الباب الثالث

الإلكتروديناميكا النسبية
Relativistic Electrodynamics

تمهيد(١): ملخص لأهم القوانين في الإلكتروديناميكا الكلاسيكية

تطبق قواعد النظرية النسبية على علم الإلكتروديناميكا بهدف وضع قوانين ومعادلات هذا العلم في صورة متآلفة (covariant)، وذلك بوضع الكميات الكهرومغنطيسية على صورة متجهات رباعية في فضاء منكوفسكي الرباعي الأبعاد، وكذلك بوضع المعادلات التي تصف تلك الكميات في صورة متآلفة أو لا متغيرة الشكل عند الأنتقال من نظام للإحداثيات إلى نظام آخر.

ونعطي فيما يلي ملخصاً لأهم الكميات والقوانين في علم الإلكتروديناميكا تمهيداً لوضعها في الصورة النسبية (أنظر الباب الأول).

(١) الشحنة الكلية (q): تعرف بالعلاقة $q = \int \rho dV$، حيث ρ هي الشحنة لوحدة الحجوم (أو كثافة الشحنة).

(٢) التيار الكلي (I): يعرف بالعلاقة $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{s}$ ، حيث $\vec{j}$ هو التيار المار عبر وحدة المساحات (أو كثافة التيار).

(٣) إذا تحركت شحنة ρ بسرعة $\vec{V}$ فينتج عنها تياراً كهربائياً $\vec{j}$ يعطي بالعلاقة: $\vec{j} = \rho \vec{V}$.

(٤) يوصف المجال الكهرومغنطيسي في الفراغ بكميتين هما: $\vec{E}$ (شدة المجال الكهربي)، $\vec{H}$ (شدة المجال المغنطيسي).

وفي حالة وجود وسط مادي توجد كميتان أخريتان هما:

$\vec{D}$ (متجه الإزاحة – Displacement vector)

$\vec{B}$ (متجه الحث – Induction vector)

(٥) المعادلات الأساسية للمجال الكهرومغنطيسي (معادلات ماكسويل):

(i) في الفراغ الحر (وتعرف بالمعادلات الميكروسكوبية):

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \qquad , \qquad div\,\vec{H} = 0$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad , \qquad curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(ii) في الوسط المادي (وتعرف بالمعادلات الماكروسكوبية):

$$div\,\vec{D} = 4\pi\rho \qquad , \qquad div\,\vec{B} = 0$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad , \qquad curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(٦) معادلة الاتصال (Equation of continuity)

تربط بين $\rho, \vec{j}$ وصورتها: $div\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

(٧) الجهود الكهرومغنطيسية (Electromagnetic Potentials)

توجد كميتان هامتان هما: الجهد الكهربي (القياسي) ϕ، الجهد الإتجـاهي (المغنطيسي) $\vec{A}$ ويعرفان بالعلاقتين:

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{H} = curl\,\vec{A}$$

وفي الوسط:

$$\vec{E} = -grad\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = curl\,\vec{A}$$

وفي حالة عدم وجود مجال مغنطيسي: فإن $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ وبذلك فإن:

$$\vec{E} = -grad\,\phi$$

(٨) العلاقة بـين $\vec{A}, \phi$ تعـرف بـشرط لـورنتز (Lorentz Condition) وصورتها:

$$div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(٩) أي شحنه كهربائية (q) سواء كانت ساكنة أو متحركة يكون لها مجال كهربي شدته $\vec{E}$، وإذا تحركت الشحنة يتولد لدينا تياراً كهربائياً $\vec{j}$، وهذا التيار يولد مجالاً مغنطيسياً شدته $\vec{H}$.

∴ حركة الشحنات الكهربية يصاحبها مجالين:

الكهربي $(\vec{E})$ نتيجة وجود الشحنة، المغنطيسي $(\vec{H})$ نتيجة التيار الناتج عن الحركة.

(١٠) إذا كان لدينا نظامين للإحداثيات S, S' بحيث أن S' كان متحركاً بسرعة v بالنسبة إلى S، ولنعتبر وجود شحنة q ساكنة في S' ومتحركة معه بالسرعة v فيكون لدينا راصدين:

(i) راصد موجود في S': يشاهد q ساكنة وبالتالي يكون لديه مجال كهربي $\vec{E}$ فقط.

(ii) راصد موجود في S: يشاهد q متحركة (بالسرعة v - سرعة S') وهي بذلك تولد مجالاً مغنطيسياً، وبالتالي يكون لديه مجالين أحدهما كهربي (نتيجة وجود الشحنة) والآخر مغنطيسي (نتيجة حركة الشحنة).

∴ المجال الكهربي الناتج عن الشحنة q في النظام S' يولد مجالاً كهرومغنطيسياً في النظام S.

وهذا هو الأساس الذي طبقت بموجبه النظرية النسبية على علم الإلكتروديناميكا.

تمهيد(٢): مخلص لأهم قوانين النظرية النسبية (Theory of Relativity)

في النظرية النسبية نعالج حركة الأجسام المتحركة بالنسبة إلى بعضها بسرعات كبيرة للغاية قد تصل إلى سرعة الضوء

سرعة الضوء = ٣٠٠ ألف كيلومتر في الثانية

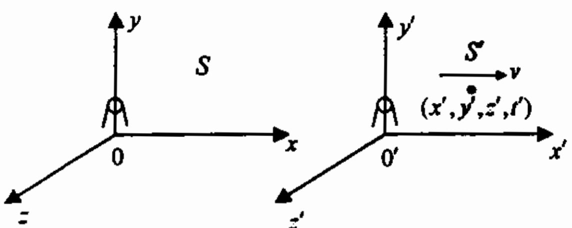
فروض النظرية النسبية:

(١) قوانين الطبيعة (القوانين التي تصف الظواهر الطبيعية) يكون لها نفس الشكل الرياضي في سائر الأنظمة (أنظمة الإحداثيات) المتحركة بالنسبة لبعضها، وبصورة مختصرة: نقول أن قوانين الطبيعة متغايرة (covariant).

(٢) سرعة الضوء c هي مقدار ثابت لا يتغير بتغير النظام الذي تقاس فيــه، أي أنها لا متغيرة (Invariant).

تحويلات لورنتز:

المنظومة S' تتحرك بسرعة منتظمة v بالنسبة إلى المنظومة S. العلاقة بين (أو معادلات التحويل بين) الإحداثيات (x',y',z',t') في S' والإحداثيات التي يقيسها شخص موجود في S أي (x,y,z,t) تعرف بتحويلات لورنتز وصورتها:



$$x'=\alpha(x-vt)\ ,\ y'=y\ ,\ z'=z\ ,\ t'=\alpha(t-\frac{v}{c^2}x)$$

حيث c هي سرعة الضوء.

وحيث $\beta=\frac{v}{c}$ ، $\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

حالة خاصة: عندما تكون السرعة $v<<c$ (أقل بكثير جداً من c)

$$\alpha\simeq1 \quad\leftarrow\quad \frac{v}{c}\simeq0 \quad\leftarrow\quad \frac{v}{c}<<1$$

ونحصل على $x'=x-vt\ ,\ y'=y\ ,\ z'=z\ ,\ t'=t$

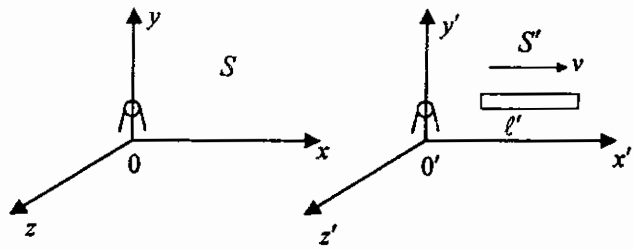
هذه التحويلات تنطبق في الميكانيكا الكلاسيكية(النيوتونية) وتعرف بتحويلات جاليليو.

التحويلات العكسية: $x=\alpha(x'+vt')\ ,\ y=y'\ ,\ z=z'\ ,\ t=\alpha(t'+\frac{v}{c^2}x')$

حيث α تظل كما هي، $x,y,z,t\rightarrow x',y',z',t'$ ، $v\rightarrow -v$

تطبيقات:

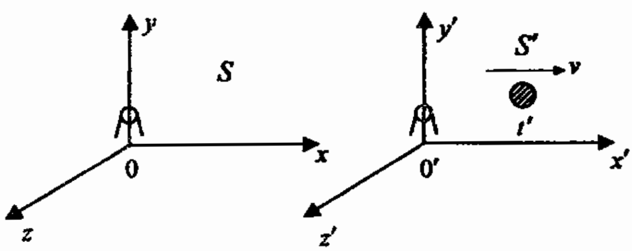
(١) ظاهرة إنكماش الطول (Length contraction)



طول المسطرة في النظام الموجودة فيه هو ℓ' (الطول الصحيح proper length) $\ell_0 = \ell'$ ، طول المسطرة كما يقيسه راصد في النظام S هو ℓ

العلاقة بين ℓ, ℓ_0: $\ell = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2}$ أي أن: $\ell < \ell_0$

(٢) ظاهرة تمدد الزمن Time dilation



زمن قياس ظاهرة معينة (حادثة – event) في النظام S' هو t' (الزمن الصحيح proper time) $t' = \tau$، زمن الحادثة كما يقيسه راصد في النظام S هو t

العلاقة بين t, τ : $t = \dfrac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \leftarrow \boxed{t > \tau}$

كلاسيكياً: $\beta \to 1$ ومنها: $t = \tau \, , \, \ell = \ell_0$

لا توجد ظاهرتا إنكماش الطول وتمدد الزمن.

مثال: أثبت أن شكل مؤثر دالمبيرت لا يتغير بتغير نظام الإحداثيات وذلك باستخدام تحويلات لورنتز.

الحل: المطلوب إثبات أن:

$$\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$\square$ في المجموعة S = $\square'$ في المجموعة S'

تحويلات لورنتز:

$$x' = \alpha(x - vt)\ ,\ y' = y\ \ ,\ z' = z\ ,\ t' = \alpha(t - \frac{v}{c^2}x)$$

التحويلات العكسية:

$$x = \alpha(x' + vt')\ ,\ y = y'\ \ ,\ z = z'\ ,\ t = \alpha(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

نلاحظ أن المتغيرات هنا هي x,t فإذا كانت $f = f(x,t)$ فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underset{\downarrow}{\frac{\partial x}{\partial x'}}\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\underset{\downarrow}{\frac{\partial t}{\partial x'}}\Big)$$

من التحويلات العكسية:

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \alpha\ \ ,\ \ \frac{\partial t}{\partial x'} = \alpha\frac{v}{c^2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial x'} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

أيضاً

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \qquad \_\_\_\_(3)$$

أيضاً

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial x}{\partial t'})+\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial t}{\partial t'})=\alpha v\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\frac{\partial}{\partial t}$$

$$=\alpha(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(4)}$$

وبتفاضل (4) ,(3) ,(2) ,(1) مرة ثانية:

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}=\frac{\partial}{\partial x'}(\frac{\partial}{\partial x'})$$

$$=\alpha^2(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})$$

$$=\alpha^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(5)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2}=\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{\_\_\_\_\_(7)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=\frac{\partial}{\partial t'}(\frac{\partial}{\partial t'})$$

$$=\alpha^2(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x})$$

$$=\alpha^2(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2v\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}+v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}) \qquad \text{\_\_\_\_\_(8)}$$

$$\therefore\ \Box' =\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$=\alpha^2(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\alpha^2(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t})$$

$$=\alpha^2(1-\frac{v^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\alpha^2}{c^2}(1-\frac{v^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ولكن $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \leftarrow \quad \alpha^2 = \dfrac{1}{(1-\dfrac{v^2}{c^2})}$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha^2(1-\frac{v^2}{c^2})=1}$$

$$\Box' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Box$$

<u>ملحوظة</u>: معامل دالمبيرت يدخل في معادلة هامة جداً في الرياضة التطبيقية، وهي المعادلة الموجية (Wawe Equation) وصورتها: $\Box\phi = 0$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

وحيث أن $\Box' = \Box$ فيمكننا كتابة:

$$\Box'\phi = 0$$

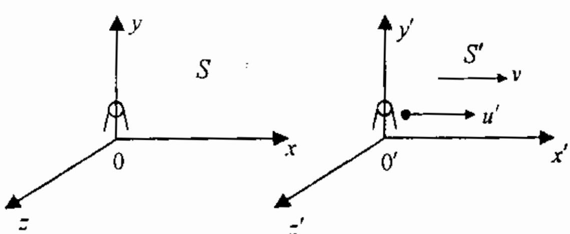
$$\therefore \nabla'^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

أي أن المعادلة الموجية هي معادلة متغايرة (Covariant) أي لا يتغيـر شـكلها بتغير نظام الاحداثيات المستخدم، وأحياناً يستخدم اصطلاح متآلف بدلاً من متغـاير لكلمة (Covariant) وهذا يؤيد الفرض الأول في النظرية النسبية.

<u>ملخص لقوانين الديناميكا النسبية Relativistic Dynamics</u>

[١] <u>معادلة التحويل للسرعة</u>:

جسيم يتحرك بسرعة u' في إتجاه محور x' في النظام S' الذي يتحرك هـو أيضاً بسرعة v بالنسبة إلى S فتكون سرعة الجسيم u في النظام S:



$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \qquad \_\_\_\_(1)$$

نتائج:

(١) كلاسيكياً: $\frac{v}{c}<<1$ أي $\frac{v}{c}\simeq 0$ ← $u=u'+v$ وهو القانون الكلاسيكي لتحصيل السرعتين u',v (في نفس الإتجاه).

(٢) سرعة الضوء ثابتة في جميع الأنظمة (الفرض الثاني)

ولإثبات ذلك: نفرض أن الجسيم يتحرك في S' بسرعة تساوي سرعة الضوء ← $u'=c$ والمطلوب إيجاد سرعته u في النظام S.

فبالتعويض في (1)

$$u=\frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}}=\frac{c+v}{\frac{c+v}{c}}=c(\frac{c+v}{c+v})=c$$

(٣) لا توجد سرعة أكبر من سرعة الضوء:

إذا كان S' يتحرك بسرعة $v=c$ وكان الجسيم يتحرك في S' بسرعة $u'=c$ فمن الناحية الكلاسيكية تكون المحصلة (محصلة السرعتين) هي: $u=c+c=2c$، أما في النظرية النسبية فإن:

$$u=\frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}}=\frac{2c}{2}=c$$

.: محصلة السرعتين $u=c\,,u'=c$ هي أيضاً c وليست $2c$ كما في الحالة الكلاسيكية.

.: لا توجد في النسبية سرعة أكبر من c.

[٢] تغير الكتلة مع السرعة:

كلاسيكياً: كتلة الجسم وهو ساكن = كتلته وهو متحرك أي أن $m=m_0$

في النسبية: $m \neq m_0$ ولكن: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$

حيث u سرعة الجسم المتحرك، وهذا القانون يؤول إلـــى: $m = m_0$ (كلاســيكياً) حيث $\dfrac{u}{c} \simeq 0$.

