neg K \vee \neg L)$

تعريف$_2$:

$K \rightarrow L \equiv$ تع $\neg K \vee L$

تعريف$_3$:

$K \leftrightarrow L \equiv$ تع $(K \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow K)$

الموجه M يسمى موجه الإمكانية ويتم تعريفه بواسطة الموجه L.
تعريف$_4$:

$MP \equiv$ تع $\neg L \neg P$

(3) البديهيات:
بديهيات النسق **K** تتألف من:
(1) جميع الصيغ التكرارية لحساب القضايا أي جميع الصيغ المعرفة بواسطة البديهية التالية:
حق: إذا كانت α صيغة تكرارية من حساب القضايا فإن α تكون بديهية.
(2) ومن البديهية K التالية:
البديهية K: $L(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \rightarrow LQ)$
(4) قواعد الاشتقاق:
في نسق **K** توجد ثلاث قواعد للاشتقاق:
(1) الوضع: من $\alpha \rightarrow \beta$ وα نشتق β.
(2) الاستبدال: من الصيغة α التي تحوي المتغير أو المتغيرات $K_1, K_2, \ldots, K_n$ نشتق الصيغة β بواسطة استبدال كل ظهور لهذا المتغير أو المتغيرات في α بأي صيغة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ على الترتيب.
(3) الضرورة: من α تشتق $L\alpha$.
(البرهان) في النسق K هو متتالية منتهية من الصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ حيث إن أي صيغة α_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ هي بديهية أو صيغة مشتقة من الصيغ التي تسبقها في المتتالية، وذلك باستخدام قاعدة الوضع أو الاستبدال أو الضرورة أو التعريف. هذا البرهان هو برهان α_n في النسق K. تسمى α_n مبرهنة النسق K.

إذا كانت المتتالية المنتهية من الصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ برهاناً في النسق K وكان k<n فإن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ يكون أيضاً برهاناً في النسق K، لأنه يلبي تعريف (البرهان) وهكذا تكون α_k مبرهنة في النسق K. إن هذا يعني كذلك أن كل بديهيات النسق K هي مبرهنات في النسق K، حيث يكون برهان كل بديهية في K عبارة عن متتالية ذات حد واحد هو البديهية نفسها.

سنورد أدناه قائمة الصيغ التكرارية لحساب القضايا والتي سنستخدمها في هذا النسق K والأنساق التالية بعده. سنضيف عدداً مرجعياً لكل صيغة حتى نستطيع الرجوع إليها في البراهين لاحقاً.

سنرمز بواسطة حق$_i$ اختصاراً إلى: الصيغة التكرارية لحساب القضايا حيث $(i=1,2,\ldots,24)$ لكل من الصيغ التكرارية أدناه عندما ترد في البراهين.

حق$_1$ $(P \wedge Q) \rightarrow P$

حق$_2$ $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

حق$_3$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R)))$

حق$_4$ $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)$

حق$_5$ $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

حق$_6$ $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

حق$_7$ $(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$

حق$_8$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow S))$

حق$_9$ $P \rightarrow (P \vee Q)$

حق$_{10}$ $Q \rightarrow (P \vee Q)$

حق$_{11}$ $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q))$

حق$_{12}$ $P \leftrightarrow \urcorner\urcorner P$

حق$_{13}$ $(P \vee Q) \leftrightarrow \urcorner(\urcorner P \wedge \urcorner Q)$

حق$_{14}$ $(P \wedge Q) \leftrightarrow \urcorner(\urcorner P \vee \urcorner Q)$

حق$_{15}$ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\urcorner Q \rightarrow \urcorner P)$

حق$_{16}$ $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

حق$_{17}$ $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$

حق$_{18}$ $((P \vee Q) \mathrm{V} R) \leftrightarrow (P \mathrm{V} (Q \vee R))$

حق$_{19}$ $((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$

حق$_{20}$ $P \leftrightarrow (P \vee P)$

حق$_{21}$ $P \leftrightarrow (P \wedge P)$

حق$_{22}$ $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

حق$_{23}$ $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

حق$_{24}$ $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\urcorner P \rightarrow \urcorner Q)$

(5) المبرهنات:

