

الموجات الكهرومغناطيسية

Electromagnetic Waves

[1] معادلات الموجات الكهرومغناطيسية

(تغير المجال الكهرومغناطيسي مع الزمن):

نعتبر وسطاً غير موصل وخال من الشحنات (فراغ حر) فتكون معادلات ماكسويل:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{---(1)} \quad , \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{---(3)} \quad , \quad \operatorname{curl} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{---(4)}$$

ويشكل حل تلك المعادلات ما يسمى بالموجات الكهرومغناطيسية، حيث أن الحل كما سنرى يمثل موجات متحركة بسرعة معينة.

والآن: بأخذ  $\operatorname{curl}$  للمعادلة (3):

$$\therefore \operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{curl} \vec{H} = 0$$

وبالتعويض عن  $\operatorname{curl} \vec{H}$  من (4) وإعتبار أن:

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

(حيث  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ، من (1))

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \square \vec{E} = 0 \quad \text{---(5)}$$

حيث  $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  مؤثر دالمبيرت (الدالمبرتيان).

أيضاً: بأخذ  $\operatorname{curl}$  للمعادلة (4):

$$\therefore \text{curl curl } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{curl } \vec{E} = 0$$

وبالتعويض عن  $\text{curl } \vec{E}$  من (3) وإعتبار أن:

$$\text{curl curl } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}$$

(حيث  $\text{div } \vec{H} = 0$ ، من (2))

$$-\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \square \vec{H} = 0 \quad \text{_____ (6)}$$

وإذا كانت المعادلة التي تصف موجة متحركة بسرعة  $v$  هي:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

فالمقارنة يتضح أن المعادلتين (6)، (5) تمثلان حركة موجية بسرعة  $v=c$  وهي سرعة الضوء في الفراغ. ويطلق على هذه الحركة الموجية اسم الموجات الكهرومغناطيسية التي تتحرك في الفراغ بالسرعة  $c$ .

#### معادلات الجهود الكهرومغناطيسية:

يعرف الجهدان  $\vec{A}, \phi$  بالعلاقين:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{curl } \vec{A}$$

مع شرط لورنتز:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

وحيث أن:

$$\therefore \text{curl curl } \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \text{grad} \quad \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left( \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0$$

$$\therefore \square \vec{A} = 0 \quad \text{_____ (7)}$$

أيضاً وبفلس نظريفة يمكن إثبات أن الجهد القياسي  $\phi$  يخضع لنفس العلاقة:

$$\therefore \square \phi = 0 \quad \text{_____ (8)}$$

أي أن الجهدين  $\vec{A}, \phi$  للموجات الكهرومغناطيسية يخضعان لنفس المعادلة الموجية ذات الصورة:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

أو  $\square u = 0$  والمتحركة بالسرعة  $v = c$ .

[٢] حل المعادلة الموجية للموجات المستوية في الفراغ:

$$\text{نعتبر المعادلة الموجية } \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ أو}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

وبفرض أن  $u$  تعتمد على إحداثي موضع واحد (وليسكن  $x$ ) بالإضافة إلى الزمن  $t$ :

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

تسمى الموجات في هذه الحالة بالموجات المستوية (plane waves). ولحل المعادلة (1) للموجات المستوية:

$$\text{نفرض أن } \xi = t - \frac{x}{c} \quad , \quad \eta = t + \frac{x}{c}$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad , \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

وبالتعويض في (1) بالمتغيرات الجديدة: حيث أن:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \quad , \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{c} \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 1$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = c \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$= c \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( -\frac{1}{c} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left( \frac{1}{c} \right) \right] = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{--- (3)}$$

من (2), (3) بالجمع:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{--- (4)}$$

أيضاً من (2), (3) بالطرح:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{--- (5)}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad \text{المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة الآتية:}$$

$$\therefore \left( 2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \text{وباستخدام (4), (5):}$$

$$\therefore 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \therefore \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{--- (6)}$$

الحل العام لهذه المعادلة يأخذ الصورة:

$$u = u_1(\xi) + u_2(\eta) \quad \text{--- (7)}$$

حيث أنه بالتعويض من (7) في (6) تحقق المعادلة.

وبالتالي فإن المعادلات الموجية للكهرومغناطيسية  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}, \phi$  ويمكن كتابتها بالصورة:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \dots$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1(\xi) + \vec{E}_2(\eta), \quad \vec{H} = \vec{H}_1(\xi) + \vec{H}_2(\eta), \dots$$

وحلولها هي:

$$u = u_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + u_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

وبوجه عام فإن:

حيث يمثل الحد  $u_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$  موجة مستوية تتحرك بسرعة  $c$  في الإتجاه الموجب

لمحور  $x$  (موجة ساقطة)، بينما يمثل الحل  $u_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$  موجة مستوية تتحرك في

الإتجاه السالب لمحور  $x$  (موجة منعكسة).

### [3] الموجات المستوية أحادية اللون: Plane Monochromatic Waves

إذا كان مجال الموجات الكهرومغناطيسية يمثل بدالة دورية بسيطة في الزمن

فإن تلك الموجات تسمى أحادية اللون (مونوكروماتية) وتمثلها العلاقات:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\phi}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\phi}$$

حيث  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  متجهات ثابتة المقدار يسمى كل منها بالسعة (amplitude)

والكمية  $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  تسمى طور الموجة (phase).

المتجه  $\vec{k} = k \vec{n}$  يسمى المتجه الموجي حيث  $\vec{n}$  متجه الوحدة في إتجاه إنتشار

الموجة،  $k$  هو العدد الموجي الذي يرتبط بالتردد الزاوي  $\omega$  بالعلاقة  $k = \frac{\omega}{c}$

وإذا كان الطول الموجي  $\lambda = \frac{c}{\omega}$  حيث  $\omega$  هي التردد الخطي للموجة ويرتبط

بالتردد الزاوي  $\omega = 2\pi \nu$  بالعلاقة

$$\therefore k = \frac{w}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

في حالة الموجات المستوية (المجال يتغير مع الإحداثي  $x$  والزمن  $t$ )

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(kx-wt)} = \vec{E}_0 e^{i\left(\frac{w}{c}x-wt\right)} \\ &= \vec{E}_0 e^{-i w\left(t-\frac{x}{c}\right)} = \vec{E}_0 e^{-i w \xi}\end{aligned}$$

$$\xi = t - \frac{x}{c} \quad \text{حيث}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kx-wt)} = \vec{H}_0 e^{-i w \xi}$$

أيضاً فإن الجهدين  $\vec{A}, \phi$  يخضعان لنفس العلاقات:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{-i w \xi}, \quad \phi = \phi_0 e^{-i w \xi}$$

والآن: حيث أنه في حالة الموجة المستوية:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

ولما كانت:

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(kx-wt)}, \quad \phi = \phi_0 e^{i(kx-wt)}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i w \vec{A}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i w \phi$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = (-i w)^2 \vec{A} = -w^2 \vec{A}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-i w)^2 \phi = -w^2 \phi$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{w^2}{c^2} \vec{A} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{w^2}{c^2} \phi = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + k^2 \vec{A} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k^2 \phi = 0$$

أي أن الجهدين  $\vec{A}, \phi$  يخضعان للمعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u = 0$$

التي هي معادلة الموجات أحادية اللون.

