الباب الأول

المعادلات الأساسية للنظرية الكهرومغنطيسية

[١] معادلات ماكسويل Maxwell's Equation

تتكون معادلات ماكسويل (وهي المعادلات الأساسية في النظرية الكهرومغنطيسية) من أربعة معادلات تصف المجال الكهرومغطيسي وصفاً تاماً.

المجال الكهرومغنطيسي Electromagnetic Field

يتكون من مجالين:

(١) مجال كهربي Electric Field

(٢) مجال مغنطيسي Magnetic Field

تعريف:

المجال الكهربي: هو منطقة تظهر فيها آثار الكهربية

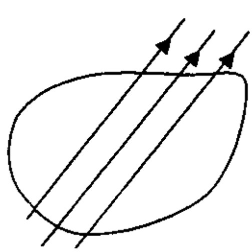
شدة المجال الكهربي $(\vec{E})$: هي القوة المؤثرة على وحدة الشحنات الموجودة في حيز (منطقة) ما.

المجال المغنطيسي: هو منطقة تظهر فيها آثار المغنطيسية.

شدة المجال المغنطيسي $(\vec{H})$: هي القوة المؤثرة على وحدة الأقطاب المغنطيسية الموجودة في حيز (منطقة) ما.

شكل المجال: هو عبارة عن خطوط متوازية تسمى خطوط القوى أو خطوط المجال.

المجال الكهربي:



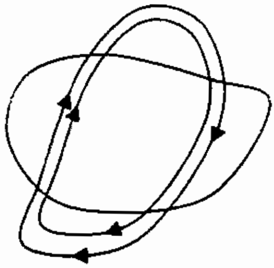
خطوط القوى متباعدة، أي لها تباعد (divergence)

$$\boxed{div\,\vec{E} \neq 0}$$

قانون جاوس:

$$\boxed{div\,\vec{E} = 4\pi\rho}$$

يعطينا المجال $(\vec{E})$ الناتج عن شحنات كثافتها (ρ).



المجال المغنطيسي:

خطوط القوى مغلقة أي غير متباعدة أي ليس لها تباعد

$$\boxed{div\,\vec{H} = 0}$$

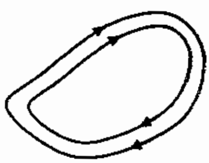
ويعرف بقانون جاوس للمجال المغنطيسي.

ملحوظة:

أي متجـــه $\vec{A}$ يـــشكل مجـــالاً (Field) يـــسمى المجـــال الإتجـــاهي (Vector Field) ويمكن تمثيله بمجموعة من خطوط القوى، وهي إما أن تكون:

(١) مفتوحة $\qquad div\,\vec{A} \neq 0$

(٢) مغلقة $\qquad div\,\vec{A} = 0$



معادلات ماكسويل

في الوسط (Medium)	في الفراغ (Vacuum)
Macroscopic Max. Equation معادلات ماكسويل الماكروسكوبية (1) $div\,\vec{D} = 4\pi\rho$ (2) $div\,\vec{B} = 0$ (3) $curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (4) $curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$	Microscopic Max. Equation معادلات ماكسويل الماكروسكوبية (1) $div\,\vec{E} = 4\pi\rho$ (2) $div\,\vec{H} = 0$ (3) $curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ (4) $curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$

حيث :

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$curl\,\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

ρ هي كثافة الشحنة (charge density) (مرتبطة بالمجال الكهربي).

$\vec{J}$ هي كثافة التيار (Current density) (مرتبطة بالمجال المغنطيسي).

$\vec{E},\vec{H}$ شدتا المجالين الكهربي والمغنطيسي (في الفراغ).

$\vec{D},\vec{B}$ شدتا المجالين الكهربي والمغنطيسي في وجود الوسط (المادة).

ويسمى $\vec{D}$ متجه الإزاحة (Displacement Vector)، كما يسمى $\vec{B}$ متجه الحث أو التأثير (Induction Vector).

العلاقة بين $(\vec{E},\vec{H})$, $(\vec{D},\vec{B})$: هي علاقة خطية صورتها:

(i) $\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}}$

حيث ε تسمى السماحية للوسط (permittivity).

في حالة الفراغ: $\varepsilon=1$ $\leftarrow$ $\vec{D}=\vec{E}$

(ii) $\boxed{\vec{B}=\mu\vec{H}}$

حيث μ تسمى النفاذية للوسط (permeability).

في حالة الفراغ: $\mu=1$ $\leftarrow$ $\vec{B}=\vec{H}$

إثبات معادلات ماكسويل:

(١) **إثبات معادلة ماكسويل الماكروسكوبية الأولى:**

$$\boxed{div\,\vec{D}=4\pi\rho}$$

في الفراغ: من قانون جاوس

$$div\,\vec{E}_o=4\pi\rho \qquad (1)$$

حيث $\vec{E}_o$ المجال الناتج عن الشحنات ρ.

في الوسط(المادة): هناك شحنات تأثيرية ρ_i ناتجة عن عملية الاستقطاب (أي عن وجود المادة في المجال $\vec{E}_o$)، ولها هي الأخرى مجال $\vec{E}_i$ حيث:

$$div\,\vec{E}_i = 4\pi\,\rho_i \qquad \_\_\_(2)$$

.: المجال الكلي: $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_i$

بجمع (1), (2):

$$div\,(\vec{E}_o + \vec{E}_i) = 4\pi\,(\rho + \rho_i)$$

$$\therefore div\,\vec{E} = 4\pi\,(\rho + \rho_i)$$

ولكن $\rho_i = -div\,\vec{p}$ (حيث $\vec{p}$ متجه الاستقطاب).

$$\therefore div\,\vec{E} = 4\pi\,(\rho - div\,\vec{p})$$

$$\therefore div(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p}) = 4\pi\rho$$

وبوضع $(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p}) = \vec{D}$.

حيث $\vec{D}$ هو متجه الإزاحة (Displacement vector)

$$\therefore div\,\vec{D} = 4\pi\rho$$

وهو المطلوب.

في حالة الفراغ: لا يوجد استقطاب $\vec{p} = 0$

$$\therefore\ \vec{D} = \vec{E} \quad \rightarrow \quad div\,\vec{E} = 4\pi\rho$$

(٢) <u>إثبات معادلة ماكسويل الماكروسكوبية الثانية:</u>

$$\boxed{div\,\vec{B} = 0}$$

من قانون جاوس للمجال المغنطيسي: $div\,\vec{H} = 0$

وفي حالة الفراغ:

$$div\,\vec{H}_o = 0 \qquad \_\_\_(1)$$

حيث $\vec{H}_o$ المجال المغنطيسي الأصلي (في الفراغ).

<u>في حالة وجود وسط ممغنط:</u> تتولد مغنطيسية تأثيرية لها كثافة ρ_i ولها أيضاً مجال مغنطيسي تأثيري $\vec{H}_i$.

ومن التناظر بين ظاهرتي الاستقطاب (في الكهربية)، والتمغنط (في المغنطيسية) حيث:

$$div\,\vec{E}_i = 4\pi\rho_i \;\rightarrow\; div\,\vec{H}_i = 4\pi\rho_i \qquad \_\_\_(2)$$

بجمع (1), (2):

$$div(\vec{H}_o + \vec{H}_i) = 4\pi\rho_i$$

$$\therefore\; div\,\vec{H} = 4\pi\rho_i \qquad \_\_\_(3)$$

حيث $\vec{H} = \vec{H}_o + \vec{H}_i$.

ولكن: $\rho_i = -div\,\vec{M}$ (في ظاهرة التمغنط)، حيث $\vec{M}$ متجه التمغنط

بالتعويض في (3):

$$div\,\vec{H} = 4\pi(-div\,\vec{M})$$

$$\therefore div\,\vec{H} = -div(4\pi\vec{M})$$

$$\therefore div(\vec{H} + 4\pi\vec{M}) = 0$$

وبوضع: $\vec{H} + 4\pi\vec{M} = \vec{B}$

حيث $\vec{B}$ متجه التأثير أو الحث (Induction vector).

$$\therefore\; div\,\vec{B} = 0$$

وهو المطلوب.

<u>في حالة الفراغ:</u> لا يوجد وسط ممغنط $\vec{M} = 0$

$$\vec{B} = \vec{H} \;\rightarrow\; div\,\vec{H} = 0$$

<u>(٣) إثبات العلاقة الثالثة لماكسويل:</u>

في حالة الوسط:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

وفي حالة الفراغ:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}$$

من قانون فاراداي في الحث (أو التأثير) الكهرومغنطيسي:

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}} \qquad \_\_\_(1)$$

حيث ε_i هي القوة الدافعة الكهربية التأثيرية، وتعطي بالعلاقة:

$$\boxed{\varepsilon_i = \int \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

وحيث أن ϕ = الفيض الكلي للمجال $\vec{H}$ (في فراغ)، وللحث $\vec{B}$ (في الوسط)

ويعطي بالعلاقة: $\boxed{\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{s}}$

فبالتعويض في (1):

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

ومن نظرية ستوكس في المتجهات:

$$\boxed{\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int curl\,\vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

$$\therefore\ \int curl\,\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

$$\therefore\ \int [curl\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]\cdot d\vec{s} = 0$$

ولما كان التكامل مأخوذاً على كل المحيط الذي يحد السطح S فإن:

$$curl\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \therefore curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

وهو المطلوب.

<u>في حالة الفرغ:</u> $\vec{B} = \vec{H}$

$$\therefore curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

(٤) <u>إثبات المعادلة الرابعة لماكسويل:</u>

من علاقة أمبير: $\boxed{m_i = \frac{4\pi}{c} I}$

حيث: القوة الدافعة المغنطيسية: $\int \vec{H}\cdot d\vec{r} = m_i$

I هي التيار الكلي $(I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s})$، حيث $\vec{J}$ هو كثافة التيار

$$\therefore\ \int \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

وباستخدام قانون ستوكس:

$$\therefore\ \int [curl\,\vec{H}\cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

$$\therefore \int [curl\,\vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{J}]\cdot d\vec{s} = 0$$

ولما كان التكامل مأخوذاً على الدائرة التي تحد السطح فإن:

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

حيث $\vec{J}$ كثافة التيار الكلي المار في الدائرة.

[٢] <u>أنواع التيارات التي تمر في دائرة:</u>

(١) <u>التيار العادي (أو الاصطلاحي) أو الانتقالي (Convention Current)</u>

هو التيار الذي يمر في سلك نتيجة حركة الشحنات، وتعطي كثافة هذه التيار **بالعلاقة:** $\boxed{\vec{j} = \rho\,\vec{v}}$

حيث ρ كثافة الشحنات المتحركة، $\vec{v}$ سرعتها.

في حالة $\vec{v} = 0 \leftarrow \vec{j} = 0$ أي لا يوجد تيار مادامت الشحنات ساكنة.

(٢) <u>تيار التوصيل (Conduction Current)</u>

هو التيار الناتج عن وجود مادة موصلة (conductor) في مجال كهربي، فإذا كان معامل التوصيل للمادة هو σ، وكانت المادة موجودة في مجال شدته $\vec{E}$، فإن تيار التوصيل يعطي بالعلاقة:

$$\boxed{\vec{j}_c = \sigma\,\vec{E}}$$

(٣) <u>تيار الإزاحة (Displacement Current)</u>

ينتج هذا التيار في حالة وجود تغير في متجه الإزاحة $\vec{D}$ أي في حالة وجود $(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$، وقيمته: $\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

<u>**الإثبات**</u>: من معادلة ماكسويل الأولى:

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho \;\rightarrow\; \rho = \frac{1}{4\pi}div\,\vec{D}$$

ومن معادلة الاتصال: $div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$، حيث $\vec{j}$ هو التيار المعتاد (الإنتقالي).

$$\therefore div\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{4\pi}div\,\vec{D}) = 0$$

$$\therefore div\,\vec{j} + \frac{1}{4\pi}div\,\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$$

$$\therefore div(\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}) = 0$$

$$div\,(\underbrace{\vec{j} + \vec{j}_d}) = 0$$

$$div\,\vec{J} = 0$$

حيث: $\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_d$ التيار الكلي، $\vec{j}_d$ تيار الإزاحة ويعطي بالعلاقة:

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

في حالة وجود فراغ: $\vec{D} \to \vec{E}$ ويصبح تيار الإزاحة:

$$\vec{j}_{do} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

العلاقة بين تيار الإزاحة $\vec{j}_d$ وتيار الاستقطاب $\vec{j}_p$:

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \vec{j}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_d)$$

$$= \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) = \frac{4\pi}{c}[\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p})$$

حيث $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\,\vec{p}$

$$\therefore curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p})$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_p) \qquad \_\_(1)$$

أيضاً:

$$\vec{j}_d = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_{do} + \vec{j}_p$$

$\therefore$ تيار الإزاحة = تيار الإزاحة في الفراغ + تيار الإستقطاب (في وجود المادة)

أيضاً: يمكن كتابة العلاقة (1) بالصورة:

$$\therefore curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} + \vec{j}_p]$$

$$= \frac{4\pi}{c}[\vec{j}_{do} + \vec{j} + \vec{j}_p] = \frac{4\pi}{c}[\vec{J}]$$

حيث: $\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_{do} + \vec{j}_p = \vec{j} + \vec{j}_d$ (التيار الكلي).

وإذا أخذنا تيار التوصيل في الاعتبار فإن:

$$\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_d + \vec{j}_c = \vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma\,\vec{E}$$

[٣] <u>الجهود الكهرومغنطيسية Electromagnetic Potentials</u>

<u>المطلوب</u>: إثبات أن حل معادلات ماكسويل:

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$div\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \_\_\_\_(3)$$

$$div\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث $\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}\ ,\ \vec{B} = \mu\,\vec{H}$

يمكن إيجاده بدلالة دالتين أحدهما قياسية ϕ والأخرى إتجاهية $\vec{A}$ وذلك بالصورة:

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = curl\,\vec{A}$$

تسمى $\vec{A}\ ,\ \phi$ بالجهدين الكهرومغنطيسيين.

حيث: ϕ تسمى الجهد القياسي .Scalar potent

$\vec{A}$ تسمى الجهد الإتجاهي .Vector potent

ملحوظة: ϕ ترتبط بالمجال الكهربي $\vec{E}$ فتسمى أحياناً الجهد الكهربي.

$\vec{A}$ ترتبط بالمجال المغنطيسي $\vec{H}$ فتسمى أحياناً الجهد المغنطيسي.

الإثبات: من المتجهات:

$$div\,(curl\,\vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$

فمن المعادلة (2): $div\,\vec{B} = 0$

.: يمكن كتابة: $\boxed{\vec{B} = curl\,\vec{A}}$

حتى تحقق علاقة المتجهات، حيث $\vec{A}$ يسمى بالجهد الإتجاهي.

أيضاً: من المتجهات

$$curl\,(grad\,\phi) = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\phi) = 0 \;\rightarrow\; \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}\phi) = 0$$

$$curl(-grad\,\phi) = 0$$

فمن المعادلة (3):

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(curl\,\vec{A}) = -\frac{1}{c}curl\,(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

$$\therefore\; curl\,(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = 0$$

.: يمكن كتابة:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -grad\,\phi$$

$$\therefore\; \vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

حيث ϕ تسمى بالجهد القياسي.

ملاحظات:

(١) في حالة الفراغ: معادلات ماكسويل هي:

$$div\,\vec{E} = 4\pi\,\rho$$

$$div\,\vec{H} = 0$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ويكون الحل هو:

$$\boxed{\vec{H} = curl\,\vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

(ويلاحظ عدم تغير هذه المعادلة سواء في الفراغ أو الوسط)

(٢) الحالة المستقرة Stationary State

هي الحالة التي لا تعتمد على الزمن:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0\ ,\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\ ,\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0\ ,\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

وتصبح معادلات ماكسويل:

(i) $div\,\vec{E} = 4\pi\,\rho$

$curl\,\vec{E} = 0$

يسمى المجال حينئذ بالمجال الكهروستاتيكي (Electrostatic).

(ii) $div\,\vec{H} = 0$

$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

يسمى المجال حينئذ بالمجال المغنطوستاتيكي (Magnetostatic).

يسمى العلم الذي ندرس فيه المجال الكهروستاتيكي بعلم *الكهروستاتيكا* – *Electrostatics* .

ويسمى العلم الذي ندرس فيه المجال المغنطيوستاتيكي بعلم *المغنيطوستاتيكا* – *Mangnetostatics* ويسمى العلم الذي ندرس فيه المجالين *بالكهرومغنطيسية* *Electromagnetism* .

وحيث أن حركة الشحنات (أي وجود الحد $\frac{\partial \rho}{\partial t}$) تولد تياراً كهربياً فينتج لدينا علماً يسمى: *الإلكتروديناميكا* (*أو الديناميكا الكهربية*) Electrodynamics وهي أنواع نذكر منها:

(١) كلاسيكية (Classical Elect.) سرعة الشحنات المتحركة محدودة.

(٢) نسبية (Relativistic Elect.) سرعة الشحنات المتحركة كبيرة جداً.

(٣) كمية (Quantum Elect.) ندرس فيها الأنظمة الذرية المشحونة.

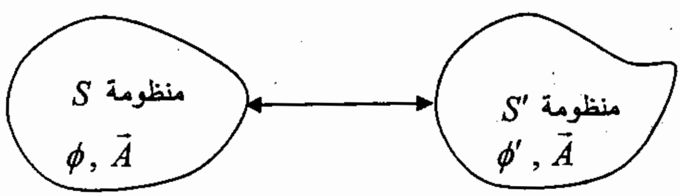
<u>التحويلات المعيارية (Gauge Transformations):</u> هما تحويلان صورتهما

$$\phi = \phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{A} = \vec{A}' + grad\,\lambda \qquad \_\_\_(2)$$

حيث λ دالة قياسية إختيارية.

<u>معنى التحويل (Transformation)</u>



باستخدام (1), (2) لا تتغير قيمتا $\vec{E}, \vec{H}$ عند الإنتقال من S إلى S' بمعنى أن:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}'} \;,\; \boxed{\vec{H} = \vec{H}'}$$

الإثبات: بالنسبة للمجال المغنطيسي:

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} = curl\,(\vec{A}' + grad\,\lambda) = curl\,\vec{A}' + curl\,grad\,\lambda$$

$$\therefore\ \vec{H} = curl\,\vec{A}' = \vec{H}' \qquad (curl\,grad\,\lambda = 0 \text{ استخدمنا العلاقة}) \qquad \_\_\_(3)$$

.: بوضع $\vec{A} = \vec{A}' + grad\,\lambda$ نحصل على $\vec{H} = \vec{H}'$.

بالنسبة للمجال الكهربي:

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{A}' + grad\,\lambda]$$

$$= -grad\,[\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}] - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$= -grad\ \phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(grad\,\lambda) = grad\,(\frac{\partial \lambda}{\partial t})$$

$$grad\,\lambda = \vec{\nabla}\,\lambda = \hat{i}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

حيث: $\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}$

$$\therefore\ \boxed{\phi = \phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}}$$

.: بوضع $\phi = \phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ نحصل على $\vec{E} = \vec{E}'$. وهو المطلوب.

شرط لورنتز: Lorentz Condition

هو عبارة عن علاقة بين $\vec{A}, \phi$ (الجهدين الكهرومغنطيسيين) وصورته:

(١) في حالة الفراغ:

$$\boxed{div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \qquad \_\_\_(1)$$

(٢) في حالة المواد العازلة ($\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}\ \ ,\ \vec{B} = \mu\,\vec{H}$)

حيث μ النفاذية، ε السماحية (ثابت العازل).

$$\boxed{div\,\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \qquad \_\_\_(2)$$

في الفراغ: $\mu = 1\,,\ \varepsilon = 1$.