مبرهنة K_1 $L(P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge L Q)$

البرهان

1.	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	حق$_1$
2.	$L((P \wedge Q) \rightarrow P)$	الضرورة 1,
3.	$L(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \rightarrow L Q)$	البديهية K
4.	$L((P \wedge Q) \rightarrow P) \rightarrow (L((P \wedge Q) \rightarrow LP)$	استبدال $3, (P \Lambda Q/P), (P/Q)$
5.	$L((P \wedge Q) \rightarrow LP$	الوضع 2,4
6.	$(P \wedge Q) \rightarrow Q$	حق$_2$
7.	$L((P \wedge Q) \rightarrow Q)$	الضرورة 6,
8.	$L((P \wedge Q) \rightarrow Q) \rightarrow (L((P \wedge Q) \rightarrow L Q)$	استبدال $3, (P \Lambda Q/P)$
9.	$L((P \wedge Q) \rightarrow LQ$	الوضع 7,8
10.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R)))$	حق$_3$
11.	$(L(P \wedge Q) \rightarrow LP) \rightarrow ((L((P \wedge Q) \rightarrow L Q) \rightarrow (L(P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge L Q)))$	استبدال $10, (L(P \wedge Q)/P), (LP/Q), (LQ/R)$
12.	$(L(P\wedge Q) \rightarrow LQ)\rightarrow(L((P\wedge Q)\rightarrow(LP \wedge LQ))$	الوضع 5,11
13.	$L(P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge LQ)$	الوضع 9,12

مبرهنة K_2 $(LP \wedge L Q) \rightarrow L(P \wedge Q)$

البرهان

1.	$Lp \rightarrow L (Q \rightarrow (P \wedge Q)$	حق$_4$، حق$_1$
2.	$L (Q \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow (LQ \rightarrow L (P \wedge Q))$	البديهية K، استبدال (Q/P)، $(P\wedge Q/Q)$
3.	$(Lp \wedge LQ) \rightarrow L (P \wedge Q)$	حق$_8$ 2، 1

مبرهنة K_3 $L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge L Q)$

البرهان

1.	$L(p \wedge Q) \rightarrow (LP \Lambda L Q)$	مبرهنة K_1
2.	$(LP \wedge L Q) \rightarrow L(P \wedge Q)$	مبرهنة K_2
3.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$	حق$_5$
4.	$(L (P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge LQ)) \rightarrow (((LP \wedge LQ)) \rightarrow (L(P \wedge Q) \rightarrow (L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge LQ)))$	استبدال $3,(L(p\wedge Q)/P),(LP\wedge LQ/Q)$
5.	$((LP\wedge LQ) \rightarrow L(P \wedge Q)) \rightarrow (L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge LQ))$	الوضع 1,4
6.	$L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge L Q)$	الوضع 2,5

المبرهنة K_3 تسمى توزيع الموجه L.

مبرهنة$_1$ قاعدة اشتقاق (قع$_1$) $\alpha \to \beta \vdash L\alpha \to L\beta$

البرهان

1.	$\alpha \to \beta$	م
2.	$L(\alpha \to \beta)$	الضرورة 1,
3.	$L(\alpha \to \beta) \to (L\alpha \to L\beta)$	استبدال $K, (\alpha/P), (\beta/Q)$
4.	$L\alpha \to L\beta$	الوضع 2,3

مبرهنةK_4 $(LP \vee LQ) \to L(P \vee Q)$

البرهان

1.	$LP \to L(P \vee Q)$	قع$_1$، حق$_9$
2.	$LQ \to L(P \vee Q)$	قع$_1$، حق$_{10}$
3.	$(LP \vee LQ) \to L(P \vee Q)$	حق$_{11}$ 1,2

مبرهنة$_2$ قاعدة اشتقاق (قع$_2$) $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash L\alpha \leftrightarrow L\beta$

البرهان

1.	$\alpha \leftrightarrow \beta$	م
2.	$\alpha \to \beta$	حق$_{22}$ 1,
3.	$L\alpha \to L\beta$	قع$_1$ 2,
4.	$\beta \to \alpha$	حق$_{23}$ 1,
5.	$L\beta \to L\alpha$	قع$_1$ 4,
6.	$L\alpha \leftrightarrow L\beta$	حق$_6$ 3,5

قاعدة اشتقاقنا التالية هي إحدى أشكال قاعدة الاستبدال وتنص على أنه: من المبرهنة α التي تحوي الصيغة λ نشتق المبرهنة β التي تختلف عن α باحتوائها على الصيغة δ (في مكان أو أكثر) إذا كانت $\lambda \leftrightarrow \delta$ مبرهنة. بعبارة أخرى إذا برهنا أن $\lambda \leftrightarrow \delta$ فيمكننا أن نستعيض عن λ بواسطة δ في أي مبرهنة للحصول على مبرهنة أيضاً. سنرمز لهذه القاعدة بواسطة: تك (اختصار لكلمة: تكافؤ).