[٤] الطبيعة المستعرضة للموجات الكهرومغناطيسية:

(العلاقة بين  $\vec{E}, \vec{H}$  للموجات المستوية)

نعتبر موجة مستوية تتحرك في الإتجاه الموجب لمحور  $x$  فنكون:

$$\vec{E} = \vec{E}(t - \frac{x}{c}) = \vec{E}(\xi) , \vec{H} = \vec{H}(\xi) , \vec{A} = \vec{A}(\xi)$$

معادلات ماكسويل لتلك الموجة هي:

$$\text{div } \vec{E} = 0 , \text{div } \vec{H} = 0 , \text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} , \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

لحل هذه المعادلات في حالة الموجات المستوية أو لإيجاد العلاقة بين  $\vec{E}, \vec{H}$  لهذه

للموجات:

الطريقة الأولى: حيث أن

$$\vec{A} = \vec{A}(\xi) , \xi = t - \frac{x}{c}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \vec{A}' \cdot (1) = \vec{A}' \quad \text{---(1)}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \vec{A}' \cdot (-\frac{1}{c}) = -\frac{1}{c} \vec{A}' \quad \text{---(2)}$$

وبإختبار الجهدين  $\phi, \vec{A}$  بحيث أن  $\phi = 0$  (حيث أن  $\rho = 0$ )

$$\therefore \text{div } \vec{A} = 0$$

وهو شرط لورنتز في هذه الحالة.

$$\therefore \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{A}' \quad \text{---(3)}$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (\vec{n} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \vec{A}) \\ &= (\vec{n} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}) = -\frac{1}{c} (\vec{n} \wedge \vec{A}') \end{aligned} \quad \text{---(4)}$$

وذلك باستخدام (2), (1) واعتبار أن  $\vec{\nabla} = \vec{n} \frac{\partial}{\partial x}$

حيث  $\vec{n}$  هو متجه الوحدة في اتجاه إنتشار الموجة المستوية (في إتجاه  $x$ ) من (4), (3) نحصل على:

$$\vec{H} = (\vec{n} \wedge \vec{E}) \quad \text{_____ (5)}$$

وهذا يعني أن المجال المغنطيسي  $\vec{H}$  للموجة المستوية يكون عمودياً على كل من المجال الكهربائي  $\vec{E}$  واتجاه إنتشار الموجة  $\vec{n}$ .

طريقة أخرى: حيث أنه يمكن التعبير عن الموجات المستوية بالعلاقات الآتية:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{_____ (6)}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{_____ (7)}$$

$$\text{curl}(\phi \vec{A}) = \phi \text{curl} \vec{A} - \vec{A} \wedge \text{grad} \phi \quad \text{فباعتبار أن}$$

وبأخذ  $\text{curl}$  للعلاقة (6):

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl} \vec{E} &= \text{curl}(\vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \\ &= e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \cdot (\text{curl} \vec{E}_0) - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \\ &= 0 - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \end{aligned}$$

حيث  $\text{curl} \vec{E}_0 = 0$  ،  $\vec{E}_0$  متجه ثابت

$$\begin{aligned} \therefore \text{curl} \vec{E} &= -\vec{E}_0 \wedge (i\vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \\ &= -i(\vec{E}_0 \wedge \vec{k}) = i(\vec{k} \wedge \vec{E}_0) = ik(\vec{n} \wedge \vec{E}) \quad \text{_____ (8)} \end{aligned}$$

ولكن:

$$\text{curl} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} (-i\omega) \vec{H} = \frac{i\omega}{c} \vec{H} \quad \text{_____ (9)}$$

بمساواة (9), (8) نحصل على:

$$\frac{i\omega}{c} \vec{H} = ik(\vec{n} \wedge \vec{E})$$

$$\therefore \vec{H} = (\vec{n} \wedge \vec{E})$$

حيث  $k = \frac{\omega}{c}$  وهي نفس العلاقة (5).

أيضاً: بأخذ  $\text{div}$  للعلاقة (6):

$$\begin{aligned} \therefore \operatorname{div} \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \\ &= i \vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i \vec{k} \cdot \vec{E} = i k (\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0 \end{aligned}$$

حيث  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

$$\therefore (\vec{n} \cdot \vec{E}) = 0 \quad \text{_____ (10)}$$

وهذا يعني أن  $\vec{E}$  يكون متعامداً مع إتجاه إنتشار الموجة  $\vec{n}$ .

وعلى هذا الأساس يمكن القول بأنه:

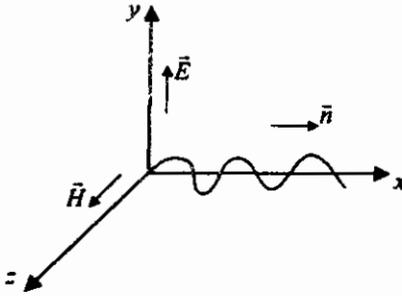
في حالة الموجات

الكهرومغناطيسية المستوية فإن

المنجهين  $\vec{E}, \vec{H}$  يقعان في

مستوى واحد عمودي على إتجاه

إنتشار الموجة.



ولذلك فإن تلك الموجات تسمى بالموجات المستعرضة (Transverse Waves)

أيضاً من العلاقة (5) يمكننا كتابة العلاقتين:

$$(\vec{E} \cdot \vec{H}) = 0 \quad \text{_____ (11)}$$

حيث أن  $\vec{E}, \vec{H}$  متعامدان.

$$|\vec{H}| = |\vec{n} \wedge \vec{E}| = |\vec{n}| |\vec{E}| \sin \frac{\pi}{2} = |\vec{E}| \quad \text{_____ (12)}$$

أي أن القيمة العددية للمجالين  $\vec{E}, \vec{H}$  واحدة.

وبالنسبة لطاقة الموجات الكهرومغناطيسية:

كثافة الطاقة هي:

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi} \quad \text{_____ (13)}$$

حيث أن  $E = H$ .

وهذا يعني أن كثافة الطاقة الكهربائية تساوي كثافة الطاقة المغناطيسية ويكون فيض

الطاقة (متجه بوينتج):

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{E})]$$

$$= \frac{c}{4\pi} [E^2 \vec{n} - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{E}] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n}$$

حيث  $E = H$  ،  $(\vec{E} \cdot \vec{n}) = 0$

$$\therefore \vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} \left( \frac{E^2 + H^2}{2} \right) \vec{n} = c \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) \vec{n} = cW \vec{n} \quad \text{--- (14)}$$

ومنها يتضح أن: فيض الطاقة يكون في اتجاه إنتشار الموجة  $\vec{n}$  وأن المجال يتحرك بإشعاع (موجات من الطاقة) سرعته هي سرعة الضوء (c).  
وأخيراً فإن كمية حركة الموجات الكهرومغناطيسية المستوية يكون:

$$\vec{P} = \frac{1}{c^2} \vec{\gamma} = \frac{1}{c} W \vec{n} \quad \text{--- (15)}$$

[٥] إستقطاب الموجات التوافقية المستوية:

### Polarization of a plane harmonic waves

تعرف الموجات التوافقية المستوية بأنها الموجات التي تكون فيها الدالة  $\vec{E}(\xi)$  دالة توافقية بحيث يأخذ الحل العام الصورة التالية:

$$\vec{E} = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{-i\omega\xi}] = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}] = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}]$$

حيث  $\vec{E}_0$  هو متجه مركب يمكن كتابته مثلاً بالصورة:

$$\vec{E}_0 = \vec{b} e^{-i\alpha}$$

$$\therefore \vec{E} = \text{Re}[\vec{b} e^{i(kx - \omega t - \alpha)}] \quad \text{--- (1)}$$

وبكتابة الموجة  $\vec{b}$  بالصورة:

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2$$

حيث  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  متجهان حقيقيان. ويكون مربع  $\vec{b}$  أي:

$$\vec{b}^2 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2)^2 = \vec{b}_1^2 + \vec{b}_2^2 + 2i(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)$$

هو أيضاً كمية حقيقية بحيث أن  $(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2) = 0$  أي أن المتجهان  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  هما متجهان متعامدان.

$$\vec{E} = \text{Re} [(\bar{b}_1 + i\bar{b}_2) e^{i(kx - \omega t - \alpha)}] = \text{Re}[(\bar{b}_1 + i\bar{b}_2) e^{-i\psi}]$$

$$\psi = \omega t - kx + \alpha \quad \text{حيث}$$

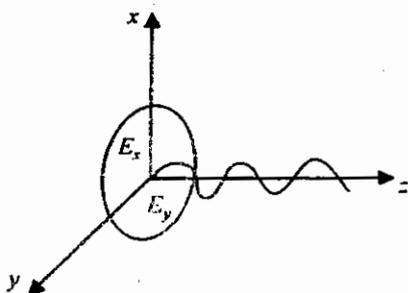
$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= \text{Re} [(\bar{b}_1 + i\bar{b}_2) (\cos \psi - i \sin \psi)] \\ &= \text{Re}[\bar{b}_1 \cos \psi + \bar{b}_2 \sin \psi - i(\bar{b}_1 \sin \psi - \bar{b}_2 \cos \psi)] \\ &= \bar{b}_1 \cos \psi + \bar{b}_2 \sin \psi \end{aligned}$$

إذا أخذنا  $\bar{b}_1$  في إتجاه محور  $x$  و  $\bar{b}_2$  في إتجاه محور  $y$  وإتجاه إنتشار الموجة في إتجاه محور  $z$  فإننا نحصل على:

$$E_x = |\bar{b}_1| \cos \psi, \quad E_y = |\bar{b}_2| \sin \psi$$

$$\therefore \frac{E_x}{|\bar{b}_1|} = \cos \psi, \quad \frac{E_y}{|\bar{b}_2|} = \sin \psi$$

$$\therefore \frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1 \quad \text{--- (2)}$$



ومن تلك المعادلة يتضح أن متجه المجال الكهربائي يدور في المستوى  $(xy)$  عمودياً على إتجاه إنتشار الموجة راسماً قطعاً ناقصاً (أو إهليلج).