[٣] كمية الحركة النسبية:

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0\,\vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

[٤] الطاقة (Energy):

- طاقة السكون (Rest Energy) $E_0 = m_0\,c^2$.
- طاقة الحركة (kinetic Energy) $T = (m-m_0)c^2$
- الطاقة الكلية $E = E_0 + T = m_0c^2 + (m-m_0)c^2 = mc^2 \leftarrow \boxed{E = mc^2}$

[٥] العلاقة بين الطاقة الكلية E وكمية الحركة في النظرية النسبية:

في الميكانيكا الكلاسيكية: $\boxed{E = \dfrac{p^2}{2m}}$

في النسبية: $\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2\,c^4}$

ملاحظة: الجسيمات ذات الكتلة الساكنة الصفرية

Particles with zero rest mass

هي جسيمات تتميز بأن كتلتها الساكنة = صفر $\leftarrow$ $\boxed{m_0 = 0}$

فتكون طاقتها $\boxed{E = pc}$

مثال: أثبت أن الجسيمات ذات الكتلة الساكنة الصفرية تتحرك بسرعة الضوء.

الإثبات:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \rightarrow \quad m_0=m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \rightarrow 0=m\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=0$$

$$\therefore 1-\frac{u^2}{c^2}=0 \rightarrow \frac{u^2}{c^2}=1 \rightarrow \boxed{u=c}$$

كأمثلة لهذه الجسيمات: الفوتون، النيوترينو.

[٦] المتجهات الرباعية 4-Vectors

هي متجهات لها أربع مركبات، وتظهر هذه المتجهات في فراغ رباعي الأبعاد يعرف بفراغ منكوفسكي (Minkowski space) تتكون أبعاده من:

(١) ثلاث أبعاد للمكان (space)

(٢) بعد رابع للزمن (time)

أي متجه رباعي يكتب بالصورة:

$$A_\mu=(A_1,A_2,A_3,A_4)=(\vec{A},A_4)=A_n,A_4),\quad n=1,2,3$$

أمثلة على المتجهات الرباعية في الديناميكا النسبية:

[١] المتجه الرباعي للمكان – الزمان (X_μ)

$$x_\mu=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,y,z,x_4)=(\vec{r},x_4)$$

حيث: $\vec{r}=x_1,x_2,x_3=x,y,z$

$$x_4=ict \qquad \Big|\ i=\sqrt{-1}$$

$$\therefore \boxed{x_\mu=(\vec{r},ict)}$$

[٢] المتجه الرباعي للسرعة u_μ (Velocity 4-vector)

$$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau} \qquad \Big|\ d\tau=dt\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$=(\alpha\vec{u},i\alpha c) \qquad \Big|\ \vec{u}=u_x,u_y,u_z$$

[٣] المتجه الرباعي للطاقة – كمية الحركة (Momentum-Energy 4-vector)

$$p_\mu = m_0\, u_\mu = (\vec{p},\, i\frac{E}{c}) \qquad \Big|\, \vec{p} = p_x , p_y , p_z$$

ويلاحظ أن:

$$u_\mu u_\mu = u_\mu^2 = -c^2 = Inv.$$

$$p_\mu\, p_\mu = p_\mu^2 = -m_0^2\, c^2 = Inv.$$

وبوجه عام: حاصل ضرب أي متجه رباعي في نفسه = كمية لا متغيرة (Inv.)

[٤] متجه القوة (Fource 4-vector)

$$F_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0\, \frac{du_\mu}{d\tau} = (F_n , F_4)$$

حيث

$$F_n = F_1 , F_2 , F_3 = \alpha (F_x , F_y , F_z) = \alpha\, \vec{F} \qquad \Big|\, \vec{F} = F_x , F_y , F_z$$

$$\therefore\; F_\mu = (\alpha\, \vec{F} , F_4)$$

معادلات التحويل للمتجهات الرباعية:

تخضع المتجهات الرباعية لمعادلة تحويل في فراغ منكوفسكي صورتها:

$$\boxed{A'_\mu = a_{\mu\nu}\, A_\nu}$$

حيث $a_{\mu\nu}$ هو معامل التحويل بين المجموعتين S , S' وهو ممتد يعرف بممتد منكوفسكي وصورته هي:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

ملحوظة: لمعرفة تفاصيل كل هذه الموضوعات يرجع إلى كتابنا:

(النظرية النسبية الخاصة والعامة) – دار الفكر العربي – القاهرة (٢٠١٠).

<u>الإلكتروديناميكا النسبية</u>

[١] <u>المتجه الرباعي للشحنة – التيار Charge – Current 4-Vector</u>

من معادلة الاتصال:

$$\boxed{div\,\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$$

فإذا كان:

$$\vec{J}=(J_x,J_y,J_z)$$

$$\therefore \frac{\partial J_x}{\partial x}+\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

وبكتابة:

$$J_x=J_1\ ,\ \ J_y=J_2\ \ ,\ J_z=J_3$$

$$x=x_1\ \ ,\ \ y=x_2\ \ ,\ \ z=x_3$$

$$\therefore \frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)}=0$$

وبأخذ: $ict=x_4\ \ ,\ \ ic\rho=J_4$

$$\therefore \frac{\partial J_1}{\partial x_1}+\frac{\partial J_2}{\partial x_2}+\frac{\partial J_3}{\partial x_3}+\frac{\partial J_4}{\partial x_4}=0$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

حيث: $\mu=1,2,3,4$

المعادلة (1) تعرف بالصورة المتغايرة (أو المتآلفة) أو الممتدة لمعادلة الاتصال.

(المتجه الرباعي للزمان – المكان) $x_\mu=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\vec{r},ict)$

(المتجه الرباعي للشحنة– التيار) $J_\mu=(J_1,J_2,J_3,J_4)=(\vec{J},ic\rho)$

<u>معادلات التحويل للمتجه الرباعي</u> J_μ: نعتبر شحنة كثافتها ρ تتحرك مع المجموعة S' بالسرعة v بالنسبة إلى S، فيكون قانون التحويل للمتجه الرباعي J_μ بين المجموعتين S,S'

$$J'_\mu = a_{\mu\nu} J_\nu$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad \mu,\nu = 1,2,3,4$$

ولإيجاد معادلات التحويل للمركبات الأربعة للمتجه J_μ نكتب $\mu=1,2,3,4$

$\underline{\mu=1:}$ $\quad J'_1 = a_{1\nu} J_\nu$

$$\begin{aligned} &= \alpha_{11} J_1 + \alpha_{12} J_2 + \alpha_{13} J_3 + \alpha_{14} J_4 \\ &= \alpha_{11} J_1 + \alpha_{14} J_4 \\ &= \alpha J_1 + i\alpha\beta J_4 \\ &= \alpha (J_1 + i\beta J_4) \end{aligned} \qquad \left| \begin{aligned} a_{12} &= 0 \\ a_{13} &= 0 \\ a_{11} &= \alpha \\ a_{14} &= i\alpha\beta \end{aligned} \right.$$

وباعتبار أن: $J_1 = J_x \ , \ J'_1 = J'_x \ , \ J_4 = ic\rho$

$$J'_x = \alpha (J_x + i\frac{v}{c} \cdot ic\rho) = \alpha(J_x - v\rho) \rightarrow \boxed{J'_x = \alpha(J_x - v\rho)}$$

$\underline{\mu=2:}$ $\quad J'_2 = a_{2\nu} J_\nu = a_{22} J_2 = J_2$

$$\therefore \ \boxed{J'_y = J_y}$$

$\underline{\mu=3:}$ $\quad J'_3 = a_{3\nu} J_\nu = a_{33} J_3 = J_3$

$$\therefore \ \boxed{J'_z = J_z}$$

$$\left| \begin{aligned} a_{22} &= 1 \\ a_{33} &= 1 \\ a_{44} &= -i\alpha\beta \end{aligned} \right.$$

$\underline{\mu=4:}$ $\quad J'_4 = a_{4\nu} J_\nu = a_{41} J_1 = a_{44} J_4$

$$\begin{aligned} &= -i\alpha\beta J_1 + \alpha J_4 \\ &= \alpha(J_4 - i\beta J_1) \end{aligned}$$

وبكتابة: $J_1 = J_x , J_4 = ic\rho \ , \ J'_4 = ic\rho' \ , \ \beta = \frac{v}{c}$

$$\therefore \ ic\rho' = \alpha (ic\rho - i\frac{v}{c} J_x)$$

وبالقسمة على ic:

$$\therefore \ \boxed{\rho' = \alpha (\rho - \frac{v}{c^2} J_x)}$$

ملخص للعلاقات:

$$J'_x = \alpha (J_x - v\rho) \;,\; J'_y = J_y \;,\; J'_z = J_z$$

$$\rho' = \alpha (\rho - \frac{v}{c^2} J_x)$$

العلاقات العكسية:

$$J_x = \alpha (J'_x + v\rho') \;,\; J_y = J'_y \;,\; J_z = J'_z$$

$$\rho = \alpha (\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x)$$

كلاسيكياً: $\frac{v}{c} << 1$ وبالتالي: $\frac{v}{c} \simeq 0$ ، $\alpha \simeq 1$

$$J'_x = J_x - v\rho \;,\; J'_y = J_y \;,\; J'_z = J_z \;,\; \rho' = \rho$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد قانون التحويل لكثافتي التيار والشحنة لشحنة ساكنة في المجموعة S'.

الحل: إذا كانت الشحنة ρ' (في المجموعة S') ساكنة فمعنى هذا عدم تولد تيار عنها، أي أن:

$$J'_1 = J'_2 = J'_3 = 0 \quad , \quad J'_4 = ic\rho'$$

وتصبح معادلات التحويل:

$$J_x = \alpha (J'_x + v\rho') \;,\; J_y = J'_y \;,\; J_z = J'_z$$

$$\rho = \alpha (\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x)$$

بالصورة الآتية:

$$J_x = \alpha v\rho' \;,\; J_y = 0 \;,\; J_z = 0$$

$$\rho = \alpha \rho' = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \boxed{\rho' = \rho\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ملحوظة: الشحنة ρ' (في المجموعة التي توجد فيها) تسمى الشحنة الصحيحة أو كثافة الشحنة الصحيحة (proper charge density) وتكتب عادة ρ_0

$$\therefore \quad \boxed{\rho_0 = \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

وهذا يعني أن: $\rho_0 < \rho$

أي أن الراصد في المجموعة S يرى مقدار كثافة الشحنة أكبر من الشحنة الأصلية (الصحيحة).

كلاسيكياً: $\frac{v}{c} \to 0$ وبذلك فإن: $\boxed{\rho_0 = \rho}$

مثال(٢): باستخدام تحويلات لورنتز في النظرية النسبية أثبت أن الشحنة الكهربائية هي كمية لا متغيرة (.Inv).

الحل: من تحويلات لورنتز فإن العلاقة بين عنصري الحجم $dV\ ,\ dV'$ في المجموعتين S, S' هي: $dV = dV'\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

(يحدث إنكماش للحجم تماماً كما في الطول).

الشحنة الكهربائية الموجودة في الحجم dV (في المجموعة S): $dq = \rho\, dV$

في المجموعة S': $dq \to dq'$

والمطلوب إثبات أن: $dq = dq' = Inv.$ ، فحيث أن: $\rho = \alpha\, \rho'$ (مثال(١))

$$dV = \frac{dV'}{\alpha} = dV\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore dq' = \rho\, dV = (\alpha\, \rho')(\frac{dV'}{\alpha})$$
$$= \rho'\, dV' = dq' = Inv.$$

مثال(٣): أثبت أن العلاقة بين المتجه الرباعي للشحنة – التيار (J_μ) ومتجه السرعة الرباعي للشحنة (U_μ) هي: $\boxed{J_\mu = \rho_0\, U_\mu}$ في فراغ منكوفسكي.

ملاحظة: تناظر هذه العلاقة العلاقة: $\vec{J} = \rho\, \vec{v}$ في فراغ إقليدس الثلاثي.

<u>الحل</u>: حيث أن: $\vec{J} = \rho\,\vec{v}$

$$\therefore (J_x , J_y , J_z) = \rho\,(v_x , v_y , v_z)$$
$$= (\rho\, v_x , \rho\, v_y , \rho\, v_z)$$

بالإنتقال إلى فراغ منكوفسكي الرباعي:

$$J_\mu = (\vec{J} , ic\rho)$$
$$= (\rho\, v_x , \rho\, v_y , \rho\, v_z , ic\rho)$$
$$= \rho\,(v_x , v_y , v_z , ic)$$
$$= \rho\,(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}, ic)$$
$$= \rho\,\frac{d\tau}{dt}(\frac{dx}{d\tau},\frac{dy}{d\tau},\frac{dz}{d\tau},\frac{d(ict)}{d\tau})$$
$$= \rho\,\frac{d\tau}{dt}(\frac{dx_1}{d\tau},\frac{dx_2}{d\tau},\frac{dx_3}{d\tau},\frac{dx_4}{d\tau})$$
$$= \rho\,\frac{d\tau}{dt}(\frac{dx_\mu}{d\tau}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن: متجه السرعة الرباعي: $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ ، وأيضاً:

$$\rho_0 = \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \;\rightarrow\; \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \;\rightarrow\; \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

حيث $d\tau$ هو الزمن الصحيح ، بالتعويض في (1):

$$J_\mu = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})\,U_\mu = \rho_0\,U_\mu$$

وهو المطلوب.

[٢] المتجه الرباعي للجهد الكهرومغنطيسي (A_μ)

Electromagnetic Potential 4-vector

يرتبط الجهدان الكهربي ϕ والمغنطيس $\vec{A}$ بشرط لورنتز

$$div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

والذي يمكن كتابته بالصورة:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial(i\phi)}{\partial(ict)}=0$$

وبكتابة:

$$A_x=A_1\ ,\ A_y=A_2\ ,A_z=A_3$$

$$i\phi=A_4$$

$$x=x_1\ \ ,\ y=x_2\ \ ,\ z=x_3\ \ ,\ ict=x_4$$

$$\therefore\ \frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}+\frac{\partial A_4}{\partial x_4}=0$$

وبصورة مختصرة:

$$\boxed{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0}\qquad ,\qquad \mu=1,2,3,4$$

وتعرف هذه العلاقة بالصورة المتآلفة أو المتغـايرة (covariant form) لـشرط لورنتز.

المتجه:

$$A_\mu=(A_1,A_2\ ,\ A_3,A_4)=(\vec{A},\ A_4)=(\vec{A},i\phi)$$

يعرف بالمتجه الرباعي للجهد الكهرومغنطيس.