مبرهنةK_5 $LP \leftrightarrow \neg M \neg P$

البرهان

1.	$P \leftrightarrow \neg\neg P$	حق$_{12}$
2.	$LP \leftrightarrow \neg\neg LP$	استبدال $1,(LP/P)$
3.	$LP \leftrightarrow \neg\neg L \neg\neg P$	استبدال $2, (\neg\neg P/P)$
4.	$LP \leftrightarrow \neg M \neg P$	تعريف$_4$ 3,

المبرهنة$_5$ تمكننا من استبدال L بواسطة $\neg M \neg$، كذلك فإن تعريف الموجه M يمكننا من استبدال M بواسطة $\neg L \neg$ وهكذا، وبشكل أكثر عمومية، فإنه في أي تتابع من

الموجهين L وM سنقوم باستبدال كل L بواسطة M وكل M بواسطة L، حيث إن الرمز ⌉ يُدخل أو يحذف مباشرة قبل ومباشرة بعد تتابع الموجهين وعليه مثلاً، نستبدل LM بواسطة⌉ ML ⌉، LLL⌉ بواسطة⌉ MMM، ⌉ LLM M بواسطةML M L ⌉ وهكذا. سنسمي هذه القاعدة: تبادل (L-M).

مبرهنةK_6 $M(P \vee Q) \leftrightarrow (MP \vee MQ)$

البرهان

1.	$L(\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (L\neg P \wedge L\neg Q)$	استبدال $(\neg P/P), (\neg Q/Q)$, مبرهنةK_3
2.	$\neg M\neg(\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (\neg MP \wedge \neg MQ)$	تبادل (L-M) 1,
3.	$\neg M(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg MP \wedge \neg MQ)$	حق$_{13}$ 2,
4.	$M(P \vee Q) \leftrightarrow (MP \vee MQ)$	حق 3,

2.1.3 النسق T:

بإضافة بديهية أخرى إلى بديهيات النسق K نحصل على النسق T. البديهية المضافة تحمل الاسم T نفسه.

البديهية T: $LP \rightarrow P$

بإضافة البديهية T يصبح النسق الجديد T أقوى من النسق السابق K، حيث يمكننا برهان مبرهنات أكثر عدداً فيه. ولكن جميع مبرهنات النسق K والتي برهنا قسماً منها تكون مبرهنات في النسق T أيضاً، حيث أصبح K جزءاً من النسق T. المبرهنة التالية من النسق T لا يمكن برهانها في النسق K.

مبرهنةT_1 $P \rightarrow MP$

البرهان

1.	$L\neg P \rightarrow \neg p$	استبدال $(\neg P/P)$, البديهية T
2.	$P \rightarrow \neg L\neg P$	حق$_{15}$ 1,
3.	$P \rightarrow MP$	تعريف$_4$ 2,

3.1.3 النسق D (التفسير الأخلاقي):

بإضافة البديهية $LP \rightarrow MP$ إلى بديهيات النسق K نحصل على النسق D. البديهية تنص على أنه إذا كان من الضروري P فإنه من الممكن P (أي ليس من الضروري ألا تكون P). وهكذا، فإن البديهية $LP \rightarrow MP$ تعني أن كل ما هو إلزامي يكون مسموحاً به، وهذا التفسير يسمى تفسيراً أخلاقياً، ولهذا فإن $LP \rightarrow MP$ تسمى بديهية D[١٧] ويسمى النسق الحاصل بإضافتها إلى K بالنسق D.

البديهية D: $LP \rightarrow MP$

17- deontic.

$M(P \to P)$ مبرهنة D_1

البرهان

1.	$P \to P$	حق
2.	$L(P \to P)$	قاعدة الضرورة ,1
3.	$L(P \to P) \to M(P \to P)$	استبدال $(P \to P/P)$, البديهيةD
4.	$M(P \to P)$	الوضع 2, 3

4.1.3 النسق S_4:

تحتوي بعض الصيغ على تتابع من الموجهات، مثل الصيغة $LP \to LLP$، تقرأ هذه الصيغة: إذا كان من الضروري P فإنه من الضروري أن يكون من الضروري P.