تسمى مثل تلك الموجة بالموجة

المستقطبة إهليلجياً (أو ناقصياً) Elliptically Polarized وتمثل هذه الحالة الصورة العامة للموجة التوافقية المستوية المعطاة بالعلاقة (1).

### حالات خاصة:

(1) إذا كانت  $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$  فإن القطع الناقص (2) يتحول إلى دائرة حيث تكون المركبتان  $E_x, E_y$  متساويتان، ويصبح المتجه المحصل  $\vec{E}$  ذو قيمة ثابتة ويدور في المستوى  $(x, y)$  راسماً دائرة. وتسمى الموجة في هذه الحالة

بالموجة المستقطبة دائرياً Circularly Polarized وبالنسبة لملاحظ أو مراقب يشاهد الموجة الآتية فإن نهاية المتجه الكهربائي المحصل سوف تظهر كأنها تتحرك في دائرة، أو أن المحل الهندسي لنهاية المتجه المحصل لكل من  $E_x, E_y$  هو دائرة.

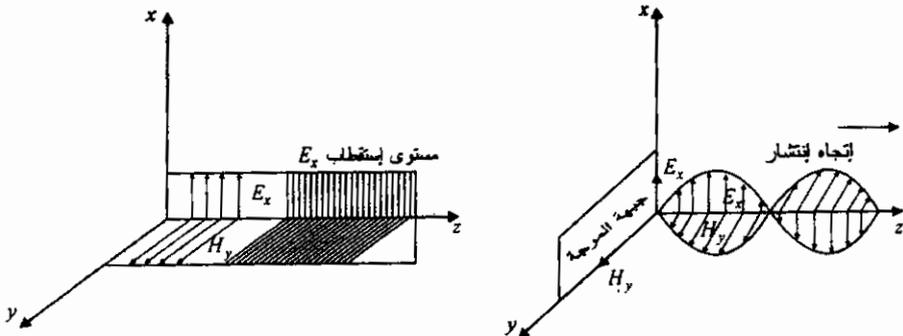
(٢) إذا كانت  $\vec{b}_1 = 0$  أو  $\vec{b}_2 = 0$  فإن نبذبات المجال  $\vec{E}$  تحدث في مستوى واحد. وتسمى مثل تلك الموجة بالموجة المستقطبة في المستوى (plane Polarized)، فمثلاً إذا كانت  $E_x$  موجودة، فإن الموجة تكون مستقطبة في الإتجاه  $x$ ، وإذا كانت  $E_y$  موجودة، فإن الموجة تكون مستقطبة في الإتجاه  $y$ .

ويلاحظ أن في حالة الإستقطاب الناقصي أو الدائري فإن كلا من  $E_x, E_y$  تكون موجودة.

في حالة الموجات المستقطبة في المستوى  $(xy)$  فإن هذا المستوى الذي يحتوي على  $E_x, H_y$  يسمى جبهة الموجة (Wave front)، ومعادلته هي

$$z = \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.}$$

إذا كانت  $E_x$  موجودة،  $E_y = 0$  أي حالة الموجة المستقطبة في الإتجاه  $x$  فإن المستوى  $(xz)$  يكون هو مستوى إستقطاب  $E_x$ .



[6] إنتشار الموجات الكهرومغناطيسية في وسط عازل متماثل

Isotropic dielectric

لندرس الآن إنتشار الموجات الكهرومغناطيسية في وسط عازل متماثل (أيزوتروبي) له ثابت عازل  $\epsilon$  ونفاذية  $\mu$  ثابتان. في حالة العازل المثالي فإن معامل التوصيل  $\sigma = 0$  وفي غياب الشحنات فإن  $\rho = 0$  وتصبح معادلات ماكسويل:

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{حيث: } \vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\therefore \text{div } \epsilon \vec{E} = 0 \quad \text{--- (1)} \quad , \quad \text{div } \mu \vec{H} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{--- (3)} \quad , \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{--- (4)}$$

بضرب (4) في  $\mu$  وأخذ  $\text{curl}$  للطرفين.

$$\therefore \text{curl curl } \mu \vec{H} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \vec{E})$$

وباستخدام العلاقة:

$$\text{curl curl} = \text{grad div} - \nabla^2$$

واعتبار العلاقتين (3), (4) نحصل على:

$$\text{grad div } \mu \vec{H} - \nabla^2 \mu \vec{H} = \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{--- (5)}$$

أيضاً من (3) بالضرب في  $\epsilon$  وأخذ  $\text{curl}$  الطرفين واستخدام (4), (1):

$$\therefore \text{curl curl } \epsilon \vec{E} = -\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \vec{H})$$

$$\therefore \text{grad div } \epsilon \vec{E} - \nabla^2 \epsilon \vec{E} = -\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \nabla^2 \bar{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{---(6)}$$

من (5), (6) نرى أن المجالين الكهربائي والمغناطيسي يحققان المعادلة الموجية

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

حيث  $v$  سرعة إنتشار الموجة وتعطي من:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \rightarrow v^2 = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \rightarrow \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}}$$

حيث  $c$  سرعة الضوء في الفراغ.

في حالة الموجات المستوية أحادية اللون:

تأخذ المعادلتان (5), (6) الصورة:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{---(7)}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{---(8)}$$

ويكون حل هاتين المعادلتين له الصورة:

$$\bar{E}(x,t) = \bar{E}_0(x) e^{-i\omega t} \quad \text{---(9)}$$

$$\bar{H}(x,t) = \bar{H}_0(x) e^{-i\omega t} \quad \text{---(10)}$$

من (9) فإن:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{E}_0}{\partial x} \cdot e^{-i\omega t} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{E}_0}{\partial x^2} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = (-i\omega) \bar{E}_0 e^{-i\omega t} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$$

وبالتعويض في (7):

$$\therefore \frac{\partial^2 \bar{E}_0}{\partial x^2} e^{-i\omega t} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} (-\omega^2) \bar{E}_0 e^{-i\omega t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \bar{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} \bar{E}_0 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \bar{E}_0}{\partial x^2} + k_w^2 \bar{E}_0 = 0 \quad \text{_____ (11)}$$

حيث  $k_w = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$  هو العدد الموجي في حالة الوسط العازل.

الحل العام للمعادلة (11) هو:

$$\bar{E}_0(x) = \bar{a}_1 e^{ik_w x} + \bar{a}_2 e^{-ik_w x} \quad \text{_____ (12)}$$

بالتعويض من (12) في (9):

$$\therefore \bar{E}(x, t) = [\bar{a}_1 e^{ik_w x} + \bar{a}_2 e^{-ik_w x}] e^{-i\omega t} = \bar{a}_1 e^{-i(\omega t - k_w x)} + \bar{a}_2 e^{-i(\omega t + k_w x)}$$

الحد الأول يمثل موجة تنتشر في الإتجاه الموجب لمحور  $x$ ، بينما يمثل الحد الثاني موجة تنتشر في الإتجاه السالب لمحور  $x$  (موجة منعكسة).

بالنسبة للمجال المغنطيسي فإن حل المعادلة (10) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة:

$$\bar{H}(x, t) = \bar{b}_1 e^{-i(\omega t - k_w x)} + \bar{b}_2 e^{-i(\omega t + k_w x)}$$

وباعتبار الموجات متحركة في الإتجاه الموجب لمحور  $x$  فقط فإن:

$$\bar{E}(x, t) = \bar{a}_1 e^{-i(\omega t - k_w x)} = \bar{E}_0 e^{i(k_w x - \omega t)}$$

$$\bar{H}(x, t) = \bar{b}_1 e^{-i(\omega t - k_w x)} = \bar{H}_0 e^{i(k_w x - \omega t)}$$

في حالة الموجة المستوية المتحركة في إتجاه المتجه  $\bar{k}_w$  حيث  $\bar{k}_w = k_w \bar{n}$ ، فإن:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}_0 e^{i(\bar{k}_w \cdot \bar{r} - \omega t)}$$

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \bar{H}_0 e^{i(\bar{k}_w \cdot \bar{r} - \omega t)}$$

حيث  $\bar{r}$  هو متجه الموضع المرسوم من نقطة أصل ثابتة 0.

