منطق المحمولات الجهوي

Modal Predicate Logic

1.5 حساب المحمولات التقليدي (غير الجهوي):

قبل أن نقوم بدراسة منطق المحمولات الجهوي تركيباً ودلالة، سنقوم بتوضيح المفاهيم التي نحتاجها من حساب المحمولات التقليدي[٢٦].

نعالج المحمول على أنه دالة قضائية (تسمى أيضاً دالة منطقية) بمتغير أو متغيرين أو أكثر بالاعتماد على ما تعكسه القضية من صفة لحد أو علاقة بين حدين أو أكثر. سميت دالة قضائية وذلك لتفريقها عن الدوال المستخدمة في الجبر، مثلاً: الدوال العددية، وعن الدوال المستخدمة في حساب القضايا والتي هي دوال صدق.

إن هذه المعالجة للمحمولات تكون مناسبة عندما تعكس القضية صفة أو علاقة بين الحدود.

يمكننا إعطاء تعريف للحد وهو: الثوابت والمتغيرات والدوال تسمى حدوداً. أما المحمول فهو كل صفة أو علاقة.

أولاً-اللغة الرمزية والترجمة لحساب المحمولات:

إن حساب المحمولات يمثل توسيعاً لحساب القضايا. وبهذا تكون لغة حساب القضايا جزءاً من لغة حساب المحمولات. وعليه، فإن هذه الأخيرة ستشمل رموزاً جديدة بالإضافة إلى رموز لغة حساب القضايا. وهكذا، فاللغة الرمزية لحساب المحمولات تتكون من:

1) الحروف الكبيرة $A,B,C,\ldots$ وهذه الحروف مع دلائلها $A_1,A_2,\ldots,B_1,B_2,\ldots$ للتعبير عن متغيرات المحمولات.

2) الحروف f ، g ، h ، وهذه الحروف ودلائلها للتعبير عن الدوال.

٢٦- يمكن للقارئ التعرف بالتفصيل على هذا الحساب بالرجوع إلى كتابنا: المنطق الرمزي المعاصر - نظري وتمارين محلولة، دار الشروق، عمّان، 2007.

3) رموز الروابط $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$.

4) القوسان (و) وهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

5) الحروف الصغيرة ...,a, b, c وهذه الحروف ودلائلها ...,$a_1,a_2,\ldots,b_1,b_2$ للتعبير عن الحدود التي هي ثوابت، والحروف الصغيرة x, y, z للتعبير عن الحدود التي هي متغيرات.

6) المكممان $\exists$، $\forall$.

ثانياً- تركيب لغة حساب المحمولات:

(قواعد بناء الصيغ)

تعريف: إذا كان P محمولاً ذا n حداً وكانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي n من الحدود، فإن $P_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ يسمى صيغة ذرية.

مثال: البصرة تقع إلى الجنوب من بغداد

الحدود: البصرة–b، بغداد-d.

المحمول: x إلى الجنوب من y: P_{xy}.

الترجمة : P_{bd}. هذه صيغة ذرية.

سنبني الآن الصيغ في حساب المحمولات حسب القواعد الأربع التالية:

1) الصيغة الذرية تكون صيغة.

2) إذا كانت α_1, α_2 صيغتين فإن:

$\neg\alpha_1, (\alpha_1 \wedge \alpha_2), (\alpha_1 \vee \alpha_2), (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), (\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ تكون صيغاً.

3) إذا كان x متغيراً وα صيغة فإن:

$(\forall x)\, \alpha, (\exists x)\, \alpha$

تكون صيغتين.

4) أي تتابع آخر من الرموز لا يكون صيغة.

الكثير من المناطقة يستخدمون مصطلح (الصيغة جيدة التكوين) مقابل (الصيغة) الذي استخدمناه نحن من أجل الاختصار.

ثالثاً- المتغيرات الحرة والمتغيرات المقيدة Free and Bound Variables

ذكرنا سابقاً بأن تكميم المحمولات يحولها إلى قضايا. إن أدوات التكميم $\forall$، $\exists$ تؤثر في متغيرات المحمولات.

تعريف: نطاق مكمم في صيغة ما هو المكمم نفسه مع أقصر صيغة تلي المكمم مباشرة.

أمثلة على نطاق المكمم $(\forall x)$

(1) $(\forall x)\ (M_x \rightarrow (\forall y)(R_y \rightarrow \neg H_{xy}))$

(2) $(\forall x)\ R_x \rightarrow (\forall y)(R_y \rightarrow M_{xy})$

نطاق المكمم الكلي في الصيغة (1) هو (1) كلها، أما النطاق في (2) فهو $(\forall x)\ R_x$.