أمثلة محلولة:

مثال(١): أوجد معادلات التحويل لمركبات المتجه الرباعي A_μ بالصورة:

$$A'_x=\alpha(A_x-\beta\phi)\ ,\ A'_y=A_y\ \ ,\ A'_z=A_z$$

$$\phi'=\alpha(\phi-\beta A_x)$$

حيث $\beta=\frac{v}{c}$

الحل: نستخدم قانون التحويل بالصورة:

$$A'_\mu = a_{\mu\nu}\, A_\nu \quad , \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ \beta = \frac{v}{c}$$

$\underline{\mu = 1:}$
$$A'_1 = a_{1\nu}\, A_\nu = a_{11}\, A_1 + A_{14}\, A_4$$
$$= \alpha\, A_1 + i\alpha\beta\, A_4$$
$$= \alpha\,(A_1 + i\,\beta\, A_4)$$

بكتابة: $A_1 = A_x \ , \ A'_1 = A'_x \ , \ A_4 = i\phi$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\therefore\ A'_x = \alpha\,(A_x + i\frac{v}{c}\cdot i\phi) = \alpha\,(A_x - \frac{v}{c}\phi) \qquad \_\_\_\_(1)$$

$\underline{\mu = 2:}$
$$A'_2 = a_{2\nu}\, A_\nu = a_{22}\, A_2 = A_2$$
$$\therefore\ A'_y = A_z \qquad \_\_\_\_(2)$$

$\underline{\mu = 3:}$
$$A'_3 = a_{3\nu}\, A_\nu = a_{33}\, A_3 = A_3$$
$$\therefore\ A'_z = A_z \qquad \_\_\_\_(3)$$

$\underline{\mu = 4:}$
$$A'_4 = a_{4\nu}\, A_\nu = a_{41}\, A_1 + a_{44} A_4$$
$$= -i\alpha\beta\, A_1 + \alpha\, A_4$$
$$= \alpha\,(A_4 - i\,\beta\, A_1)$$

وبكتابة: $A_4 = i\phi \ , \ A'_4 = i\phi' \ , \ A_1 = A_x$

$$i\phi' = \alpha(i\phi - i\frac{v}{c} A_x)$$

بالقسمة على i:

$$\therefore\ \phi' = \alpha\,(\phi - \frac{v}{c} A_x) \qquad \_\_\_\_(4)$$

.: المعادلات المطلوبة هي:

$$A'_x = \alpha(A_x - \beta\phi) \ , \ A'_y = A_y \ , A'_z = A_z$$

$$\phi' = \alpha(\phi - \beta A_x)$$

ملحوظة(١): المعادلات العكسية:

$$A_x = \alpha(A'_x + \beta\phi') \ , \ A_y = A'_y \ , A_z = A'_z$$

$$\phi = \alpha(\phi' + \beta A'_x)$$

ملحوظة(٢): في الحالة الكلاسيكية

$$\frac{v}{c} << 1 \rightarrow \frac{v}{c} \simeq 0 \rightarrow \beta \simeq 0$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1$$

وتصبح معادلات التحويل:

$$A'_x = A_x \ , A'_y = A_y \ , A'_z = A_z$$

$$\phi' = \phi \ \rightarrow \ \boxed{\vec{A}' = \vec{A} \ , \ \phi' = \phi}$$

أي أنه كلاسيكياً فإن الجهدين الإتجاهي والقياسي يكونان لا متغيران.

مثال(٢): أثبت أن معادلات الجهدين الكهرومغنطيسية

$$\Box \ \phi = -4\pi\rho \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\Box \ \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} \qquad \_\_\_\_(2)$$

وكذلك شرط لورنتز:

$$div\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

هي معادلات متآلفة (Covariant) أي لا متغيرة نسبياً (Relativistic Invariants).

الحل: الجهدان $\vec{A},\phi$ يجمعهما المتجه الرباعي A_μ

الكثافتين $\rho,\vec{J}$ يجمعهما المتجه الرباعي J_μ

وباستخدام قوانين التحويل للمتجهين J_μ , A_μ حيث:

$$J_\mu = (\vec{J}, ic\rho) \quad , \quad A_\mu = (\vec{A}, i\phi)$$

والتي سبق الحصول عليها وهي:

$$J_x = \alpha (J'_x + v\rho') \ , \ J_y = J'_y \quad , \ J_z = J'_z$$

$$\rho = \alpha (\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x)$$

$$A_x = \alpha (A'_x + \frac{v}{c}\phi') \ , \ A_y = A'_y \ , \ A_z = A'_z \ , \ \phi = \alpha(\phi' + \frac{v}{c} A'_x)$$

وبمعلومية أن $\Box' = \Box$ (مثال سابق)

فعند التحويل من S إلى S' تصبح العلاقتين (1), (2)

$$\Box' \alpha(\phi' + \frac{v}{c} A'_x) = -4\pi \alpha(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_x) \qquad \_\_\_\_(4)$$

$$\Box' \alpha(A'_x + \frac{v}{c}\phi') = -\frac{4\pi}{c} \alpha(J'_x + v\rho') \qquad \_\_\_\_(5)$$

(أخذنا المركبة x لـ $\vec{A}$)

بضرب (4) في $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\Box' \alpha(\frac{v}{c}\phi' + \frac{v^2}{c^2} A'_x) = -4\pi \alpha(\frac{v}{c}\rho' + \frac{v^2}{c^3} J'_x)$$

$$= -\frac{4\pi\alpha}{c}(v\rho' + \frac{v^2}{c^2} J'_x) \qquad \_\_\_\_(6)$$

بطرح (5) من (6):

$$\Box' \alpha A'_x (1 - \frac{v^2}{c^2}) = -\frac{4\pi\alpha}{c} J'_x (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

ولكن: $\alpha^2 (1 - \frac{v^2}{x^2}) = 1$ $[\alpha^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}]$

فبقسمة الطرفين على $\alpha (1 - \frac{v^2}{x^2})$ نحصل على:

$$\boxed{\Box' A'_x = -\frac{4\pi}{c} J'_x}$$

وبالمثل بالنسبة للمركبتين y,z وفي صورة إتجاهية يمكننا كتابة:

$$\boxed{\Box' \vec{A}' = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}'}$$

أيضاً: بضرب (5) في $\beta = \frac{v}{c}$

$$\Box' \alpha(\frac{v}{c}A'_x + \frac{v^2}{c^2}\phi') = -\frac{4\pi}{c}\alpha(\frac{v}{c}J'_x + \frac{v^2}{c}\rho')$$

$$= -4\pi\alpha(\frac{v}{c^2}J'_x + \frac{v^2}{c^2}\rho') \qquad \text{\_\_\_\_(7)}$$

بطرح (4) من (7):

$$\Box' \alpha \cdot \phi'(1-\frac{v^2}{c^2}) = -4\pi\alpha\,\rho'(1-\frac{v^2}{c^2})$$

وبقسمة الطرفين على $\alpha(1-\frac{v^2}{c^2})$ نحصل على:

$$\boxed{\Box' \phi' = -4\pi\,\rho'}$$

وهو المطلوب الأول.

<u>المطلوب الثاني</u>: <u>إثبات أن شرط لورنتز يكون متآلفاً</u>

نكتب شرط لورنتز في المجموعة S': $div\,\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t'} = 0$

وبدلالة المركبات:

$$\frac{\partial A'_x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_y}{\partial y'} + \frac{\partial A'_z}{\partial z'} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t'} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(8)}$$

ولكن: عند إثباتنا أن $\Box' = \Box$ وجدنا أن:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}) \;,\; \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \;,\; \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \alpha(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})$$

بالتعويض في (8) واستخدام معادلات التحويل من النظام S' إلى النظام S للكميات $A'_x\,,A'_y\,,A'_z\,,\phi'$ نحصل على:

$$\alpha(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})\cdot\alpha(A_x-\frac{v}{c}\phi)+\frac{\partial}{\partial y}(A_y)+\frac{\partial}{\partial z}(A_z)$$

$$+\frac{\alpha}{c}(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x})\cdot\alpha(\phi-\frac{v}{c}A_x)=0$$

$$\therefore\alpha^2(\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{v}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{v}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{v^2}{c^3}\frac{\partial\phi}{\partial t})+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$+\frac{\alpha^2}{c}(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}+v\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{v^2}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x})=0$$

$$\therefore\alpha^2[(\frac{\partial A_x}{\partial x}(1-\frac{v^2}{c^2})+\frac{1}{\alpha^2}(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}(1-\frac{v^2}{c^2})]=0$$

$$\therefore\frac{\partial A_x}{\partial x}\alpha^2(1-\frac{v^2}{c^2})+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\alpha^2(1-\frac{v^2}{c^2})=0$$

ولكن: $\alpha^2(1-\frac{v^2}{c^2})=1$

$$\therefore\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\qquad\therefore\quad\boxed{div\,\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0}$$

أي أن شرط لورنتز يكون لا متغيراً نسبياً وهو المطلوب ثانياً.

<u>مسألة</u>: أثبت أن الصورة المتآلفة (Covariont) لمعادلات الجهدين الكهرومغنطيسيين يمكن كتباتها بالصورة:

$$\boxed{\partial_\mu(\partial_\mu A_\nu)=-\frac{4\pi}{c}J_\nu}$$

حيث $\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ ، μ,ν تأخذ القيم 1,2,3,4

ومن ذلك أثبت أن هذه المعادلة تكون لا متغيرة نسبياً (Relativistic Invariant)، وذلك بإعتبار أن مؤثر دالمبيرت $\Box'=\Box$ يكون لا متغير نسبياً.

<u>حل المسألة</u>: معادلتي الجهدين $\vec{A},\phi$

$$\Box\,\phi=-4\pi\rho\quad\_\_\_\_(1)\quad,\quad\Box\,\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J}\quad\_\_\_(2)$$

حيث:

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

وبأخذ: $x = x_1\ ,\ y = x_2\ ,\ z = x_3\ ,\ ict = x_4$

$$\therefore \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)$$

وبكتابة: $\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial_\mu$

$$\therefore \boxed{\Box = \partial_\mu \partial_\mu} \qquad \_\_\_(1)$$

وتعرف هذه العلاقة بالصورة المتغايرة أو المتآلفة للمؤثر $\Box$

وتصبح المعادلتين (1), (2) بالصورة:

$$(1)\ \partial_\mu\,[\partial_\mu \phi] = -4\pi\rho$$

$$\therefore \partial_\mu\,[\partial_\mu (i\phi)] = -\frac{4\pi}{c}(ic\rho)$$

ولكن: $A_4 = i\phi\ \ ,\ \ j_4 = ic\rho$

$$\therefore \boxed{\partial_\mu\,[\partial_\mu A_4] = -\frac{4\pi}{c}\,j_4} \qquad \_\_\_(2)$$

$$(2)\ \partial_\mu\,[\partial_\mu \vec{A}] = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

وبكتابة: $\vec{A} = A_n , \vec{J} = J_n\ \ ,\ \ n = 1,2,3$

$$\therefore \boxed{\partial_\mu\,[\partial_\mu A_n] = -\frac{4\pi}{c}\,j_n} \qquad \_\_\_(3)$$

المعادلتين (3) ,(2) يمكن كتابتهما في المعادلة الآتية:

$$\boxed{\partial_\mu\,[\partial_\mu A_\nu] = -\frac{4\pi}{c}\,j_\nu} \qquad \_\_\_(4)$$

حيث $\nu = 1,2,3,4$ وهو المطلوب أولاً.

المطلوب الثاني: إثبات أن المعادلة (4) تكون لا متغيرة نسبياً، وهذا يعني إثبات أن المعادلتين (2) ,(1) يكونان لا متغيران نسبياً.

ولإثبات ذلك: حيث أن: $\Box' = \Box$

$$\therefore \partial_\mu \partial_\mu = \partial'_\mu \partial'_\mu$$

وحيث أن: $A'_\mu = a_{\mu\nu} A_\nu \ , \ j'_\mu = a_{\mu\nu} j_\nu$ (معادلات التحويل للمتجهين A_μ , j_μ)

ففي المجموعة S' تصبح المعادلة (4):

$$\partial'_\mu [\partial'_\mu A'_\mu] = -\frac{4\pi}{c} j'_\mu$$

وبالإنتقال إلى المجموعة S:

$$\therefore \partial_\mu \partial_\mu a_{\mu\nu} A_\nu = -\frac{4\pi}{c} a_{\mu\nu} j_\nu$$

$$\therefore a_{\mu\nu} [\partial_\mu \partial_\mu A_\nu + \frac{4\pi}{c} j_\nu] = 0$$

وحيث أن $a_{\mu\nu} \neq 0$ ، فإن

$$\therefore \partial_\mu \partial_\mu A_\nu + \frac{4\pi}{c} j_\nu = 0$$

$$\therefore \boxed{\partial_\mu (\partial_\mu A_\nu) = -\frac{4\pi}{c} j_\nu}$$

وهذا يعني أنه: عند الإنتقال من المجموعة S' إلى المجموعة S فإن شكل المعادلة (معادلة الجهود الكهرومغنطيسية) لا تتغير. وهو المطلوب ثانياً.