ويكون المستوى  $\bar{k}_w \cdot \bar{r} = 0$  هو جبهة الموجة.

إذا اعتبرنا السطح  $\phi = \vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt = const$  فإن سرعة إنتشار هذا السطح ذو الطور الثابت ( $\phi = c$ ) تسمى سرعة الطور (phase velocity) للموجة، ويمكن الحصول عليه بتفاضل معادلة السطح بالنسبة للزمن.

$$k_w x - wt = const.$$

$$\therefore k_w \frac{dx}{dt} - w = 0 \rightarrow v = \frac{dx}{dt} \quad \text{حيث}$$

$$\therefore k_w v - w = 0 \quad \therefore v = \frac{w}{k_w} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

ولإيجاد العلاقة بين  $\vec{E}, \vec{H}$  في حالة المادة العازلة:

حيث أن  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}$ ، فباخذ  $curl$  الطرفين، وإعتبار أن:

$$curl(\phi \vec{A}) = \phi curl \vec{A} - \vec{A} \wedge grad \phi$$

$$\therefore curl \vec{E} = curl[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}]$$

$$= (e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}) \cdot (curl \vec{E}_0) - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla}(e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)})$$

$$= 0 - \vec{E}_0 \wedge i \vec{k}_w e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)}$$

$$= -i (\vec{E}_0 \wedge \vec{k}_w) e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)} \quad \left| curl \vec{E}_0 = 0 \right.$$

$$= -i (\vec{E} \wedge \vec{k}_w) = i (\vec{k}_w \wedge \vec{E})$$

$$= i k_w (\vec{n} \wedge \vec{E}) \quad \text{_____ (1)}$$

حيث  $\vec{k}_w = k_w \vec{n}$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -iw \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}_w \cdot \vec{r} - wt)} = -iw \vec{H} \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore curl \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} (-iw \vec{H}) = \frac{iw\mu}{c} \vec{H} \quad \text{_____ (2)}$$

بمساواة (1)، (2)، نحصل على:

$$i k_w (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{iw\mu}{c} \vec{H}$$

$$\therefore (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{w\mu}{c k_w} \vec{H}$$

ولما كان  $k_w = \frac{w}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$

$$\therefore \frac{k_w c}{w} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

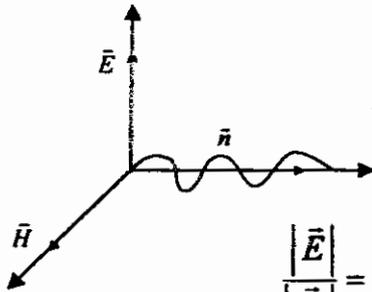
$$\therefore (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon \mu}} \vec{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}$$

$$\therefore \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{n} \wedge \vec{E}) \quad \text{---(3)}$$

ومن ذلك يتضح أن  $\vec{H}$  يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي كل من  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$  بحيث تكون المتجهات  $\vec{H}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$  نظاماً يمينياً كما هو مبين بالشكل، وبحيث أن  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  يقعان في مستوى عمودي على اتجاه إنتشار الموجة  $\vec{n}$ . وبأخذ القيمة العددية من العلاقة (3)، فإن:

$$\sqrt{\epsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}| \leftarrow |\vec{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|$$

وتكون النسبة بين  $|\vec{E}|$ ,  $|\vec{H}|$  هي:



$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

أي أنها تساوي الجذر التربيعي للنسبة بين  $\mu$ ,  $\epsilon$ .

تسمى هذه النسبة عادة بالمعاوقة الذاتية للوسط (Z) (intrinsic impedance)

وبذلك فإن:

$$\frac{E}{H} = Z \quad \therefore E = Z H \quad \text{---(4)}$$

وتكون كثافة الطاقة الكهربائية لها نفس قيمة الكثافة المغناطيسية حيث:

$$W = \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}$$

وذلك لأن  $\epsilon E^2 = \mu H^2$

$$\therefore \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$$

كما أن كثافة فيض الطاقة للموجات الكهرومغناطيسية (أو متجه بوينتج) يعطي من:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$\therefore |\vec{\gamma}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E} \wedge \vec{H}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}| |\vec{H}| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H^2$$

$$\therefore |\vec{\gamma}| = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = v \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = vW$$

حيث  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  هي سرعة الطور للموجات المستوية و  $W$  هي كثافة الطاقة

للمجال الكهرومغناطيسي المولد لتلك الموجات.

### [V] إنتشار الموجات الكهرومغناطيسي في وسط موصل

#### (ثابت العازل المركب - Complex dielectric const.)

نعتبر وسطاً موصلاً متمائلاً ( $\mu = \text{const.}$  ,  $\epsilon = \text{const.}$  ,  $\sigma = \text{const.}$ )

معادلات ماكسويل لهذا الوسط هي:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad \text{--- (1)} \quad , \quad \text{div } \mu \vec{H} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{--- (3)} \quad , \quad \text{curl } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \quad \text{--- (4)}$$

حيث  $\sigma \vec{E}$  يمثل تيار التوصيل.

باستخدام تلك المعادلات وبنفس الطريقة السابقة في بند (٦) يمكننا إثبات أن

المجالين الكهربائي والمغناطيسي  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  يخضعان لنفس العلاقة والتي صورتها:

$$\nabla^2 \vec{u} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0.$$

حيث  $\vec{u} = \vec{E}, \vec{H}$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \text{--- (5)}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{---(6)}$$

وبكتابة

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \vec{E}_0(x) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \vec{H}_0(x) e^{-i\omega t}$$

وبالتعويض في (5) باعتبار أنه للموجه المستوية فإن:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial x} e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} e^{-i\omega t} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}) - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} (-i\omega \vec{E}_0 e^{-i\omega t}) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\epsilon \mu \omega^2}{c^2} \vec{E}_0 + i \frac{4\pi \sigma \mu \omega}{c^2} \vec{E}_0 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \vec{E}_0(x)}{dx^2} + \frac{\mu \omega^2}{c^2} \left( \epsilon + i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \right) \vec{E}_0(x) = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \vec{E}_0(x)}{dx^2} + \gamma^2 \vec{E}_0(x) = 0 \quad \text{---(7)}$$

حيث:

$$\gamma^2 = \frac{\mu \omega^2}{c^2} \left( \epsilon + i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \right)$$

$$\therefore \gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \left( \epsilon + i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \right)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \epsilon_w}$$

يسمى ثابت الإنتشار Propagation constant

وينظر العدد الموجي  $k$  في حالة الفراغ والعدد  $k_w$  في حالة العازل

$$\epsilon_w = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

يسمى ثابت العازل المركب (complex dielectric const.) للوسط الموصل. ويؤول إلى  $\epsilon$  في حالة الوسط غير الموصل (حيث  $\sigma = 0$ ).

المعادلة (7) يمكن كتابتها في الصورة:

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} + \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad \text{---(8)}$$

وذلك بضرب الطرفين في  $e^{-i\omega t}$  وإعتبار أن  $\vec{E} = \vec{E}_0(x)e^{-i\omega t}$  وفي حالة الحركة في الفراغ ذو الثلاثة أبعاد فإن:

$$\nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad \text{---(9)}$$

ويلاحظ أن: الحل العام للمعادلة (8) هو:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\gamma x - \omega t)}$$

بينما الحل العام للمعادلة (9) هو:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

حيث  $\vec{\gamma} = \gamma \vec{n}$  هو المتجه المناظر للمتجه  $\vec{k} = k \vec{n}$  في حالة الفراغ و  $\vec{k}_w = k_w \vec{n}$  في حالة العازل.