إن مكونات النسق S 4 هي مكونات النسق T نفسها بإضافة البديهية الوحيدة التالية: البديهية4: $LP \to L\,LP$

سنبرهن لاحقاً في هذا الفصل أن هذه البديهية صحيحة في S_4 وليست صحيحة في كل من T وK.

$MMP \to MP$ مبرهنة (1) S_4

البرهان

1.	$L\neg P \to LL\neg P$	استبدال $(\neg P/P)$, البديهية4
2.	$\neg MP \to \neg M\,MP$	تبادل $(L\text{-}M)$,1
3.	$MMP \to MP$	حق$_{15}$,2

$LP \leftrightarrow L\,LP$ مبرهنة (2) S_4

البرهان

1.	$LPP \to LP$	استبدال (LP/P), البديهيةT
2.	$LP \leftrightarrow L\,LP$	حق$_5$، البديهية 1,4

$MP \leftrightarrow M\,MP$ مبرهنة (3) S_4

البرهان

1.	$MP \to M\,MP$	استبدال (MP/P), مبرهنةT_1
2.	$MP \leftrightarrow M\,MP$	حق$_5$، مبرهنة $1, S_4(1)$

$MLMP \to MP$ مبرهنة (4) S_4

البرهان

1.	$LMP \to MP$	استبدال (MP/P), البديهيةT
2.	$MLMP \to MMP$	قع$_3$,1
3.	$MLMP \to MP$	حق$_5$، مبرهنة $2, S\,4(1)$

$LMP \to LMLMP$ مبرهنة (5) S_4

البرهان

1. $LMP \to MLMP$	استبدال (LMP/P), مبرهنةT_1
2. $LLMP \to LMLMP$	قع$_1$,1
3. $LMP \to LMLMP$	تك، مبرهنة$(2)4$ S ,2
$LMP \leftrightarrow LMLMP$	مبرهنة (6) S_4

البرهان

1. $LMLMP \to LMP$	قع$_1$, مبرهنة (4)4 S
2. $LMP \leftrightarrow LMLMP$	حق$_5$, مبرهنة (5)4 S ,1

5.1.3 النسق S_5:

أسس هذا النسق هي أسس النسق T نفسها مع إضافة البديهية التالية:

البديهية E: $MP \to LMP$

سنبرهن لاحقاً في هذا الفصل أن هذه البديهية صحيحة في S_5 وخاطئة في كل من K وT وS_4.

المبرهنات الثلاثة الأولى للنسق S_5 يتم برهانها بطريقة مبرهنات $S_4(1)$ إلى $S_4(3)$ نفسها، ولكن باستخدام E عوضاً عن البديهية 4. هذه المبرهنات:

$S_5(1)$: $MLP \to LP$

$S_5(2)$: $MP \leftrightarrow LMP$

$S_5(3)$: $LP \leftrightarrow MLP$

بديهية النسق S4 وهي $LP \to LLP$ ليست من بديهيات نسقنا هذا S_5، وسنقوم ببرهانها الآن كمبرهنة للنسق S_5.

$LP \to LLP$	مبرهنة (4) S_5

البرهان

1. $LP \to MLP$	استبدال (LP/P), مبرهنةT_1
2. $MLP \leftrightarrow LMLP$	استبدال (LP/P), مبرهنة$S_5(2)$
3. $LP \to LMLP$	تك (LMLP/MLP) 1,2
4. $LP \to LLP$	تك، مبرهنة$S_5(3)$,3

$L(P \vee LQ) \leftrightarrow (LP \vee LQ)$	مبرهنة (5) S_5

البرهان

1. $L(P \vee LQ) \to (LP \vee MLQ)$	استبدال (LQ/Q), مبرهنةK_9
2. $L(P \vee LQ) \to (LP \vee LQ)$	مبرهنة$(3)5$ S ,1
3. $(LP \vee LLQ) \to L(P \vee LQ)$	استبدال (LQ/Q), مبرهنةK_4
4. $(LP \vee LQ) \to L(P \vee LQ)$	تك، مبرهنة$(2)4$ S ,3
5. $L(P \vee LQ) \leftrightarrow (LP \vee LQ)$	حق$_5$ 2,4

$L(P \vee MQ) \leftrightarrow (LP \vee MQ)$ (6) S5مبرهنة

البرهان

1. $L(P \vee LMQ) \rightarrow (LP \vee LMQ)$ استبدال (MQ/Q), مبرهنة(5) S 5

2. $L(P \vee MQ) \leftrightarrow (LP \vee MQ)$ تك، مبرهنة(2) S 5 ,1

6.1.3 النسق B:

أسس هذا النسق هي أسس T نفسها مع إضافة البديهية أدناه.