[٣] معادلات التحويل لمركبات شدتي المجالين الكهربي والمغنطيسي:

حصلنا فيما سبق على معادلات التحويل لكل من:

$$\rho, \vec{j}(j_x , j_y , j_z) \ , \ \phi \ , \ \vec{A}(A_x , A_y , A_z) \ , \ \Box$$

ولآن نوجد معادلات التحويل للمجالين الكهربي $\vec{E}(E_x , E_y , E_z)$ والمغنطيسي $\vec{H}(H_x , H_y , H_z)$:

حيث أن:

$$\vec{E}' = -grad\,\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{H}' = curl\,\vec{A}' = (\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'})\hat{i} + \cdots \qquad \_\_\_(2)$$

(في المجموعة S')

أيضاً: فإن معادلات التحويل للمؤثرات التفاضلية:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}) \;,\; \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \;,\; \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \alpha(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}) \qquad \_\_\_(3)$$

أيضاً: معادلات التحويل للمتجه الرباعي A_μ:

$$A'_x = \alpha(A_x - \beta\phi) \;,\; A'_y = A_y \;,\; A'_z = A_z$$

$$\phi' = \alpha(\phi - \beta A_x) \qquad \_\_\_(4)$$

من العلاقة (1): المركبة x لـ $\vec{E}$:

$$E'_x = -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_x}{\partial t'}$$

$$= -\alpha(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})\cdot\alpha(\phi - \frac{v}{c}A_x) - \frac{\alpha}{c}(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})\cdot\alpha(A_x - \frac{v}{c}\phi)$$

$$= -\alpha^2[(\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{v^2}{c^3}\frac{\partial A_x}{\partial t})$$

$$+\frac{1}{c}(\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{v}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + v\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{v^2}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x})]$$

$$= -\alpha^2[(1 - \frac{v^2}{c^2})\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})\frac{\partial A_x}{\partial t}]$$

$$= -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x \qquad \Big|\; \alpha^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = 1$$

$$\therefore \boxed{E'_x = E_x} \qquad \_\_\_(5)$$

المركبة y لـ $\vec{E}$:

$$E'_y = -\frac{\partial \phi'}{\partial y'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_y}{\partial t}$$

$$= -\alpha \frac{\partial}{\partial y}(\phi - \frac{v}{c}A_x) - \frac{\alpha}{c}(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})A_y$$

$$= -\alpha[(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial y}) + \frac{1}{c}(\frac{\partial A_y}{\partial t} + v\frac{\partial A_y}{\partial x})]$$

$$= -\alpha[(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}) + \frac{v}{c}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})]$$

ولكن:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = -E_y$$

$$\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}H_x + \hat{j}H_y + \hat{k}H_z$$

$$\therefore H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\therefore E'_y = -\alpha[-E_y + \frac{v}{c}H_z] = \alpha(E_y - \frac{v}{c}H_z)$$

$$\therefore \boxed{E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z)} \qquad \text{\_\_\_\_\_(6)}$$

المركبة z لـ $\vec{E}$:

$$E'_z = -\frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_z}{\partial t'}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z}\cdot\alpha(\phi - \frac{v}{c}A_x) - \frac{\alpha}{c}(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x})A_z$$

$$= -\alpha\,[(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}) + \frac{v}{c}(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z})]$$

$$= -\alpha[(-\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}) + \frac{v}{c}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})]$$

ولكن:

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}$$

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\therefore E'_z = \alpha\,(E_z + \frac{v}{c}\, H_y)$$

$$\therefore \quad \boxed{E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y)} \qquad \_\_\_(7)$$

ولإيجاد معادلات التحويل لمركبات شدة المجال المغنطيسي $\vec{H}$:

المركبة H_x:

$$H'_x = (curl\,\vec{A}')_x = (\frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = H_x$$

وذلك لأن $A'_z = A_z \;,\; A'_y = A_y$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad \therefore \boxed{H'_x = H_x} \qquad \_\_\_(8)$$

المركبة H_y:

$$\begin{aligned} H'_y &= (curl\,\vec{A}')_y \\ &= (\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'}) \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\alpha(A_x - \frac{v}{c}\phi) - \alpha(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})A_z \\ &= \alpha[(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \frac{v}{c}(-\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t})] \\ &= \alpha[H_y + \frac{v}{c}E_z] \end{aligned}$$

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}$$

$$\therefore \quad \boxed{H'_y = \alpha(H_y + \beta E_z)} \qquad \_\_\_(9)$$

المركبة H_z:

$$H'_z = (curl\,\vec{A}')_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'}$$

$$= \alpha(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t})A_y - \frac{\partial}{\partial y}\cdot\alpha(A_x - \frac{v}{c}\phi)$$

$$= \alpha[(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}) + \frac{v}{c}(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t})]$$

$$= \alpha[H_z + \frac{v}{c}(-E_y)]$$

$$= \alpha(H_z - \frac{v}{c}E_y]$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{H'_z = \alpha(H_z - \beta E_y)} \qquad \text{\_\_\_\_}(10)$$

<u>الخلاصة</u>: معادلات التحويل لمركبات $\vec{E}, \vec{H}$:

$$E'_x = E_x \;,\; E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z) \,,\, E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y)$$

$$H'_x = H_x \,,\, H'_y = \alpha(H_y + \beta E_z) \,,\, H'_z = \alpha(H_z - \beta E_z)$$

<u>المعادلات العكسية:</u>

$$E_x = E'_x \;,\; E_y = \alpha(E'_y + \beta H'_z) \,,\, E_z = \alpha(E'_z - \beta H'_y)$$

$$H_x = H'_x \,,\, H_y = \alpha(H'_y - \beta E'_z) \,,\, H_z = \alpha(H'_z + \beta E'_z)$$

<u>أمثلة محلولة:</u>

<u>مثال(١):</u> أثبت أن $\vec{E} = \vec{E}' = Inv.$

$\vec{H} = \vec{H}' = Inv.$

في التقريب الكلاسيكي $(v << c)$.

<u>الحل</u>: في التقريب الكلاسيكي: $v << c$

$$\frac{v}{c} << 1 \;\rightarrow\; \boxed{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \;\rightarrow\; \boxed{\beta \rightarrow 0}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;\rightarrow\; 1}$$

وتصبح معادلات التحويل:

$$E_x = E'_x \ , \ E_y = E'_y \ , E_z = E'_z \qquad \therefore \vec{E} = \vec{E}'$$

$$H_x = H'_x \ , \ H_y = H'_y \ , H_z = H'_z \qquad \therefore \vec{H} = \vec{H}'$$

$$\therefore \vec{E} = Inv. \quad , \quad \vec{H} = Inv.$$

وهو المطلوب.

<u>مثـال(٢):</u> أثبت أن الصورة الإتجاهيـة لمعـادلات التحويـل لـشدتي المجـالين الكهربي $(\vec{E})$ والمغنطيسي $(\vec{H})$ هي:

$$\vec{E}' = \alpha \vec{E} + (1-\alpha)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{v}}{v^2} + \frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(i)}$$

$$\vec{H}' = \alpha \vec{H} + (1-\alpha)\frac{(\vec{v}\cdot\vec{H})\vec{v}}{v^2} - \frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(ii)}$$

حيث السرعة $\vec{v}$ تكون في إتجاه محور x.

<u>الحل</u>: حيث أن $\vec{v}$ في إتجاه x

$$\therefore \ \vec{v} = (v, 0, 0)$$

$$\frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H}) = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c}[\vec{i}(0) + \vec{j}(-v H_z) + \vec{k}(v H_y)]$$

$$= \vec{i}(0) + \vec{j}(-\frac{v}{c}H_z) + \vec{k}(\frac{v}{c}H_y)$$

$$\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H}) = [0 \ , -\frac{\alpha v}{c}H_z \ , \ \frac{\alpha v}{c}H_y] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

أيضاً

$$\frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E}) = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c}[\vec{i}\,(0) + \vec{j}(-v\,E_z) + \vec{k}(v\,E_y)]$$

$$= \vec{i}\,(0) + \vec{j}(-\frac{v}{c}E_z) + \vec{k}(\frac{v}{c}E_y)$$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E}) = [0\ ,\ -\frac{\alpha\,v}{c}E_z\ ,\ \frac{\alpha\,v}{c}E_y] \qquad \_\_\_\_(2)$$

أيضاً:

	$\vec{v} = v\,\hat{v}$
$\vec{v}\cdot\vec{E}) = v(\hat{v}\cdot\vec{E}) = v\,E_x$	$\hat{v}\cdot\vec{E} = E_x$
$(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{v} = v\,\vec{v}\,E_x$	$[\hat{v} = \hat{i}\,]$
$\frac{(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{v}}{v^2} = \frac{\vec{v}}{v}E_x = \hat{v}\,E_x = \hat{i}\,E_x$	$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$ (متجه وحدة في إتجاه v)

$$\therefore\ \frac{(\vec{v}\cdot\vec{E})\vec{v}}{v^2} = [E_x\ ,\ 0\ ,\ 0] \qquad \_\_\_\_(3)$$

وبالمثل:

$$\frac{(\vec{v}\cdot\vec{H})\vec{v}}{v^2} = [H_x\ ,\ 0\ ,\ 0] \qquad \_\_\_\_(4)$$

ولإثبات أن (ii), (i) هما الصورتان الإتجاهيتان لمعادلات التحويل لكل من $\vec{H}$, $\vec{E}$ أي للمركبات

$$(E_x\,,\ E_y\ ,\ E_z\ ,\ H_x\ ,\ H_y\ ,\ H_z)$$

من (ii), (i) وباستخدام العلاقات (4) ,(3) ,(2) ,(1)

نجد أن:

$$E'_x = \alpha\,E_x + (1-\alpha)[E_x] + 0 = \alpha\,E_x + E_x - \alpha\,E_x = E_x$$

$$\therefore\quad \boxed{E'_x = E_x}$$

$$E'_y = \alpha\,E_y + (1-\alpha)[0] + (-\frac{\alpha\,v}{c}H_z) = \alpha\,(E_y - \frac{v}{c}H_z)$$

$$\therefore\ \boxed{E'_y = \alpha\,(E_y - \beta\,H_z)}$$

$$E'_z = \alpha E_z + (1-\alpha)[0] + (\frac{\alpha v}{c} H_y) = \alpha (E_z + \frac{v}{c} H_y)$$

$$\therefore \quad \boxed{E'_z = \alpha (E_z + \beta H_y)}$$

وبالمثل: من المعادلة (ii) وباستخدام (4) ,(2) نجد أن:

$$H'_x = H_x \quad , \; H'_y = \alpha (H_y + \beta E_z), \; H'_z = \alpha (H_z - \beta E_y)$$

وهذا يعني أن العلاقتين (ii) ,(i) هما الصورتان الإتجاهيتان لمعادلات التحويل لمركبات كل من $\vec{E}, \vec{H}$، وهو المطلوب.

مثال(٣): أثبت أن معادلات ماكسويل للمجالات الكهرومغنطيسية تكون متآلفه (Covariant) عند الإنتقال من النظام S إلى النظام S' وذلك باستخدام تحويلات لورنتز النسبية.

الحل: معادلات ماكسويل في النظام S:

$$div\, \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \_\_\_\_(1) \qquad\qquad div\, \vec{H} = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$curl\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \_\_\_\_(3) \qquad\qquad curl\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \_\_\_\_(4)$$

وفي صورة مركبات:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \qquad \_\_\_\_(5)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \qquad \_\_\_\_(6)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k}] \qquad \_\_\_\_(7)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \frac{4\pi}{c}(j_x \hat{i} + j_y \hat{j} + j_z \hat{k}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}] \_(8)$$

نقسم معادلات ماكسويل إلى مجموعتين:

<u>المجموعة الأولى</u>: تشمل المعادلتين (4) ,(1) ونثبت أنهما متآلفتان (Covariant)

نستخدم العلاقات الآتية:

$$E_x = E'_x \ , \ E_y = \alpha(E'_y + \beta H'_z) \ , \ E_z = \alpha(E'_z - \beta H'_y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}) \ , \ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \ , \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}) \quad , \quad \rho = \alpha(\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x)$$

بالتعويض في (5):

$$\alpha\ (\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}) E'_x + \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \alpha(E'_y + \frac{v}{c} H'_z) + \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \alpha(E'_z - \frac{v}{c} H'_y)$$

$$= 4\pi \cdot \alpha(\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x)$$

$$\therefore (\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'}) - \frac{v}{c}(\frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{\partial H'_z}{\partial y'} + \frac{\partial H'_y}{\partial z'}) = 4\pi(\rho' + \frac{v}{c^2} j'_x)$$

$$\therefore (\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - 4\pi\rho') = -\frac{v}{c}(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x)$$

بأخذ:

$$(\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - 4\pi\rho') = P$$

$$(\frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{4\pi}{c} j'_x) = Q$$

$$\therefore \ \boxed{P = -\frac{v}{c} Q} \qquad \text{\_\_\_\_(9)}$$

ومن (8) بأخذ المركبة x (معامل $\hat{i}$):

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}j_x=0 \qquad \text{\_\_\_\_}(10)$$

وعند الإنتقال للمجموعة S' فإن:

$$H_y=\alpha(H'_y-\beta E'_z) \quad , \quad H_z=\alpha(H'_z+\beta E'_y) \ , \ j_x=\alpha(j'_x+v\rho')$$

بالتعويض في (10):

$$\frac{\partial}{\partial y'}\cdot\alpha(H'_z+\frac{v}{c}E'_y)-\frac{\partial}{\partial z'}\cdot\alpha(H'_y-\frac{v}{c}E'_z)$$

$$-\frac{1}{c}\cdot\alpha(\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'})E'_x-\frac{4\pi}{c}\cdot\alpha(j'_x+v\rho')=0$$

$$\therefore \frac{\partial H'_z}{\partial y'}-\frac{\partial H'_y}{\partial z'}-\frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}-\frac{4\pi}{c}j'_x$$

$$=-\frac{v}{c}(\frac{\partial E'_y}{\partial y'}+\frac{\partial E'_x}{\partial x'}+\frac{\partial E'_z}{\partial z'}-4\pi\rho')$$

$$\therefore \boxed{Q=-\frac{v}{c}P} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(11)$$

من (11) ,(9) يمكن إثبات أن: $P=0 \ , \ Q=0$

بالتعويض من (9) في (11):

$$Q=-\frac{v}{c}[-\frac{v}{c}Q]=\frac{v^2}{c^2}Q$$

$$\therefore(1-\frac{v^2}{c^2})Q=0$$

ولكن $1-\frac{v^2}{c^2}\neq 0 \leftarrow$ $\boxed{Q=0}$ ، ومن (9) $\boxed{P=0}$

$$\therefore \frac{\partial E'_x}{\partial x'}+\frac{\partial E'_y}{\partial y'}+\frac{\partial E'_z}{\partial z'}-4\pi\rho'=0$$

$$\therefore \ div\,E'-4\pi\rho'=0 \qquad \therefore \ \boxed{div\,\vec{E}'=4\pi\rho'}$$

أيضاً:

$$\frac{\partial H'_z}{\partial y'}-\frac{\partial H'_y}{\partial z'}-\frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}-\frac{4\pi}{c}j'_x=0 \qquad \left|\ (curl\,\vec{H}')_x=\frac{\partial H'_z}{\partial y'}-\frac{\partial H'_y}{\partial z'}\right.$$

$$(curl\,\vec{H}')_x-\frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}-\frac{4\pi}{c}j'_x=0$$

$$\therefore\ \boxed{(curl\,\vec{H}')_x=\frac{4\pi}{c}j'_x+\frac{1}{c}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}}$$

وبالمثل بالنسبة للمركبتين y, z:

$$\therefore\ \boxed{curl\,\vec{H}'=\frac{4\pi}{c}\vec{j}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'}}$$

.: المعادلتان (4) ,(1) لماكسويل هما معادلتان متآلفتان (covariants).

المجموعة الثانية: تشمل المعادلتين (3) ,(2) ونثبت أنهما متآلفتان.