أيضاً فإن:

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{E} &= \text{curl} [\vec{E}_0 e^{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \\ &= (e^{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \text{curl } \vec{E}_0 - \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla} (e^{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r} - \omega t)}) \\ &= -i(\vec{E}_0 \wedge \vec{\gamma}) e^{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= -i(\vec{E} \wedge \vec{\gamma}) = i\gamma(\vec{n} \wedge \vec{E}) \end{aligned} \quad \text{---(10)}$$

وحيث أن

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu}{c} (-i\omega \vec{H}) = \frac{i\omega \mu}{c} \vec{H} \end{aligned} \quad \text{---(11)}$$

فبمساواة (10), (11) نحصل على:

$$i\gamma(\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{iw\mu}{c} \vec{H}$$

$$\therefore (\vec{n} \wedge \vec{E}) = \frac{w\mu}{c\gamma} \vec{H} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon_w}} \vec{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_w}} \vec{H} \quad \text{_____ (12)}$$

حيث أن:

$$\gamma = \frac{w}{c} \sqrt{\mu\epsilon_w}$$

$$\therefore \frac{c\gamma}{w} = \sqrt{\mu\epsilon_w} \quad , \quad \epsilon_w = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{w}$$

$$\therefore \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_w}{\mu}} (\vec{n} \wedge \vec{E}) \quad \text{_____ (13)}$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{n} \wedge \vec{E})$$

وهي العلاقة المناظرة للعلاقة:

في حالة الوسط العازل.

أيضاً فإن ثابت الانتشار  $\gamma$  هو:

$$\gamma = \frac{w}{c} \sqrt{\mu\epsilon_w} = \frac{w}{c} \sqrt{\mu(\epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{w})}$$

فبتربيع الطرفين:

$$\therefore \gamma^2 = \frac{w^2}{c^2} \cdot (\mu\epsilon_w) = \frac{w^2}{c^2} \mu\epsilon + i \frac{4\pi\sigma\mu w}{c^2} \quad \text{_____ (14)}$$

وبوضع  $\gamma = \alpha + i\beta$ ، فإن المعادلة (14) تصبح:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 = \frac{1}{c^2} (w^2 \mu\epsilon + i \cdot 4\pi\sigma\mu w)$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في الطرفين نحصل على:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{c^2} w^2 \mu\epsilon \quad \text{_____ (15)}$$

$$2\alpha\beta = \frac{1}{c^2} \cdot 4\pi\sigma\mu w \quad \text{_____ (16)}$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$\alpha^2 = \frac{w^2 \epsilon \mu}{2c^2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{w\epsilon} \right)^2} + 1 \right] \quad \text{---(17)}$$

$$\beta^2 = \frac{w^2 \epsilon \mu}{2c^2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{4\pi\sigma}{w\epsilon} \right)^2} - 1 \right] \quad \text{---(18)}$$

البرهان: من (15): بوضع  $a = \alpha^2 - \beta^2$  ،  $2\alpha\beta = b$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{b}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{b}{2\beta} \quad , \quad \beta = \frac{b}{2\alpha}$$

$$a = \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 - \frac{b^2}{4\alpha^2}$$

$$\therefore 4\alpha^2 a = 4\alpha^4 - b^2$$

$$\therefore 4\alpha^4 - 4\alpha^2 a - b^2 = 0$$

$$\therefore \alpha^4 - \alpha^2 a - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$\therefore \alpha^4 - \alpha^2 a + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

بإكمال المربع:

$$\therefore (\alpha^2 - \frac{a}{2})^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} (1 + \frac{b^2}{a^2})$$

وبأخذ الجذر التربيعي:

$$\therefore \alpha^2 - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right] \quad \text{---[I]}$$

ايضاً حيث أن:

$$\alpha^2 - \beta^2 = a$$

$$\therefore \beta^2 - \alpha^2 + a = 0$$

$$\therefore \beta^2 - \frac{b^2}{4\beta^2} + a = 0$$

$$\therefore \beta^4 + \beta^2 a - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$\therefore \beta^4 + \beta^2 a + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{وبإكمال المربع:}$$

$$\therefore \left(\beta^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

وبأخذ الجذر التربيع:

$$\therefore \beta^2 + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + b^2/a^2}$$

$$\therefore \beta^2 = \frac{a}{2} \sqrt{1 + b^2/a^2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} [\sqrt{1 + b^2/a^2} - 1] \quad \text{--- (II)}$$

وبوضع قيم  $a, b$  في كل من (I), (II) نحصل على المعادلتين (17), (18).

### الحل العام للموجات المستوية المنتشرة في وسط متصل:

إذا كان الإنتشار يتم في إتجاه محور  $x$  مثلاً فإن هذا الحل يكون بالصورة:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\alpha x - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(\alpha + i\beta)x} e^{-i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\alpha x - \omega t)} \cdot e^{-\beta x}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\alpha x - \omega t)} = \vec{H}_0 e^{i(\alpha + i\beta)x} e^{-i\omega t} = \vec{H}_0 e^{i(\alpha x - \omega t)} \cdot e^{-\beta x}$$

### حالات خاصة:

(1) حالة الموجات المنتشرة في عازل جيد:

في حالة العازل التام (أو المثالي) فإن  $\sigma = 0$ ، أما في حالة العازل الجيد

(أو الحقيقي) فإن  $\sigma$  تكون ذات قيمة صغيرة جداً بحيث أن:  $\sigma \ll \omega \epsilon$ ، ولهذا

فإنه يمكننا كتقريب جيد أن نكتب:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} = \left(1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2$$

حيث أخذنا الحدين الأولين فقط وأهملنا الحدود الباقية نظراً لأن  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

وتؤول العلاقتان (17), (18) إلى:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{2c^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + 1\right] \\ &= \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} + \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{4c^2} \left(\frac{16\pi^2 \sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}\right) = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} \left[1 + \frac{4\pi^2 \sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha &= \frac{w}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\sigma^2}{w^2\epsilon^2}} = \frac{w}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \left(1 + \frac{4\pi^2\sigma^2}{w^2\epsilon^2}\right)^{1/2} \\ &= \frac{w}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \left(1 + \frac{2\pi^2\sigma^2}{w^2\epsilon^2}\right) = \frac{w}{v} \left(1 + \frac{2\pi^2\sigma^2}{w^2\epsilon^2}\right)\end{aligned}$$

وفي حالة العازل المثالي: فإن:  $\sigma = 0$  وبالتالي فإن:

$$\alpha = \frac{w}{v} \rightarrow \therefore \boxed{v = \frac{w}{\alpha}}$$

حيث  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  هي سرعة إنتشار الموجه في الوسط العازل.

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \frac{w^2\epsilon\mu}{2c^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi\sigma}{w\epsilon}\right)^2 - 1\right] \\ &= \frac{w^2\epsilon\mu}{2c^2} \left[\frac{8\pi^2\sigma^2}{w^2\epsilon^2}\right] = \frac{4\pi^2\mu}{c^2\epsilon} \sigma^2\end{aligned}$$

ليشاً فإن:

$$\therefore \beta = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma$$

وفي حالة العازل المثالي فإن:  $\sigma = 0$  وتكون  $\beta = 0$

$$\therefore \gamma = \alpha + i\beta = \alpha \quad \therefore v = \frac{w}{\gamma} = \frac{w}{k_w}$$

(٢) حالة إنتشار الموجات في موصل جيد:

في حالة الموصل الجيد فإن تيار التوصيل يكون كبيراً جداً بالمقارنة مع تيار الإزاحة أي أن  $\sigma \gg w\epsilon$ .

$$\therefore \epsilon_w = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{w\epsilon} = \epsilon \left[1 + i \frac{4\pi\sigma}{w\epsilon}\right] \approx i \frac{4\pi\sigma}{w}$$

حيث أهملنا الواحد بالنسبة إلى الحد الثاني نظراً لأن  $\frac{\sigma}{w\epsilon} \gg 1$

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{w^2\epsilon\mu}{2c^2} \left[\sqrt{\left(\frac{4\pi\sigma}{w\epsilon}\right)^2} + 1\right] \\ &= \frac{w^2\epsilon\mu}{2c^2} \left[\frac{4\pi\sigma}{w\epsilon} + 1\right] \approx \frac{w^2\epsilon\mu}{2c^2} \left[\frac{4\pi\sigma}{w\epsilon}\right] = \frac{2\pi w\mu}{c^2} \sigma\end{aligned}$$