(٣) في حالة المادة الموصلة (الحالة العامة) $[\vec{j}=\sigma\vec{E}]$

حيث σ معاملة التوصيل، $\vec{j}$ تيار التوصيل.

$$\boxed{div\,\vec{A}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi=0} \quad \_\_(3)$$

تعرف (3) بالصورة العامة لشرط لورنتز.

<u>ملاحظة</u>: عدم وجود موصل: $\sigma=0$، وجود فراغ: $\mu=1\,,\,\varepsilon=1$

<u>الإثبات</u>: نفرض أن:

$$a=div\,\vec{A}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi=0$$

وبتطبيق التحويلات المعيارية (التي لا تغير من معادلات المجال).

$$\vec{A}=\vec{A}'+grad\lambda\ ,\ \phi=\phi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

$$\therefore a=div\,\vec{A}'+div\,grad\,\lambda+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi'-\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

$$=(div\,\vec{A}'+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi')+(\nabla^2\lambda-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma\frac{\partial\lambda}{\partial t}) \quad \_\_(1)$$

وحيث أن λ دالة قياسية إختيارية فيمكن إختيارها بحيث تحقق العلاقة:

$$\nabla^2\lambda-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu}{c^2}\sigma\frac{\partial\lambda}{\partial t}=a \qquad \Big|\ div\,grad\,\lambda=\nabla^2\lambda$$

وتصبح (1):

$$a=(div\,\vec{A}'+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi')+a$$

$$\therefore div\,\vec{A}'+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi'=0$$

ويمكن وضع هذه العلاقة بالصورة العامة (بإسقاط الشُرطْ)

$$\boxed{div\,\vec{A}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu}{c}\sigma\phi=0}$$

وهو شرط لورنتز في صورته العامة.

معادلات لورنتز للجهدين $\vec{A},\phi$ (Lorentz Equation)

أولاً: في حالة الفراغ: باستخدام معادلات ماكسويل في الفراغ

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \qquad (1)$$

$$div\,\vec{H} = 0 \qquad (2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

والحل العام لهم بدلالة $\vec{A},\phi$:

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} \qquad (5)$$

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (6)$$

وكذلك شرط لورنتز:

$$div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad (7)$$

يمكن إثبات أن الجهدين $\vec{A},\phi$ يحققان المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \qquad (8)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (9)$$

حيث $\rho,\vec{j}$ هما كثافتا الشحنة والتيار على التوالي.

الإثبات: باستخدام (6) ,(5) والتعويض في (4):

$$curl\,(curl\,\vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

ولكن: من المتجهات:

$$\boxed{curl\ curl\,\vec{A} = grad\,div\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A}}$$

$$\therefore grad\,div\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}grad\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + grad\,(div\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t})$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

وهي المعادلة (9).

أيضاً: بالتعويض من (6) في (1) واستخدام شرط لورنتز:

$$div\,[-grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}] = 4\pi\,\rho$$

$$\therefore -div\,grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A} = 4\pi\,\rho$$

ومن شرط لورنتز

$$div\,\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ومن المتجهات أيضاً

$$div\,grad\,\phi = \nabla^2\phi$$

$$\therefore -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = 4\pi\,\rho$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\,\rho}$$

وهي المعادلة (8).

المعادلتان (9),(8) تعرفان بمعادلتي لورنتز للجهدين $\vec{A},\phi$ في حالة الفراغ.

<u>معادلات دالمبيرت (D'Alembert Equations)</u>

يعرف مؤثر لابلاس (اللابلاسيان Laplacian operator) بالعلاقة:

$$\Delta = \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

كما يعرف مؤثر دالمبيرت (الدلامبيرتيان D' Alembertian Operator)

بالعلاقة:

$$\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

وتصبح المعادلتين (9), (8) بالصورة:

$$\Box\phi = -4\pi\rho \qquad \text{\_\_\_(8)}$$

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{\_\_\_(9)}$$

في حالة الفراغ الحر: (الخالي من الشحنات والتيار $\rho = 0\ ,\ \vec{j} = 0$)

تؤول المعادلتان (9) ,(8) إلى:

$$\Box\phi = 0\ ,\quad \Box\ \vec{A} = 0$$

وتعرف هاتان المعادلتان بمعادلتي دالمبيرت.

<u>ملحوظة</u>: في الحالة المستقرة $\frac{\partial}{\partial t} = 0\quad ,\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$

$$\Box \rightarrow\ \nabla^2$$

يؤول مؤثر دالمبيرت إلى مؤثر لابلاس.

وتصبح معادلتا دالمبيرت بالصورة:

$$\boxed{\nabla^2\phi = 0}\ ,\ \boxed{\nabla^2\vec{A} = 0}$$

وتعرف هاتان المعادلتان بمعادلتي لابلاس.

<u>مثـــال</u>: أثبت أن معادلتي لورنتز في حالة الوسط العازل ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\ ,\ \vec{B} = \mu\vec{H}$)
تأخذان الصورة الأتية:

$$\nabla^2\phi - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j} \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

<u>الحل</u>: معادلات ماكسويل في الوسط العازل

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

حيث: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\ ,\ \vec{B} = \mu\vec{H}$

وباستخدام العلاقتين:

$$\vec{B} = curl\,\vec{A} \qquad \text{\_\_\_(7)}$$

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{\_\_\_(8)}$$

وكذلك شرط لورنتز (للمادة العازلة).

$$div\,\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{\_\_\_(9)}$$

من (3):

$$div(\varepsilon\,\vec{E}) = 4\pi\,\rho$$

$$\therefore div\,\vec{E} = \frac{4\pi\,\rho}{\varepsilon}$$

وبالتعويض من (8):

$$\therefore\ div(-grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

ولكن: $div\ grad\,\phi = \nabla^2\phi$

$$\therefore -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{A}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\therefore -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho} \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

أيضاً: من المعادلة (6):

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \Big|\ \vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

$$curl(\mu\,\vec{H}) = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore curl\,\vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore\ curl\, curl\, \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}[-grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}]$$

ولكن: $curl\, cural\, \vec{A} = grad\, div\, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$

$$\therefore\ grad\, div\, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} - grad\,(\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} + grad\,(div\,\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t})$$

$$\therefore\ \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}} \qquad \_\_\_(2)$$

حيث: $div\,\vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ (شرط لورنتز).

أمثلة محلولة:

ملحوظة: تتميز الكيمات المستخدمة في الإلكتروديناميكا (النظرية الكهرومغنطيسية) بوحدات معينة، فمثلاً:

التيار الكهربي	يقاس بوحدة الأمبير
كمية الشحنة	تقاس بوحدة الكولوم
المقاومة الكهربية	تقاس بوحدة الأوم
الجهد الكهربي	يقاس بوحدة الـڤولت
شدة المجال الكهربي	يقاس بوحدة الجاوس
شدة المجال المغنطيسي	تقاس بوحدة الأورستد، وهكذا

ويعتمد شكل المعادلات التي تدخل فيها هذه الكميات على نظام الوحدات المستخدمة ويوجد لدينا نظامان أساسيان للوحدات:

(١) نظام esu (Electrostatic Units) أو cgs (سم جم ث).

(٢) النظام المتري (MKS) (متر كجم ث) أو النظام الدولي (International System)

نظام esu: يستخدم في النظرية الرياضية للكهرومغنطيسية عادة.

نظام MKS: يستخدمه علماء الفيزياء عادة.

<u>مثال على الفرق بين شكل المعادلات في النظامين:</u>

في النظام المتري: $\boxed{c=1 \quad , \quad 4\pi = 1}$ غالباً

.: معادلات ماكسويل في النظام المتري تأخذ الشكل:

$$\boxed{\begin{array}{ll} div\,\vec{E} = \rho \quad , & div\,\vec{H} = 0 \\ curl\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , & curl\,\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

<u>في نظام esu:</u>

$$\boxed{\begin{array}{ll} div\,\vec{E} = 4\pi\rho \quad , & div\,\vec{H} = 0 \\ curl\,\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , & curl\,\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}}$$

أيضاً: <u>في نظام MKS</u>: المعادلة

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

تصبح:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

<u>معادلة الاتصال</u>: $div\,\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ تظل كما هي:

<u>شرط لورنتز</u>: $div\,\vec{A} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ يصبح:

$$\boxed{div\,\vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$$

أيضاً: هناك فرق آخر بين النظامين:

<u>في الـ esu :</u>

$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$ متجه الإزاحة، $\varepsilon = 1$ في حالة الفراغ

حيث ε السماحية (permittivity) (أو ثابت العازل للوسط Dielectric Constant)

<u>في الـ MKS (النظام الدولي):</u>

شدة المجال في الفراغ $\vec{E}_o$، شدة المجال في الوسط $\vec{E}$

$\varepsilon = \varepsilon_o \dfrac{\vec{E}_o}{\vec{E}}$ (في الوسط).

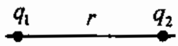
حيث ε_o هي ثابت العازل للفراغ (له قيمة تختلف عن الواحد).

<u>الفرق بين $\vec{D},\vec{E}$:</u>

$$\vec{D}=\frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

.: $\vec{E}$ يعتمد على طبيعة الوسط (لوجود ε في معادلته)، بينما $\vec{D}$ لا يعتمد على ذلك بل يعتمد على q.

<u>قانون كولوم (القانون الأساسي في الكهربية):</u>



$$F \propto q_1 , q_2 \, , (\frac{1}{r^2})$$

$$F \propto \frac{q_1 \; q_2}{r^2} \;\to\; F = k\frac{q_1 \; q_2}{r^2}$$

حيث k ثابت.

<u>قيمة k</u>: في الـــ esu $\leftarrow$ $k=1$ $\leftarrow$ $F=\dfrac{q_1 , q_2}{r^2}$

في الـــ MKS $\leftarrow$ $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ $\leftarrow$ $F=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_1 , q_2}{r^2}$

<u>مثال(١):</u> أثبت أن معادلات ماكسويل في الفراغ الحر في النظام MKS لا تتغير صورتها باستخدام التحويلات $[\vec{E} \to \vec{H} \; , \; \vec{H} \to -\vec{E}]$

<u>الحل</u>: الفراغ الحر (free space) هو الفراغ الخالي من الشحنات

$\rho=0 \;\leftarrow$ وبالتالي $\vec{j}=0$

معادلات ماكسويل في الـــ MKS:

$$div\,\vec{E}=0 \qquad , \qquad div\,\vec{H}=0$$

$$curl\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad , \qquad curl\,\vec{H}=\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بوضع: $\vec{E} \to \vec{H} \; , \; \vec{H} \to -\vec{E}$

تؤول المعادلات إلى:

$$\boxed{div\,\vec{H}=0} \; , \; div(-\vec{E})=0 \;\to\; \boxed{div\,\vec{E}=0}$$

$$curl\,\vec{H} = -\frac{\partial(-\vec{E})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{curl\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$curl\,(-\vec{E}) = \frac{\partial(\vec{H})}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

∴ باستخدام التحويلات السابق لا تتغير صورة معادلات ماكسويل في الفراغ الحر (باستخدام الـ MKS System).

مثال(٢): أوجد معادلة الاتصال بالصورة:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

وذلك باستخدام: (١) الـ MKS (النظام الدولي)

(٢) الـ esu (النظام الإلكتروستاتيكي)

الحل:

(١) في النظام MKS: من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بأخذ div الطرفين:

$$\therefore\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$$

ولكن: من المعادلة الأولى لماكسويل: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$

وأيضاً من المتجهات: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{H}) = 0$

(حاصل الضرب الثلاثي القياسي لثلاث متجهات بينهما متجهان متساويان يساوي صفراً).

$$\therefore\ 0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho) \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

(٢) في النظام esu: من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بأخذ div للطرفين:

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{E})$$

ومن المعادلة الأولى لماكسويل:

$$div\,\vec{E}=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho$$

$$\therefore 0=\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho)$$

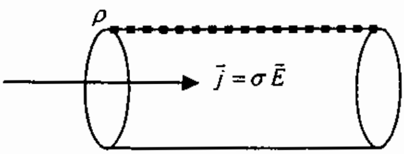
بقسمة الطرفين على $\frac{4\pi}{c}$:

$$\therefore 0=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\quad\rightarrow\quad\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

<u>ملحوظة</u>: في الأمثلة القادمة سوف نستخدم بإستمرار نظام الـ esu (الذي أخذناه في الأجزاء السابقة).

<u>مثال(٣)</u>: في حالة موصل (Conductor) يمر به تيار $\vec{j}=\sigma\vec{E}$، حيث σ معامل التوصيل للمادة الموصلة، وتستقر عليه شحنات كثافتها ρ، أثبت أن تلك الشحنات تأخذ في الأضمحلال (decaying) بطريقة أسية (exponential) حتى تتلاشى عندما $t\rightarrow\infty$.

<u>الحل</u>: معادلات ماكسويل للموصل الذي تستقر عليه الشحنات (ρ) ويمر به تيار توصيل $\vec{j}=\sigma\vec{E}$



$$div\,\vec{D}=4\pi\rho\quad,\quad div\,\vec{B}=0$$

$$curl\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad,\quad curl\,\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

حيث $\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ تيار الإزاحة، $\frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$ تيار التوصيل.

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\ ,\ \vec{B}=\mu\vec{H}$$

ومن المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$curl\,\vec{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\sigma\,\vec{E}$$

بأخذ div للطرفين:

$$div\,curl\,\vec{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{E}+\frac{4\pi\,\sigma}{c}div\,\vec{E}$$

ومن المعادلة الأولى لماكسويل:

$$div\,(\varepsilon\,\vec{E})=4\pi\,\rho\;\rightarrow\;div\;\vec{E}=\frac{4\pi\,\rho}{\varepsilon}$$

وأيضاً:

$$div\,curl\,\vec{H}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=0$$

$$\therefore\;0=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{4\pi\,\rho}{\varepsilon})+\frac{4\pi\,\sigma}{c}(\frac{4\pi\,\rho}{\varepsilon})$$

بالقسمة على $\frac{4\pi}{c}$:

$$0=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{4\pi\,\sigma}{\varepsilon}\rho$$

وبأخذ: $\tau=\frac{\varepsilon}{4\pi\,\sigma}$ ويعرف بزمن الاسترخاء (Relaxation time)

$$\therefore\,0=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\rho$$

$$\therefore\,\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{1}{\tau}\rho\;\rightarrow\;\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{1}{\tau}dt$$

وبإجراء التكامل:

$$\ell n\,\rho=-\frac{t}{\tau}+const.$$

وبأخذ $const.=\ell n\,\rho_o$، حيث ρ_0 هي قيمة ρ عندما $t=0$.

$$\therefore\;\ell n\,\rho=\ell n\,\rho_o-\frac{t}{\tau}$$

$$\therefore\,\ell n\frac{\rho}{\rho_o}=-\frac{t}{\tau}\rightarrow\frac{\rho}{\rho_o}=e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore\;\boxed{\rho=\rho_o\,e^{-\frac{t}{\tau}}}\qquad\qquad\Big|\;e^{-\infty}=0$$

وهذا يعني أن الشحنة ρ تضمحل (أو تتضاءل) أسياً حتى تصل إلى $\rho = 0$ (تتلاشى) عندما $t = \infty$. وهو المطلوب.

مثال(٤): أثبت أن وجود وسط (جسم مادي) في مجال كهرومغنطيسي يؤدي إلى وجود شحنة إضافية (تأثيرية) كثافتها $\rho_i = -div\,\vec{p}$ وتيار إضافي كثافته:

$$\vec{j}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c\, curl\, \vec{M}$$

حيث $\vec{p}$ هو متجه الاستقطاب، $\vec{M}$ هي متجه التمغنط ويعرفان بالعلاقتين:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\,\vec{p} \quad , \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\,\vec{M}$$

الحل: نستخدم المعادلتين الأولى والرابعة لماكسويل (لاحتوائهما على $\rho, \vec{j}$) في حالة وجود الوسط. فمن المعادلة الأولى:

حيث $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\,\vec{p}$ ، $div\,\vec{D} = 4\pi\,\rho$

$$\therefore div(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p}) = 4\pi\rho$$

$$\therefore div\,\vec{E} = 4\pi[\rho - div\;\vec{p}]$$

$$= 4\pi[\rho + (-div\;\vec{p})]$$

$$= 4\pi[\rho + \rho_i] \qquad \_\_\_(1)$$

حيث $\boxed{\rho_i = -div\,\vec{p}}$

ومن المعادلة الرابعة:

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

وبالتعويض عن:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\,\vec{p}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\,\vec{M} \;\rightarrow\; \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\,\vec{M}$$

$$\therefore curl(\vec{B} - 4\pi\,\vec{M}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + 4\pi\,\vec{p})$$

$$\therefore curl\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}[\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c\,curl\,\vec{M}]$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_i \qquad \_\_\_(2)$$

حيث
$$\boxed{\vec{j}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c\, curl\, \vec{M}}$$

من (2) ,(1) يتضح أن وجود وسط (جسم مادي) في مجال كهرومغنيطسي يؤدي إلى وجود شحنة إضافية (تأثيرية) $\rho_i = -div\, \vec{p}$ وتيار إضافي (تأثيري)

$$\vec{j}_i = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + c\, curl\, \vec{M}$$

حيث $\vec{p}, \vec{M}$ هما متجها الاستقطاب والتمغنط على التوالي. وهو المطلوب.

<u>مثال(٥):</u> معادلة الإرسال البرقي Equation of Telegraphy

أثبت أنه في حالة الوسط الموصل المتجانس الخالي من الشحنات الحرة، فإن الكميات الكهرومغنطيسية

$\vec{u} = \vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}_c, \vec{A}$ وكذلك الكمية ϕ

تخضع لنفس العلاقة الآتية:

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

وتعرف بمعادلة الإرسال البرقي (التلجراف).

<u>الحل:</u>

(i) <u>في حالة $\vec{E}$:</u> من المعادلة الرابعة لماكسويل للموصل المتجانس $(\vec{j}_c = \sigma \vec{E})$ مع غياب الشحنات الحرة $(\vec{j} = 0 \leftarrow \rho = 0)$

$$curl\, \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E} \qquad \_\_\_(1)$$

ومن المعادلة الأولى:

$$div\, \vec{E} = 0 \qquad \_\_\_(2)$$

ومن المعادلة الثالثة:

$$curl\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

وبأخذ $curl$ الطرفين واعتبار أن:

$$curl\ curl\ \vec{E} = grad\ div\ \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\therefore curl\ curl\ \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} curl\ \vec{H}$$

$$\therefore grad\ div\ \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(curl\ \vec{H})$$

وبالتعويض من (1), (2):

$$0 - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E}]$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

وهي المعادلة الخاصة بالمتجه $\vec{E}$.