فمن المعادلة (6):

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

$$\therefore \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right)H'_x+\frac{\partial}{\partial y'}\cdot\alpha\left(H'_y-\frac{v}{c}E'_z\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\cdot\alpha\left(H'_z+\frac{v}{c}E'_y\right)=0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial H'_x}{\partial x'}+\frac{\partial H'_y}{\partial y'}+\frac{\partial H'_z}{\partial z'}\right)=\frac{v}{c}\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}+\frac{1}{c}\frac{\partial H'_x}{\partial t'}\right)$$

وبأخذ:

$$\left(\frac{\partial H'_x}{\partial x'}+\frac{\partial H'_y}{\partial y'}+\frac{\partial H'_z}{\partial z'}\right)=L$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}+\frac{1}{c}\frac{\partial H'_x}{\partial t'}=M$$

$$\therefore\ \boxed{L=\frac{v}{c}M} \qquad \_\_\_\_(12)$$

ومن المعادلة (7) بأخذ المركبة x:

$$\therefore\ \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

وعند الإنتقال إلى المجموعة S':

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y'}\cdot\alpha(E'_z - \frac{v}{c}H'_y) - \frac{\partial}{\partial z'}\cdot\alpha(E'_y + \frac{v}{c}H'_z) + \frac{1}{c}\cdot\alpha(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'})H'_x = 0$$

$$\therefore (\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{1}{c}\frac{\partial H'_x}{\partial t'}) = \frac{v}{c}(\frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'})$$

$$\therefore \boxed{M = \frac{v}{c}L} \qquad \text{\_\_\_\_(113)}$$

من (12), (13) يمكن إثبات أن: $M = 0, L = 0$

بالتعويض من (12) في (13):

$$M = \frac{v}{c}(\frac{v}{c}M) = \frac{v^2}{c^2}M$$

$$\therefore (1 - \frac{v^2}{c^2})M = 0$$

ولكن: $1 - \frac{v^2}{c^2} \neq 0 \leftarrow \boxed{M = 0} \leftarrow \boxed{L = 0}$

$$\therefore \frac{\partial H'_x}{\partial x'} + \frac{\partial H'_y}{\partial y'} + \frac{\partial H'_z}{\partial z'} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{div\vec{H}' = 0}$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial H'_x}{\partial t'} \qquad \left| \; (curl\,\vec{E}')_x = \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} \right.$$

$$(curl\,\vec{E}')_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial H'_x}{\partial t'}$$

وبالمثل بالنسبة للمركبتين y, z

$$\therefore \boxed{curl\,\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}'}{\partial t'}}$$

.: المعادلتان (3), (2) لماكسويل هما معادلتان متآلفتان. وهو المطلوب.

مسائل

(١) باستخدام الصورة الإتجاهية لمعادلات التحويل للمتجهين $\vec{E},\vec{H}$، وإذا كانت

$$\frac{\vec{E}\wedge\vec{H}}{E^2+H^2}=\frac{\vec{\beta}}{1+\beta^2}$$

حيث $\vec{\beta}=\frac{\vec{v}}{c}$، $\vec{E},\vec{H}$ هما شدتا المجالين الكهربي والمغنطيسي في المجموعة S، v هي سرعة المجموعة S' بالنسبة إلى S، فأثبت أنه عند الإنتقال من S إلى S' فإن المتجهين $\vec{E}',\vec{H}'$ يكونان متوازيان (أي أن $\vec{E}'\wedge\vec{H}'=0$).

(٢) باستخدام معادلات التحويل لمركبات المتجهين $\vec{E},\vec{H}$، أثبت أنه عند الإنتقال من المجموعة S إلى المجموعة S' فإن الكميتين:

(i) $\vec{E}\cdot\vec{H}$, (ii) E^2-H^2

تكونان لا متغيرتين (Invariants)، أي أن:

$$\vec{E}\cdot\vec{H}=\vec{E}'\cdot\vec{H}' \quad , \quad E^2-H^2=E'^2-H'^2$$

وتعرف هاتين الكميتان بلا متغيرات المجال (Field Invariants).

حل المسألة(١): باعتبار أن:

$$\frac{\vec{E}\wedge\vec{H}}{E^2+H^2}=\frac{\vec{\beta}}{1+\beta^2} \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث $\vec{\beta}=\frac{\vec{v}}{c}$، وكان $\vec{E},\vec{H}$ هما المجالان في النظام S فلإثبات أن $\vec{E}',\vec{H}'$ في النظام S' يكونان متوازيان أي أن: $\vec{E}'\wedge\vec{H}'=0$

الإثبات: من (1)

$$\frac{\vec{E}\wedge\vec{H}}{E^2+H^2}=\frac{\vec{v}}{c(1+\beta^2)} \qquad \_\_\_\_(2)$$

بالضرب قياسياً في $\vec{E}$:

$$\frac{\vec{E}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})}{E^2+H^2}=\frac{\vec{E}\cdot\vec{v}}{c(1+\beta^2)} \quad \rightarrow \quad \therefore\ \vec{E}\cdot\vec{v}=0 \qquad \_\_\_\_(3)$$

حيث $\vec{E}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})=0$ ، وبالضرب قياسياً في $\vec{H}$:

$$\frac{\vec{H}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})}{E^2+H^2}=\frac{\vec{H}\cdot\vec{v}}{c(1+\beta^2)} \quad\rightarrow\quad \therefore\ \vec{H}\cdot\vec{v}=0 \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث $\vec{H}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})=0$ ، وحيث أن الصورة الإتجاهية للمجالين $\vec{E},\vec{H}$ هي:

$$\vec{E}'=\alpha\vec{E}+(1-\alpha)\frac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{E})}{v^2}+\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H})$$

$$\vec{H}'=\alpha\vec{H}+(1-\alpha)\frac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{H})}{v^2}-\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E})$$

فباستخدام $(3), (4)$:

$$\therefore\ \vec{E}'=\alpha\vec{E}+\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H}) \ \ ,\ \ \vec{H}'=\alpha\vec{H}-\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E})$$

وبالضرب إتجاهياً:

$$\vec{E}'\wedge\vec{H}'=\alpha^2(\vec{E}\wedge\vec{H})-\frac{\alpha^2}{c}[\vec{E}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{E})]+\frac{\alpha^2}{c}[(\vec{v}\wedge\vec{H})\wedge\vec{H}]$$
$$-\frac{\alpha^2}{c^2}[(\vec{v}\wedge\vec{H})\wedge(\vec{v}\wedge\vec{E})] \qquad \_\_\_\_(5)$$

ولكن:

$$\vec{E}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{E})=(\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{v}-(\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{E}=E^2\vec{v}-0=E^2\vec{v}$$

$$(\vec{v}\wedge\vec{H})\wedge\vec{H}=-\vec{H}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{H})$$
$$=-[(\vec{H}\cdot\vec{H})\vec{v}-(\vec{H}\cdot\vec{v})\vec{H}]=-H^2\vec{v}+0=-H^2\vec{v}$$

$$(\vec{v}\wedge\vec{H})\wedge(\vec{v}\wedge\vec{E})=[(\vec{v}\wedge\vec{H})\cdot\vec{E}]\vec{v}-[(\vec{v}\wedge\vec{H})\cdot\vec{v}]\vec{E}$$
$$=[\vec{v}\cdot(\vec{H}\wedge\vec{E})]\vec{v}-0=-[\vec{v}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})]\vec{v}$$

بالتعويض في (5):

$$\vec{E}'\wedge\vec{H}'=\alpha^2(\vec{E}\wedge\vec{H})-\frac{\alpha^2}{c}E^2\vec{v}+\frac{\alpha^2}{c}(-H^2\vec{v})+\frac{\alpha^2}{c^2}[\vec{v}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})]\vec{v}$$
$$=\alpha^2(\vec{E}\wedge\vec{H})-\alpha^2(E^2+H^2)(\frac{v}{c})+\frac{\alpha^2}{c^2}[\vec{v}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{H})]\vec{v}$$

ومن (2):

$$\vec{E}\wedge\vec{H}=\frac{\vec{v}}{c}(\frac{E^2+H^2}{1+\beta^2})$$

$$\therefore\ \vec{E}'\wedge\vec{H}'=\alpha^2\frac{\vec{v}}{c}\,\frac{E^2+H^2}{1+\beta^2}-\alpha^2(E^2+H^2)\frac{\vec{v}}{c}+\frac{\alpha^2}{c^2}[\frac{v^2}{c}\,\frac{E^2+H^2}{1+\beta^2}]\vec{v}$$

$$=\alpha^2\frac{\vec{v}}{c}(\frac{E^2+H^2}{1+\beta^2})[1-(1+\beta^2)+\beta^2]=0 \qquad \Big|\ \beta=\frac{v}{c}$$

<u>حل المسألة(٢):</u> لإثبات أن الكميتين

(i) $\vec{E}\cdot\vec{H}$, (ii) E^2-H^2

يشكلان كميتان لا متغيرتان باستخدام قوانين تحويل $\vec{E},\vec{H}$

$$\text{(i)}\ \vec{E}\cdot\vec{H}=E_xH_x+E_yH_y+E_zH_z$$

$$=E'_xH'_x+\alpha[E'_y+\beta H'_z]\cdot\alpha[H'_y-\beta E'_z]$$

$$+\alpha[E'_z-\beta H'_y]\cdot\alpha[H'_z+\beta H'_y]$$

$$=E'_xH'_x+\alpha^2[E'_yH'_y(1-\beta^2)+E'_zH'_z(1-\beta^2)]$$

ولكن: $\alpha^2(1-\beta^2)=1$

$$\therefore\ \vec{E}\cdot\vec{H}=E'_xH'_x+E'_yH'_y+E'_zH'_z=\vec{E}'\cdot\vec{H}'=Inv.$$

$$\text{(ii)}\ E^2-H^2=\vec{E}\cdot\vec{E}-\vec{H}\cdot\vec{H}$$

$$=E_x^2+E_y^2+E_z^2-(H_x^2+H_y^2+H_z^2)$$

$$=E'^2_x+\alpha^2[E'_y+\beta H'_z]^2+\alpha^2[E'_z-\beta H'_y]^2$$

$$-[H'^2_x+\alpha^2(H'_y-\beta E'_z)^2+\alpha^2(H'_z+\beta H'_y)^2]$$

$$=E'^2_x+E'^2_y\cdot\alpha^2(1-\beta^2)+E'^2_z\cdot\alpha^2(1-\beta^2)$$

$$-[H'^2_x+\alpha^2H'^2_y(1-\beta^2)+\alpha^2\cdot H'^2_z(1-\beta^2)$$

$$=E'^2_x+E'^2_y+E'^2_z-[H'^2_x+H'^2_y+H'^2_z]=E'^2-H'^2=Inv.$$

وهو المطلوب.

[٤] القوة المؤثرة على شحنة متحركة في مجال كهرومغنطيسي (Lorentz Force – قوة لورنتز)

تتكون القوة المؤثرة على شحنة e تتحرك في مجال كهرومغنطيسي من جزئين

(١) جزء ناتج عن المجال الكهربي (القوة الكهربية): $\vec{F}_{el} = e\vec{E}$

(٢) جزء ناتج عن المجال المغنطيسي (القوة المغنطيسية): $\vec{F}_{mg} = \frac{e}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})$

.: القوة الكلية: $\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mg} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})$

وتعرف هذه القوة بقوة لورنتز.

<u>الإثبات</u>: نفرض أن الشحنة (أو الجسيم المشحون) موجود في المجموعة S' وتتحرك بسرعتها $\vec{v}$ (في إتجاه محور x) بالنسبة للمجموعة S.

.: بالنسبة لراصد في S: $v_x = v \ , \ v_y = 0 \ , v_z = 0$

وبالنسبة للراصد في S' (موجود مع الشحنة): $v'_x = 0 \ , \ v'_y = 0 \ , \ v'_z = 0$

ونظراً لأن الشحنة ساكنة في S' فلا يوجد لها مجال مغنطيسي

$\therefore H'_x = 0 \ , \ H'_y = 0 \ , H'_z = 0$

القوى المؤثرة على الشحنة (في المجموعة S'):

$\vec{F}' = (F'_x \ , F'_y \ , \ F'_z)$

حيث:

$$F'_x = e\,E'_x \quad , \ F'_y = e\,E'_y \ , \ F'_z = e\,E'_z \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

(نتيجة المجال الكهربي للشحنة في S').

في المجوعة S: تتحول مركبات القوة طبقاً لقوانين النسبية الخاصة

$$F'_x = F_x \quad F'_y = \alpha\,F_y \ , F'_z = \alpha\,F_z \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

(في حالة إذا كانت الشحنة ساكنة في S')

حيث $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ \beta = \frac{v}{c}$

معادلات التحويل للمجال الكهربي:

$$E'_x = E_x \;,\; E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z) \;,\; E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y) \qquad \_\_\_\_(3)$$

من (3) ,(2) ,(1) نجد أن:

$$F_x = e E_x \;,\; F_y = e(E_y - \beta H_z) \;,\; F_z = e(E_z + \beta H_y)$$

وهذه المعادلات الثلاثة يمكن كتابتها في صورة إتجاهية هي:

$$\vec{F} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})] \qquad \_\_\_\_(4)$$

وذلك لأن:

$$\frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H}) = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c}[\hat{i}(0) + \hat{j}(-vH_z) + \hat{k}(vH_y)] \qquad \Big| \beta = \frac{v}{c}$$

$$= \hat{i}(0) + \hat{j}(-\beta H_z) + \hat{k}(\beta H_y)]$$

المعادلة (4) هي المعادلة التي تعطينا قوة لورنتز (للقوة المؤثرة على شحنة تتحرك في مجال كهرومغنطيسي).

مثـــال: أثبت أن القوة المؤثرة على جسيم مشحون يتحرك في مجال كهرومغنطيسي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u - \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

أو بالصورة:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u + \frac{d}{dt}(\frac{\partial u}{\partial \dot{q}})$$

حيث $\dot{q} = \vec{v}$ السرعة التي تتحرك بها الشحنة

u طاقة الجهد في المجال الكهرومغنطيسي وتعطي بالعلاقة:

$$u = e[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

الحل:

ملحوظة: إذا تحركت شحنة في مجال كهرومغنيطسي فإن طاقة جهد لها تتكون من جزئين:

(١) جزء كهربي: $u_{el} = e\phi$ حيث ϕ الجهد الكهربي (القياسي).

(٢) جزء مغنطيسي: $u_{mg} = -\frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})$ حيث $\vec{A}$ الجهد المغنطيسي (الإتجاهي).

وتكون طاقة الجهد الكلية:

$$u = u_{el} + u_{mg} = e\,[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})]$$

ولحل المثال: القوة المؤثرة على الشحنة المتحركة في المجال هي قوة لورنتز

$$\vec{F} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H})] \qquad \_\_\_(1)$$

وحيث أن: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ، $\vec{H} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

بالتعويض في (1):

$$\vec{F} = e[-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\{\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\}] \qquad \_\_\_(2)$$

ومن المتجهات:

$$\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

أيضاً: يمكن إثبات العلاقة:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \_\_\_(3)$$

كالآتي:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = (v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z})\vec{A}$$

$$= (\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z})\vec{A}$$

$$= (\frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

وذلك لأن:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}-\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dy}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\therefore \vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})-[\frac{d\vec{A}}{dt}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}] \qquad \_\_\_\_(4)$$

بالتعويض من (4) في (2):

$$\therefore \vec{F}=e[-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{1}{c}\{\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})-(\frac{d\vec{A}}{dt}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})\}$$

$$=e[-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{1}{c}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$=-\vec{\nabla}[e\{\phi-\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}]-\frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

وبكتابة: $u=e\{\phi-\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}$

$$\therefore \boxed{\vec{F}=-\vec{\nabla}u-\frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}} \qquad \_\_\_\_(5)$$

أيضاً بكتابة: $-\frac{e}{c}\vec{A}=\frac{\partial u}{\partial\vec{v}}=\frac{\partial u}{\partial\dot{q}}$ (من تعريف (علاقة) u)

بالتعويض في (5):

$$\boxed{\vec{F}=-\vec{\nabla}u+\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{A}}{\partial\dot{q}})}$$

ومن ذلك نرى أن القوة المؤثرة على شحنة متحركة في مجال كهرومغنطيسي يمكن اشتقاقها من جهد يعتمد على السرعة، وهو المطلوب.