تعريف: يسمى المتغير x في صيغة ما مقيداً إذا وفقط إذا كان ضمن نطاق المكمم $(\forall x)$ أو $(\exists x)$، وإذا لم يكن كذلك في حالة واحدة على الأقل فيسمى المتغير x حر.

المتغيران x وy في المثال (1) مقيدان. المتغير x مقيد وحر في المثال (2)، أما المتغير y فمقيد.

مثال:

(1) المتغير x في $(\exists x)\ P_{xy}$ مقيد أما y فحر.

(2) في الصيغة $(\forall x)\ (x > y)\ V\ (\exists x)\ (x < 1)$ المتغير x مقيد لأنه مرة ضمن نطاق المكمم $(\forall x)$ ومرة ضمن نطاق المكمم $(\exists x)$.

تعريف: تسمى الصيغة قضية إذا لم تمتلك أي متغيرات حرة.

2.5 تركيب ودلالة حساب المحمولات الجهوي:

إن لغة حساب المحمولات الجهوي هي بكل بساطة، لغة حساب المحمولات التقليدي، يضاف إليها المؤثران الجهويان L وM، وكذا تضاف الصيغة $L\alpha$ إلى قواعد بناء صيغ حساب المحمولات التقليدي. ونتبنى التعريف: $M\alpha \equiv$ تع $\neg L \neg \alpha$.

وهكذا، فإن صيغ حساب المحمولات الجهوي ستتضمن صيغاً، مثل:

$$L\ (\forall_x)\ (P_x \rightarrow Q_x),\ (\forall_x)\ L\ (P_x \rightarrow Q_x),\ (\exists_x)\ (MP_x \wedge Q_x)$$

وبإضافة علاقة الهوية (=) فسنحصل على صيغ حساب المحمولات الجهوي مع الهوية، مثل:

$$L\ (a = b),\ M \neg (\exists_x)\ (x = a)$$

دلالة حساب المحمولات الجهوي تتم دراستها بواسطة أشجار صدقها، التي تتضمن قواعد اشتقاق أشجار الصدق في منطق قضايا الجهة (الفصل الثاني)، مضافاً إليها 4 قواعد اشتقاق جديدة هي:

(1) قاعدة نفي المكمم الجزئي $\urcorner\exists$:

$$\checkmark \urcorner(\exists x)\alpha \quad w$$
$$\vdots$$
$$(\forall x)\urcorner\alpha \quad w$$

(2) قاعدة نفي المكمم الكلي $\urcorner\forall$:

$$\checkmark \urcorner(\forall x)\alpha \quad w$$
$$\vdots$$
$$(\exists x)\urcorner\alpha \quad w$$

(3) قاعدة التمثيل الوجودي[٢٧] تم. و:

$$\checkmark (\exists x)\alpha \quad w$$
$$\vdots$$
$$\beta \quad w$$

حيث β هي صيغة تنتج عن استبدال أي ظهور حر إلى x في α بواسطة ثابت ليكن a، حيث إن a ثابت جديد على فرع الشجرة هذا.

(4) قاعدة التخصيص الكلي[٢٨] تخ.ك:

$$(\forall x)\alpha \quad w$$
$$\vdots$$
$$\beta \quad w$$

27- existential instantiation.
28- universal specification.

حيث β هي صيغة تنتج عن استبدال أي ظهور حر إلى x في α بواسطة أي حد ثابت، ليكن a.

مثال 1:

باستخدام شجرة صدق الصيغة $(\forall_x)L\ P_x \rightarrow L\ (\forall_x)\ P_x$، سنحدد فيما إذا كانت هذه الصيغة صحيحة أم خاطئة.

1.	$\neg((\forall_x)\ LP_x \rightarrow L\ (\forall_x)\ P_x)$	0
2.	$(\forall_x)\ LP_x$	0
3.	$\neg L\ (\forall_x)\ P_x$	0
4.	$M \neg (\forall_x)\ P_x$	0
5.	0R1	
6.	$\neg (\forall_x)\ P_x$	1
7.	$(\exists_x) \neg P_x$	1
8.	$\neg Pa$	1
9.	LPa	0
10.	Pa	1
11.	x	

الخطـان (الصـيغتان) 2 و3 اشـتقا مـن 1 بتطبيـق قاعـدة النفـي$\rightarrow\neg$. الخـط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة $L\neg$. الخطان 5 و6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق قاعدة نفي المكمم الكلـي$\forall\neg$. الخط 8 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة التمثيل الوجودي تـم.و، باسـتبدال x بواسطة a. الخط 9 اشتق من 2 بتطبيق قاعدة التخصيص الكلي تخ.ك باسـتبدال x بواسطة a. الخـط 10 اشـتق مـن 9 باسـتخدام قاعـدة الضـرورة L. الشـجرة مغلقـة لوجـود الصيغة المتناقضة Pa و$\neg$Pa عليها. إذاً الصيغة المعطاة صحيحة.