(ii) في حالة $\vec{D}$: حيث أن $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \leftarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$

بالتعويض في (3):

$$\frac{1}{\varepsilon}(\nabla^2 \vec{D}) = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

وبضرب الطرفين في ε:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{D} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}} \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

(iii) في حالة $\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_c}{\sigma}$$

بالتعويض في (3):

$$\frac{1}{\sigma}(\nabla^2 \vec{j}_c) = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 \vec{j}_c}{\partial t^2}$$

وبضرب الطرفين في σ:

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{j}_c = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{j}_c}{\partial t^2}} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

(iv) حالة $\vec{H}$: من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\sigma\,\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

بأخذ $curl$ للطرفين:

$$curl\,curl\,\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}curl\,\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}curl\,\vec{E} \qquad \_\_\_(6)$$

ولكن:

$$curl\,curl\,\vec{H} = grad\,div\,\vec{H} - \nabla^2\vec{H} = 0 - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}$$

(المعادلة الثالثة)

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

بالتعويض في (6):

$$-\nabla^2\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}[-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}] + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}[-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}]$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla^2\vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}} \qquad \_\_\_(7)$$

(v) حالة $\vec{B}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \leftarrow \vec{B} = \mu\vec{H}$$

بالتعويض في (7):

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2\vec{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

بضرب الطرفين في μ :

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \qquad \_\_\_(8)$$

(vi) حالة $\vec{A}$ (الجهد الإتجاهي):

حيث أن: $\vec{B} = curl\,\vec{A}$ (تعريف المتجه $\vec{A}$)

بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl\,\vec{B} = curl\,curl\,\vec{A} = grad\,div\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A}$$

$$\therefore \nabla^2\vec{A} = grad\,div\,\vec{A} - curl\,\vec{B} = grad\,div\,\vec{A} - \mu\,curl\,\vec{H} \qquad \_\_\_(9)$$

من المعادلة الرابعة لماكسويل:

$$curl\,\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\sigma\,\vec{E}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \_\_\_(10)$$

وباستخدام شرط لورنتز المعمم (في حالة وجود وسط) وصورته:

$$div\,\vec{A}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \qquad \_\_\_(11)$$

بالتعويض من (11), (10) في (9):

$$\nabla^2\,\vec{A}=grad\,[-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi-\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}]-[\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\vec{E}+\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}]$$

ولكن:

$$\boxed{\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

$$\therefore\ \nabla^2\,\vec{A}=-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}grad\,\phi-\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}grad\,\phi$$

$$-[-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}grad\,\phi-\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}grad\,\phi-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}]$$

$$\therefore\ \boxed{\nabla^2\,\vec{A}=\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}} \qquad \_\_\_(12)$$

(vii) <u>حالة ϕ (الجهد القياسي):</u>

من معادلة ماكسويل الأولى للوسط الموصل غير المشحون $(\rho=0)$

$$div\,\vec{D}=0\ \rightarrow\ div\,\vec{E}=0$$

وبالتعويض عن:

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\therefore\ div(-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0$$

$$\therefore div\,grad\,\phi=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(div\,\vec{A}) \qquad \_\_\_(13)$$

ولكن:

$$div\,grad\,\phi=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=\nabla^2\phi$$

ومن شرط لورنتز المعمم:
$$div\,\vec{A} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

بالتعويض في (13):
$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}]$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2\phi = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}} \qquad \_\_\_(14)$$

وهو المطلوب.

[٤] المجالات شبه المستقرة: Quasi-Stationary Fields

(١) في حالة المجالات المستقرة (Stationary): فإنه من الممكن إهمال التغير في المجال بالنسبة للزمن أي أن:

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0 \leftarrow \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \Big| \quad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

وبذلك فإن $\vec{E}, \vec{H}$ يمكن إعتبارهما ثابتان (مستقران) أو استاتيكيان (Static).

وتؤول معادلات ماكسويل إلى:

المعادلة الأولى: $div\,\vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ المعادلة الثالثة: $curl\,\vec{E} = 0$ (معادلات المجال الكهروستاتيكي) (Electrostatics)	المعادلة الثانية: $div\,\vec{H} = 0$ المعادلة الرابعة: $curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ (معادلات المجال المجنيتوستاتيكي) (Magnetostatics)

(٢) في حالة المجالات شبه المستقر: تتميز تلك المجالات بالآتي:

(i) بطيئته التغير مع عدم إهمال التغير بالنسبة للزمن إلا في حالة المواد الموصلة.

(ii) في حالة المواد الموصلة: يوجد تيار توصيل $\vec{j}_c$ بحيث يمكن إهمال تيار الإزاحة بالنسبة إلى تيار التوصيل.

$$\therefore\ \vec{j}_D << \vec{j}_c$$

أي أن: $\vec{j}_D \rightarrow 0$ $[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\rightarrow 0]$ مع بقاء التغير $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0$.

مثال: أكتب معادلات ماكسويل لموصل غير مشحون في حالة المجالات شبه المستقرة، ومن ذلك أثبت أن تيار التوصيل هو تيار لولبي (solenoidel).

الحل: إذا كان $div\,\vec{A}=0$ فإن المتجه $\vec{A}$ يسمى متجهاً لولبياً أو حلزونياً (Solenoidal)

المطلوب: إثبات أن $div\,\vec{j}_c=0$ ← $\vec{j}_c$ هو تيار لولبي في الحالة المعطاة.

معادلات ماكسويل لموصل غير مشحون $(\rho=0)$ في حالة المجالات شبه المستقرة $(\vec{j}_d=0)$ (لا يوجد غير تيار التوصيل $\vec{j}_c$)

$$div\,\vec{D}=0 \qquad (1)$$

$$div\,\vec{B}=0 \qquad (2)$$

$$curl\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$curl\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_c \qquad (4)$$

من المعادلة (4) بأخذ div للطرفين:

$$div\,curl\,\vec{H}=\frac{4\pi}{c}div\,\vec{j}_c$$

ولكن (من المتجهات): $div\,curl\,\vec{H}=0$

$$\therefore \frac{4\pi}{c}div\,\vec{j}_c=0 \quad\rightarrow\quad \boxed{div\,\vec{j}_c=0} \qquad (5)$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: في الحالة المعطاة في المسألة ومن العلاقات (5), (2), (1) يتضح أن المتجهات $\vec{D},\vec{B},\vec{j}_c$ هي متجهات لولبية.

ملحوظة هامة: في حالة المجالات شبه المستقرة (وفي عدم وجود شحنات حرة)، فإن الجهد الكهروستاتيكي (القياسي) يمكن إهماله $(\phi=0)$.

ويصبح شرط لورنتز: $div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$ بالصورة:

$$\boxed{div\,\vec{A}=0}$$

وتصبح العلاقة: $\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ بالصورة

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

مثال: أثبت أنه في حالة المجالات شبه المستقرة ولموصل غير مشحون فإن المتجهات $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}_c, \vec{A}$ تخضع لمعادلة صورتها:

$$\nabla^2 \vec{u} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

وتعرف بمعادلة التوصيل الكهربي(Equation of Electric Conduction)

الحل: معادلات ماكسويل للمجال شبه المستقر وللموصل غير المشحون $(\rho = 0)$

$$div\,\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$div\,\vec{H} = 0 \qquad (2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c \qquad (4)$$

مع العلاقات الآتية:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}\ ,\ \vec{B} = \mu \vec{H}\ ,\ \vec{j}_c = \sigma \vec{E}$$

أيضاً: حيث أن:

$$\vec{B} = curl\,\vec{A} \qquad (5)$$

وللمجالات شبه المستقرة:

$$div\,\vec{A} = 0 \qquad (6)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (7)$$

(i) <u>المجال $\vec{E}$</u> : من المعادلة (3)

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl\, curl\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} curl\, \vec{B} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t} curl\, \vec{H} \qquad \_\_\_(8)$$

ولكن: $curl\, curl\, \vec{E} = grad\ div\, \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$ (من المتجهات).

ومن (1): $\therefore\ curl\, curl\, \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$

وباستخدام (4) تصبح العلاقة (8) بالصورة:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{4\pi}{c}\vec{j}_c] = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E}] = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0} \qquad \_\_\_(9)$$

(ii) <u>المتجه</u> $\vec{D}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \leftarrow \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

بالتعويض في (9):

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon}\nabla^2 \vec{D} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0}$$

بضرب الطرفين في ε :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{D} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0} \qquad \_\_\_(10)$$

(iii) <u>المتجه $\vec{j}_c$</u> :

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_c}{\sigma} \leftarrow \vec{j}_c = \sigma \vec{E}$$

بالتعويض في (9):

$$\frac{1}{\sigma}\nabla^2 \vec{j}_c - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = 0$$

بضرب الطرفين في σ :

$$\nabla^2 \vec{j}_c - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = 0 \qquad \_\_\_(11)$$

(iv) <u>المتجه $\vec{H}$</u> : من (4)

$$curl\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}$$

بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl\ curl\ \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} curl\ \vec{E}$$

$$grad\ div\ \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]$$

حيث $div\ \vec{H} = 0$ (من (2))

$$\therefore -\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}[-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}] = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{-\nabla^2 \vec{H} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0} \qquad \text{\_\_\_(12)}$$

(v) <u>المتجه $\vec{B}$</u>: $\vec{B} = \mu \vec{H} \leftarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

بالتعويض في (12):

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2 \vec{B} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

بضرب الطرفين في μ:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \qquad \text{\_\_\_(13)}$$

(vi) <u>المتجه $\vec{A}$</u>: من (5):

$$\vec{B} = curl\ \vec{A}$$

$$curl\ \vec{B} = curl\ curl\ \vec{A} = grad\ div\ \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

حيث $div\ \vec{A} = 0$ (من المعادلة (6)).

ومن (4):

$$curl\ \vec{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\vec{E} \leftarrow curl\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E}$$

$$\therefore -\nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c}[-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}] = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0} \qquad \text{\_\_\_(14)}$$

وهو المطلوب.

[٥] المجالات المتغيرة توافقياً مع الزمن
Fields Varying Harmonically With Time

يتميز هذا النوع من المجالات بالعلاقات الآتية:

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{iwt} \ , \ \vec{H} = \vec{H}_o e^{iwt}$$

حيث $\vec{E}_o, \vec{H}_o$ هما سعتا المجال (Amplitude) (قيمتي $\vec{E}, \vec{H}$ عندما $t = 0$)، w تردد (frequency) المجال.

الموصل الجيد (Good Conductor)
والعازل الجيد (أو المثالي) (Ideal Dielectric):

(١) يتميز الموصل الجيد بأن تيار التوصيل له يكون كبيراً جداً بحيث يمكن إهمال تيار الإزاحة $\vec{j}_c >> \vec{j}_D$.

(٢) يتميز العازل الجيد بأن تيار التوصيل له يكون صغيراً جداً جداً بحيث يمكن إهماله بالنسبة إلى تيار الإزاحة $[\ \vec{j}_c = 0\ ]$ $\quad \vec{j}_D >> \vec{j}_c$

مثال: أكتب معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة توافقياً مع الزمن، وأثبت أن الشرط الخاص بتلك المجالات هو أن يكون:

(i) $w << \dfrac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$ للموصلات الجيدة.

(ii) $w >> \dfrac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$ للعوازل المثالية.

حيث w هي تردد المجال المتغير توافقياً مع الزمن

الحل: في حالة المجالات المتغيرة توافقياً مع الزمن فإن:

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{iwt} \ , \ \vec{H} = \vec{H}_o e^{iwt}$$

حيث w تردد المجال.

أيضاً يمكن كتابة: $\vec{D} = \vec{D}_o e^{iwt} \ , \ \vec{B} = \vec{B}_o e^{iwt}$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = iw\vec{D}_o e^{iwt} = iw\vec{D} \ , \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = iw\vec{B}_o e^{iwt} = iw\vec{B}$$

ومن معادلات ماكسويل (بإعتبار وجود تياري الإزاحة والتوصيل) وصورتها:

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{iw}{c}\vec{B} = -\frac{iw\mu}{c}\vec{H} \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} + \frac{iw}{c}\vec{D} \quad \Big| \quad curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}[\vec{j}_c + \vec{j}_D]$$

$$= \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} + \frac{iw\varepsilon}{c}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}[\sigma + i\frac{w\varepsilon}{4\pi}]\vec{E} \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

(i) <u>في حالة الموصل الجيد</u>: $\vec{j}_c >> \vec{j}_D$

$$|\vec{j}_c| >> |\vec{j}_D| \quad \rightarrow \quad \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}_c|} << 1 \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

ولكن:

$$\vec{j}_D = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi}[iw\vec{E}] = \frac{i\varepsilon w}{4\pi}\vec{E} \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

$$\vec{j}_c = \sigma\vec{E} \qquad \text{\_\_\_(7)}$$

من (6), (7) في (5):

$$|i| = 1\,,\ i = \sqrt{-1}\,,\ i^2 = -1,\ |i^2| = 1$$

$$\therefore \frac{\varepsilon w}{4\pi\sigma} << 1$$

$$\therefore \quad \boxed{w << \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}}$$

(ii) <u>في حالة العازل الجيد (أو المثالي)</u>: $\vec{j}_c << \vec{j}_D$

$$|\vec{j}_c| << |\vec{j}_D| \quad \rightarrow \quad \frac{|\vec{j}_c|}{|\vec{j}_D|} << 1$$

ومن (6), (7):

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon w} << 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{w >> \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}}$$

وهو المطلوب.

أمثلة عامة على معادلات المجال الكهرومغنطيسي

تمهيد: ملخص لقوانين المتجهات التي تستخدم عادة في حل مسائل النظرية الكهرومغنطيسية.

(i) $curl\, grad\, \phi = 0 \qquad [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\phi) = 0]$

(ii) $curl\, curl\, \vec{A} = grad\, div\, \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$

$$[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}]$$

(iii) $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot curl\, \vec{A} - \vec{A} \cdot curl\, \vec{B}$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})]$$

حالة خاصة: إذا كان $\vec{A}$ متجه ثابت $(curl\, \vec{A} = 0)$ ويكون:

$$\boxed{div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{A} \cdot curl\, \vec{B}}$$

(iv) $div(\phi\vec{A}) = \phi\, div\, \vec{A} + \vec{A} \cdot grad\, \phi$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}\phi)]$$

حالة خاصة: إذا كان $\vec{A}$ متجه ثابت $(div\, \vec{A} = 0)$ ويكون:

$$\boxed{div(\phi\, \vec{A}) = \vec{A} \cdot grad\, \phi}$$

(v) $curl(\phi\vec{A}) = \phi\, curl\, \vec{A} - \vec{A} \wedge grad\, \phi$

$$[\vec{\nabla} \wedge (\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \wedge (\phi\vec{A})]$$

حالة خاصة: إذا كان $\vec{A}$ متجه ثابت $(curl\, \vec{A} = 0)$ ويكون:

$$\boxed{curl(\phi\, \vec{A}) = -\vec{A} \wedge grad\, \phi}$$

(vi) $grad(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \wedge curl\, \vec{B} + \vec{B} \wedge curl\, \vec{A}$$

حالة خاصة: إذا كان $\vec{A}$ متجه ثابت فإن: $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = 0\,,\ \vec{B} \wedge curl\, \vec{A} = 0$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A} \wedge curl\, \vec{B}}$$

(vii) $curl(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})$

$$=\vec{A}\,div\,\vec{B}-\vec{B}\,div\,\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

حالة خاصة: إذا كان $\vec{A}$ متجه ثابت فإن: $(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=0\ ,\ div\,\vec{A}=0$

$$\therefore\quad \boxed{\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{A}\,div\,\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}}$$

مثال(١): إذا كان الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ يحقق العلاقتين:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\ ,\ \nabla^2\vec{A}=-\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}}$$

وكانت $\vec{E},\vec{H}$ تعرفان بالعلاقتين: $\vec{E}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\ ,\ \vec{H}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

حيث $\dot{\vec{A}}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\ ,\ \ddot{\vec{A}}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

فأثبت أن معادلات ماكسويل في الفراغ الحر تتحقق بتلك العلاقات.

الحل: معادلات ماكسويل في الفراغ الحر (الخالي من الشحنات):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\qquad,\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{H}}\qquad,\qquad\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$$

حيث: $\dot{\vec{E}}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ ,\ \dot{\vec{H}}=\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$

المطلوب إثبات أن المعادلات الأربعة:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \qquad (1)$$

$$\nabla^2\vec{A}=-\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} \qquad (2)$$

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \qquad (3)$$

$$\vec{H}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A} \qquad (4)$$

تحقق معادلات ماكسويل المذكورة.

فمن (3): بأخذ div الطرفين:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (المعادلة الأولى لماكسويل)

حيث $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (من (1))

أيضاً: من المعادلة (4): بأخذ div الطرفين: $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$

وهي المعادلة الثانية لماكسويل، حيث $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$ (من المتجهات).

أيضاً: من (3) بأخذ $curl$ الطرفين:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\wedge\dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{H}}$$

وهي المعادلة الثالثة لماكسويل، حيث $\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{H}$ (من (4)).

وأخيراً: من (4) بأخذ $curl$ الطرفين:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = curl\,curl\,\vec{A} = grad\,div\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A}$$

$$= -\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\dot{\vec{A}}}{\partial t} = \frac{1}{c}[-\frac{1}{c}\frac{\partial\dot{\vec{A}}}{\partial t}]$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$$

وهي المعادلة الرابعة لماكسويل، حيث $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\dot{\vec{A}}}{\partial t}$ (من (3))، وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> أثبت أن المجالين $\vec{E},\vec{H}$ المعطيان بالعلاقتين:

$$\vec{E} = [0, 0, \cos(y - ct)]$$
$$\vec{H} = [\cos(y - ct), 0, 0]$$

يحققان معادلات ماكسويل في الفراغ الحر.

<u>الحل</u>: معادلات ماكسويل في الفراغ الحر (الخالي من الشحنات):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{H}} \quad , \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$$

$$[1]\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial[0]}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}[0]+\frac{\partial}{\partial z}[\cos(y-ct)]=0+0+0=0$$

وهي المعادلة الأولى لماكسويل.

$$[2]\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}[\cos(y-ct)]+\frac{\partial}{\partial y}[0]+\frac{\partial}{\partial z}[0]=0+0+0=0$$

وهي المعادلة الثانية لماكسويل.

$$[3]\quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \cos(y-ct)\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial y}[\cos(y-ct)]-\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial x}[\cos(y-ct)]$$

ولكن

$$\frac{\partial}{\partial x}[\cos(y-ct)]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\cos(y-ct)]=-\sin(y-ct)$$

وحيث أن:

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{\partial H_x}{\partial t}\hat{i}=\frac{\partial}{\partial t}[\cos(y-ct)]\hat{i}$$

$$=\hat{i}\{-\sin(y-ct)\cdot[-c]\}=\hat{i}\,c\sin(y-ct)$$

$$\therefore\ \hat{i}\,\sin(y-ct)=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\qquad \_\_\_(1)$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial y}[\cos(y-ct)]=-\hat{i}\sin(y-ct)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

وهي المعادلة الثالثة لماكسويل.

$$[4] \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos(y-ct) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{k}\frac{\partial}{\partial y}[\cos(y-ct)] = -\hat{k}[-\sin(y-ct)] = \hat{k}\sin(y-ct)$$

وحيث أن:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t}\hat{k} = \frac{\partial}{\partial t}[\cos(y-ct)]\hat{k}$$

$$= \hat{k}\{-\sin(y-ct)[-c]\} = \hat{k}\, c\sin(y-ct)$$

$$\therefore \hat{k}\sin(y-ct) = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \_\_\_(2)$$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وهي المعادلة الرابعة لماكسويل. وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u> أثبت أن الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ المعطى بالعلاقة:

$$\vec{A} = a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\,\hat{i} + a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\,\hat{j}$$

حيث a, λ ثابتان، يمثل حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر، ثم أستنتج علاقتين مناسبتين لشدتي المجال $\vec{E}, \vec{H}$ في هذه الحالة.

<u>الحل:</u> بوضع $\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct) = \theta$

$$\vec{A} = a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad \_\_(1)$$

لإثبات أن (1) تمثل حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر:

حيث أن المعادلة: $\nabla^2\vec{A} = \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}}$ $\quad [\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \Box\vec{A} = 0\,]$

تمثل حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر (لأنها تحققها).

.: يكفي إثبات أن $\vec{A}$ المعطاة بالعلاقة (1) تحقق العلاقة $\nabla^2\vec{A}=\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}}$ ونكــون بذلك قد أثبتنا المطلوب.