[٥] <u>اللاجرانجيان والهاملتونيان لجسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي</u>

(١) <u>دالة لاجرانج (اللاجرانجيان):</u>

يمكن إثبات أن تلك الدالة في وجود المجال الكهرومغنطيسي تأخذ الصورة الآتية:

$$\boxed{L = T - e[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})]} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

حيث $\phi, \vec{A}$ هما الجهدان القياسي والإتجاهي للمجال، $T, \vec{v}$ طاقة حركة وسرعة الجسيم المشحون، e شحنة الجسيم.

كلاسيكياً: $T = \frac{1}{2}mv^2$ (الصورة الكلاسيكية لطاقة الحركة)

$$\therefore L = \frac{1}{2}mv^2 - e[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})] \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

نسبياً: $T = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})$ (الصورة النسبية لطاقة الحركة)

حيث m_0 الكتلة الساكنة.

$$\therefore L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}) - e[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})] \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

إثبات العلاقة(1): من المعلوم في علم الإلكتروديناميكا أن: طاقة الجهد لجسيم مشحون تتكون من جزئين

(١) جزء كهربي: $u_e = e\phi$، (٢) جزء مغنطيسي $u_m = -\frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})$

.: طاقة الجهد الكلية لجسيم مشحون بشحنة e يتحرك في مجال كهرومغنطيسي:

$$u = u_e + u_m = e\phi - \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$= e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})] \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

دالة لاجرانج: $L = T - u = T - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})]$

ملحوظة(١) : من دالة لاجرانج النسبية (3) يمكن الحصول على دالة لاجرانج الكلاسيكية (2) كالآتي:

بفك الحد الأول من (3) واعتبار أن $v << c$ (الحالة الكلاسيكية) أي بإهمال قوى $\frac{v^2}{c^2}$ والقوى الأعلى.

$$L = m_0 c^2 [1 - (1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} - \cdots)] - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

ملحوظة(٢): من الصورة النسبية

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}) - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

$$= m_0 c^2 - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

وبإهمال الكمية $m_0 c^2$ التي تمثل طاقة السكون أي طاقة الجسيم وهو ساكن، نحصل على الصورة المعتادة لدالة لاجرانج لجسيم متحرك في مجال كهرومغنطيسي وهي:

$$\boxed{L = - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]}$$

مثال: باستخدام قوة لورنتز لجسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي وباستخدام معادلات لاجرانج للحركة أوجد دالة لاجرانج في الصورة الكلاسيكية:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$$

الحل: قوة لورنتز:

$$\vec{F} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})] = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

بالتعويض عن:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

في (1) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e[-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{A})]$$

وحيث أن:

$$\vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e[-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}) + \vec{\nabla}\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})]$$

$$= e[-\vec{\nabla}(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}]$$

(استخدمنا العلاقة: $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$)

$$\therefore \frac{d}{dt}(m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}) = -e\vec{\nabla}[(\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})] \qquad \_\_\_\_(2)$$

من المعادلة (2) نرى أن الطرف الأيسر يعبر عن المشتقة الكلية الزمنية (بالنسبة للزمن) والطرف الأيمن يعبر عن المشتقات الجزئية بالنسبة للإحداثيات، وهي نفس الصورة العامة لمعادلة لاجرانج التي صورتها:

$$\frac{d}{dt}(\frac{dL}{d\dot{x}}) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad \Big| x = q \;,\; \dot{x} = \dot{q}$$

وبذلك يمكننا كتابة العلاقتين:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} = \frac{dL}{d\vec{v}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[-e\{\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}]$$

وهاتان العلاقتان تتحققان إذا كانت: $L = \frac{1}{2}mv^2 - e\{\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}$

وهو المطلوب.

[٢] <u>دالة هاملتون (الهاملتونيان)</u>: تعرف دالة هاملتون بالعلاقة:

(كلاسيكياً) $$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$

ومن المثال السابق:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

(أو بتفاضل دالة لاجرانج L بالنسبة للسرعة)

ومن (2):

$$\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

بالتعويض عن L في الحالة الكلاسيكية وعن $\vec{p}$ من (2) في (1):

$$H = (m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A})\cdot\vec{v} - [\frac{1}{2}mv^2 - e\{\phi - \frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}]$$

$$= mv^2 + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{1}{2}mv^2 + e\phi - \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}) = \frac{1}{2}mv^2 + e\phi$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{1}{2}mv^2 + e\phi} \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

وهي الصورة الكلاسيكية لدالة هاملتون.

ملاحظة(١): حيث أن $T = \frac{1}{2}mv^2$ ، $u_{el} = e\phi$ (الجهد الإلكتروستاتيكي)

$$\boxed{\therefore\ H = T + u_{el}}$$

أي أن دالة هاملتون الكلاسيكية يمكن التعبير عنها كمجموع طاقتي الحركة والجهد الإلكتروستاتيكي للجسيم المشحون.

ملاحظة(٢): بالتعويض عن $\vec{v}$ من (3) في (4) نحصل على صورة أخرى لدالة هاملتون الكلاسيكية لجسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي وهي:

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\phi} \qquad \text{\_\_\_\_(5)}$$

ونلاحظ أن:

$$(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 = (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\cdot(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$$

$$= \vec{p} - \frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\vec{p} + \vec{p}\cdot\vec{A}) + \frac{e^2}{c^2}A^2$$

وإذا كانت $\vec{A}\cdot\vec{p}=\vec{p}\cdot\vec{A}$ فإن

$$(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2=p^2-\frac{2e}{c}(\vec{A}\cdot\vec{p})+\frac{e^2}{c^2}A^2 \qquad \text{\_\_\_\_(6)}$$

<u>دالة هاملتون النسبية:</u>

بالتعويض عن: $\vec{p}=m\vec{v}+\frac{e}{c}\vec{A}$ في صورتها النسبية حيث:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

وعن L في صورته النسبية:

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e\{\phi-\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}$$

في العلاقة: $H=\vec{p}\cdot\vec{v}-L$ نحصل على:

$$H=(m\vec{v}+\frac{e}{c}\vec{A})\cdot\vec{v}-[-m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e\{\phi-\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\}]$$

$$=mv^2+\frac{e}{c}(\vec{A}\cdot\vec{v})+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+e\phi-\frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$=mv^2+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+e\phi$$

$$=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}+e\phi$$

$$=\frac{m_0v^2+m_0c^2(1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\phi$$

$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\phi$$

$$\therefore \boxed{H=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\phi} \qquad \text{\_\_\_\_(I)}$$

وهي صورة دالة هاملتون النسبية.

<u>مثال</u>: أثبت أن العلاقة بين الطاقة الكلية E وكمية الحركة p في حالـــة وجــود مجال كهرومغنطيسي جهديه $\phi, \vec{A}$ في الصورة النسبية هي:

$$(E-e\phi)^2 = (\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

والتي تؤول إلى العلاقة النسبية المعروفة بين $E, \vec{p}$: $\quad E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

في حالة غياب المجال الكهرومغنطيسي $(\phi = 0 \ , \ \vec{A} = 0)$

<u>الحل</u>: من العلاقة (I) بكتابة $H = E$ (الطاقة الكلية)

$$\therefore \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\phi \qquad \therefore \quad E - e\phi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

بتربيع الطرفين والقسمة على c^2:

$$\frac{(E-e\phi)^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{(1-v^2/c^2)} \qquad \text{\_\_\_\_(1)}$$

ولكن: $\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} = m\vec{v}$

$$\therefore (\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2 = m^2 v^2 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

من (2) ,(1) بالطرح:

$$\frac{(E-e\phi)^2}{c^2} - (\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2 = \frac{m_0^2 c^2}{(1-v^2/c^2)} - \frac{m_0^2 v^2}{(1-v^2/c^2)}$$

$$= \frac{m_0^2 (c^2 - v^2)}{1-v^2/c^2} = \frac{m_0^2 (c^2-v^2)}{c^2 - v^2 \big/ c^2} = m_0^2 c^2$$

بضرب الطرفين في c^2:

$$(E-e\phi)^2 - (\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\therefore (E-e\phi)^2 = (\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

وهي العلاقة المطلوبة.

[٦] ممتد المجال الكهرومغنطيسي Electromagnetic Field Tensor

يعرف ممتد المجال الكهرومغنطيسي $F_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3,4)$ في فراغ منكوفسكي الرباعي بالعلاقة الآتية:

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}$$

حيث A_μ هو المتجه الرباعي للجهد الكهرومغنطيسي $A_\mu=(\vec{A},i\phi)$، وهذا الممتد هو ممتد غير متماثل: $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$، ويمكن حساب مركبات $F_{\mu\nu}$ باستخدام التعريف السابق والنتيجة هي:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

يلاحظ أن مركبات هذا الممتد هي مركبات المجالين الكهربي (E_x,E_y,E_z) والمغنطيسي (H_x,H_y,H_z) ولذلك سمي بممتد المجال الكهرومغنطيسي.

أمثلة محلولة:

مثال(١): باستخدام القانون:

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

حيث $\mu,\nu=1,2,3,4$

أحسب مركبات ممتد المجال الكهرومغنطيسي $F_{\mu\nu}$ وذلك بالصورة:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: باستخدام القانون (1):

وبأخذ: $\nu = 1,2,3,4$, $\mu = 1$ نحصل على

$$F_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$= (curl\,\vec{A})_z = H_z$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

$$curl\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}\,(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \cdots = \hat{i}\,(curl\,\vec{A})_x + \cdots$$

$$\vec{H} = \hat{i}\,H_x + \hat{j}\,H_y + \hat{k}\,H_z$$

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$= -(curl\,\vec{A})_y = -H_y$$

$$F_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{\partial (i\phi)}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial (ict)}$$

$$= -i(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t})$$

$$= -i\,E_x$$

$$\begin{aligned} x_4 &= ict \\ A_4 &= -i\phi \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \end{aligned}$$

أيضاً: بأخذ: $\nu = 1,2,3,4$, $\mu = 2$

$$F_{21} = -F_{12} = -H_z$$

$$F_{22} = \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} = 0$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = (curl\,\vec{A})_x = H_x$$

$$F_{24}=\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}=\frac{\partial(i\phi)}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial(ict)}$$

$$=-i(-\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t})=-i\,E_y$$

وبأخذ $\mu=3\ ,\ \nu=1,2,3,4$

$$F_{31}=-F_{13}=H_y\quad,\quad F_{32}=-F_{23}=-H_x$$

$$F_{34}=\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}=\frac{\partial(i\phi)}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial(ict)}=-i(-\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t})=-i\,E_z$$

ولخيراً بأخذ: $\mu=4\ ,\ \nu=1,2,3,4$

$$F_{41}=-F_{14}=i\,E_x\ ,\ F_{42}=-F_{24}=i\,E_y\ ,\ F_{34}=-F_{43}=i\,E_z$$

$$F_{44}=\frac{\partial A_4}{\partial x_4}-\frac{\partial A_4}{\partial x_4}=0$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): أثبت أن حاصل ضرب الممتد $F_{\mu\nu}$ في نفسه (أو ما يعرف بمقدار (magnituale) الممتد $F_{\mu\nu}$ هو كمية لا متغيرة (Invariant) ويعطي بالعلاقة

$$F_{\mu\nu}^2=2(H^2-E^2)$$

الحل: يعرف مقدار أي ممتد بأنه:

$$F_{\mu\nu}^2=F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu}^2=F_{1\nu}^2+F_{2\nu}^2+F_{3\nu}^2+F_{4\nu}^2$$

$$=(F_{11}^2+F_{12}^2+F_{13}^2+F_{14}^2)+(F_{21}^2+F_{22}^2+F_{23}^2+F_{24}^2)$$

$$+(F_{31}^2+F_{32}^2+F_{33}^2+F_{34}^2)+(F_{41}^2+F_{42}^2+F_{43}^2+F_{44}^2)$$

ولكن: حيث أن الممتد $F_{\mu\nu}$ غير متماثل $(F_{\mu\nu}=-F_{\mu\nu})$

فهو يتميز بالخواص: $(\mu=\nu)\quad F_{\mu\nu}=0 \leftarrow (\mu=\nu)\quad F_{\mu\nu}^2=0$

$$F_{\mu\nu}^2=F_{\nu\mu}^2\quad(\mu\neq\nu)\ \leftarrow\ F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}\quad(\mu\neq\nu)$$

$$F_{\mu\nu}^2=2[F_{12}^2+F_{23}^2+F_{31}^2+F_{41}^2+F_{42}^2+F_{43}^2]\qquad\_\_\_\_(1)$$

ولكن: من مركبات $F_{\mu\nu}$:

$$F_{12} = H_z \ , F_{23} = H_x \ , \ F_{31} = H_y$$
$$F_{41} = iE_x \ , F_{42} = iE_y \ , \ F_{43} = iE_z$$

وبالتعويض في (1):

$$F_{\mu\nu}^2 = 2[H_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + (iE_x)^2 + (iE_y)^2 + (iE_z)^2]$$
$$= 2[(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)] = 2(H^2 - E^2)$$

.: مقدار الممتد $F_{\mu\nu}$ (أي $F_{\mu\nu}^2$) هو $2(H^2 - E^2)$

ومن مثال سابق وجدنا أن الكمية $(H^2 - E^2)$ هي كمية لا متغيرة (Invariant) وبالتالي فإن $(H^2 - E^2)$ هو أيضاً كمية لا متغيرة $\boxed{F_{\mu\nu}^2 = Inv.}$.