ويكون:

$$\therefore \alpha = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi w \mu \sigma}$$

$$\beta^2 = \frac{w^2 \varepsilon \mu}{2c^2} [\sqrt{\left(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}\right)^2 - 1}] \approx \frac{w^2 \varepsilon \mu}{2c^2} \left[\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}\right] \approx \frac{2\pi w \mu}{c^2} \sigma$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi w \mu \sigma} = \alpha$$

وتؤول العلاقة  $\gamma = \alpha + i\beta$  في حالة الموصل الجيد إلى:

$$\gamma = \alpha + i\alpha = (1+i)\alpha$$

وبوضع  $\delta = \frac{1}{\alpha}$  الذي يسمى بعمق النفاذ (penetration depth) أو العمق السطحي (skin depth).

$$\therefore \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{c}{\sqrt{2\pi w \mu \sigma}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \gamma &= (1+i)\alpha = \frac{1+i}{\delta} \\ &= \frac{1+i}{c} \sqrt{2\pi w \mu \sigma} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{c} \sqrt{\pi w \mu \sigma}\right) \end{aligned}$$

ولكن:

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (i)^{1/2} &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \gamma = (i)^{1/2} \left(\frac{2}{c} \sqrt{\pi w \mu \sigma}\right) = \frac{2}{c} \sqrt{i \pi w \mu \sigma}$$

أيضاً: إذا كانت  $\gamma = \frac{w}{c} \sqrt{\mu \varepsilon_w}$

تمثل ثابت الإنشار في الوسط الموصل ويرتبط بالطول الموجي  $\lambda$  بالعلاقة

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ الشهيرة}$$

$$\therefore \frac{w}{c} \sqrt{\mu \epsilon_w} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \therefore w = \frac{2\pi c}{\lambda \sqrt{\mu \epsilon_w}}$$

حيث  $\epsilon_w$  هو ثابت العازل المركب في الوسط الموصل.

$$\begin{aligned} \therefore \delta &= \frac{c}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{2\pi c}{\lambda \sqrt{\mu \epsilon_w}} \cdot \mu \sigma}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_w}}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\lambda} Z}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c\lambda}{\sigma Z}} \quad \text{---} (*) \end{aligned}$$

حيث  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_w}}$  تسمى معاوقة السطح (Surface impedance) للوسط

الموصل أو المعاوقة الذاتية (intrinsic impedance) وتعتمد على خواص الوسط نفسه.

ملحوظة هامة: من العلاقة (\*) إذا كان تردد الموجات  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ، فإن  $c\lambda = \frac{c^2}{\nu}$

وتؤول هذه العلاقة إلى:

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2/\nu}{\sigma Z}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\sigma Z \nu}} = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\sigma Z \nu}}$$

ومنها يتضح أن عمق النفاذ ( $\delta$ ) يتناسب عكسياً مع معامل التوصيل  $\sigma$  ومع معاوقة السطح  $Z$ . كما أن  $\delta$  تقل في تناسب عكسي مع الجذر التربيعي للتردد. ويلاحظ أن قيمة  $\delta$  تكون صغيرة جداً للموصلات الجيدة عند الترددات العالية، وتسمى هذه الظاهرة بالظاهرة السطحية (skin effect).

وأخيراً فإن الحل العام للمعادلة الموجية يمكن كتابته في حالة الموصل الجيد بالصورة:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\nu x} = \vec{E}_0 e^{i(\alpha+i\beta)x} = \vec{E}_0 e^{-\beta x} e^{i\alpha x}$$

$$\text{ولكن } \alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi w \mu \sigma}$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta)} \quad \text{---} (**)$$

ومنها نرى أن سعة الموجه تضمحل مع المسافة أي تضمحل كلما نفذت السرجه في الوسط بحيث تصبح نسبة مهملة من الموجه الساقطة عند المسافات الصغيرة جداً. وإذا نفذت الموجه إلى مسافة  $\delta$  في الوسط الموصل فإن السعة تضمحل (أو تقل) إلى  $e^{-1}$  أي إلى  $\frac{1}{e}$  أي إلى نحو 37% من قيمتها الأصلية (الأولية). ومنتقل بعد ذلك إلى عدد من الأمثلة المحلولة على الموجات الكهرومغناطيسية.

أمثلة محلولة على الموجات الكهرومغناطيسية

مثال (1): أثبت أن الموجه الكهرومغناطيسية المستقطبة في المستوى

$$\vec{H} = \vec{k} e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t)} \quad \text{تحقق العلاقة } \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \text{إذا كانت } \vec{n} \text{ عمودية على } \vec{k}$$

فقط أي إذا كانت  $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$  حيث  $\vec{k}$  هو متجه الوحدة في اتجاه  $z$ ،  $\vec{n}$  متجه الوحدة في اتجاه إنتشار الموجه.

الحل: نفرض أن

$$\vec{H} = (H_1, H_2, H_3), \quad \vec{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad \vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

في الإحداثيات الكرتيزية للمتعامدة فإن:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = n_1 x + n_2 y + n_3 z$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [k_1 e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t)}] = i n_1 k_1 e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t)}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y} = i n_2 k_2 e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t)}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial z} = i n_3 k_3 e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t)}$$

$$\therefore i(n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3) e^{i(\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t)} = \operatorname{div} \vec{H}$$

العلاقة  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  يجب أن تحقق العلاقة:

$$n_1 k_1 + n_2 k_2 + n_3 k_3 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$$

أي

أي أن  $\vec{H}$  المعطاة تحقق العلاقة  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  إذا كان فقط  $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$  أي إذا كانت  $\vec{n}$  عمودية على  $\vec{k}$ .

وهذا يعني أنه في الموجات الكهرومغناطيسية المستقطبة في المستوى (plane polarized waves) فإن المجال المغناطيسي يكون عمودياً على اتجاه إنتشار الموجه.

**مثال (٢):** باستخدام معادلات ماكسويل اشتق المعادلة الموجية للمجال الكهربائي  $\vec{E}$  لموجة مستوية تنتشر في الإتجاه الموجب لمحور  $z$  في الفراغ الحر. فإذا كان المجال الكهربائي في إتجاه محور  $x$ . وباعتبار التغير التوافقي حيث المجال الكهربائي يعطى بالعلاقة  $E_x = E_0 e^{-i\omega t}$ ، أوجد الحل العام للمعادلة السابقة.

**الحل:** من معادلة ماكسويل الثالثة:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

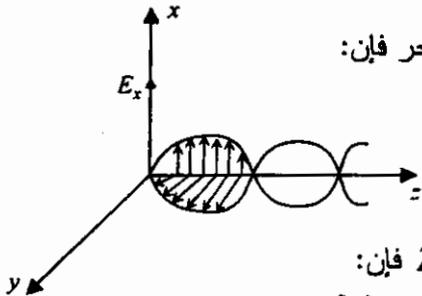
بأخذ  $\text{curl}$  للطرفين:

$$\text{curl curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{curl } \vec{H})$$

$$\therefore \text{grad} \cdot \text{div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{حيث } \text{curl } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ولما كانت  $\text{div } \vec{E} = 0$  في حالة الفراغ الحر فإن:



$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

وإذا كان المجال  $E_x$  ينتشر في الإتجاه  $Z$  فإن:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{--- (1)}$$

$$E_x = E_0 e^{-i\omega t}$$

وفي حالة التغير التوافقي فإن:

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial t} = -i\omega E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 E_0 e^{-i\omega t} = -\omega^2 E_x$$

وباعتبار الانتشار للمجال  $E_x$  في الإتجاه  $z$  فإنه بالتعويض في (1):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} (-w^2 E_x) = -\frac{w^2}{c^2} E_x$$

$$\therefore \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{w^2}{c^2} E_x = 0 \quad \text{---(2)}$$

الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الجزئية هو:

$$E_x = E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) \quad \text{---(3)}$$

ولإثبات ذلك: نوجد  $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$  من هذه العلاقة ونقارن مع (2):

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z} = -E_0 \sin w(t - \frac{z}{c}) \cdot (-\frac{w}{c}) = \frac{w}{c} E_0 \sin w(t - \frac{z}{c})$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{w}{c} E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) \cdot (-\frac{w}{c})$$

$$= -\frac{w^2}{c^2} E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) = -\frac{w^2}{c^2} E_x$$

$$\therefore \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{w^2}{c^2} E_x = 0$$

وهي نفس العلاقة (2)، أي أن (3) يمثل الحل العام للعلاقة (2)، وهو المطلوب.