ولإثبات ذلك:

$$\nabla^2\vec{A}=\nabla^2 A_x\,\hat{i}+\nabla^2 A_y\,\hat{j}$$

$$=(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2})\hat{i}+(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2})\,\hat{j}$$

حيث $A_x=a\cos\theta \quad , \quad A_y=a\sin\theta$

$$\theta=\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)$$

$$\therefore\ \nabla^2\vec{A}=(\frac{\partial A_x}{\partial z^2})\hat{i}+(\frac{\partial A_y}{\partial z^2})\,\hat{j}$$

$$=[-a(\frac{2\pi}{\lambda})^2\cos\theta]\hat{i}+[-a(\frac{2\pi}{\lambda})^2\sin\theta]\,\hat{j}$$

$$=-a(\frac{2\pi}{\lambda})^2[\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}] \qquad \_\_\_(2)$$

أيضاً: $\vec{A}=a\cos\theta\hat{i}+a\sin\theta\,\hat{j}=a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\hat{i}+a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\,\hat{j}$

$$\dot{\vec{A}}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\cdot(-c)(\frac{2\pi}{\lambda})\hat{i}+a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\cdot(-c)(\frac{2\pi}{\lambda})\,\hat{j}$$

$$=ac(\frac{2\pi}{\lambda})[\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\,\hat{i}-\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\,\hat{j}]$$

$$=ac(\frac{2\pi}{\lambda})[\sin\theta\,\hat{i}-\cos\theta\,\hat{j}] \qquad \_\_\_(3)$$

$$\ddot{\vec{A}}=-ac^2(\frac{2\pi}{\lambda})^2[\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}] \qquad \_\_\_(4)$$

$$\therefore\ \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}}=-a(\frac{2\pi}{\lambda})^2[\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{j}] \qquad \_\_\_(5)$$

من (5) ,(2) نجد أن:

$$\nabla^2\vec{A}=\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}}$$

وهذا يعني أن $\vec{A}$ المعطاة تحقق معادلات ماكسويل في الفراغ الحر.

وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: إيجاد علاقتين للمتجهين $\vec{E}, \vec{H}$

حيث أن: $\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ ، ومن (3):

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot ac\,(\frac{2\pi}{\lambda})[\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j}]$$

$$= a(\frac{2\pi}{\lambda})\,[-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}] \qquad \_\_\_(6)$$

أيضاً: حيث أن: $\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

$$\therefore \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a\cos\theta & a\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[-\frac{\partial}{\partial z}(a\sin\theta)] - \hat{j}[-\frac{\partial}{\partial z}(a\cos\theta)] + \hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(a\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial y}(a\cos\theta)]$$

حيث $\frac{\partial}{\partial x}(a\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial y}(a\cos\theta) = 0$ (لأن $\theta = \frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)$)

$$\therefore \vec{H} = \hat{i}\,[-a\cos\theta\cdot(\frac{2\pi}{\lambda})] + \hat{j}\,[-a\sin\theta\cdot(\frac{2\pi}{\lambda})]$$

$$= -a\,(\frac{2\pi}{\lambda})[\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}] \qquad \_\_\_(7)$$

المعادلتان (7) ,(6) هما المعادلتان المطلوبتان للمتجهين $\vec{E}, \vec{H}$.

مثال(٤): أثبت أن العلاقتين

$$\phi = -div[\frac{\vec{a}}{r}e^{in(r-ct)}] \;,\; \vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\vec{a}}{r}e^{in(r-ct)}]$$

[حيث $\vec{a}$ متجه ثابت، n عدد قياسي ثابت، r هي المسافة من مركز معين (أو نقطة أصل) 0] تمثلان حلاً مناسباً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر وأن هاتان العلاقتان تحققان شروط لورنتز وصورته:

$$\boxed{div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi} = 0} \text{ ، حيث } \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

الحل: لكي نثبت أن $\vec{A},\phi$ المعطاة تحقق معادلات ماكسويل في الفراغ الحر يكفي إثبات أنهما يحققان المعادلتين:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{1}{c}\dot{\vec{H}} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} \qquad \_\_\_(2)$$

مع إعتبار العلاقتين:

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \qquad \_\_\_(3)$$

$$\vec{H}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A} \qquad \_\_\_(4)$$

بأخذ

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=-inc\,\lambda \leftarrow \frac{1}{r}e^{in(r-ct)}=\lambda$$

$$\therefore \phi=-div\,(\vec{a}\,\lambda) \qquad \_\_\_(5)$$

$$\vec{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{a}\,\lambda) \qquad \_\_\_(6)$$

ومن المتجهات:

$$div(\vec{a}\phi)=\phi\,div\,\vec{a}+\vec{a}\cdot grad\,\phi$$

وإذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت:

$$\boxed{div(\vec{a}\phi)=\vec{a}\cdot grad\,\phi}$$

$$\therefore \phi=-\vec{a}\cdot grad\,\lambda \qquad \_\_\_(7)$$

$$\vec{A}=\frac{\vec{a}}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\vec{a}}{c}(-inc\,\lambda)=-in\,\vec{a}\,\lambda \qquad \_\_\_(8)$$

بالتعويض من (8) ,(7) في (3):

$$\vec{E}=-grad[-\vec{a}\cdot grad\,\lambda]-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[-in\,\vec{a}\lambda]$$

$$=grad[\vec{a}\cdot grad\,\lambda]+\frac{in\,\vec{a}}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

$$=grad[\vec{a}\cdot grad\,\lambda]+\frac{in\,\vec{a}}{c}(-inc\lambda)$$

$$=grad[\vec{a}\cdot grad\,\lambda]+n^2\,\vec{a}\,\lambda \qquad \_\_\_(9)$$

وبأخذ $curl$ الطرفين:

$$\therefore\ curl\,\vec{E} = curl\,grad\,[\vec{a}\cdot grad\,\lambda] + n^2\,curl\,(\vec{a}\lambda)$$

ولكن: $curl\,grad\,\phi = 0$، حيث ϕ كمية قياسية $= \vec{a}\cdot grad\,\lambda$

$$\therefore\ curl\,\vec{E} = n^2\,curl\,(\vec{a}\lambda) \qquad \_\_\_(10)$$

ومن (4) وباستخدام (8):

$$\therefore\ \vec{H} = curl\,\vec{A} = -in\,curl\,(\vec{a}\,\lambda)$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -in\frac{\partial}{\partial t}curl\,(\vec{a}\,\lambda) = -in\,curl\frac{\partial}{\partial t}(\vec{a}\,\lambda) = -in\,curl\,[\vec{a}\,\frac{\partial\lambda}{\partial t}]$$

$$= -in\,curl\,\,[\vec{a}\,(-inc\,\lambda)] = -n^2 c\,curl\,(\vec{a}\,\lambda) \qquad \_\_\_(11)$$

من (11), (10) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}$$

ولإثبات العلاقة: $curl\,\vec{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ [العلاقة الرابعة لماكسويل].

من العلاقة: $\vec{H} = -in\,curl\,(\vec{a}\,\lambda)$

ومن المتجهات: $curl\,(\vec{a}\phi) = \phi\,curl\,\vec{a} - \vec{a}\wedge grad\,\vec{a}$

وللمتجه الثابت $\vec{a}$: $\boxed{curl\,(\vec{a}\phi) = -\vec{a}\wedge grad\,\phi}$

$$\therefore\ \vec{H} = -in[-\vec{a}\wedge grad\,\lambda] = in[\vec{a}\wedge grad\,\lambda] \qquad \_\_\_(12)$$

وبأخذ $grad\,\lambda = \vec{b}$

$$\therefore\ \vec{H} = in[\vec{a}\wedge\vec{b}]$$

$$\therefore curl\,\vec{H} = in\,curl\,(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

ولكن: $\boxed{curl\,(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{a}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}}$

(من المتجهات، حيث $\vec{a}$ متجه ثابت)

$$\therefore curl\,\vec{H} = in[\vec{a}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}]$$

$$= in[\vec{a}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\lambda) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\lambda] = in\,\vec{a}\,\nabla^2\lambda - in(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\lambda \qquad \_\_\_(13)$$

ومن الممكن إثبات أن:

$$\boxed{\nabla^2\lambda = -n^2\lambda}$$

$$\therefore\ curl\,\vec{H} = in\ \vec{a}\,(-n^2\lambda) - in(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\lambda]$$

$$= -in[\vec{a}\,n^2\lambda + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\lambda] \qquad \_\_\_(14)$$

ومن العلاقة (9):

$$\vec{E} = grad\,(\vec{a}\cdot grad\,\lambda) + n^2\,\vec{a}\,\lambda$$

$$\therefore\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = grad\,(\vec{a}\cdot grad\,\frac{\partial\lambda}{\partial t}) + n^2\,\vec{a}\,\frac{\partial\lambda}{\partial t} \qquad \left|\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -ic\lambda\right.$$

$$= -in\,c\,grad\ (\vec{a}\cdot grad\,\lambda) - in^3\,c\vec{a}\,\lambda \qquad \_\_\_(15)$$

ومن المتجهات:

$$\boxed{grad\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}\wedge curl\,\vec{b}}$$

(للمتجه الثابت $\vec{a}$)

وبأخذ $\vec{b} = grad\,\lambda$.

$$\therefore\ grad\,(\vec{a}\cdot grad\,\lambda) = grad\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}\wedge curl\,\vec{b}$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})grad\,\lambda + \vec{a}\wedge curl\,grad\,\lambda$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})grad\,\lambda = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\,\lambda$$

$(curl\,grad\,\lambda = 0)$

وتصبح (15):

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -inc\ (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\lambda - in^3\,c\,\vec{a}\,\lambda$$

$$= -in\,c[\ (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\lambda + \vec{a}\,n^2\,\lambda] \qquad \_\_\_(16)$$

من (14), (16) نجد أن:

$$curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

وبذلك تكون قد حققنا المطلوب الأول.

المطلوب الثاني: إثبات أن $\vec{A},\phi$ تحققان شرط لورنتز:

شرط لورنتز:
$$div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

حيث $\lambda=\frac{1}{r}e^{in(r-ct)}$ ، فإن:

$$\vec{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\vec{a}}{r}e^{in(r-ct)}]=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{a}\,\lambda)$$

$$\therefore\ div\,\vec{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div(\vec{a}\,\lambda) \qquad \_\_\_(17)$$

$$\phi=-div\,[\frac{\vec{a}}{r}e^{in(r-ct)}]=-div(\vec{a}\,\lambda)$$

$$\therefore div(\vec{a}\,\lambda)=-\phi \qquad \_\_\_(18)$$

بالتعويض من (18) في (17):

$$div\,\vec{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-\phi)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

وهو المطلوب.

مسائل

مسألة(١): إذا كان $\vec{A}$ متجه ثابت، وكانت ϕ دالة قياسية في الموضع والزمن وتخضع للعلاقة: $\ddot{\phi}=c^2\nabla^2\phi$ ، فاثبت أن العلاقتين:

$$\vec{E}=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c^2}\vec{A}\ddot{\phi}\quad,\quad \vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{A}]$$

تمثلان حلاً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر.

مسألة(٢): أثبت أن $\vec{A}=\frac{f'(u)}{cr}\hat{k}$ تمثل حلاً مناسباً لمعادلات ماكسويل في الفراغ الحر، حيث $f(u)$ هي دالة في المتغير: $u=t-\frac{r}{c}$ ، أثبت أيضاً أن الجهد القياسي المناظر يعطي بالعلاقة: $\phi=\frac{z}{cr^3}(rf'+cf)$

حيث: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ، $r = |\vec{r}|$

أوجد كذلك متجهاً شدة المجالين الكهربي والمغنطيسي بالصورة الآتية:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c^2 r^3}(r^2 f'' + rc f' + c^2 f)\hat{k}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{c^2 r^3}(r^2 f'' + c f')(\vec{r} \wedge \hat{k})$$

مسألة(٣): أثبت أن

$$\vec{E} = \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{i} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{k} \quad , \quad \vec{H} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\hat{j}$$

تمثل حلاً مناسباً لمعادلات ماكسويل لوسط عازل متماثل ثابت عازله ε ومعامل نفاذيته μ، وهو خال من الشحنات ومن التيار الناقل للشحنة، وذلك بإعتبار أن $\psi = \psi(x, z, t)$ تحقق المعادلة الموجية:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad ، \quad \nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

وإذا كانت ψ تعطي بالعلاقة: $\psi = \Psi(z)e^{i(\ell x - wt)}$

فأثبت أن: $\Psi(z) = A\cos mz + B\sin mz$ ، حيث $\ell^2 + m^2 = \frac{w^2}{v^2}$

حلول المسائل

حل المسألة(١): المطلوب إثبات أن العلاقتين

$$\vec{E} = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c^2}\vec{A}\ddot{\phi} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{A}] \qquad \_\_\_(2)$$

مع العلاقة:

$$\ddot{\phi} = c^2\nabla^2\phi \qquad \_\_\_(3)$$

تحقق معادلات ماكسويل في الفراغ الحر وصورتها:

$$div\,\vec{E} = 0 \quad \_\_\_(4) \qquad , \qquad div\,\vec{H} = 0 \quad \_\_\_(5)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \_\_\_(6) \qquad , \qquad curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \_\_\_(7)$$

أولاً: لتحقيق المعادلة (4): من (1)

$$c^2\vec{E} = c^2(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi - \vec{A}\ddot{\phi} \qquad \_\_\_(8)$$

وبأخذ div للطرفين:

$$\vec{\nabla}\cdot(c^2\vec{E}) = c^2(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\ddot{\phi}$$

$$= c^2(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\nabla^2\phi - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\ddot{\phi}$$

$$\therefore c^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = c^2(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\nabla^2\phi - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})[c^2\nabla^2\phi]$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\nabla^2\phi - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\nabla^2\phi = 0 \qquad \Big|\, div\,\vec{E} = 0$$

ثانياً: لتحقيق المعادلة (5): من (2)

$$c\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}[(\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{A}] \qquad \_\_\_(9)$$

ولكن من المتجهات: إذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت فإن:

$$div(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot curl\,\vec{a} - \vec{a}\cdot curl\,\vec{b} = -\vec{a}\cdot curl\,\vec{b}$$

وبأخذ $\vec{a} = \vec{A}\,,\ \vec{b} = \vec{\nabla}\phi$

$$\therefore\ div[\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi] = -\vec{A}\cdot curl[grad\,\phi] = 0$$

ومن (9) بأخذ div للطرفين:

$$div(c\vec{H}) = c\,div\,\vec{H} = div\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{A}] = \frac{\partial}{\partial t}div[\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{A}] = 0$$

$$\therefore\ \boxed{div\,\vec{H} = 0}$$

ثالثاً: لتحقيق المعادلة (6):

من (1) بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl\,\vec{E} = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})curl[grad\,\phi] - \frac{1}{c^2}curl(\vec{A}\ddot{\phi})$$

$$= -\frac{1}{c^2}curl[\vec{A}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}curl(\vec{A}\phi) \qquad \_\_\_(10)$$

حيث $\vec{A}$ متجه ثابت.

ومن المتجهات: وإذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت، فإن:

$$curl(\phi\,\vec{a}) = \phi\, curl\,\vec{a} - \vec{a}\wedge grad\,\phi = -\hat{a}\wedge grad\,\phi$$

وبالتعويض في (10) حيث $\vec{a}=\vec{A}$

$$\therefore curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[-\vec{A}\wedge grad\ \phi\ ) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{A}] \qquad \_\_\_(11)$$

ومن (2):

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{A}] \qquad \_\_\_(12)$$

من (12), (11) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}$$

رابعاً: <u>لتحقيق المعادلة (7):</u>

من (2) بأخذ $curl$ للطرفين:

$$curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}curl(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{A}) \qquad \_\_\_(13)$$

ولكن من المتجهات، وإذا كان $\vec{a}$ متجهاً ثابتاً فإن:

$$curl(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{a}\,div\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

وبأخذ $\vec{a}=\vec{A}\ ,\ \vec{b}=\vec{\nabla}\phi$

$$curl(\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi = \vec{A}(\nabla^2\phi) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi$$

بالتعويض في (13):

$$curl\,\vec{H} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}curl(\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{A}\nabla^2 - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi] \_\_\_(14)$$

ومن (1)، (3):

$$\vec{E} = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\vec{A}[c^2\nabla^2\phi] = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi - \vec{A}\nabla^2\phi$$

وتصبح (14):

$$curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\phi - \vec{A}\nabla^2\phi] = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

وهو المطلوب.

حل المسألة (٢): معادلات ماكسويل في الفراغ الحر:

$$div\,\vec{E} = 0 \quad \_\_\_(1) \qquad , \qquad div\,\vec{H} = 0 \quad \_\_\_(2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \_\_\_(3) \qquad , \qquad curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \_\_\_(4)$$

المطلوب الأول: إثبات أن $\vec{A} = \frac{f'}{cr}\hat{k}$ تحقق معادلات ماكسويل ويكفي لذلك إثبات أن $\vec{A}$ تحقق على الأقل المعادلتين (4) ,(3) مع إعتبار العلاقات:

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} \quad \_\_\_(5)$$

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \_\_\_(6)$$

$$div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \_\_\_(7)$$

فمن (6) بأخذ $curl$ الطرفين:

$$curl\,\vec{E} = -curl\,grad\;\phi - \frac{1}{c}curl\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{c}curl\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}curl\frac{\partial}{\partial t}[\frac{f'}{cr}\hat{k}]$$

$$= -\frac{1}{c^2}curl\,(\frac{f''}{r})\hat{k} \quad \_\_\_\_(8) \qquad \left|\; f'' = \frac{\partial f'}{\partial t}\right.$$

ومن (5):

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} = curl\,(\frac{f'}{cr})\hat{k} = \frac{1}{c}\;curl\,(\frac{f'}{r})\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}curl\,(\frac{f''}{r})\hat{k}$$

$$= \frac{1}{c}curl\frac{\partial}{\partial t}[\frac{f'}{r}]\hat{k} = \frac{1}{c}curl\,(\frac{f''}{r})\hat{k} \quad \_\_\_(9)$$

من (9), (8) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$

وهي العلاقة رقم (3).