البديهية B[18]: $P \rightarrow LMP$

سنبرهن لاحقاً في هذا الفصل أن هذه البديهية خاطئة في K وكذلك في T.

سنبرهن الآن، قاعدة اشتقاق النسق B التالية:

قع$_4$ $M\alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow L\beta$

البرهان

1. $M\alpha \rightarrow \beta$ م
2. $LM\alpha \rightarrow L\beta$ قع$_1$, 1
3. $\alpha \rightarrow LM\alpha$ البديهية B (α/P)
4. $\alpha \rightarrow L\beta$ حق$_6$, 2, 3

الصيغة $LMP \rightarrow P$ هي الصيغة التي تميز النسق B عن T وعن S4. تنسب هذه البديهية إلى الرياضي الألماني بروور مؤسس المدرسة الحدسية في الرياضيات. ولكن، لماذا أصبحت الصيغة B تمثل الحدسية؟ الجواب هو التالي:

عند الحدسيين، الصيغة $P \rightarrow \neg\neg P$ صادقة، ولكن $\neg\neg P \rightarrow P$ كاذبة. من أجل أن يبدو هذا معقولاً تم اعتبار -في حساب القضايا الحدسي- النفي $\neg$ على أنه يعني (ليس من الممكن أن)، أي يعني ما نعنيه عادة: $\neg L$. الآن إذا عوضنا عن $\neg$ بواسطة $\neg L$ فإن $P \rightarrow \neg\neg P$ تصبح $P \rightarrow \neg L \neg L P$ أو $P \rightarrow LMP$ و$\neg\neg P \rightarrow P$ تصبح $P \rightarrow LMP$ أو B.

2.3 أشجار صدق الأنساق العادية:

لقد برهنا في الفصل الأول صحة الصيغ:

$LP \rightarrow P$ ،$LP \rightarrow MP$ ،$LP \rightarrow LLP$ ،$MP \rightarrow LMP$

واستخدمنا (نماذج كريبكة) كطريقة لبرهان هذه الصحة في إطارات تمتلك فيها علاقة الموصولية R خواص معينة.

18- brouwerian axiom.

سنبرهن في هذه الفقرة، وباستخدام أشجار الصدق أن الأنساق العادية T، D، S4، S5، B، هي توسيعات للنسق العادي والأساسي K، وذلك عن طريق إعطاء خواص متعددة إلى العلاقة R في K كالتالي:

(1) النسق T، والذي بديهيته $P \rightarrow LP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية. وهكذا يكون T توسيعاً إلى K.

(2) النسق D هو الذي بديهيته $MP \rightarrow LP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K متسلسلة. وهكذا يكون D توسيعاً إلى K.

(3) النسق S_4 الذي بديهيته $LLP \rightarrow LP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية ومتعدية. وهكذا يكون S_4 توسيعاً إلى K وكذلك إلى T.

(4) النسق S_5 الذي بديهيته $LMP \rightarrow MP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية، ومتماثلة ومتعدية. وهكذا يكون S_5 توسيعاً إلى كل من K، T، S_4.

(5) النسق B الذي بديهيته $LMP \rightarrow P$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية ومتماثلة. وهكذا يكون B توسيعاً إلى K وإلى T.

إن تبيان أن كل الأنساق العادية لقضايا الجهة: T، D، S_4، S_5، B هي توسيع للنسق الأساسي K يقوم على ما يلي:

بما أن بديهية K: $L(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \rightarrow LQ)$ صحيحة في كل النماذج من دون أي قيود على R، فإن البديهية K صحيحة في جميع النماذج التي لا يوجد فيها أي تقييد على R، وبالتالي فإن كل الصيغ التي تكون صحيحة في النسق K تكون صحيحة أيضاً في كل النماذج التي لا توجد فيها أي قيود على R وإذاً، تكون صحيحة في الأنساق: T، D، S_4، S_5، B. بهذا المعنى، تكون هذه الأنساق الأخيرة توسيعاً إلى K.