<u>مثال(٣):</u> أكتب قانون التحويل لمركبات الممتد $F_{\mu\nu}$ في فراغ منكوفسكي (الرباعي الأبعاد)، ومن ذلك أوجد معادلات التحويل لمركبات شدتي المجال الكهربي والمغنطيسي بالصورة:

$$E'_x = E_x \ , \ E'_y = \alpha(E_y - \beta H_z) \ , \ E'_z = \alpha(E_z + \beta H_y)$$
$$H'_x = H_x \ , \ H'_y = \alpha(H_y + \beta E_z) \ , \ H'_z = \alpha(H_z - \beta E_y)$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

<u>الحل:</u> قانون التحويل لمركبات الممتد $F_{\mu\nu}$ في فراغ منكوفسكي:

$$F'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\mu}\, a_{\beta\nu}\, F_{\mu\nu} \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

حيث:

$$a_{lm} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & i\alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\alpha\beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

تطبيق القانون(١) لإيجاد معادلات التحويل لمركبات شدة المجال الكهربي $\vec{E}$:

حيث أن:

$$F_{41} = iE_x \ , \ F_{42} = iE_y \ , \ F_{43} = iE_z$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$E_x = \frac{1}{i}F_{41} \quad E_y = \frac{1}{i}F_{42} \quad E_z = \frac{1}{i}F_{43}$$

أيضاً:

$$E'_x = \frac{1}{i}F'_{41} \quad E'_y = \frac{1}{i}F'_{42} \quad E'_z = \frac{1}{i}F'_{43}$$

ولكن: من (1)

$$\begin{aligned}
F'_{41} &= a_{4\mu}\, a_{1\nu}\, F_{\mu\nu} \\
&= a_{41}\, a_{1\nu}\, F_{1\nu} + a_{42}\, a_{1\nu}\, F_{2\nu} + a_{43}\, a_{1\nu}\, F_{3\nu} + a_{44}\, a_{1\nu}\, F_{4\nu} \\
&= a_{41}\, a_{1\nu}\, F_{1\nu} + a_{44}\, a_{1\nu}\, F_{4\nu} \\
&= a_{41}(a_{11}F_{11} + a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13} + a_{14}F_{14}) \\
&\quad + a_{44}(a_{11}F_{41} + a_{12}F_{42} + a_{13}F_{43} + a_{14}F_{44}) \\
&= a_{41}(a_{11}F_{11} + a_{14}F_{14}) + a_{44}(a_{11}F_{41} + a_{14}F_{44}) \\
&= a_{41}(a_{14}F_{14}) + a_{44}(a_{11}F_{41}) && \Big| F_{11} = F_{44} = 0 \\
&= a_{41}(-a_{14}F_{41}) + a_{44}(a_{11}F_{41}) && \Big| F_{14} = -F_{41} \\
&= (a_{44}\, a_{11} - a_{41}\, a_{14})F_{41} && \text{______}(2)
\end{aligned}$$

ولكن: $a_{44} = \alpha \ , \ a_{11} = \alpha \ , \ a_{41} = -i\alpha\beta \ , \ a_{14} = i\alpha\,\beta$

$$\begin{aligned}
\therefore\ F'_{41} &= [\alpha^2 - (-i\alpha\beta)(i\alpha\beta)]F_{41} && \Big| \alpha^2(1-\beta^2) = 1 \\
&= \alpha^2(1-\beta^2)\ F_{41} = F_{41} && \Big| F_{41} = iE_x \ , \ F'_{41} = iE'_x
\end{aligned}$$

$$iE'_x = iE_x \quad \rightarrow \quad \boxed{E'_x = E_x}$$

أيضاً: لإيجاد معادلات التحويل لـــ E_y نأخذ $\alpha = 4 \ , \ \beta = 2$ في القانون (1):

$$\begin{aligned}
F'_{42} &= a_{4\mu}\, a_{2\nu}\, F_{\mu\nu} \\
&= a_{41}\, a_{2\nu}\, F_{1\nu} + a_{44}\, a_{2\nu}\, F_{4\nu} \\
&= a_{41}(a_{22}F_{12}) + a_{44}(a_{22}F_{42})
\end{aligned}$$

ولكن:
$$a_{41}=-i\alpha\beta \;\;,\;\; a_{22}=1$$
$$a_{44}=\alpha \;\;,\;\; a_{22}=1$$

$$\therefore F'_{42}=-i\alpha\beta\, F_{12}+\alpha\, F_{42}=\alpha\,(F_{42}-i\beta\, F_{12})$$
$$i\,E'_y=\alpha\,(iE_y-i\beta\, H_z)$$
$$\therefore E'_y=\alpha\,(E_y-\beta\, H_z)$$

$$F_{42}=iE_y \qquad F'_{42}=i\,E'_y \qquad F_{12}=H_z$$

وبالمثل: لإيجاد معادلة التحويل لـــ E_z نأخذ $\alpha=4$, $\beta=3$ في القانون (1):

$$F'_{43}=a_{4\mu}\,a_{3\nu}\,F_{\mu\nu}=a_{41}\,a_{3\nu}\,F_{1\nu}+a_{44}\,a_{3\nu}\,F_{4\nu}$$
$$=a_{41}\,(a_{33}\;F_{13})+a_{44}\,(a_{33}\;F_{43})$$

ولكن: $a_{41}=-i\alpha\beta$, $a_{44}=\alpha$, $a_{33}=1$

$$\therefore F'_{43}=-i\alpha\beta\, F_{13}+\alpha\, F_{43}=\alpha\,(F_{43}-i\beta\, F_{13})$$
$$\therefore i\,E'_z=\alpha\,[iE_z-i\beta\,(-H_y)]$$

$$F_{43}=iE_z \qquad F'_{43}=i\,E'_z \qquad F_{13}=-H_y$$

$$\therefore \boxed{E'_z=\alpha\,(E_z+\beta\, H_y)}$$

<u>تطبيق القانون(١) لإيجاد معادلات التحويل لمركبات شدة المجال المغنطيسي</u> $\vec{H}$:

بنفس الطريقة السابقة: حيث أن

$$H_x=F_{23} \;\;,\;\; H_y=F_{31} \;\;,\;\; H_z=F_{12}$$
$$H'_x=F'_{23} \;\;,\;\; H'_y=F'_{31} \;\;,\;\; H'_z=F'_{12}$$
$$F'_{23}=a_{2\mu}\,a_{3\nu}\,F_{\mu\nu}=a_{22}\,a_{3\nu}\,F_{2\nu}=a_{22}\,(a_{33}\,F_{23})=F_{23}$$
$$\therefore \;\boxed{H'_x=H_x}$$

أيضاً:

$$F'_{31}=a_{3\mu}\,a_{1\nu}\,F_{\mu\nu}=a_{33}\,a_{1\nu}\,F_{3\nu}=a_{33}\,(a_{11}\,F_{31}+a_{14}\,F_{34})$$
$$\therefore H'_y=\alpha\,(H_y+(i\beta)(-iE_z)=\alpha\,(H_y+\beta\, E_z)$$
$$\therefore \;\boxed{H'_y=\alpha\,(H_y+\beta\, E_z)}$$

وأخيراً:

$$F'_{12}=a_{1\mu}a_{2\nu}F_{\mu\nu}=a_{11}a_{2\nu}F_{1\nu}+a_{14}a_{2\nu}F_{4\nu}=a_{11}(a_{22}F_{12})+a_{14}(a_{22}F_{42})$$
$$=a_{11}F_{12}+a_{14}F_{42}=\alpha F_{12}+i\alpha\beta F_{42}=\alpha(F_{12}+i\beta F_{42})$$
$$\therefore H'_z=\alpha[H_z+i\beta(iE_y)=\alpha(H_z-\beta E_y)$$
$$\therefore \quad \boxed{H'_z=\alpha(H_z-\beta E_y)}$$

ملاحظات: من قوانين التحويل لمركبات $\vec{E},\vec{H}$

$$E'_x=E_x \ , \ E'_y=\alpha(E_y-\beta H_z) \, , \ E'_z=\alpha(E_z+\beta H_y)$$
$$H'_x=H_x \ , H'_y=\alpha(H_y+\beta E_z) \, , \ H'_z=\alpha(H_z-\beta E_y)$$

حيث $\beta=\frac{v}{c}$، v هي سرعة S' بالنسبة إلى S في إتجاه محور x.

[∴ السرعة النسبية في إتجاه x]

∴ مركبات $\vec{E},\vec{H}$ الموازية لـــ v (لمحور x) تكون لا متغيرة.

ومركبات $\vec{E},\vec{H}$ العمودية على v (أي في إتجاه y,z) تكون متغيرة.

ويمكن كتابة هذه الحقيقة في صورة إتجاهية كالآتي:

$$\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel} \quad , \quad \vec{H}'_{\parallel}=\vec{H}_{\parallel}$$
$$\vec{E}'_{\perp}=\alpha[\vec{E}_{\perp}+(\vec{\beta}\wedge\vec{H})_{\perp}] \qquad\qquad \Big| \ \vec{\beta}=\frac{\vec{v}}{c}$$
$$\vec{H}'_{\perp}=\alpha[\vec{H}_{\perp}-(\vec{\beta}\wedge\vec{E})_{\perp}]$$

وذلك لأن:

$$\alpha(\vec{\beta}\wedge\vec{H})=\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H})=\frac{\alpha}{c}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ v & 0 & 0\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}$$
$$=\frac{\alpha}{c}[(-vH_z)\,\hat{j}+vH_y\,\hat{k}]$$
$$=\alpha[(-\beta H_z)\,\hat{j}+(\beta H_y)\,\hat{k}]$$

وأيضاً:

$$\alpha(\vec{\beta}\wedge\vec{E})=\frac{\alpha}{c}(\vec{v}\wedge\vec{E})=\frac{\alpha}{c}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ v & 0 & 0\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\alpha}{c}[(-v\,E_z)\,\hat{j}+v\,E_y\,\hat{k}]$$

$$=\alpha[(-\beta\,E_z)\,\hat{j}+(\beta\,E_y)\,\hat{k}]$$

[٧] معادلة منكوفسكي (معادلة الحركة لجسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي) (Minkowski Equation)

يمكن إثبات أن معادلة الحركة لجسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي هي:

$$F_\mu=m_0\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}(F_{\mu\nu}u_\nu) \qquad \_\_\_\_(1)$$

حيث m_0 الكتلة الساكنة للجسيم، e شحنته ، u_μ سرعته الرباعية، $F_{\mu\nu}$ ممتد المجال الكهرومغنطيسي.

وتعرف F_μ بقوة منكوفسكي الرباعية Minkowski 4-force وهي تعميم لقوة لورنتز الثلاثية (في ثلاثة أبعاد).

<u>إثبات(١):</u> حيث أن القوة المؤثرة على جسيم مشحون في مجال كهرومغنطيسي تعطي بقوة لورنتز

$$\vec{F}=e[\vec{E}+\frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H})] \qquad \_\_\_\_(1)$$

معادلة الحركة لهذا الجسيم (في الصورة النسبية):

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}[\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}]\ \Big|\ \beta=\frac{v}{c} \qquad \_\_\_\_(2)$$

ولكن الزمن الصحيح (أو الفعلي) (proper time) $d\tau=dt\sqrt{1-\beta^2}$

وتصبح العلاقة (2):

$$\vec{F}=\frac{d}{d\tau}(m_0\,\vec{v})=m_0\frac{d\vec{v}}{d\tau} \qquad \_\_\_\_(3)$$

بمساواة (1), (3):

$$\vec{F} = m_0 \frac{d\vec{v}}{d\tau} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})] \qquad \_\_\_\_(4)$$

ولكن: مركبات القوة في النسبية هي:

$$F_1 = \alpha F_x \quad , \quad F_2 = \alpha F_y \ , \ F_3 = \alpha F_z$$

$$\therefore \ \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = \frac{1}{\alpha}(F_1, F_2, F_3)$$

ومن (4):

$$\vec{v} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$F_x = m_0 \frac{dv_x}{d\tau} = \frac{e}{c}[c E_x + (\vec{v} \wedge \vec{H})_x]$$

$$= \frac{e}{c}[c E_x + (v_y H_z - v_z H_y)] \qquad \_\_\_\_(5)$$

$$F_y = m_0 \frac{dv_y}{d\tau} = \frac{e}{c}[c E_y + (\vec{v} \wedge \vec{H})_y]$$

$$= \frac{e}{c}[c E_y + (v_z H_x - v_x H_z)] \qquad \_\_\_\_(6)$$

$$F_z = m_0 \frac{dv_z}{d\tau} = \frac{e}{c}[c E_z + (\vec{v} \wedge \vec{H})_z]$$

$$= \frac{e}{c}[c E_z + (v_x H_y - v_y H_x)] \qquad \_\_\_\_(7)$$

ولكن: من مركبات الممتد $F_{\mu\nu}$:

$$i E_x = F_{41} = -F_{14} \ , \ i E_y = F_{42} = -F_{24} \ , \ i E_z = F_{43} = -F_{34}$$

$$H_x = F_{23} = -F_{32} \ , \ H_y = F_{31} = -F_{13} \ , \ H_z = F_{12} = -F_{21}$$

ومن مركبات متجه السرعة الرباعي:

$$u_\mu = \alpha(\vec{v}, ic)$$

$$= (\alpha \vec{v}, ic\alpha) = (u_n, u_4)$$

$$u_n = \alpha \vec{v} \ , \ u_4 = ic\alpha \qquad n = 1, 2, 3$$

$$u_1 = \alpha v_x = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad u_2 = \alpha v_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_3 = \alpha v_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad u_4 = i\alpha c = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

بضرب طرفي (7) ,(6) ,(5) في α:

$$\alpha F_x = m_0 \frac{d(\alpha v_x)}{d\tau} = \frac{e}{c}[\alpha c E_x + \alpha(v_y H_z - v_z H_y)]$$

$$\therefore F_1 = m_0 \frac{du_1}{d\tau} = \frac{e}{c}[i\alpha c \frac{E_x}{i} + u_2 F_{12} + u_3 F_{13}]$$

$$= \frac{e}{c}[u_4(-iE_x) + u_2 F_{12} + u_3 F_{13}]$$

$$= \frac{e}{c}[u_4 F_{14} + u_2 F_{12} + u_3 F_{13}]$$

$$= \frac{e}{c}[F_{14} u_4 + F_{12} u_2 + F_{13} u_3] \qquad \text{\_\_\_\_(8)}$$

وبالمثل من العلاقتين (7) ,(6) نحصل على:

$$F_2 = m_0 \frac{du_2}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{24} u_4 + F_{23} u_3 + F_{21} u_1] \qquad \text{\_\_\_\_(9)}$$

$$F_3 = m_0 \frac{du_3}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{34} u_4 + F_{31} u_1 + F_{32} u_2] \qquad \text{\_\_\_\_(10)}$$

أيضاً: من قاعدة الشغل والطاقة (تصلح في الميكانيكا الكلاسيكية والنسبية)

التغير في الطاقة = الشغل المبذول في وحدة الزمن

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

نسبياً: حيث أن: $E = mc^2$

$$\therefore \frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

وفي وجود مجال كهرومغنطيسي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = [e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H})]\cdot\vec{v}$$

$$= [e(\vec{E}\cdot\vec{v}) + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{v}\wedge\vec{H})] = e(\vec{E}\cdot\vec{v})$$

$$\therefore \frac{d}{d\tau}(m_0 c^2) = e(\vec{E}\cdot\vec{v}) \qquad \left|(\vec{v}\cdot\vec{v}\wedge\vec{H}) = 0\right.$$

بضرب الطرفين في $\frac{i\alpha}{c}$:

$$\frac{d}{d\tau}(i\alpha m_0 c) = \frac{ie\alpha}{c}(\vec{E}\cdot\vec{v})$$

$$m_0\frac{d}{d\tau}(i\alpha c) = \frac{e}{c}[i\alpha(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z)]$$

$$\therefore m_0\frac{du_4}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3]$$

$$\therefore F_4 = \frac{e}{c}[F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3] \qquad \text{\_\_\_\_\_(11)}$$

المعـــادلات (8), (9), (10), (11) يمكـــن كتابتهـــا فـــي صـــورة ممتـــدات (Tensorial form) أو في صورة متآلفة (Covariant) كالآتي:

$$F_1 = m_0\frac{du_1}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{11}u_1 + F_{12}u_2 + F_{13}u_3 + F_{14}u_4]$$

$$F_2 = m_0\frac{du_2}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{21}u_1 + F_{22}u_2 + F_{23}u_3 + F_{24}u_4]$$

$$F_3 = m_0\frac{du_3}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{31}u_1 + F_{32}u_2 + F_{33}u_3 + F_{34}u_4]$$

$$F_4 = m_0\frac{du_4}{d\tau} = \frac{e}{c}[F_{41}u_1 + F_{42}u_2 + F_{43}u_3 + F_{44}u_4]$$

$$\left| \begin{aligned} F_{11} &= 0 \\ F_{22} &= 0 \\ F_{33} &= 0 \\ F_{44} &= 0 \end{aligned} \right.$$

وهذه العلاقات الأربع يمكن كتابتها في صورة مختصرة.

$$\boxed{F_\mu = m_0\frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}(F_{\mu\nu}\,u_\nu)} \qquad , \ \mu,\nu = 1,2,3,4$$

وهذه معادلة منكوفسكي المطلوبة، حيث F_μ هي قوة منكوفسكي الرباعية.