ولإثبات أن $\vec{A}$ تحقق العلاقة رقم (4):

من (5):

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} = curl\,(\frac{f'}{cr})\hat{k}$$

ومن المتجهات:

$$curl\,(\phi\,\vec{a}) = \phi\,curl\;\vec{a} - \vec{a}\wedge\vec{\nabla}\phi$$

وإذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت: $curl\,\vec{a} = 0$

$$\therefore\; curl\,(\phi\,\vec{a}) = -\vec{a}\wedge\vec{\nabla}\phi$$

$$\therefore\;\; \vec{H} = curl[\frac{f'}{cr}\hat{k}] = -\hat{k}\wedge\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr}) \qquad \_\_\_(10)$$

$$\left|\,\frac{f'}{cr} = \phi\,,\; \hat{k} = \vec{a}\right.$$

بأخذ $curl$ الطرفين:

$$\therefore\; curl\,\vec{H} = -curl\,[\,\hat{k}\wedge\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})] \qquad \_\_\_(11)$$

ومن المتجهات، وإذا كان $\vec{a}$ متجهاً ثابتاً فإن:

$$curl\,(\hat{a}\wedge\vec{b}) = \vec{a}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

وبأخذ $\vec{a} = \hat{k}\;\;,\;\; \vec{b} = \vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})$

$$\therefore\; curl\,[\hat{k}\wedge\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})] = \hat{k}[\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})] - (\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})$$

$$= \hat{k}\,\nabla^2(\frac{f'}{cr}) - (\vec{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})$$

ولكن $f = f(u) = f(t-\frac{r}{c})$ ، وإذا كان $\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$

فمن السهل إثبات أن:

$$\boxed{\nabla^2(\frac{f'}{cr}) = \frac{1}{c^3 r}\,f'''}$$

$$\therefore curl[\hat{k}\wedge\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})]=\frac{f'''}{c^3 r}\hat{k}-(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr})$$

وتصبح (11):

$$curl\,\vec{H}=-\frac{f'''}{c^3 r}\hat{k}+(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr}) \qquad \_\_\_(12)$$

ومن (7) يمكن إثبات أن: $\phi=-\hat{k}\cdot\vec{\nabla}(\frac{f}{r})$ كالآتي:

$$div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

$$\therefore\frac{\partial\phi}{\partial t}=-c\,div\,\vec{A}=-c\,div(\frac{f'}{cr})\hat{k}=-div(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial t})\hat{k}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}[div(\frac{f}{r})\hat{k}]$$

$$\therefore\phi=-div(\frac{f}{r})\hat{k}$$

ولكن من المتجهات:

$$div(\lambda\vec{a})=\lambda\,div\,\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\lambda$$

وإذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت $\leftarrow$ $div\,\vec{a}=0$

$$\therefore div(\lambda\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\lambda$$

وبأخذ $\lambda=\frac{f}{r}$, $\vec{a}=\hat{k}$، فإن:

$$\boxed{\phi=-\hat{k}\cdot\vec{\nabla}(\frac{f}{r})} \qquad \_\_\_(13)$$

بالتعويض في (6):

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}[-\hat{k}\cdot\vec{\nabla}(\frac{f}{r})]-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{f'}{cr})\hat{k}$$

$$=\vec{\nabla}(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})(\frac{f}{r})-\frac{1}{c^2}\frac{f''}{r}\hat{k}=(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f}{r})-\frac{1}{c^2}\frac{f''}{r}\hat{k} \qquad \_\_\_(14)$$

$$\therefore\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f'}{r})-\frac{1}{c^2}\frac{f'''}{r}\hat{k}$$

$$\therefore \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{f'''}{c^3 r}\hat{k} + (\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr}) \qquad \_\_\_(15)$$

من (15) ,(12) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

المطلوب الثاني: إيجاد ϕ

من العلاقة (13):

$$\phi = -\hat{k}\cdot\vec{\nabla}(\frac{f}{r}) = -\hat{k}\cdot\vec{\nabla}[(\frac{1}{r})(f)]$$

وباعتبار أن:

$$f = f(t-\frac{r}{c})$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} \ , \ \ \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad (\text{متجه وحدة في إتجاه } \vec{r})$$

$$\vec{\nabla}[(\frac{1}{r})(f)] = [\frac{1}{r}\vec{\nabla}(f) + f\,\vec{\nabla}(\frac{1}{r})]$$

$$= [\frac{1}{r}f'\cdot(-\frac{1}{c}) + f\cdot(-\frac{1}{r^2})]\hat{r} = [-\frac{f'}{rc} - \frac{f}{r^2}](\frac{\vec{r}}{r})$$

$$= -\frac{1}{r^3 c}(r\,f' + cf)\vec{r}$$

$$\therefore \phi = -\hat{k}\cdot[-\frac{1}{r^3 c}(rf' + cf)\vec{r}] = (\hat{k}\cdot\vec{r})\frac{1}{r^3 c}(rf' + cf)$$

ولكن:

$$\hat{k}\cdot\vec{r} = (\hat{k})\cdot(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}) = z(\hat{k}\cdot\hat{k}) = z$$

$$\therefore \phi = \frac{z}{r^3 c}(r\,f' + cf)$$

وهو المطلوب الثاني.

المطلوب الثالث: إيجاد كل من $\vec{E}, \vec{H}$

من (14):

$$\vec{E} = (\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}(\frac{f}{r}) - \frac{f''}{c^2 r}\hat{k}$$

$$= (\hat{k}\cdot\vec{\nabla})[\frac{1}{r}f'\cdot(-\frac{1}{c}) + f\cdot(-\frac{1}{r^2})]\hat{r} - \frac{f''}{c^2 r}\hat{k}$$

$$= -\frac{1}{cr^3}[rf' + cf]\,(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} - \frac{f''}{c^2 r}\hat{k}$$

ولكن: $(\hat{k}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \hat{k}$ (يمكن إثباتها بسهولة):

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{cr^3}[rf' + cf]\,\hat{k} - \frac{f''}{c^2 r}\hat{k} = -\frac{1}{c^2 r^3}(r^2 f'' + rc\,f' + c^2 f)\,\hat{k}$$

وهي الصورة المطلوب للمجال $\vec{E}$.

أيضاً: من (10):

$$\vec{H} = -\hat{k}\wedge\vec{\nabla}(\frac{f'}{cr}) = -\frac{\hat{k}}{c}\wedge\vec{\nabla}\,[(\frac{1}{r})(f')]$$

$$= -\frac{\hat{k}}{c}\wedge[\frac{1}{r}f''\cdot(-\frac{1}{c}) + f'\cdot(-\frac{1}{r^2})]\hat{r}$$

$$= \frac{\hat{k}}{c}\wedge[\frac{f''}{cr} + \frac{f'}{r^2}](\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{1}{c^2 r^3}\,[rf'' + cf'](\hat{k}\wedge\vec{r})$$

وهي الصورة المطلوبة للمجال $\vec{H}$.

<u>**حل المسألة(٣):**</u> المطلوب إثبات أن $\vec{E},\vec{H}$ المعطيان يحققان معادلتي ماكسويل

$$curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad , \qquad curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

اللتان تمثلان الوسط العازل الخالي من الشحنات الحرة والتيار الناقل للشحنة.

<u>أولاً:</u> حيث أن $\vec{E} = \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{i} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{k}$

$$\therefore curl\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{vmatrix} = -\hat{i}\,(\frac{\partial\psi}{\partial y\,\partial x}) + \hat{j}\,(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}) - \hat{k}\,(\frac{\partial\psi}{\partial y\,\partial z})$$

ولما كانت $\psi = \psi(x,z,t)$ فإن:

$$curl\,\vec{E} = \hat{j}\,(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}) \qquad \_\_\_(1)$$

أيضاً: حيث أن $\vec{H} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\hat{j}$

$$\therefore \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\hat{j} \qquad \_\_\_(2)$$

ولما كانت $\psi = \psi(x,z,t)$ فإن:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad \_\_\_(2)$$

ولأن ψ تخضع للمعادلة الموجية: $\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$

$$\therefore \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(3)$$

من (3) ,(1) نجد أن:

$$curl\,\vec{E} = \hat{j}\,(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}) = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\hat{j} \qquad \_\_\_(4)$$

من (4) ,(2) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}$$

أيضاً: حيث أن: $\vec{H} = -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\hat{j}$

$$\therefore curl\,\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}) + \hat{k}\,(-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\hat{i} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\hat{k}] \qquad \_\_\_(5)$$

ولما كانت $\vec{E} = \frac{\partial \psi}{\partial z}\hat{i} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\hat{k}$

$$\therefore \quad \boxed{curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

<u>المطلوب الثاني</u>: إذا كانت $\psi = \Psi(z)e^{i(\ell x - wt)}$

فلإثبات أن: $\Psi(z) = A\cos mz + B\sin mz$

حيث $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ ، $\ell^2 + m^2 = \frac{w^2}{v^2}$

بتفاضل ψ بالنسبة إلى x مرتين وبالنسبة إلى t مرتين:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i\ell\;\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\ell^2\;\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -iw\;\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -w^2\;\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)}$$

أيضاً:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2}e^{i(\ell x - wt)}$$

ومن (3):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\therefore -\ell^2\;\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)} + \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2}e^{i(\ell x - wt)} = -\frac{w^2}{v^2}\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)}$$

$$= -(\ell^2 + m^2)\,\Psi(z)e^{i(\ell x - wt)}$$

وبالقسمة على $e^{i(\ell x - wt)}$ نحصل على:

$$\therefore \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} = (-\ell^2 - m^2 + \ell^2)\,\Psi(z) = -m^2\;\Psi(z)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} + m^2\;\Psi(z) = 0 \qquad \_\_\_(6)$$

وهي معادلة تفاضلية حلها العام هو:

$$\Psi(z) = A\cos mz + B\sin mz \qquad \_\_\_(7)$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: هناك صورة أخرى لحل المعادلة (6) هو:

$$\Psi(z) = Ae^{imz} + Be^{-imz}$$

[٦] متجهات هرتز (Hertzian Vectors)

المتجه $\vec{Z}$: يمسى متجه هرتز من النوع الكهربي ويسمى أحياناً جهد الإستقطاب (Polarzation Potential).

المتجه $\vec{\Gamma}$: يسمى متجه هرتز من النوع المغنطيسي ويسمى أحياناً جهد التمغنط (Magnetization Potential).

خواص متجهات هرتز:

أولاً: يرتبط المتجهان $\vec{Z},\vec{\Gamma}$ بالجهدين الكهرومغنطيسيين $\vec{A},\phi$ بالعلاقتين:

$$\phi = -div\,\vec{Z} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + curl\,\vec{\Gamma} \qquad \_\_\_(2)$$

(في حالة وجود الوسط حيث ε السماحية، μ النفاذية).

الإثبات: من العلاقة بين $\vec{A},\phi$:

$$div\,\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

بالتعويض عن ϕ من (1):

$$div\,\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-div\,\vec{Z}) = 0$$

$$\therefore\ div\,\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c}div\,\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} = 0$$

$$\therefore\ div(\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}) = 0$$

ومن المتجهات: $div\, curl\, \vec{a} = 0$

$$\therefore \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = curl\,\vec{\Gamma} \qquad \Big|\, \vec{a} = \vec{\Gamma}$$

$$\therefore \boxed{\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + curl\,\vec{\Gamma}}$$

<u>ثانياً</u>: المتجهان $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ يخضعان لمعادلة دالمبيرت الموجية في حالة الفراغ، بمعنى أن:

$$\Box \vec{Z} = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Box \vec{\Gamma} = 0 \;\rightarrow\; \nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = 0$$

<u>**الإثبات**</u>: نثبت أولاً المعادلتين التفاضليتين للمتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في حالة وجود الوسط وذلك بالصورة:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P} \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

$$\nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = -4\pi\mu\vec{M} \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

حيث: $\vec{P}$ متجه الاستقطاب، $\vec{M}$ متجه التمغنط.

<u>ولإثبات (4) ,(3)</u>: حيث أن المعادلتين اللتين تحققان $\vec{A}, \phi$ في وجود الوسط هما:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

حيث: $\rho = -div\,\vec{P} \;,\; \vec{j} = \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,curl\,\vec{M}$

فبالتعويض في (6) ,(5):

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\left[\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,curl\,\vec{M}\right]$$

$$\nabla^2\phi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\, div\,\vec{P}$$

ومن أجل التبسيط: نضع $\quad \Box = \nabla^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\therefore \Box\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\left[\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + c\, curl\,\vec{M}\right] \qquad \_\_\_(7)$$

$$\Box\,\phi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\, div\,\vec{P} \qquad \_\_\_(8)$$

ومن تعريف متجهي هرتز:

$$\phi = -div\,\vec{Z} \qquad \_\_\_(9)$$

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + curl\,\vec{\Gamma} \qquad \_\_\_(10)$$

بالتعويض من (9) في (8):

$$\Box(-div\,\vec{Z}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\, div\,\vec{P}$$

$$\therefore div\left(\Box\,\vec{Z} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}\right) = 0$$

ولكن $div\, curl\,\vec{a} = 0$ ، وهذا يعني أن:

$$\Box\,\vec{Z} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P} = curl\,\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ متجه إختياري يمكن إعتباره متجهاً ثابتاً $(curl\,\vec{a} = 0)$:

$$\therefore \quad \boxed{\Box\,\vec{Z} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P} = 0} \qquad \_\_\_(11)$$

أيضاً: بالتعويض من (10) في (7):

$$\Box\left(\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t} + curl\,\vec{\Gamma}\right) = -\frac{4\pi\mu}{c}\left(\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + c\, curl\,\vec{M}\right)$$

$$\therefore curl\left(\Box\vec{\Gamma} + 4\pi\mu\vec{M}\right) + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\Box\vec{Z} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}\right] = 0$$

وباستخدام (11):

$$\therefore curl\left(\Box\vec{\Gamma} + 4\pi\mu\vec{M}\right) = 0$$

ولكن: $curl\ grad\ \lambda = 0$، وهذا يعني أن

$$\Box \vec{\Gamma} + 4\pi\mu \vec{M} = grad\ \lambda$$

حيث λ كمية قياسية إختيارية يمكن إعتبارها كمية ثابتة $(grad\ \lambda = 0)$

$$\therefore \quad \Box\ \vec{\Gamma} + 4\pi\mu \vec{M} = 0 \qquad \_\_\_(12)$$

من المعادلتين (12), (11) نرى إرتباط المتجه $\vec{Z}$ بمتجه الإستقطاب $\vec{P}$ وإرتباط المتجه $\vec{\Gamma}$ بمتجه التمغنط $\vec{M}$ ولذلك سمى المتجهان بجهدي الإستقطاب والتمغـنط على الترتيب.

وبالتعويض عن $\Box = \nabla^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ في $(11), (12)$ نحصل على:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P} \qquad \_\_\_\_\_(13)$$

$$\nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = -4\pi\,\mu \vec{M} \qquad \_\_\_\_(14)$$

وهما المعادلتان التفاضليتان للمتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في حالة وجود وسط.

<u>في حالة الفراغ</u>: $\mu = 1\ ,\ \varepsilon = 1\ ,\ \vec{P} = 0\ ,\ \vec{M} = 0$

$$\therefore \nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \vec{\Gamma} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = 0$$

أي أن المتجهين $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ في هذه الحالة يحققان معادلة دالمبيرت الموجية.

<u>أمثلة محلولة على متجهات هرتز:</u>

<u>مثال(١):</u> أوجد الحل العام لمعادلات ماكسويل في الوسط وفي الفراغ بدلالة متجهي هرتز $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$.

<u>الحل</u>: الحل العام لمعادلات ماكسويل هو إيجاد المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$. وفي هذا المثال: المطلوب إيجاد $\vec{E}, \vec{H}$ بدلالة $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$، فحيث أن $\vec{A}, \phi$ تشكل حلاً لمعـادلات ماكسويل فيمكننا كتابتهما بدلالة $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$ ومن ذلك نوجد $\vec{E}, \vec{H}$ بدلالة $\vec{Z}, \vec{\Gamma}$.

$$\vec{\phi} = -div\,\vec{Z} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}+curl\,\vec{\Gamma} \qquad \_\_\_(2)$$

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \_\_\_(3)$$

$$\vec{B}=curl\,\vec{A}=\mu\vec{H}\ \rightarrow\ \vec{H}=\frac{1}{\mu}curl\,\vec{A} \qquad \_\_\_(4)$$

وبالتعويض من (2) ,(1) في (3):

$$\dot{E}=grad\,div\,\vec{Z}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}-\frac{1}{c}curl\frac{\partial\vec{\Gamma}}{\partial t} \qquad \_\_\_(5)$$

أيضاً بالتعويض من (2) في (4):

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu}curl[\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}+curl\,\vec{\Gamma}]=\frac{\varepsilon}{c}curl\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}curl\ curl\,\vec{\Gamma} \qquad \_\_\_(6)$$

المعادلتان (6) ,(5) يعطيان الحل العام لمعادلات ماكسويل (أي $\vec{E},\vec{H}$) بدلالة المتجهين $\vec{Z},\vec{\Gamma}$ في وجود وسط.

<u>في حالة الفراغ:</u> $\varepsilon=1\ ,\ \mu=1$

وبوضع $\frac{\partial\vec{\Gamma}}{\partial t}=\dot{\vec{\Gamma}}$ ، $\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}=\dot{\vec{Z}}$

$$\therefore\ \vec{E}=grad\,div\,\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}-\frac{1}{c}curl\ \dot{\vec{\Gamma}}$$

وحيث أن: $curl\,curl\ \vec{Z}=grad\,div\,\vec{Z}-\nabla^2\vec{Z}$

$$\therefore\ \vec{E}=curl\ curl\ \vec{Z}-\frac{1}{c}\ curl\ \dot{\vec{\Gamma}} \qquad \_\_\_(7)$$

أيضاً: من المعادلة (6):

$$\vec{H}=curl\ curl\ \vec{\Gamma}+\frac{1}{c}\ curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(8)$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> في المثال رقم(١) أدرس الحالتين الخاصتين:

(أ) عندما $\vec{\Gamma}=0$، (ب) عندما $\vec{Z}=0$

الحل: الحالة الأولى: عندما $\vec{\Gamma} = 0$

نحصل على ما يعرف بالحل من النوع الكهربي (Solution of electric Type)

حيث $\vec{M} = 0$ (متجه التمغنط)

$$\therefore\ \phi = -div\,\vec{Z} \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\,\dot{\vec{Z}} \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

أيضاً: المعادلة التي يحققها المتجه $\vec{Z}$ هي:

$$\nabla^2\,\vec{Z} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{4\varepsilon}{\varepsilon}\,\vec{P} \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

بالتعويض في المعادلة

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

ومن (2) ,(1) واستخدام (3) نحصل على:

$$\vec{E} = grad\,div\,\vec{Z} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}$$

$$= grad\,div\,\vec{Z} - [\nabla^2\vec{Z} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\vec{P}] = curl\,curl\,\,\vec{Z} - \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\vec{P} \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

حيث $\vec{P}$ هو متجه الإستقطاب (الكهربي).

أيضاً بالتعويض في المعادلة:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}curl\,\vec{A}$$

ومن (2):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}curl[\frac{\varepsilon\mu}{c}\,\dot{\vec{Z}}] = \frac{\varepsilon}{c}curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

في حالة الفراغ: $\vec{P} = 0$, $\varepsilon = 1$ وتؤول (5) ,(4) إلى:

$$\boxed{\vec{E} = curl\,curl\,\vec{Z}} \quad , \quad \boxed{\vec{H} = \frac{1}{c}curl\,\dot{\vec{Z}}}$$

ملحوظة: هاتان المعادلتان هما حالة خاصة من (8) ,(7) في مثال(١) عندما $\Gamma = 0$ (الحل الكهربي).