ولقد كنا قد عرَّفنا خواص العلاقة R، والتي سنعطيها رموزاً كالتالي:

الانعكاسية:ρ ، وتقرأ روه - التماثل:σ ، وتقرأ سيكما - التعدي:τ ، ويقرأ تاو - التسلسل: η، ويقرأ إيتا. ويمكن تركيب هذه الخواص.

يمكننا الآن، كتابة الأنساق العادية T، D، S_4، S_5، B كتوسيعات للنسق الأساسي العادي K كالتالي T: $K\rho$ ويقرأ K روه، D: $K\eta$ ويقرأ K إيتا، S_4: $K\rho\tau$ ويقرأ K روه تاو، S_5: $K\rho\sigma\tau$ ويقرأ K روه سيكما تاو، B: $K\rho\sigma$ ويقرأ K روه سيكما، على الترتيب[19].

أولاً: سنبرهن أن الصيغة $L(P \to Q) \to (LP \to LQ)$، التي هي بديهية النسق الأساسي K، صحيحة في جميع الإطارات، بغض النظر عن خواص العلاقة R:

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\to$. الخطان 4 و5 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\neg\to$. الخط 6 اشتق من 5 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 7 و8 اشتقا من 6 بتطبيق القاعدة M. الخط 9 اشتق من 4 بتطبيق القاعدة L. الخط 10 اشتق من 2 بتطبيق القاعدة L. الخط 11 اشتق من 10 بتطبيق القاعدة $\to$. الشجرة مغلقة لوجود $\neg P, 1$ و $P, 1$ على الفرع الأيسر ولوجود $Q, 1$ و $\neg Q, 1$ على الأيمن. والصيغة صحيحة. (لاحظ، أننا لم نستخدم أي خاصية للعلاقة الثنائية R).

1	$\neg(L(P \to Q) \to (LP \to LQ)),0$	
2	$L(LP \to Q),0$	
3	$\neg(LP \to LQ),0$	
4	$LP,0$	
5	$\neg LQ,0$	
6	$M\neg Q,0$	
7	$0R1$	
8	$\neg Q,1$	
9	$P,1$	
10	$P \to Q,1$	
11	$\neg P, 1$	$Q, 1$
12	x	x

ثانياً: سنبرهن صحة الصيغة $LP \to P$ في النسق T.

$$2.\ \vdash_T LP \to P$$

1	$\neg(LP \to P),0$
2	$0R0$
3	$LP,0$
4	$\neg P,0$
5	$P,0$
6	x

الخطان 3 و 4 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\to$. الخط 5 اشتق من 3 و $0R0$ على الخط 2، أي توافر الخاصية الانعكاسية للعلاقة R في النسق T، والتي من دونها كنا سنقف عند الخط 4 ولا نشتق P وتبقى الشجرة مفتوحة وتكون الصيغة غير صحيحة في T. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة في النسق T.

19- ρ : rho, σ : sigma, τ : tau, η : eta.

إن هذا يبرهن أن T هو توسيع للنسق K وأن الصيغة $LP \to P$ هي صيغة حاسمة للتفريق بين النسقين K و T.

ثالثاً: سنبرهن الآن صحة الصيغة $LP \to LLP$ في النسق S_4.

$3. \vdash_{S_4} LP \to LLP$

1	$\neg(LP \to LLP),0$
2	$LP,0$
3	$\neg LLP,0$
4	$M\neg LP,0$
5	$0R1$
6	$\neg LP,1$
7	$M\neg P,1$
8	$1R2$
9	$\neg P,2$
10	$0R2$
11	$P,2$
12	x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg \to$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة $L\neg$. الخطان 5 و 6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة. الخطان 8 و 9 اشتقا من 7 بتطبيق قاعدة الإمكانية. كان يجب أن نتوقف عند الخط 9 لو كنا في النسق K أو النسق T وتبقى الشجرة مفتوحة والصيغة خاطئة في هذين النسقين، ولكننا أضفنا 1R2 على الخط 8 بسبب قاعدة الإمكانية وعندنا 0R1 فإذاً يصبح لدينا 0R2، وذلك باستخدام خاصية التعدي للعلاقة R في النسق S_4. وبما أن LP صحيحة في العالم 0، فإنه بتطبيق قاعدة الضرورة على الخطين 2 و10، نشتق الخط 11 وتغلق الشجرة لوجود P,2 و$\neg$P,2. مما ذكر أعلاه يتبين أن النسق S_4 هو توسيع لكل من النسقين K وT.