**مثال (3):** إذا كانت مركبات متجه شدة المجال الكهربائي لموجه كهرومغناطيسية في

$$E_x = E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = 0$$

أوجد العلاقات الخاصة بمركبات شدة المجال المغناطيسي.

أحسب متجه بوينتج الذي يمثل فيض الطاقة خلال وحدة المساحات ومن ذلك

أثبت أن المتوسط الزمني لهذا المتجه يعطي من:

$$\bar{\gamma}_{av} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \bar{k}$$

حيث  $\bar{k}$  متجه الوحدة في إتجاه  $z$  (إتجاه إنتشار الموجه).

الحل: حيث أن:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\text{curl } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{k} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

ولما كانت  $E_x$  تعتمد على  $z$  فقط (تنتشر في إتجاه  $z$ )

$$\text{curl } \vec{E} = \vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \text{فإن } \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{ويكون:}$$

بالتعويض في (1):

$$\therefore \vec{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \vec{j}$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial H_y}{\partial t} = -c \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \text{_____ (2)}$$

وبالتعويض عن  $E_x$  في (2):

$$\therefore \frac{\partial H_y}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial z} [E_0 \cos w(t - \frac{z}{c})]$$

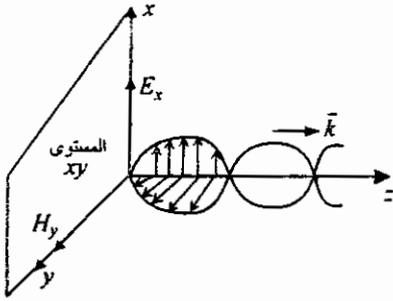
$$= c \cdot (-\frac{w}{c}) E_0 \sin w(t - \frac{z}{c}) = -w E_0 \sin w(t - \frac{z}{c})$$

وبالتكامل بالنسبة للزمن:

$$\therefore H_y = -w E_0 \int_0^t \sin w(t - \frac{z}{c}) dt$$

$$= w E_0 \cdot \frac{\cos w(t - \frac{z}{c})}{w} = E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) \quad \text{_____ (3)}$$

وبالنسبة للمركبتين  $H_x, H_z$  فإن كليهما يساوي صفراً .



تمثل العلاقة (3) موجة مستوية

حيث  $\vec{E}, \vec{H}$  يقعان في المستوى  $(xy)$

العمودي على إتجاه إنتشار الموجه  $(\vec{k})$ .

متجه بويننتج أو فيض الطاقة خلال

وحدة المساحات يعطي من:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} [(E_x \vec{i}) \wedge (H_y \vec{j})] \\ &= \frac{c}{4\pi} E_x H_y (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \frac{c}{4\pi} E_x H_y \vec{k} \quad \text{--- (4)}\end{aligned}$$

أي أن متجه بويننتج يكون في إتجاه إنتشار الموجه  $(\vec{k})$ .

$$E_x = E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}), \quad H_y = E_0 \cos w(t - \frac{z}{c}) \quad \text{ولما كانت:}$$

فبالتعويض في (4):

$$\therefore \vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2 w(t - \frac{z}{c}) \vec{k}$$

ولإيجاد المتوسط الزمني (time average) لهذا المتجه نكامل على دورة واحدة

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad \text{(one period)} \quad \text{ونقسم التكامل على } T.$$

$$\therefore \vec{\gamma}_{av.} = \langle \vec{\gamma} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\gamma} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{\gamma} d(wt)$$

$$\therefore \vec{\gamma}_{av.} = \frac{c}{4\pi} \vec{k} E_0^2 \langle \cos^2 w(t - \frac{z}{c}) \rangle \quad \text{وفي حالتنا تلك فإن:}$$

$$\langle \cos^2 w(t - \frac{z}{c}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 w(t - \frac{z}{c}) d(wt) \quad \text{حيث:}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 (wt + \alpha) d(wt) \quad , \quad \alpha = -w \frac{z}{c}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos 2(wt + \alpha)] d(wt)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \omega t + \frac{\sin 2(\omega t + \alpha)}{2\omega} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} [2\pi + 0] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \bar{\gamma}_{av.} = \frac{c}{4\pi} \bar{k} E_0^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \bar{k}$$

مثال (4): إذا كانت مركبات المجال الكهربائي تعطي من:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = a \cos nx \cos nct$$

وكان  $\vec{H} = 0$  عندما  $t = 0$ ،  $\epsilon = \mu = 1$ ،  $\rho = \sigma = 0$

(حالة الفراغ الحر الخالي من الشحنات).

أثبت أن مركبات المجال المغنطيسي تعطي من:

$$H_x = 0, \quad H_z = 0, \quad H_y = -a \sin nx \sin nct$$

أثبت أيضاً أنه لا يوجد فيض متوسط للطاقة في هذه المسألة (أو أن المتوسط

الزمني لفيض الطاقة يساوي صفراً) وهي حالة الموجات المستقرة.

الحل: من معادلة ماكسويل الثالثة:

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k})$$

ولكن:

$$\text{curl } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) + \vec{j} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} (0)$$

$$= \vec{i} (0) + \vec{j} (an \sin nx \cos nct) + \vec{k} (0)$$

$$\therefore -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = an \sin nx \cos nct, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -a cn \sin nx \cos nct, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0$$

وبالتكامل نحصل على:

$$H_x = c_1, \quad H_y = -a \sin nx \sin nct + c_2, \quad H_z = c_3$$

ومن الشروط الابتدائية فإن  $\vec{H} = 0$  عندما  $t = 0$

$$\therefore c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

$$\therefore H_x = 0, \quad H_y = -a \sin nx \sin nct, \quad H_z = 0$$

ولإيجاد فيض الطاقة خلال وحدة المساحات أي متجه بوينتنج:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

$$= \frac{c}{4\pi} (E_z \vec{k}) \wedge (H_y \vec{j}) = -\frac{c}{4\pi} (E_z H_y) \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \text{حيث}$$

وبالتعويض عن

$$E_z = a \cos nx \cos nct, \quad H_y = -a \sin nx \sin nct$$

$$\therefore \vec{\gamma} = \frac{ca^2}{4\pi} \cos nx \sin nx \cos nct \sin nct \vec{i}$$

$$= \frac{ca^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \sin 2nx \cdot \frac{1}{2} \sin 2nct \vec{i}$$

$$= \frac{ca^2}{16\pi} \sin 2nx \sin 2nct \vec{i}$$

وذلك لأن:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ويكون المتوسط الزمني لفيض الطاقة:

$$\vec{\gamma}_{av.} = \langle \vec{\gamma} \rangle = \vec{i} \frac{ca^2}{16\pi} \langle \sin 2nx \sin 2nct \rangle$$

ولإيجاد:  $\langle \sin 2nx \sin 2nct \rangle$  نضع  $\beta = nx$ ,  $\alpha = nct = wt$

$$\therefore \langle \sin 2nct \sin 2nx \rangle = \langle \sin 2wt \sin 2\beta \rangle$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad \text{ولما كان:}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle \sin 2\omega t \sin 2\beta z \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos 2(\omega t - \beta z) - \cos 2(\omega t + \beta z)] d(\omega t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin 2(\omega t - \beta z)}{2\omega} - \frac{\sin 2(\omega t + \beta z)}{2\omega} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{\gamma}_{av.} = \langle \bar{\gamma} \rangle = \bar{i} \cdot \frac{c a^2}{16\pi} \cdot (0) = 0$$

أي أن المتوسط الزمني (أو متوسط معدل) إشعاع الطاقة يكون مساوياً للصفر، وهي حالة الموجات المستقرة (stationary waves).