الحالة الثانية: $\vec{Z} = 0$: نحصل على ما يعرف بالحل من النوع المغنطيسي (Solution of magnetic type)

في هذه الحالة: $\vec{P} = 0$ (متجه الإستقطاب)

$$\therefore \phi = 0 \qquad \_\_\_(6)$$

$$\vec{A} = curl\, \vec{\Gamma} \qquad \_\_\_(7)$$

وتصبح العلاقتين الخاصتين بالمتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ بالصورة:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} curl\, \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} = -\frac{1}{c} curl\, \dot{\vec{\Gamma}} \qquad \_\_\_(8)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} curl\, curl\, \vec{\Gamma} \qquad \_\_\_(9)$$

في حالة الفراغ: $\mu = 1$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c} curl\, \dot{\vec{\Gamma}}} \quad , \quad \boxed{\vec{H} = curl\, curl\, \vec{\Gamma}}$$

مثال(٣): إذا كانت الدالة الإتجاهية $\vec{Z}(x,y,z,t)$ تحقق معادلة دالمبيرت الموجية $\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{Z}} = 0$، فاثبت أنه يوجد حلان لمعادلات ماكسويل في الفراغ بأخذ:

$$\text{(i)} \quad \phi = -div\, \vec{Z} \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{Z}}$$

$$\text{(ii)} \quad \phi = 0 \quad , \quad \vec{A} = curl\, \vec{Z}$$

وأن المجالين $\vec{E}, \vec{H}$ المناظرين لهذين الحلين يعطيان بالعلاقات:

$$\text{(i)} \ \vec{E} = curl\, curl\, \vec{Z} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{c} curl\, \dot{\vec{Z}}$$

$$\text{(ii)} \ \vec{E} = -\frac{1}{c} curl\, \dot{\vec{Z}} \quad , \quad \vec{H} = curl\, curl\, \vec{Z}$$

الحل: هذا المثال على متجه هرتز الكهربي $\vec{Z}(x,y,z,t)=\vec{Z}$

الحالة الأولى: بأخذ $\phi=-div\,\vec{Z}\ ,\ \vec{A}=\frac{1}{c}\ \dot{\vec{Z}}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$

فلإثبات أن هاتين الكميتين تمثلان حلاً لمعادلة ماكسويل نتبع الآتي:

(i) نثبت أن $\vec{A},\phi$ يحققان شرط لورنتز

$$\phi=-div\,\vec{Z}\rightarrow\ \frac{\partial\phi}{\partial t}=-div\,\dot{\vec{Z}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{c}\ \frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{1}{c}div\,\dot{\vec{Z}} \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

$$\vec{A}=\frac{1}{c}\dot{\vec{Z}}\ \rightarrow\ div\,\vec{A}=\frac{1}{c}div\,\dot{\vec{Z}} \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

من (2) ,(1) يتضح أن:

$$\boxed{div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0}$$

وهو شرط لورنتز.

(ii) نوجد $\vec{E}\ ,\ \vec{H}$ بدلالة $\vec{Z}$

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$=-grad\,(-div\,\vec{Z})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t})$$

$$=grad\ \ div\,\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}$$

$$=grad\ \ div\,\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{Z}}$$

ولكن: $\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{Z}}=0$ [معادلة دالمبيرت للمتجه $\vec{Z}$]:

$$\therefore\ \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{Z}}=\nabla^2\,\vec{Z}$$

$$\therefore\ \vec{E}=grad\,div\,\vec{Z}-\nabla^2\vec{Z}=curl\,curl\,\vec{Z} \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

أيضاً:

$$\vec{H} = curl\,\vec{A} = curl\,(\frac{1}{c}\dot{\vec{Z}}) = \frac{1}{c}curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(4)$$

(iii) نثبت أن $\vec{H}$, $\vec{E}$ (المعادلتين (4) ,(3)) تحققان معادلتي ماكسويل الثالثة والرابعة وبذلك تكون قد أثبتنا أنهما يحققان معادلات ماكسويل.

المعادلة الثالثة:

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

من (3):

$$\vec{E} = curl\,curl\,\vec{Z} = grad\,div\,\vec{Z} - \nabla^2\vec{Z}$$

$$= grad\;div\,\vec{Z} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{Z}}$$

بأخذ $curl$ الطرفين وإعتبار أن $curl\,grad\,\lambda = 0$

$$\therefore\; curl\,\vec{E} = 0 - \frac{1}{c^2}curl\,\ddot{\vec{Z}} = -\frac{1}{c^2}curl\,\ddot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(5)$$

ومن (4):

$$\vec{H} = \frac{1}{c}curl\,\dot{\vec{Z}}$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}curl\,\dot{\vec{Z}} = \frac{1}{c}curl\frac{\partial\dot{\vec{Z}}}{\partial t} = \frac{1}{c}curl\,\ddot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(6)$$

من (6) ,(5) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}$$

المعادلة الرابعة:

$$curl\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

فمن (3):

$$\vec{E} = curl\,curl\,\vec{Z} \rightarrow \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = curl\,curl\,\dot{\vec{Z}}$$

$$\therefore\; \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}curl\,curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(7)$$

ومن (4):

$$\vec{H}=\frac{1}{c}curl\,\dot{\vec{Z}}\rightarrow curl\,\vec{H}=\frac{1}{c}curl\,curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(8)$$

من (8) ,(7) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

<u>الحالة الثانية</u>: بأخذ $\phi=0\ ,\ \vec{A}=curl\,\vec{Z}$

نثبت أولاً أن هاتين العلاقتين تحققان شرط لورنتز:

$$div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=div\,curl\,\vec{Z}+0=0+0=0$$

ثم نوجد $\vec{E},\vec{H}$:

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(curl\,\vec{Z})=-\frac{1}{c}curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(9)$$

$$\vec{H}=curl\,\vec{A}=curl\,curl\,\vec{Z} \qquad \_\_\_(10)$$

ولإثبات أن $\vec{E},\vec{H}$ المعطيان بالعلاقتين (10) ,(9) تحققان معادلتي ماكسويل الثالثة والرابعة:

من (10) ,(9):

$$curl\,\vec{E}=-\frac{1}{c}curl\,curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(11)$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=curl\,curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(12)$$

من (12) ,(11) نجد أن:

$$\boxed{curl\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}$$

وهي المعادلة الثالثة.

أيضاً: من (10):

$$\vec{H} = curl\, cur\, \vec{Z} = grad\, div\, \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z}$$

$$= grad\, div\, \vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}$$

$$\therefore curl\, \vec{H} = curl(grad\, div\, \vec{Z}) - \frac{1}{c^2} curl \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}$$

$$= 0 - \frac{1}{c^2} curl\, \ddot{\vec{Z}} = -\frac{1}{c^2} curl\, \ddot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(13)$$

ومن (9):

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} curl\, \dot{\vec{Z}} \rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c} curl\, \ddot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(14)$$

من (13), (14) نجد أن:

$$\boxed{curl\, \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

وهي المعادلة الرابعة. وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> إذا كان متجه هرتز الكهربي $\vec{Z}$ في حالة موصل منتظم خال من الشحنات الحرة ومعامل توصيلة σ، يحقق المعادلة:

$$\nabla^2 \vec{Z} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\vec{Z}}$$

فأثبت أن الجهدين الكهرومغنطيسين $\vec{A}, \phi$ المعطيان بالعلاقتين:

$$\phi = -div\, \vec{Z} \ , \ \vec{A} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \vec{Z}$$

يحققان معادلات ماكسويل للموصل المذكور.

وأن المجالين الكهربي والمغنطيسي المناظرين يعطيان بدلالة $\vec{Z}$ بالعلاقتين:

$$\vec{E} = curl\, curl\, \vec{Z} \ , \ \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} curl\, \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} curl\, \vec{Z}$$

<u>الحل</u>: يمكن حل هذا المثال بالخطوات الآتية:

(أ) نثبت أن $\vec{A}, \phi$ المعطاه تحقق شرط لورنتز.

(ب) نوجد $\vec{E},\vec{H}$ المناظرين للجهدين $\vec{A},\phi$ بدلالة $\vec{Z}$.

(ج) نثبت أن $\vec{E},\vec{H}$ الناتجين يحققان على الأقـل معـادلتين مـن معـادلات ماكسويل وليكونا المعادلتين الثالثة والرابعة.

<u>أولاً</u>: إثبات أن $\vec{A},\phi$ يحققان شرط لورنتز للموصل المذكور وصورته:

$$div\,\vec{A}+\frac{\varepsilon\,\mu}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi=0$$

وهي الصورة العامة لشرط لونتز.

فحيث أن:

$$\vec{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c}\dot{\vec{Z}}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\vec{Z} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\phi=-div\,\vec{Z} \qquad \_\_\_(2)$$

$$\therefore div\,\vec{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c}div\,\dot{\vec{Z}}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}div\,\vec{Z}$$

$$=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}[-div\,\vec{Z}]-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}[-div\,\vec{Z}]$$

$$=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi$$

$$\therefore div\,\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\phi=0$$

وهو شرط لورنتز في صورته العامة.

<u>ثانياً</u>: لإيجاد $\vec{E},\vec{H}$ بدلالة $\vec{Z}$:

$$\vec{E}=-grad\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$=-grad(-div\,\vec{Z})-\frac{1}{c}[\frac{\varepsilon\mu}{c}\ddot{\vec{Z}}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c}\dot{\vec{Z}}]$$

$$=grad\ div\,\vec{Z}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{Z}}-\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(3)$$

ولكن:

$$curl\,curl\,\vec{Z}=grad\,div\,\vec{Z}-\nabla^2\vec{Z}$$

$$\therefore grad\, div\, \vec{Z} = curl\, curl\, \vec{Z} + \nabla^2 \vec{Z}$$

$$= curl\, curl\, \vec{Z} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\vec{Z}}$$

وتصبح (3):

$$\vec{E} = curl\, curl\, \vec{Z} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\vec{Z}} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\vec{Z}}$$

$$= curl\, curl\, \vec{Z} \qquad \text{\_\_\_(4)}$$

أيضاً: حيث أن: $\vec{B} = curl\, \vec{A} = \mu \vec{H}$ فتكون معادلة $\vec{H}$ بالصورة:

$$\therefore \vec{H} = \frac{1}{\mu} curl\, \vec{A} = \frac{1}{\mu} curl [\frac{\varepsilon\mu}{c}\dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\vec{Z}]$$

$$= \frac{\varepsilon}{c} curl\, \dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} curl\, \vec{Z} \qquad \text{\_\_\_(5)}$$

ثالثاً: إثبات أن (5) ,(4) تحققان معادلتي ماكسويل الثالثة والرابعة في حالة الموصل غير المشحون:

$$curl\, \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$curl\, \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c$$

حيث: $\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{j}_c = \sigma \vec{E}$

من (4):

$$\vec{E} = curl\, curl\, \vec{Z} = grad\, div\, \vec{Z} - \nabla^2 \vec{Z}$$

$$= grad\, div\, \vec{Z} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\vec{Z}}$$

وبأخذ $curl$ الطرفين وإعتبار أن $curl\, grad\, \lambda = 0$

$$\therefore curl\, \vec{E} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2} curl\, \ddot{\vec{Z}} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} curl\, \dot{\vec{Z}} \qquad \text{\_\_\_(6)}$$

ومن (5):

$$\therefore \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\varepsilon\mu}{c} curl\,\ddot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} curl\,\dot{\vec{Z}} \qquad \_\_\_(7)$$

من (7) ,(6) نجد أن:

$$curl\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \_\_\_(8)$$

حيث $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ، وهي معادلة ماكسويل الثالثة.

أيضاً: من (5) بأخذ $curl$ للطرفين:

$$curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} curl\,curl\;\dot{\vec{Z}} + \frac{4\pi\sigma}{c} curl\,curl\;\vec{Z}$$

ومن (4): $\vec{E} = curl\,curl\;\vec{Z} \;\leftarrow\; \dot{\vec{E}} = curl\,curl\;\dot{\vec{Z}}$

$$\therefore curl\,\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\dot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}$$

$$= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_c \qquad \_\_\_(9)$$

حيث

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\;,\;\; \vec{j}_c = \sigma\vec{E}$$

وهي معادلة ماكسويل الرابعة، وهو المطلوب.

[٧] طاقة المجال الكهرومغنطيسي Eneryy of Electromagnetic Field

يمكن إعتبار المجال الكهرومغنطيسي كمنظومة ميكانيكية (مثل الأجسام) تتحرك في الفراغ أو في الوسط بقوانين حركة معينة – ويكون لها (مثل المنظومة الميكانيكية) كميات خاصة بها تدل على حركتها مثل: الطاقة، كمية الحركة وغيرها. ونبدأ هنا بدارسة طاقة المجال الكهرومغنطيسي.

تؤثر على الشحنات المتحركة (الأجسام المشحونة المتحركة) في مجال كهرومغنطيسي قوة هي قوة المجال، ويستلزم ذلك وجود شغل مبذول على تلك الشحنات بواسطة تلك القوة، ولحساب الشغل المبذول أي معادل التغير في الطاقة (قاعدة الشغل والطاقة).

القوة المؤثرة على شحنة مقدارها q هي: $\vec{F} = q\vec{E}$، وإذا كانت الشحنة متحركة بسرعة $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$، وكانت الشحنة q ترتبط بكثافة الشحنة بالعلاقة: $q = \int \rho\, dV$

فإن الشغل المبذول بواسطة القوة في التحرك لمسافة $d\vec{r}$

$$du = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (q\vec{E})\cdot d\vec{r}$$

ويكون الشغل المبذول في وحدة الزمن:

$$\frac{du}{dt} = (q\vec{E})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{v} = \int(\rho\,\vec{E}\cdot\vec{v})\,dV$$

ولكن: كثافة التيار الناتج عن حركة الشحنات:

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \int(\vec{E}\cdot\vec{j})\,dV \qquad \_\_\_(1)$$

وباعتبار الشحنات متحركة في وسط مادي، ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{j} = \frac{c}{4\pi}curl\,\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

بالتعويض في (1):

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int(\vec{E}\cdot curl\,\vec{H})\,dV - \frac{1}{4\pi}\int(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\,dV \qquad \_\_\_(2)$$

ومن المتجهات:

$$div(\vec{E}\wedge\vec{H}) = \vec{H}\cdot curl\,\vec{E} - \vec{E}\cdot curl\,\vec{H}$$

$$\therefore \vec{E}\cdot curl\,\vec{H} = \vec{H}\cdot curl\,\vec{E} - div(\vec{E}\wedge\vec{H})$$

بالتعويض في (2):

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int(\vec{H}\cdot curl\,\vec{E})\,dV - \frac{c}{4\pi}\int div(\vec{E}\wedge\vec{H})\,dV - \frac{1}{4\pi}\int(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\,dV$$

ومن معادلة ماكسويل الثالثة:

$$curl\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int\vec{H}\cdot(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})dV - \frac{c}{4\pi}\int div(\vec{E}\wedge\vec{H})dV - \frac{1}{4\pi}\int(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})dV$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})dV - \frac{c}{4\pi}\int div(\vec{E}\wedge\vec{H})dV$$

ولكن:

$$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\vec{E}) = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(E^2)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\varepsilon\vec{E}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{D})$$

وبالمثل:

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{B})$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})dV - \frac{c}{4\pi}\int div(\vec{E}\wedge\vec{H})dV$$

وبأخذ $\frac{1}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = W$

$$\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{H}) = \vec{\gamma}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = -\int\frac{\partial W}{\partial t}dV - \int div\,\vec{\gamma}\,dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int W\,dV - \int\vec{\gamma}\cdot d\vec{s} \qquad (3)$$

(حيث طبقنا نظرية التباعد لجاوس: $\int\vec{\gamma}\cdot d\vec{s} = \int div\,\vec{\gamma}\,dV$)

وبكتابة $\varepsilon = \int W\,dV$ (والتي تمثل طاقة المجال الكهرومغنطيسي).

$$\therefore \frac{du}{dt} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \int\vec{\gamma}\cdot d\vec{s} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \int\vec{\gamma}\cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dt}(u+\varepsilon) = -\int\vec{\gamma}\cdot d\vec{s}} \qquad (4)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة بوينتنج (Poyinting Equation) للطاقة.

مناقشة معادلة بوينتنج للطاقة:

وصلنا إلى معادلة بوينتنج وصورتها:

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dt}(u+\varepsilon) = -\int \vec{\gamma}\cdot d\vec{s}} \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

حيث u هي طاقة الجسيمات المشحونة المتحركة في المجال الكهرومغنطيسي.

والكمية $\varepsilon = \int W\,dV$ تمثل طاقة المجال الكهرومغنطيسي نفسه.

أما الكمية W فتمثل كثافة الطاقة (Energy density) أي الطاقة المختزنة في وحدة الحجوم، حيث:

(في حالة الوسط)

$$W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})$$

في حالة الفراغ: $\vec{D} = \vec{E} \;,\; \vec{B} = \vec{H}$

$$W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{H}\cdot\vec{H}) = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$$

أما المتجه $\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{H})$ فيسمى متجه بوينتنج (Poyinting Vector)، وفي حالة استخدام نظام MKS للوحدات فإن:

$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{E}\wedge\vec{H}}$$

معادلة بوينتنج (المعادلة (1)) تمثل معادلة الطاقة (Equation of Energy) في علم الإلكتروديناميكا، ويمكن كتابتها بالصورة:

$$-\frac{dE}{dt} = \int \vec{\gamma}\cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{\gamma}) \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

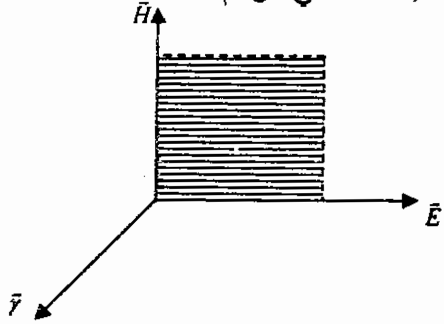
حيث $E = u + \varepsilon$ هي الطاقة الكلية وتعني هذه المعادلة أن:

معدل التناقص في الطاقة الكلية (للشحنات والمجال) يساوي فيض (Flux) المتجه $\vec{\gamma}$ عبر السطح $d\vec{s}$.

المعنى الطبيعي للمتجه $\vec{\gamma}$:

من العلاقة (2) يتضح أن: $\vec{\gamma}$ يمثل معدل التناقص في الطاقة عبر وحدة المساحة ولذلك يعرف $\vec{\gamma}$ أحياناً بفيض الطاقة (Energy Flux).

ومن العلاقة: $\vec{\gamma} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ يتضح أن: $\vec{\gamma}$ يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي على المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ كما في الرسم.

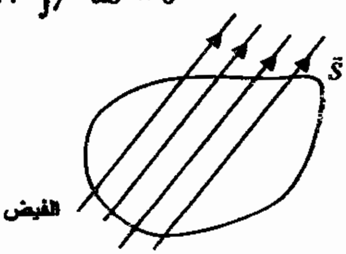


قانون ثبوت الطاقة في الإلكتروديناميكا:

Law of Conserration of Energy

يمثل الفيض بعدد خطوط القوى التي تعبر سطح ما، فإذا كان السطح ممتداً أمتداداً كبيراً (لانهائياً) فإن الفيض يكون منعدماً

$$\therefore \int \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} = 0$$



وتصبح معادلة الطاقة:

$$\frac{d}{dt}(u+\varepsilon) = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{u+\varepsilon = const.}$$

أي أن مجموع طاقتي الشحنات المتحركة والمجال (أي الطاقة الكلية) يكون ثابتاً (وهو قانون ثبوت الطاقة في علم الإلكتروديناميكا).

مثال:

(أ) أثبت أنه في حالة المجالات شبه المستقرة (quasi-stationary Fields) الناتجة عن مرور تيار كهربي ثابت كثافته $\vec{j}$ في دائرة كهربية فإن الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ للمجال المغنطيسي الناتج عن مرور التيار يعطي بالعلاقة:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}$$

(ب) أثبت أن الطاقة الكلية للمجال الناتج عن التيار $\vec{j}$ يساوي مجموع جزئين:

أحدهما كهربي: $\varepsilon_e = \frac{1}{2}\int \rho\phi\, dV$

والثاني مغنطيسي: $\varepsilon_m = \frac{1}{2c}\int (\vec{j}\cdot\vec{A})\, dV$

<u>الحل:</u>

<u>الجزء الأول</u>: تعرف المجالات شبه المستقرة بالعلاقة: $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

حيث ϕ تمثل الجهد القياسي (الإلكتروستاتيكي) وتوجد لدينا حالتان:

(i) حالة وجود شحنات حرة: $\phi = const.$

(ii) حالة عدم وجود شحنات: $\phi = 0$

ويؤول شرط لورنتز إلى:

$$\boxed{div\,\vec{A} = 0}$$

<u>ولإثبات العلاقة التي يحققها الجهد الإتجاهي</u> $\vec{A}$:

حيث أن: $\vec{B} = curl\,\vec{A}$

$$\therefore curl\,\vec{B} = curl\,curl\,\vec{A}$$

$$\therefore \mu\, curl\,\vec{H} = grad\,div\,\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} \quad \_\_\_(1) \qquad \Big|\; \vec{B} = \mu\vec{H}$$

ومن العلاقة الرابعة لماكسويل للمجالات شبه المستقرة وفي حالة وجود شحنات حرة.