رابعاً: سنبرهن أدناه صحة الصيغة $LP \to MP$ في النسق D.

$4. \vdash_{D} LP \to MP$

1	$\neg(LP \to MP),0$
2	$LP,0$
3	$\neg MP,0$
4	$L\neg P,0$
5	$0R1$
6	$P,1$
7	$\neg P,1$
8	x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة ← ⌉. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الإمكانية M ⌉. الخط 6 اشتق من 2 و5 بتطبيق قاعدة الضرورة. والخط 7 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة الضرورة. الشجرة مغلقة لوجود P,1 و P,1⌉ والصيغة صحيحة في D. ولقد استخدمنا في البرهان خاصية التسلسل للعلاقة R في النسق D على الخط 5، وبما أن هذه الصيغة لا تكون صحيحة إلا باستخدام خاصية التسلسل، فإن D هو توسيع للنسق K.

خامساً: سنبرهن الآن أن الصيغة LMP ← MP صحيحة في النسق S_5.

قبل أن نبدأ بالبرهان، نشير إلى أن علاقة الموصولية R في النسق S_5 تمتلك خواص: الانعكاسية والتماثل والتعدي. وهكذا فهي علاقة تكافؤ، ولتوضيح علاقة التكافؤ نعطي المثال التالي من الحياة اليومية: إن علاقة (... مساو بالطول إلى...) هي علاقة تكافؤ، وهذه العلاقة تبين أنه عندما تعرَّف علاقة التكافؤ على مجموعة من الأشياء، فإنها تجزّء هذه الأشياء إلى عدد من (أصناف التكافؤ). وهكذا، إذا عرّفنا (... مساو بالطول إلى...) على مجموعة من البشر، فإنه من أجل كل طول يمتلكه أي من هؤلاء البشر، سيوجد (صنف تكافؤ) يتكون فقط من جميع الذين يمتلكون ذلك الطول. إن العلاقة (... مساو بالطول إلى...) هي علاقة تكافؤ لأنها:

1) انعكاسية: ذلك أن كل فرد مساو بالطول إلى نفسه، أي أن x مساو بالطول إلى x، أو أن xRx لكل x من مجموعة البشر.

2) تماثلية: ذلك أنه إذا كان أي فرد مساو بالطول إلى أي فرد آخر، فإن هذا الآخر مساو بالطول إلى الأول، أي أنه إذا كان x مساو بالطول إلى y فإن y مساو بالطول إلى x، أو إذا كان xRy فإن yRx، لكل y, x من الصنف.

3) متعدية: ذلك أنه إذا كان أي فرد مساو بالطول إلى أي فرد آخر وكان هذا الآخر مساو بالطول إلى ثالث، فإن الأول مساو بالطول إلى الثالث، أي أنه إذا كان x مساو بالطول إلى y وy مساو بالطول إلى z فإن x مساو بالطول إلى z، لكل x، y، z من الصنف.

وبالعودة إلى مثالنا، سيوجد صنف يتكون من كل الذين طولهم 1.50م، وصنف آخر من كل الذين طولهم 1.60م، وهكذا...، وبالتالي، فإن كل فرد سيمتلك هذه العلاقة مع أي فرد آخر داخل كل صنف، ولكن، لن يوجد أحد يمتلك العلاقة نفسها مع فرد آخر من صنف آخر.

إذا كانت العلاقة R في إطارات كريبكة (W,R) هي علاقة تكافؤ فهذا سيؤدي إلى أن تجزئ العلاقة R مجموعة العوالم W إلى أصناف تكافؤ، حيث كل عالم w يكون مرتبطاً بالعلاقة R مع (موصول من) أي عالم داخل صنفه وليس مرتبطاً مع أي عالم من صنف آخر. وهكذا، يصبح بإمكاننا النظر إلى الإطار،

الذي تكون فيه العلاقة R علاقة تكافؤ على أنه مجموعة من عدة إطارات منفصلة عن بعضها البعض، بحيث إنه داخل كل منها يكون أي عالم موصولاً من أي عالم آخر.