**مثال (٥):** في حالة الموجات الكهرومغناطيسية المنتشرة في اتجاه محور  $z$  في

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \quad \text{وسط عازل تام، يتحدد المجال الكهربائي بالعلاقة:}$$

$$H_y = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z) \quad \text{كما يتحدد المجال المغناطيسي المرافق بالعلاقة:}$$

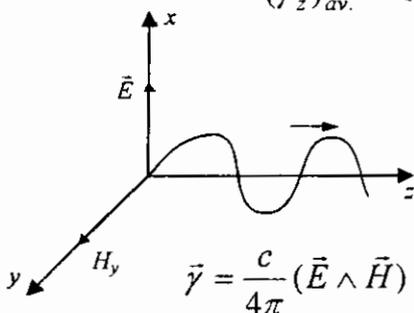
حيث  $E_0$  هي قيمة  $E_x$  عندما  $z = 0$ ،  $t = 0$ ، هي المعاوقة الذاتية للوسط  $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ .

أثبت أن المتوسط الزمني للطاقة المناسبة خلال أي مساحة  $S$  عمودية على

$$\text{محور } z \text{ تعطي من: } (\gamma_z)_{av.} = \langle \gamma_z \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{E_0^2}{Z} S$$

**الحل:**

الطاقة المناسبة خلال وحدة المساحات أو فيض الطاقة يعطي من متجه بوينتج



$$\bar{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\bar{E} \wedge \bar{H})$$

$$= \frac{c}{4\pi} (E_x \bar{i}) \wedge (H_y \bar{i}) = \frac{c}{4\pi} (E_x H_y) \bar{k} = \gamma_z \bar{k}$$

$$\gamma_z = \frac{c}{4\pi} (E_x H_y) = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0^2}{Z} \cos^2(\omega t - \beta z)$$

$$\langle \gamma_z \rangle = \frac{c}{4\pi Z} \frac{E_0^2}{Z} \langle \cos^2(\omega t - \beta z) \rangle \quad \text{ولإيجاد المتوسط الزمني:}$$

$$\langle \cos^2(\omega t - \beta z) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \beta z) d(\omega t) \quad \text{حيث:}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos 2(\omega t - \beta z)] d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \omega t + \frac{\sin 2(\omega t - \beta z)}{2\omega} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} [2\pi + 0] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \langle \gamma_z \rangle = \frac{c}{4\pi Z} \frac{E_0^2}{Z} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{c}{8\pi Z} \frac{E_0^2}{Z}$$

ويكون المتوسط الزمني للطاقة المناسبة خلال المساحة  $S$  العمودية على محور  $z$  هو:

$$\langle \gamma_z \rangle_{av.} = \langle \gamma_z \rangle = \frac{c}{8\pi Z} \frac{E_0^2}{Z} S$$

وهو المطلوب.

مثال (٦): في حالة الموجات الكهرومغناطيسية المنتشرة في وسط غير موصل

بسرعة  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ، أثبت أن المركبات التالية للمجالين الكهربائي والمغناطيسي

للموجات المستوية المذكورة تمثل حلاً خاصاً لمعادلات ماكسويل في الوسط.

$$E_x = a \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = 0$$

$$H_x = 0 \quad , \quad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a \cos \omega \left(t - \frac{z}{v}\right) \quad , \quad H_z = 0$$

الحل: في حالة الوسط الغير موصل فإن معادلات ماكسويل تصبح:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{_____ (1)} , \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad \text{_____ (2)}$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{_____ (3)} , \quad \operatorname{curl} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{_____ (4)}$$

للقيم المعطاة لـ  $\vec{E}, \vec{H}$  فإن

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

أي أن المعادلتين (1), (2) تتحققان بالقيم المعطاة لكل من  $\vec{E}, \vec{H}$ .  
أيضاً:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( -\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \vec{j} \left[ \left( \frac{aw}{v} \right) \sin w \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = \vec{i} \left[ -\frac{aw}{v} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin w \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \end{aligned}$$

المعادلتين (3), (4) تتحققان بشرط:

$$\begin{aligned} \frac{aw}{v} \sin w \left( t - \frac{z}{v} \right) &= -\frac{\mu}{c} \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) = -\frac{\mu}{c} \cdot (-aw) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin w \left( t - \frac{z}{v} \right) \\ &= \frac{aw}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \sin w \left( t - \frac{z}{v} \right) = \frac{aw}{v} \cdot \sin w \left( t - \frac{z}{v} \right) \end{aligned}$$

أيضاً:

$$-\frac{aw}{v} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin w(t - \frac{z}{v}) = \frac{\epsilon}{c} (\frac{\partial E_x}{\partial t}) = \frac{\epsilon}{c} [-aw \sin w(t - \frac{z}{v})]$$

$$\therefore -\frac{aw\epsilon}{c} \sin w(t - \frac{z}{v}) = -\frac{aw\epsilon}{c} \sin w(t - \frac{z}{v})$$

ومن ذلك يتضح أن الطرفين متساويين في العلاقتين السابقتين مما يثبت أن قيم  $\vec{E}, \vec{H}$  المعطاة تمثل حلاً خاصاً لمعادلات ماكسويل. وهو المطلوب.

مثال (٧): أثبت أن الجهدين  $\vec{A}, \phi$  اللذان يصفان الموجه المستوية

$$\vec{E} = [a \cos w(t - \frac{z}{v}), 0, 0], \vec{H} = [0, \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a \cos w(t - \frac{z}{v}), 0]$$

المنتشرة في وسط عازل متماثل، حيث  $\epsilon, \mu$  ثابتان، يعطيان بالعلاقتين:

$$\vec{A} = [0, 0, -(\frac{acx}{v}) \cos w(t - \frac{z}{v})], \phi = -ax \cos w(t - \frac{z}{v})$$

الحل: المعادلات التي تعرف الجهدين  $\vec{A}, \phi$  هي:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \text{curl } \vec{A} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{_____ (2)}$$

مع شرط لورنتز:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{_____ (3)}$$

من (1):

$$\mu(\vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mu[\vec{i}(0) + \vec{j} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a \cos w(t - \frac{z}{v}), \vec{k}(0)] \\ = \vec{i}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) \end{aligned}$$

بمقارنة معاملات  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  في الطرفين نجد أن:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad \text{_____ (4)}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \mu \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a \cos w(t - \frac{z}{v}) \quad \text{_____ (5)}$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad \text{_____ (6)}$$

نتحقق هذه المعادلات إذا كان:

$$A_y = 0, \quad A_x = 0 \quad \text{من (6)}$$

ومن (4) نجد أن  $\frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$  أي أن  $A_z$  لا تعتمد على  $y$ .

ومن (5) نجد أن

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\mu \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a \cos w(t - \frac{z}{v}) = -\sqrt{\epsilon\mu} a \cos w(t - \frac{z}{v})$$

وبالتكامل نجد أن:

$$A_z = -\sqrt{\epsilon\mu} ax \cos w(t - \frac{z}{v}) + \text{const.} \quad \text{(ثابت)}$$

وهذا الثابت يمكن اختياره مساوياً للصفر وتصبح:

$$A_z = -\sqrt{\epsilon\mu} ax \cos w(t - \frac{z}{v})$$

$$\sqrt{\epsilon\mu} = \frac{c}{v} \quad \text{فإن } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{ولما كانت}$$

$$\therefore A_z = -\frac{acx}{v} \cos w(t - \frac{z}{v})$$

$$\therefore \vec{A} = [0, 0, -\frac{acx}{v} \cos w(t - \frac{z}{v})]$$

ولإيجاد  $\phi$ : من المعادلة (2) نجد أن:

$$\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -(\vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z)$$

$$\vec{A} = [0, 0, -\frac{acx}{v} \cos w(t - \frac{z}{v})], \vec{E} = [a \cos w(t - \frac{z}{v}), 0, 0] \quad \text{ولكن:}$$

$$\therefore \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = [0, 0, \frac{acx}{v} w \sin w(t - \frac{z}{v})]$$

بمقارنة معاملات  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  نحصل على:

$$\therefore \frac{\partial\phi}{\partial x} = -a \cos w(t - \frac{z}{v}), \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{axw}{v} \sin w(t - \frac{z}{v})$$

ومن هذه العلاقات نجد أن:

$$(i) \phi = -ax \cos w(t - \frac{z}{v}) + \text{const.}(c_1)$$

$$(ii) \phi \text{ لا تعتمد على } y$$

$$(iii) \phi = -ax \cos w(t - \frac{z}{v}) + \text{const.}(c_2)$$

وباختيار الثابتين  $c_1, c_2$  بحيث يساوي كل منهما الصفر فإننا نحصل على:

$$\phi = -ax \cos w(t - \frac{z}{v})$$

وهو المطلوب ثانياً.