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

بالتعويض في (1):

$$\mu\,[\frac{4\pi}{c}\vec{j}] = -\nabla^2\vec{A}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}}$$

وهو المطلوب.

<u>الجزء الثاني</u>: إيجاد الطاقة الكلية للمجال الناتج عن التيار $\vec{j}$:

حيث أن

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}\int[\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}]\,dV$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}\cdot\vec{D})\,dV + \frac{1}{8\pi}\int(\vec{H}\cdot\vec{B})\,dV = \varepsilon_e + \varepsilon_m$$

(i) <u>الجزء الكهربي من الطاقة:</u>

$$\varepsilon_e = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}\cdot\vec{D})\,dV$$

ولكن: $\vec{E} = -grad\,\phi$ (المجال الكهربي الإستاتيكي)

$$\therefore\ \varepsilon_e = -\frac{1}{8\pi}\int[(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{D}]\,dV \qquad \_\_\_(2)$$

ومن المتجهات:

$$div\,(\lambda\,\vec{A}) = \lambda\,div\,\vec{A} + (grad\,\lambda)\cdot\vec{A}$$
$$\therefore (grad\,\lambda)\cdot\vec{A} = div\,(\lambda\,\vec{A}) - \lambda\,div\,\vec{A}$$
$$\therefore (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{D} = div\,(\phi\,\vec{D}) - \phi\,div\,\vec{D} \qquad \Big|\ \lambda = \phi\ ,\ \vec{A} = \vec{D}$$

بالتعويض في (2):

$$\therefore\ \varepsilon_e = -\frac{1}{8\pi}\int[div\,(\phi\,\vec{\nabla}) - \phi\,div\,\vec{D}]\,dV \qquad \_\_\_(3)$$

ومن نظرية جاوس في المتجهات:

$$\int div\,\vec{A}\,dV = \int\vec{A}\cdot d\vec{s}$$
$$\therefore\ \int div\,(\phi\,\vec{D})\,dV = \int(\phi\,\vec{D})\cdot d\vec{s} = 0$$

في حالة أمتداد السطح أمتداداً كبيراً (لا نهائياً).

وتؤول (3) إلى:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{8\pi}\int\phi\,div\,\vec{\nabla}\,dV$$

ومن معادلة ماكسويل الأولى:

$$div\,\vec{D} = 4\pi\,\rho$$
$$\therefore\ \varepsilon_e = \frac{1}{8\pi}\int\phi[4\pi\rho]\,dV = \frac{1}{2}\int\rho\,\phi\,dV \qquad \_\_\_(4)$$

(ii) الجزء المغنطيسي من الطاقة:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{H}\cdot\vec{B})\,dV = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{H}\cdot curl\,\vec{A})\,dV \qquad \_\_(5)$$

ومن المتجهات:

$$div(\vec{A}\wedge\vec{H}) = \vec{H}\cdot curl\,\vec{A} - \vec{A}\cdot curl\,\vec{H}$$

$$\therefore\ \vec{H}\cdot curl\,\vec{A} = \vec{A}\cdot curl\,\vec{H} + div(\vec{A}\wedge\vec{H})$$

بالتعويض في (5):

$$\therefore\ \varepsilon_m = \frac{1}{8\pi}\int[\vec{A}\cdot curl\,\vec{H} + div(\vec{A}\wedge\vec{H})]\,dV$$

ومن نظرية جاوس في المتجهات: $\int div(\vec{A}\wedge\vec{H})\,dV = \int(\vec{A}\wedge\vec{H})\cdot d\vec{s} = 0$

في حالة أمتداد السطح أمتداداً كبيراً (لا نهائياً).

$$\therefore\ \varepsilon_m = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{A}\cdot curl\,\vec{H})\,dV$$

ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\therefore\ \varepsilon_m = \frac{1}{8\pi}\int[\vec{A}\cdot(\frac{4\pi}{c}\vec{j})]\,dV = \frac{1}{2c}\int(\vec{A}\cdot\vec{j})\,dV \qquad \_\_(6)$$

وهو المطلوب.

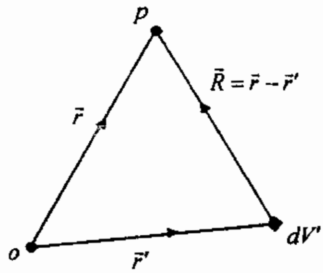
قانون بيو – سافـار Biot – Savart Law

هذا القانون يعين شدة المجال المغنطيسي الناتج عن مرور تيـار كهربـي فـي دائرة ما.

إستنتاج القانون: من المثال السابق: فإن الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ للمجـال المغنطيـسي الناتج عن مرور تيار في دائرة يحقق العلاقة:

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\,\vec{j} \qquad \_\_(1)$$

وهي معادلة تفاضلية الحل العام لها يعطينا قيمة المتجه $\vec{A}$ عند نقطـة معينـة p تبعد مسافة $\vec{r}$ عن نقطة الأصل o.



فبفرض أن لدينا كهربية موجودة عند عنصر حجم dV' يبعد مسافة $\vec{r}'$ عن o، فيكون التيار المار في الدائرة هو: $\vec{j}(\vec{r}')$

ويأخذ الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ الصورة الآتية:

$$\boxed{\vec{A}_p(\vec{r})=\frac{\mu}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R}dV'}$$

حيث $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$

هو بعد الدائرة الكهربية (عند عنصر الحجم dV') عن نقطة p.

وحيث أن المجال المغنطيسي $\vec{H}$ يعطي من:

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{1}{\mu}curl\,\vec{A}=\frac{1}{c}\int curl\,(\frac{\vec{j}}{R})dV' \qquad \_\_\_(2)$$

ومن المتجهات:

$$curl\,(\lambda\,\vec{a})=\lambda\,curl\,\vec{a}+(grad\,\lambda)\wedge\vec{a}$$

$$\lambda=\frac{1}{R}\ ,\ \vec{a}=\vec{j}$$

$$\therefore curl\,(\frac{\vec{j}}{R})=(\frac{1}{R})curl\,\vec{j}+grad\,(\frac{1}{R})\wedge\vec{j}$$

وفي حالة الحركة شبه المستقرة للشحنات فإن التيار $\vec{j}$ الناتج عن حركة الشحنات يكون ثابتاً.

$$\therefore curl\,\vec{j}=0$$

ومن المتجهات:

$$grad\,(\frac{1}{R})=\vec{\nabla}(\frac{1}{R})=-\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\therefore\ curl\,(\frac{\vec{j}}{R})=grad\,(\frac{1}{R})\wedge\vec{j}=-\frac{\vec{R}}{R^3}\wedge\vec{j}=\frac{\vec{j}\wedge\vec{R}}{R^3} \qquad \_\_\_\_(3)$$

بالتعويض من (3) في (2):

$$\therefore\ \vec{H}=\frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}\wedge\vec{R}}{R^3}dV' \qquad \_\_\_\_(4)$$

وهو قانون بيو - سافار الذي يعطي شدة المجال المغنطيسي الناشئ عن تيار كهربي مستقر (Steady Current).

مناقشة قانون بيو - ساڤــار:

نعتبر دائرة كهربية عند عنصر الحجم dV' ونأخذ عنصر طــول $d\vec{\ell}$ مــن الدائرة وبإعتبار أن $\vec{R}$ هو متجه موضع النقطة p (المطلوب إيجاد شدة المجــال عندها) بالنسبة لهذا العنصر، فإذا مر تيــار كهربــي ثابــت الــشدة (I) حيــث $I = \vec{j} \cdot \vec{s}$ (حيث $\vec{s}$ هي مسافة مقطع السلك)، في الدائرة فإن:

$$\vec{j}\, dV' = I\, d\vec{\ell} \qquad \text{\_\_\_}(5)$$

ويصبح قانون بيو - ساڤــار (4) بالصورة:

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\int \frac{(I\, d\vec{\ell}) \wedge \vec{R}}{R^3} = \frac{I}{c}\int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} \qquad \text{\_\_\_}(6)$$

والقانون بهذه الصورة يكون سهلاً في التطبيق لإيجاد شــدة المجــال المغنطيــسي الناتج عن مرور تيار في دائرة كهربية.

في النظام الدولي للوحدات: يأخذ القانون (6) الصورة:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3} \qquad \text{\_\_\_\_}(7)$$

ملحوظة(١): إثبات العلاقة $\vec{j}\, dV' = I\, d\vec{\ell}$:

حيث أن $\vec{j} = \rho \vec{v}$ حيث ρ الكثافة الحجمية للشحنة المتحركــة $(q = \rho\, dV')$، وهنا q الشحنة الكلية، $\vec{v}$ هي السرعة التي تتحرك بها الشحنة.

أيضاً: فإن التيار الكلي:

$$I = \vec{j} \cdot \vec{s}$$

$$\therefore\ \vec{j}\, dV' = (\rho \vec{v})(\vec{s} \cdot d\vec{\ell}) = \rho(\vec{v} \cdot \vec{s})\, d\vec{\ell} = (\vec{j} \cdot \vec{s})\, d\vec{\ell} = I\, d\vec{\ell}$$

[الحجم = مساحة المقطع × الطول ← $dV' = \vec{S} \cdot d\vec{\ell}$]

ملحوظة(٢): إذا كانت q هي الشحنة الكلية فيمكن إثبات أن

$$q\vec{v} = I\, d\vec{\ell}$$

$$q\vec{v} = (\rho\, dV')\vec{v} = \rho(\vec{s} \cdot d\vec{\ell})\vec{v} = \rho(\vec{s} \cdot \vec{v})\, d\vec{\ell} = (\vec{j} \cdot \vec{s})\, d\vec{\ell} = I\, d\vec{\ell}$$

ويأخذ قانون بيو - سافـــار الصورة الآتية:

$$\vec{H}=\frac{I}{4\pi}\int\frac{d\vec{\ell}\wedge\vec{R}}{R^3}=\frac{q}{4\pi}\int\frac{\vec{v}\wedge\vec{R}}{R^3} \qquad \text{\_\_\_\_(8)}$$

مثال: تطبيق على قانون بيو - سافــار:

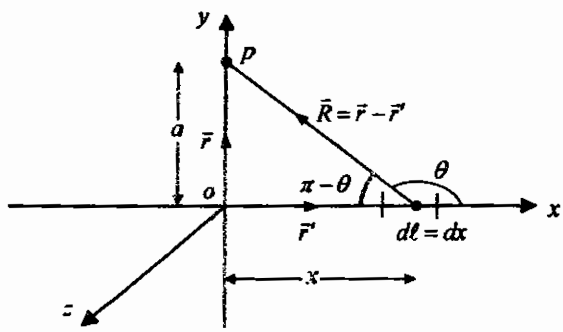
إستخدم قانون بيو - سافـــار لإيجاد شدة المجال المغنطيسي الناتج عن:

أولاً: سلك طويل يحمل تياراً كهربائياً ثابتاً شدته I.

ثانياً: سلك على شكل حلقه دائرية تحمل تياراً كهربياً شدته I، ومن ذلــك أوجــد شدة المجال عند مركز الحلقة.

الحل:

أولاً: شدة المجال المغنطيسي الناتج عن سلك طويل يحمل تياراً شدته I:



نفرض لدينا سلكاً طويلاً موضوعاً على محور x ويمر به تيار كهربي شـدته I، والمطلوب إيجاد شدة المجال المغنطيسي الناتج عن هذا التيار عند نقطة p الواقعة على محور y العمودي على السلك والتي تبعد مسافة a عند o (نقطة الأصل).

نأخذ عنصر من السلك طوله $d\ell=dx$ يبعد مسافة x عن o ومسافة R من p.

في صورة متجهات:

$$\vec{r}'=x\,\hat{i} \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

$$\vec{r}=a\,\hat{j} \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

$$d\vec{\ell}=dx\,\hat{i} \qquad \text{\_\_\_(3)}$$

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=a\,\hat{j}-x\,\hat{i}=-x\,\hat{i}+a\,\hat{j} \qquad \_\_\_(4)$$

$$\therefore d\vec{\ell}\wedge\vec{R}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ dx & 0 & 0\\ -x & a & 0\end{vmatrix}=(a\,dx)\,\hat{k} \qquad \_\_\_(5)$$

ومن هندسة الشكل:

$$\sin(\pi-\theta)=\frac{a}{R}=\sin\theta$$

$$\therefore \quad \boxed{R=\frac{a}{\sin\theta}=a\operatorname{cosec}\theta}$$

أيضاً:

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{a}{x}=-\tan\theta$$

$$\therefore \; x=-\frac{a}{\tan\theta}=-a\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\left[\frac{\sin\theta(-\sin\theta)-\cos\theta\,(\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right]$$

$$=a\left[\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right]=\frac{a}{\sin^2\theta}=a\operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\therefore \quad \boxed{dx=a\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta} \qquad \_\_\_(6)$$

ومن قانون بيو – ساڤــار:

$$dx=\frac{I}{c}\int\frac{d\vec{\ell}\wedge\vec{R}}{R^3}=\frac{I}{c}\int\frac{(a\,dx)\hat{k}}{(a\operatorname{cosec}\theta)^3}=\frac{I}{c}\int\frac{a[a\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta]\hat{k}}{a^3\operatorname{cosec}^3\theta}$$

$$=\frac{I}{ca}\int\frac{d\theta}{\operatorname{cosec}\theta}\vec{k}=\frac{I}{ca}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,\hat{k}$$

$$=\frac{I}{ca}[-\cos\theta]\Big|_0^{\pi}\hat{k}=\frac{I}{ca}[2]\hat{k}=\frac{2I}{ca}\hat{k}$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{H}=\frac{2I}{ca}\hat{k}} \qquad \_\_\_(7)$$

أي أن المجال المغنطيسي الناتج عن سلك طويل يحمي تيار شدته I موضوع في إتجاه محور x عند نقطة p التي تبعد مسافة a عن السلك تكون قيمتـــه $(\frac{2I}{ca})$ وإتجاهه هو إتجاه محور z العمودي على x.

ملحوظة: في النظام الدولي للوحدات يكون قانون بيوساڤــار:

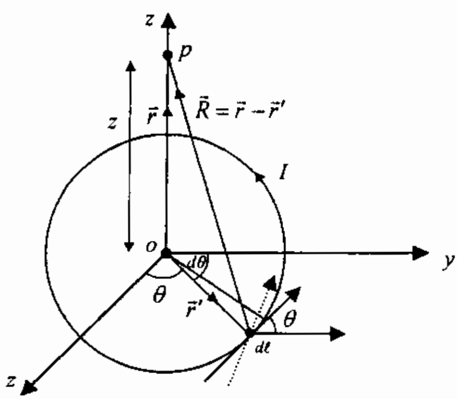
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{R}}{R^3}$$

وتصبح شدة المجال للسلك المذكور:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{2I}{4\pi a}\hat{k} = \frac{I}{4\pi a}\hat{k}}$$

<u>**ثانياً**: شدة المجال المغنطيسي الناتج عن سلك على شكل حلقة دائرية (سلك دائري) تحمل تياراً وذلك عند نقطة تقع على أمتداد محوره:</u>

نعتبر حلقة دائرية نصف قطرها a موضوعة في المستوى (xy) يمر بها تيــار ثابت شدته I.



نقسم الحلقة إلى عناصر طول وليكن أحدها هو العنصر $d\ell$ وهو ممـــاس للحلقــة (أي عمودياً على a)

حيث: $\boxed{d\ell = a\,d\theta}$

ويبعد هذا العنصر مسافة $R = \left|\vec{R}\right|$ عن نقطة p التي تقع على امتــداد محــور الحلقة (محور z).

في صورة متجهات:

$$\vec{r} = z\hat{k} \qquad \_\_\_(1)$$

حيث z هي بعد p عن مركز الحلقة.

$$\vec{r}' = \vec{a} = a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j} \qquad \_\_\_(2)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (z\hat{k}) - (a\cos\theta\,\hat{i} + a\sin\theta\,\hat{j})$$

$$= -a\cos\theta\,\hat{i} - a\sin\theta\,\hat{j} + z\hat{k} \qquad \_\_\_(3)$$

أيضاً: فإن

$$R = \sqrt{a^2 + z^2} = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \_\_\_(4)$$

$$d\vec{\ell} = -d\ell\sin\theta\,\hat{i} + d\ell\cos\theta\,\hat{j}$$

$$= -a\,d\theta\sin\theta\,\hat{i} + a\,d\theta\cos\theta\,\hat{j} \qquad \_\_\_(5)$$

ومن قانون بيو – سافــار: فإن المجال عند نقطة p:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int\frac{d\vec{\ell}\wedge\vec{R}}{R^3} \qquad \_\_\_(6)$$

حيث:

$$R^3 = (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \_\_\_(7)$$

$$d\vec{\ell}\wedge\vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\sin\theta\,d\theta & a\cos\theta\,d\theta & 0 \\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & z \end{vmatrix}$$

$$= (az\cos\theta\,d\theta)\hat{i} + (az\sin\theta\,d\theta)\hat{j} + (a^2\sin^2\theta\,d\theta + a^2\cos^2\theta\,d\theta)\hat{k}$$

$$= (az\cos\theta\,\hat{i} + az\,\sin\theta\,\hat{j} + a^2\hat{k})\,d\theta \qquad \_\_\_(8)$$

بالتعويض من (8) ,(7) في (6):

$$\therefore\ \vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\theta\,\hat{i} + a\,\sin\theta\,\hat{j} + a^2\hat{k}}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta$$

تكامل الحدين الأول والثاني يساوي صفراً.

$$[\cos 0 = 1 \ , \ \cos 2\pi = 1 \ , \ \sin 0 = 0 \ , \ \sin 2\pi = 0]$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta\,\hat{k} = \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}d\theta\,\hat{k}$$

$$= \frac{I}{4\pi}\cdot\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(2\pi)\hat{k} = \frac{I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \qquad \_\_\_(9)$$

وهي شدة المجال الناتج عن مرور التيار I في الحلقة ذات النصف قطر a عند نقطة p التي تبعد مسافة z عن مركز الحلقة، وإتجاه المجال هو إتجاه محور z $(\hat{k})$.

حالة خاصة: شدة المجال عند مركز الحلقة حيث: $z = 0$

$$\vec{H} = \frac{I}{2}\frac{a^2\hat{k}}{(a^2)^{3/2}} = \frac{I}{2}\frac{a^2\,\hat{k}}{a^3} = \frac{I}{2a}\hat{k} \qquad \_\_\_(10)$$

وهو المطلوب.

[٨] كمية حركة المجال الكهرومغنطيسي:

Momentum of Electromagnetic Field

بوصف المجال الكهرومغنطيسي كمنظومة ميكانيكية فيكون له كمية حركة (مثل المنظومات الميكانيكية) ولحساب كمية حركة المجال نتبع الآتي:

إذا تحركت شحنه q بسرعة $\vec{v}$ في مجال كهرومغنطيسي فتؤثر عليها قوتان:

(i) قوة كهربية: نتيجة المجال الكهربي $\vec{E}$ للشحنة، وتعطي بالعلاقة:

$$\vec{F}_{e\ell} = q\,\vec{E} \qquad \_\_\_(1)$$

(ii) قوة مغنطيسية: نتيجة المجال المغنطيسي ($\vec{H}$ في حالة الفراغ أو $\vec{B}$ في حالة الوسط) الناتج عن حركة الشحنة، وتعطي بالعلاقة:

$$\vec{F}_{mg} = \frac{q}{c}(\vec{v}\wedge\vec{B}) \qquad \_\_\_(2)$$

(في حالة الوسط)

وتصبح القوة الكلية المؤثرة على الشحنة المتحركة هي:

$$\vec{F} = \vec{F}_{e\ell} + \vec{F}_{mg} = q[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})] \qquad \_\_\_(3)$$

وتعرف بقوة لورنتز (Lorentz Force).