وهكذا، فعند تقويم صيغة في نموذج مؤسس على إطارات من هذا النوع، نقوم باستبدال القاعدة [VL] بواسطة قاعدة أبسط كما يلي:

$[VLS_5]\ V(L\alpha, w) = 1$

إذا كان $V(\alpha, w') = 1$ من أجل كل $w' \in W$، وإلا فإن $V(L\alpha, w) = 0$.

يمكننا الآن، إنشاء شجرة صدق S5 أو Kρστ ببساطة كالتالي: لا يتم ذكر العلاقة R في الشجرة وتطبق القاعدتين L وM فقط.

5. $\vdash_{S_5}$ $MP \to LMP$

1	$\neg(MP \to LMP),0$
2	$MP,0$
3	$\neg LMP,0$
4	$M\neg MP,0$
5	$P,1$
6	$\neg MP,2$
7	$L\neg P,2$
8	$\neg P,0$
9	$\neg P,1$
10	x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg \to$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة. الخط 5 اشتق من 2 بتطبيق قاعدة الإمكانية. الخط 6 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق قاعدة نفي الإمكانية. الخط 8 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة الضرورة. الخط 9 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة الضرورة. الشجرة مغلقة لوجود P,1 و $\neg$P,1 والصيغة صحيحة في S_5.

إن هذه الصيغة خاطئة في كل من K، T، S_4، لأن علاقة الموصولية R يجب أن تكون علاقة تكافؤ حتى تكون صحيحة، وهذه الخاصية متوافرة فقط في S_5.

سادساً: سنبرهن أن الصيغة $P \to LMP$ صحيحة في النسق B.

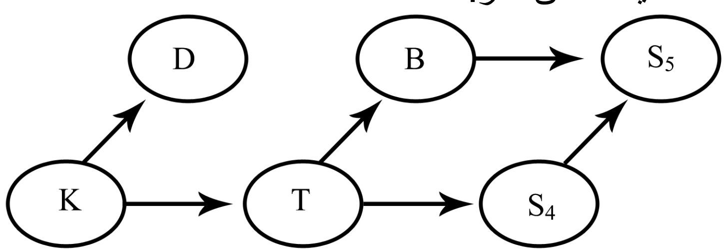
6. $\vdash_{B}$ $P \to LMP$

1	$\neg(P \to LMP),0$
2	$P,0$
3	$\neg LMP,0$

4 $M \neg MP,0$
5 $0R1$
6 $\neg MP,1$
7 $1R0$
8 $L \neg P,1$
9 $\neg P,0$
10 x

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg \rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة $L \neg$. الخط 5 و6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة M. الخط 8 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة $M \neg$. الخط 9 اشتق من 8 بتطبيق قاعدة L. الشجرة مغلقة لوجود $P,0$ و $\neg P,0$ عليها والصيغة صحيحة. لاحظ أن الخط 9 اشتق من $L \neg P,1$ لأن $1R0$، أي أننا استخدمنا كون R تماثلية للحصول على $1R0$، وبالتالي فإن $LMP \rightarrow P$ ليست صحيحة إلا في الإطارات التماثلية، وبهذا فهي ليست صحيحة في K أو أن B توسيعا أصليا إلى K.

المخطط التالي يبين التوسيعات، الذي تحدثنا عنها، حيث السهم يعني (متضمن في) إذا كانت جميع الصيغ الصحيحة لنسق متضمنة (مجموعة جزئية) في الصيغ الصحيحة لنسق آخر.



3.3 تمارين:

(أ) برهن أن كل صيغة من الصيغ التالية صحيحة:

1- مبرهنة K7 $M(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (LP \rightarrow MQ)$

2- مبرهنة K8 $M(P \wedge Q) \rightarrow (MP \wedge MQ)$

3- مبرهنة K9 $L(P \vee Q) \rightarrow (LP \vee MQ)$

4- برهن المبرهنة T_2: $M(P \rightarrow LP)$

5- برهن المبرهنة (6) S_4: $LMP \leftrightarrow LM\,LMP$

7- برهن المبرهنة (7) S_5: $M(P \wedge MQ) \leftrightarrow (MP \wedge MQ)$

8- برهن المبرهنة (8) S_5: $M(P \wedge LQ) \leftrightarrow (MP \wedge LQ)$