مثال 2:

سنحدد فيما إذا كانـت هذه الصـيغة $(\exists x)\ LPx \rightarrow L(\exists x)\ Px$ صـحيحة أم خاطئة.

1.	$\neg((\exists x)\ LPx \rightarrow L\ (\exists x)\ Px)$	0
2.	$(\exists x)\ LPx$	0
3.	$\neg L(\exists x)\ Px$	0
4.	$M \neg (\exists x)\ Px$	0
5.	LPa	0
6.	Pa	0
7.	0R1	
8.	$\neg (\exists x)\ Px$	1

9. $(\forall x) \neg Px$ 1
10. $\neg Pa$ 1
11. x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\neg \rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 باستخدام القاعدة $\neg L$. الخط 5 اشتق من 2 باستخدام القاعدة تم.و. الخط 6 اشتق من 5 باستخدام القاعدة L. الخطان 7 و8 حصلنا عليهما من 4 باستخدام القاعدة M. الخط 9 اشتق من 8 باستخدام القاعدة $\neg \exists$. الخط 10 اشتق من 9 باستخدام القاعدة تخ.ك. الشجرة مغلقة لوجود Pa و$\neg$ Pa، والصيغة صحيحة.

3.5 حساب المحمولات الجهوي مع الهوية:

سنقوم الآن بإضافة الهوية (=) إلى حساب المحمولات الجهوي. وقاعدتا اشتقاق أشجار صدق الهوية هما:

1- قاعدة استبدال المتطابقات[٢٩] اس.م:

$m = n, \quad w$
$\alpha, \quad w$
.
.
.
$\beta, \quad w$

حيث β هي صيغة تنتج عن استبدال ظهور واحد أو أكثر إلى m في α بواسطة n، أو استبدال ظهور واحد أو أكثر إلى n في α بواسطة m.

2- قاعدة الإغلاق:

$m \neq m \quad w$
.
.
.
x

مثال 3:

لنحدد صحة الصيغة $a=b \rightarrow L\,(a=b)$ باستخدام شجرة الصدق:

1. $\neg(a=b \rightarrow L\,(a=b))$ 0
2. $a = b$ 0

29- substitutivity of identicals.

3.	$\neg L(a = b)$	0
4.	$M \neg (a = b)$	0
5.	$0R1$	
6.	$\neg (a = b)$	1
7.	$\neg (a = a)$	1
8.	x	

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق قاعدة النفي$\rightarrow\neg$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة $\neg L$. الخطان 5 و6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخط 7 اشتق من الخطين 2 و6 بتطبيق قاعدة استبدال المتطابقات اس.م. أغلقت الشجرة على الخط 8 بتطبيق قاعدة الإغلاق (التعبير $m \neq m$ هو اختصار للتعبير $\neg(m=m)$).

مثال4:

لنحدد صحة الصيغة $L(a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow Pb)$

1.	$\neg (L(a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow Pb))$	0
2.	$L(a = b)$	0
3.	$\neg (Pa \rightarrow Pb)$	0
4.	$a = b$	0
5.	Pa	0
6.	$\neg Pb$	0
7.	$\neg Pa$	0
8.	x	

الخطان 2 و 3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\rightarrow\neg$. الخط 4 اشتق من 2 باستخدام القاعدة L. الخطان 5 و 6 اشتقا من 3 باستخدام القاعدة $\rightarrow\neg$. الخط 7 اشتق من 4 و 6 باستخدام القاعدة اس. م. الشجرة مغلقة لوجود Pa و $\neg$Pa والصيغة صحيحة.

4.5 تمارين:

حدد فيما إذا كانت كل من الصيغ التالية صحيحة أم خاطئة، وذلك بإنشاء أشجار الصدق:

(1) $(\forall x)\, MPx \rightarrow M(\forall x)\, Px$

(2) $L(\forall x)\, Px \rightarrow (\forall x)\, LPx$

(3) $M(\forall x)\, Px \rightarrow (\forall x)\, MPx$

(4) $a \neq b \rightarrow L(a \neq b)$

$$(a = b) \rightarrow (LPa \rightarrow LPb) \quad (5)$$
$$(a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow LPb) \quad (6)$$