وإذا كانت $\vec{f}$ هي كثافة القوة (Force density)

$$\therefore \vec{F} = \int \vec{f}\, dV$$

وكثافة الشحنة ρ حيث: $q = \int \rho\, dV$، وتصبح العلاقة (3) [بين $\vec{f}, \rho$] بالصورة:

$$\vec{f} = \rho[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})] \qquad \_\_\_(4)$$

وإذا كانت $\vec{p}$ هي كمية الحركة أو الزخم (Momentum) للشحنة المتحركة فمن قانون نيوتن الثاني:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \int \vec{f}\, dV$$

وباستخدام (4):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int \rho[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})]dV = \int [\rho \vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{j} \wedge \vec{B})]\, dV \qquad \_\_\_(5)$$

حيث: $\vec{j} = \rho \vec{v}$ كثافة التيار (Current density)

والآن: من معادلة ماكسويل الأولى (في الوسط):

$$div\, \vec{D} = 4\pi\rho \;\; \rightarrow \;\; \rho = \frac{1}{4\pi} div\, \vec{D} \qquad \_\_\_(6)$$

ومن معادلة ماكسويل الرابعة:

$$curl\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{j} = \frac{c}{4\pi} curl\, \vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \_\_\_(7)$$

بالتعويض من (7) ,(6) في (5):

$$\frac{d\bar{p}}{dt}=\int\frac{1}{4\pi}\vec{E}\,div\vec{D}\,dV+\int\frac{1}{4\pi}(curl\,\vec{H}\wedge\vec{B})\,dV-\int\frac{1}{4\pi c}(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\wedge\vec{B})\,dV$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\vec{E}\,div\vec{D}\,dV+\frac{1}{4\pi}\int(curl\,\vec{H}\wedge\vec{B})\,dV-\frac{1}{4\pi c}\int(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\wedge\vec{B})\,dV)\quad(8)$$

ولكن:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\wedge\vec{B})=\vec{D}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\wedge\vec{B}$$

$$\therefore\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\wedge\vec{B}=\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\wedge\vec{B})-\vec{D}\wedge\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

ومن معادلة ماكسويل الثالثة:

$$curl\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-c\,curl\,\vec{E}$$

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\wedge\vec{B}=\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\wedge\vec{B})+c(\vec{D}\wedge curl\,\vec{E})\qquad\_\_\_(9)$$

بالتعويض من (9) في (8):

$$\frac{d\bar{p}}{dt}=\frac{1}{4\pi}\int\vec{E}\,div\vec{D}\,dV+\frac{1}{4\pi}\int(curl\,\vec{H}\wedge\vec{B})\,dV$$

$$-\frac{1}{4\pi c}\int\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\wedge\vec{B})\,dV-\frac{1}{4\pi}\int\vec{D}\wedge curl\,\vec{E})\,dV$$

وبأخذ الكمية $\frac{1}{4\pi c}\int(\vec{D}\wedge\vec{B})\,dV=\vec{\mathcal{P}}$

وإضافة إلى $\frac{1}{4\pi}\int\vec{H}\,div\vec{B}\,dV$ (الذي يساوي صفراً)، وذلك بهدف التماثل في صورة المعادلة.

$$\therefore\frac{d\bar{p}}{dt}=-\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t}+\frac{1}{4\pi}\int[\vec{E}\,div\,\vec{D}+\vec{H}\,div\,\vec{B}]\,d\vec{V}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int[curl\,\hat{H}\wedge\vec{B}+curl\,\vec{E}\wedge\vec{D}]\,dV\qquad\_\_\_(10)$$

وبأخذ

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi}[\vec{E}\, div\, \vec{D} + \vec{H}\, div\, \vec{B} + curl\, \vec{E} \wedge \vec{D} + curl\, \vec{H} \wedge \vec{B}] \qquad \_\_\_(11)$$

فإن (10) تصبح:

$$\therefore \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} + \int \vec{G}\, dV \quad \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\bar{p} + \vec{\mathcal{P}}) = \int \vec{G}\, dV} \qquad \_\_\_\_(12)$$

تسمى هذه العلاقة بمعادلة بوينتنج الخاصة بكمية الحركة للمجال الكهرومغنطيسي.

<u>مناقشة المعادلة (12):</u>

تعطي المعادلة (12) معدل التغير الزمني لمجموع كميتين هما:

(i) كمية حركة الشحنة $(\bar{p})$.

(ii) الكمية $\vec{\mathcal{P}}$ والتي يجب أن تكون من نفس نوع $\bar{p}$ (أي كمية حركة)، ونظراً لوجود الشحنة في مجال كهرومغنطيسي فإن $\vec{\mathcal{P}}$ يجب أن تمثل كمية حركة المجال، حيث:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi c}\int (\vec{D} \wedge \vec{B})\, dV$$ (للوسط).

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi c}\int (\vec{E} \wedge \vec{H})\, dV$$ (للفراغ).

وحيث أن متجه بوينتنج يعطي بالعلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \wedge \vec{H})\, dV$$

$$\therefore \ \vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{c^2}\int \vec{\gamma}\ dV$$

وفي حالة النظام MKS للوحدات فإن:

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \int \vec{\gamma}\ dV}$$

وهذا يعني أن المتجه $\vec{\gamma}$ يمثل كثافة كمية الحركة (Momentum density) أي كمية الحركة للمجال في وحدة الحجوم (ويمثل هذا المعنى الفيزيائي لمتجه بوينتنج).

مبدأ ثبوت كمية الحركة في علم الإلكتروديناميكا

Law of conservation of Momentum

من المعادلة (12):

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}+\vec{\mathcal{P}})=\int \vec{G}\,dV$$

حيث $\vec{G}$ تعطي بالمعادلة (11) ويمكن إثبات أنها تساوي تباعد ممتد يعرف بممتد الإجهاد لماكسويل $g_{\alpha\beta}$ (Maxwell Stress Tensor) .

$$\therefore \quad \boxed{\vec{G}=div\, g_{\alpha\beta}}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{p}+\vec{\mathcal{P}})=\int div\, g_{\alpha\beta}\,dV \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

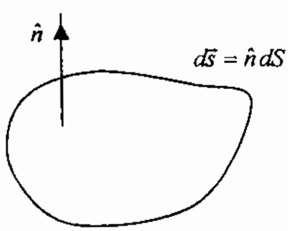
وباستخدام تعميم نظرية جاوس للمتجهات:

$$\int div\, g_{\alpha\beta}dV=\int (g_{\alpha\beta})_n\,dS \qquad \text{\_\_\_(2)}$$

$$[\int div\,\vec{A}\,dV=\int \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int \vec{A}\cdot\hat{n}\,dS=\int A_n\,dS]$$

حيث A_n هي المركبة العمودية لــ $\vec{A}$

$$A_n=\vec{A}\cdot\hat{n}$$



في المعادلة (2):

$(g_{\alpha\beta})_n$ تمثل المركبات العمودية للممتد $g_{\alpha\beta}$ على السطح dS.

وتصبح المعادلة (1) بالصورة:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}+\vec{\mathcal{P}})=\int (g_{\alpha\beta})_n\,dS$$

وفي حالة إمتداد السطح dS إمتداداً كبيراً فإن: $(g_{\alpha\beta})_n \rightarrow 0$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{p}+\vec{\mathcal{P}})=0 \rightarrow \boxed{\vec{p}+\vec{\mathcal{P}}=const.}$$

وهو مبدأ ثبوت كمية الحركة في علم الإلكتروديناميكا.

ممتد الإجهاد الكهرومغنطيسي لماكسويل:

Maxwell's Electromagnetic stress tensor

من العلاقة (11) التي تعطي المتجه $\vec{G}$ وفي حالة الفراغ:

$$\vec{G}=\frac{1}{4\pi}[\vec{E}\,div\,\vec{E}+\vec{H}\,div\,\vec{H}+(curl\,\vec{E})\wedge\vec{E}+(curl\,\vec{H})\wedge\vec{H}]$$

وبحساب المركبة x للمتجه $\vec{G}$:

$$G_x=\frac{1}{4\pi}[\vec{E}\,div\,\vec{E}+\vec{H}\,div\,\vec{H}+(curl\,\vec{E})\wedge\vec{E}+(curl\,\vec{H})\wedge\vec{H}]_x$$

$$=\frac{1}{4\pi}[E_x(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z})+H_x(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z})$$

$$+(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x})E_z-(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y})E_y$$

$$+(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x})H_z-(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y})H_y$$

$$=\frac{1}{4\pi}[\{E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}-E_y\frac{\partial E_y}{\partial x}-E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}+H_x\frac{\partial H_x}{\partial x}-H_y\frac{\partial H_y}{\partial x}-H_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\}$$

$$+\{E_x\frac{\partial E_y}{\partial y}+E_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+H_x\frac{\partial H_y}{\partial y}+H_y\frac{\partial H_x}{\partial y}\}$$

$$+\{E_x\frac{\partial E_z}{\partial z}+E_z\frac{\partial E_x}{\partial z}+H_x\frac{\partial H_z}{\partial z}+H_z\frac{\partial H_x}{\partial z}\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{E_x^2-E_y^2-E_z^2+H_x^2-H_y^2-H_z^2\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\{E_xE_y+H_xH_y\}+\frac{\partial}{\partial z}\{E_xE_z+H_xH_z\} \qquad \_\_\_\_(1)$$

وبتعريف مركبات ممتد الإجهاد للمجال الكهرومغنطيسي بالعلاقة:

$$g_{\mu\upsilon}=\frac{1}{4\pi}(E_\mu E_\upsilon+H_\mu H_\upsilon) \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$g_{\mu\mu}=\frac{1}{4\pi}[(E_\mu^2+H_\mu^2)-\frac{1}{2}(E^2+H^2)] \qquad \_\_\_\_(3)$$

وهذا يعني أن المركبات المختلفة لممتد الإجهاد الكهرومغنطيسي هي:

بإعطاء $\mu, \upsilon = x, y, z$

$$g_{xx} = \frac{1}{4\pi}[(E_x^2 + H_x^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)]$$
$$= \frac{1}{8\pi}[E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2] \quad \text{\_\_\_\_(4)}$$

$$[E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 \ , \ H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2]$$

$$g_{yy} = \frac{1}{4\pi}[(E_y^2 + H_y^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)$$
$$= \frac{1}{8\pi}[E_y^2 - E_x^2 - E_z^2 + H_y^2 - H_x^2 - H_z^2] \quad \text{\_\_\_\_(5)}$$

$$g_{zz} = \frac{1}{4\pi}[(E_z^2 + H_z^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)]$$
$$= \frac{1}{8\pi}[E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 + H_z^2 - H_x^2 - H_y^2] \quad \text{\_\_\_\_(6)}$$

$$g_{xy} = \frac{1}{4\pi}(E_x E_y + H_x H_y) = g_{yx} \quad \text{\_\_\_(7)}$$

$$g_{xz} = \frac{1}{4\pi}(E_x E_z + H_x H_z) = g_{zx} \quad \text{\_\_\_(8)}$$

$$g_{yz} = \frac{1}{4\pi}(E_y E_z + H_y H_z) = g_{zy} \quad \text{\_\_\_(9)}$$

وبوضع هذه المركبات على شكل المصفوفة:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}$$

ويعرف بممتد الإجهاد الكهرومغنطيسي لماكسويل(Mazwell's Stress Tensor)
ويلاحظ أنه ممتد متماثل (Symmetric Tensor): $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

<u>الصورة العامة للمتد</u> $g_{\mu\upsilon}$: يمكن كتابة الممتد $g_{\mu\upsilon}$ بدلالة مركبات متجهي المجال الكهربي والمغنطيسي بالصورة الآتية:

$$g_{\mu\upsilon} = \frac{1}{4\pi}[E_\mu E_\upsilon + H_\mu H_\upsilon - \frac{1}{2}\delta_{\mu\upsilon}(E^2 + H^2)] \quad \text{\_\_\_\_(10)}$$

حيث:

$$\delta_{\mu\upsilon} = \begin{cases} 1 & (\mu = \upsilon) \\ 0 & (\mu \neq \upsilon) \end{cases}$$

العلاقة (10) تجمع العلاقتين (3) ,(2):

في حالة الوسط: يأخذ الممتد $g_{\mu\upsilon}$ الصورة الآتية:

$$g_{\mu\upsilon} = \frac{1}{4\pi}[E_{\mu} D_{\upsilon} + H_{\mu} B_{\upsilon} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\upsilon}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})] \qquad \_\_\_\_(11)$$

<u>مثال</u>: أثبت أن العلاقة بين المتجه $\vec{G}$ المعطى بالعلاقة:

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi}[\vec{E}\, div + \vec{H}\, div\, \vec{H} + (curl\, \vec{E})\wedge \vec{E} + (curl\, \vec{H})\wedge \vec{H})$$

وممتد الإجهاد لماكسويل $g_{\alpha\beta}$ هي: $\boxed{\vec{G} = div\, g_{\alpha\beta}}$، وأن:

$$\int \vec{G}\, dV = \int (g_{\alpha\beta})_n dS$$

<u>الحل</u>: بحساب المركبة G_x للمتجه $\vec{G}$ نجد أن:

$$G_x = \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\{E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\{E_x E_y + H_x H_y\} + \frac{\partial}{\partial z}\{E_x E_z + H_x H_z\}]$$

وباستخدام تعريفات المركبات $g_{\alpha\beta}$ لممتد الإجهاد لماكسويل [المعادلات من (4) إلى (9) في الفقرة السابقة] نحصل على:

$$G_x = \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_{\sigma}} \quad |\alpha = 1$$

حيث: $g_{\alpha\sigma} = g_{xx}, g_{xy}, g_{xy}\ ;\ x_{\sigma} = x_1, x_2, x_3 = x, y, z\ ;\ \sigma = 1,2,3$

وبالمثل فإن المركبتين G_y, G_z يمكن كتابتهما بالصورة:

$$G_y = \frac{\partial g_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_{\sigma}} \quad |\beta = 2$$

$$G_z = \frac{\partial g_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial g_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial g_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} = \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x_{\sigma}} \quad |\gamma = 2$$

$$\therefore \vec{G} = G_x\hat{i} + G_y\hat{j} + G_z\hat{k} = \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x_\sigma}\hat{i} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x_\sigma}\hat{j} + \frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x_\sigma}\hat{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\sigma}[g_{\alpha\sigma}\hat{i} + g_{\beta\sigma}\hat{j} + g_{\gamma\sigma}\hat{k}] = \frac{\partial}{\partial x_\sigma}[g_{\mu\sigma}] = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma}$$

$$\Big| \mu = \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

ومن تعريف تباعد الممتد $g_{\mu\sigma}$: $div\, g_{\mu\sigma} = \dfrac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} \leftarrow \boxed{\vec{G} = div\, g_{\mu\sigma}}\ \therefore$

$$\therefore \int \vec{G}\, dV = \int div\, g_{\mu\sigma}\, dV \qquad \_\_\_\_(1)$$

ومن تعميم نظرية جاوس في المتجهات:

$$\int div\, g_{\mu\sigma}\, dV = \int (g_{\mu\sigma})_n\, dS \qquad \_\_\_\_(2)$$

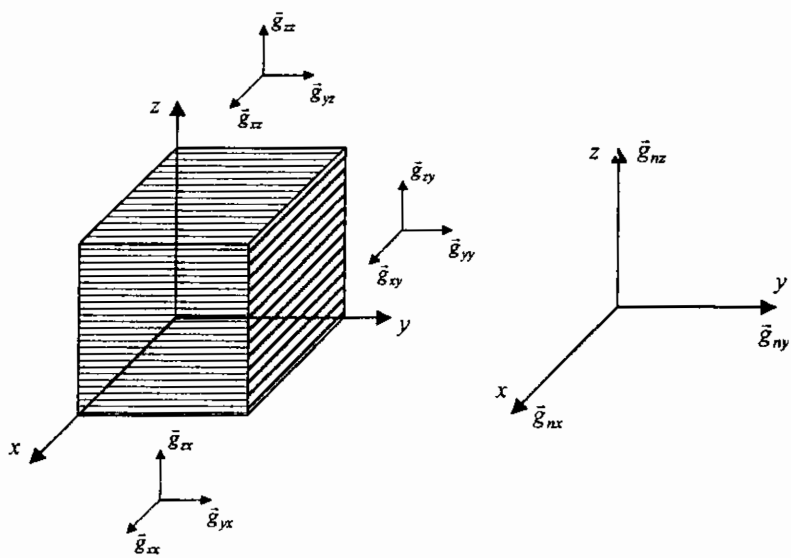
حيث $(g_{\mu\sigma})_n$ هي المركبات العمودية للممتد $g_{\mu\sigma}$ على السطح dS:

من (1), (2):

$$\therefore \boxed{\int \vec{G}\, dV = \int (g_{\mu\sigma})_n\, dS}$$

وهو المطلوب.

المعنى الفيزيائي لمركبات ممتد الإجهاد الكهرومغنطيسي:



نفرض أن لدينا حجماً V محدوداً بالسطح S، فإن كانت $\vec{f}$ هي الكثافة الحجمية للقوة المؤثرة على شحنة (أو جسيم مشحون) داخل الحجم فإن:

$$\vec{F} = \int \vec{f}\, dV \qquad \text{\_\_\_(1)}$$

وإذا كانت $\vec{g}_{n\alpha}$ هي قوى الإجهاد المؤثرة على وحدة المساحات في الإتجاه العمودي، حيث $\hat{n}$ متجه الوحدة العمودي على السطح إلى الخارج، ولها المركبات الإتجاهية:

$$\vec{g}_{n\alpha} = \vec{g}_{nx} + \vec{g}_{ny} + \vec{g}_{nz}$$

وحيث أن العمودي على أوجه المكعب المبين يكون في إتجاه المحاور x, y, z فإن

$$\vec{g}_{nx} = g_{xx}\,\hat{i} + g_{yx}\,\hat{j} + g_{zx}\,\hat{k}$$

$$\vec{g}_{ny} = g_{xy}\,\hat{i} + g_{yy}\,\hat{j} + g_{zy}\,\hat{k}$$

$$\vec{g}_{nz} = g_{xz}\,\hat{i} + g_{yz}\,\hat{j} + g_{zz}\,\hat{k}$$

فمثلاً: المركبة g_{xy} هي المركبة x لقوة الإجهاد $\vec{g}_{ny}$ بحيث يكون العمودي على المساحة في إتجاه محور y.

المركبة g_{xz} هي المركبة x لقوة الإجهاد $\vec{g}_{nz}$ بحيث يكون العمودي على المساحة في إتجاه محور z.

المركبة g_{yx} هي المركبة y لقوة الإجهاد $\vec{g}_{nx}$ بحيث يكون العمودي على المساحة في إتجاه محور z.

وهكذا نحصل على تسع مركبات لقوى الإجهاد المؤثرة على الجسيم المشحون الموجود في الحجم $\vec{V}$، وتشكل هذه المركبات التسع مركبات ممتد الإجهاد $g_{\alpha\beta}$ (حيث $\alpha, \beta = x, y, z$) والذي صورته:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}[E_\alpha\, E_\beta + H_\alpha\, H_\beta - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)]$$