<u>مثال</u>: أثبت أن قوة منكوفسكي الرباعية يمكن كتابتها بالصورة:

$$F_\mu = \alpha[\vec{F}, \frac{ie}{c}(\vec{E}\cdot\vec{v})]$$

حيث $\vec{F} = e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v}\wedge\vec{H})]$ هي قوة لورنتز (الثلاثية) وهـذا يعنـي أن قـوة منكوفسكي هي تعميم لقوة لورنتز في فراغ منكوفسكي.

الحل: قوة منكوفسكي كمتجه رباعي:

$$F_\mu = (F_1, F_2, F_3, F_4) = (F_n, F_4) \qquad ; \quad n = 1,2,3$$

حيث

$$F_n = m_0 \frac{du_n}{d\tau} = m_0 \frac{d(\alpha \vec{v})}{d\tau} = \alpha \frac{e}{c}[c\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{H})]$$

$$F_4 = m_0 \frac{du_4}{d\tau} = m_0 \frac{d(i\alpha c)}{d\tau} = \alpha \cdot \frac{ie}{c}(\vec{E} \cdot \vec{v})$$

وقد تم حساب هذه المركبات بالتفصيل في الفقرة السابقة

$$\therefore F_\mu = (F_n, F_4)$$

$$= \alpha \frac{e}{c}[\{c\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{H})\} \quad , \quad i(\vec{E} \cdot \vec{v})]$$

$$= \alpha\ [e\{\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})\} \quad , \quad \frac{ie}{c}(\vec{E} \cdot \vec{v})]$$

$$= \alpha\ [\vec{F}\ , \frac{ie}{c}(\vec{E} \cdot \vec{v})] \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة: من العلاقة (1) يتضح أن قوة منكوفسكي لها المركبات الآتية:

(i) المركبات الفراغية أو المكانية (space compon.)

$$F_n = \alpha \vec{F} = \alpha e[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})]$$

حيث $\vec{F}$ هي قوة لورنتز.

(ii) المركبة الزمانية (time compon.) أو الرابعة:

$$F_4 = i\frac{\alpha e}{c}(\vec{E} \cdot \vec{v}) = i\alpha e(\vec{E} \cdot \vec{\beta})$$

حيث $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$

[٨] الصورة الممتدة (المتغايرة) لمعادلات ماكسويل

Covariant Form of Maxwell's Equations.

أولاً: معادلات ماكسويل الميكروسكوبية **Microscopic M. E.**

(في عدم وجود مادة)

يمكن كتابة معادلات ماكسويل الميكروسكوبية

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho \quad \_\_\_\_(1) \quad , \quad div\,\vec{H} = 0 \quad \_\_\_\_(2)$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad \_\_\_(3) \quad , \quad curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \_\_\_\_(4)$$

في صورة متغايرة كالآتي:

[١] المعادلة (1), (4):

$$\boxed{F_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c}J_\mu} \quad \_\_\_\_(I)$$

[٢] المعادلة (2), (3):

$$\boxed{F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0} \quad \_\_\_\_(II)$$

حيث:

$$F_{\alpha\beta,\gamma} = \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}$$

والممتد $F_{\mu\nu}$ هو ممتد المجال الكهرومغنطيسي Electromagnetic Field Tensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

الإثبات:

أولاً: المعادلة (1): $div\,\vec{E} = 4\pi\rho$ يمكن كتابتها في صورة مركبات:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial(iE_x)}{\partial x} + \frac{\partial(iE_y)}{\partial y} + \frac{\partial(iE_z)}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}(ic\rho)$$

$$\therefore \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{c} j_4 \qquad \_\_\_\_(5)$$

وهي الصورة الممتدة للمعادلة (1):

<u>المعادلة (4):</u> $curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ وفي صورة ممتدات:

<u>المركبة x:</u>

$$[curl\,\vec{H}]_x - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\therefore \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial (iE_x)}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\therefore \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1 \qquad \_\_\_\_(6)$$

$$\vec{J} = (j_x, j_y, j_z) = (j_1, j_2, j_3)$$

<u>المركبة y:</u>

$$[curl\,\vec{H}]_y - \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\therefore \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial (iE_y)}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\therefore \frac{\partial F_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_2 \qquad \_\_\_\_(7)$$

<u>المركبة z:</u>

$$[curl\,\vec{H}]_z - \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\therefore \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial (iE_z)}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\therefore \frac{\partial F_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_3 \qquad \_\_\_\_(8)$$

المعادلات (8) ,(7) ,(6) ,(5) يمكن كتابتها بصورة:

$$F_{12,2}+F_{13,3}+F_{14,4}=\frac{4\pi}{c}j_1$$

$$F_{21,1}+F_{23,3}+F_{24,4}=\frac{4\pi}{c}j_2$$

$$F_{31,1}+F_{32,2}+F_{34,4}=\frac{4\pi}{c}j_3$$

$$F_{41,1}+F_{42,2}+F_{43,3}=\frac{4\pi}{c}j_4$$

$$F_{12,2}=\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}$$

$$F_{21,1}=\frac{\partial F_{21}}{\partial x_1}$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة الممتدة:

$$F_{\mu\nu,\nu}=\frac{4\pi}{c}J_\mu \qquad \text{\_\_\_\_\_(I)} \qquad \mu,\nu=1,2,3,4$$

ثانياً: المعادلة (2): $div\,\vec{H}=0$ وفي صورة مركبات:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

$$\therefore \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}=\frac{4\pi}{c}j_3 \qquad \text{\_\_\_\_\_(9)}$$

المعادلة (3): $curl\,\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0$، وفي صورة مركبات:

المركبة x:

$$(curl\,\vec{E})_x+\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial(iE_z)}{\partial y}-\frac{\partial(iE_y)}{\partial z}-\frac{\partial H_x}{\partial(ict)}=0$$

$$\therefore \frac{\partial F_{43}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{24}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{32}}{\partial x_4}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(10)}$$

المركبة y:

$$(curl\,\vec{E})_y+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}=0$$

$$\therefore \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial (iE_x)}{\partial z}-\frac{\partial (iE_z)}{\partial x}-\frac{\partial H_y}{\partial (ict)}=0$$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_4}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(11)}$$

<u>المركبة z:</u>

$$(curl\,\vec{E})_z+\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial (iE_y)}{\partial x}-\frac{\partial (iE_x)}{\partial y}-\frac{\partial H_z}{\partial (ict)}=0$$

$$\frac{\partial F_{42}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{21}}{\partial x_4}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(12)}$$

المعادلات (9), (10), (11), (12) يمكن كتابتها بالصورة:

$$F_{43,2}+F_{32,4}+F_{24,3}=0$$

$$F_{13,4}+F_{34,1}+F_{41,3}=0$$

$$F_{42,1}+F_{21,4}+F_{14,2}=0$$

$$F_{12,3}+F_{23,1}+F_{31,2}=0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات الأربع في المعادلة:

$$\boxed{F_{\mu\nu,\lambda}+F_{\nu\lambda,\mu}+F_{\lambda\mu,\nu}=0} \qquad \text{\_\_\_\_\_(II)}$$

حيث μ,ν,λ تأخذ القيم $1,2,3,4$ وبحيث أن: $\mu\neq\nu\neq\lambda$.

<u>ثانياً: معادلات ماكسويل الماكروسكوبية</u>

<u>(في حالة وجود وسط – Medium)</u>

يمكن كتابة معادلات ماكسويل الماكروسكوبية

$$div\,\vec{D}=4\pi\rho \qquad \text{\_\_\_\_(1)} \quad , \quad div\,\vec{B}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(2)}$$

$$curl\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \_\_\_(3) \quad , \quad curl\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \_\_\_\_\_(4)$$

في صورة متغايرة كالآتي:

$$\boxed{D_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c}J_{\mu}} \quad \_\_\_\_\_(I)$$

(بالنسبة للمعادلتين (2) ,(1))

$$\boxed{B_{\mu\nu,\lambda} + B_{\nu\lambda,\mu} + B_{\lambda\mu,\nu} = 0} \quad \_\_\_\_(II)$$

(بالنسبة للمعادلتين (3) ,(2))

حيث الممتد $D_{\mu\nu}$ يسمى ممتد الإزاحة الكهرومغنطيسية

(Electromagnetic Displacement Tensor)

ومركباته هي:

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(\vec{E} \to \vec{D})$$

وحيث الممتد $B_{\mu\nu}$ يسمى ممتد الحث (أو التأثير) الكهرومغنطيسي

(Electromagnetic Induction Tensor)

ومركباته هي:

$$D_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(\vec{H} \to \vec{B})$$

إثبات العلاقة (I): من العلاقة $div\,\vec{D} = 4\pi\rho$ وفي صورة مركبات

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial (i D_x)}{\partial x} + \frac{\partial (iD_y)}{\partial y} + \frac{\partial (iD_z)}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}(ic\rho)$$

$$\therefore \frac{\partial D_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{43}}{\partial x_3} = \frac{4\pi}{c} j_4 \qquad \_\_\_\_(5)$$

من العلاقة (4): $curl\,\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$، وفي صورة مركبات:

المركبة x:

$$(curl\,\vec{H})_x - \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial (iD_x)}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} j_x$$

$$\therefore \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{14}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_1 \qquad \_\_\_\_(6)$$

المركبة y:

$$(curl\,\vec{H})_y - \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial (iD_y)}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} j_y$$

$$\therefore \frac{\partial D_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{24}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_2 \qquad \_\_\_\_(6)$$

المركبة z:

$$(curl\,\vec{H})_z - \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial (iD_z)}{\partial (ict)} = \frac{4\pi}{c} j_z$$

$$\therefore \frac{\partial D_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{34}}{\partial x_4} = \frac{4\pi}{c} j_3 \qquad \_\_\_\_(8)$$

المعادلات (8) ,(7) ,(6) ,(5) يمكن كتابتها بالصورة:

$$D_{12,2}+D_{13,3}+D_{14,4}=\frac{4\pi}{c}j_1$$

$$D_{21,1}+D_{23,3}+D_{24,4}=\frac{4\pi}{c}j_2$$

$$D_{31,1}+D_{32,2}+D_{34,4}=\frac{4\pi}{c}j_3$$

$$D_{41,1}+D_{42,2}+D_{43,3}=\frac{4\pi}{c}j_4$$

أو في صورة ممتدات:

$$\boxed{D_{\mu\nu,\nu}=\frac{4\pi}{c}j_\mu} \qquad \text{\_\_\_\_\_(I)}$$

حيث $D_{\mu\nu}$ هو ممتد الإزاحة الكهرومغنطيسية ومركباته هي مركبات متجه الإزاحة $\vec{D}$ (D_x,D_y,D_z) ومتجه شدة المجال المغنطيسي $\vec{H}$ (H_x,H_y,H_z).

<u>إثبات العلاقة (II)</u>: <u>من المعادلة (2):</u> $div\,\vec{B}=0$ وفي صورة مركبات

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial B_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial B_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial B_{12}}{\partial x_3}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(9)}$$

<u>المعادلة (3):</u> $curl\,\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$، وفي صورة مركبات:

<u>المركبة x:</u>

$$(curl\,\vec{E})_x+\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial(iE_z)}{\partial y}-\frac{\partial(iE_y)}{\partial z}-\frac{\partial B_x}{\partial(ict)}=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial B_{43}}{\partial x_2}+\frac{\partial B_{24}}{\partial x_3}+\frac{\partial B_{32}}{\partial x_4}=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_(10)}$$

المركبة y:

$$(curl\,\vec{E})_y + \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial (iE_x)}{\partial z} - \frac{\partial (iE_z)}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial (ict)} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial B_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{13}}{\partial x_4} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(11)}$$

المركبة z:

$$(curl\,\vec{E})_z + \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial (iE_y)}{\partial x} - \frac{\partial (iE_x)}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial (ict)} = 0$$

$$\frac{\partial B_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{14}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{21}}{\partial x_4} = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(12)}$$

المعادلات (12) ,(11) ,(10) ,(9) يمكن كتابتها بالصورة:

$$B_{43,2} + B_{32,4} + B_{24,3} = 0$$

$$B_{13,4} + B_{34,1} + B_{41,3} = 0$$

$$B_{42,1} + B_{21,4} + B_{14,2} = 0$$

$$B_{12,3} + B_{23,1} + B_{31,2} = 0$$

والتي يمكن كتابة في الصورة المضغوطة (صورة ممتدات)

$$\boxed{B_{\mu\nu,\lambda} + B_{\nu\lambda,\mu} + B_{\lambda\mu,\nu} = 0} \qquad \text{\_\_\_\_(II)}$$

حيث $\mu,\nu,\lambda = 1,2,3,4$ وبحيث أن: $\mu \neq \nu \neq \lambda$.

الممتد $B_{\mu\nu}$ هو ممتد الحث الكهرومغنطيسي ومركباته هي مركبات متجه الحث $\vec{B}$ (Induction vector) وشدة المجال الكهربي $\vec{E}$

يلاحظ أن الممتدين $D_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ هما ممتدان غير متماثلين

$$D_{\mu\nu} = -D_{\nu\mu} \quad , \quad B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$$

ملخص:

(١) معادلات ماكسويل الميكروسكوبية (في غياب المادة)

$$F_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \ , \ F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

حيث $F_{\mu\nu}$ هو ممتد المجال الكهرومغنطيسي

(٢) معادلات ماكسويل الماكروسكوبية (في وجود المادة)

$$D_{\mu\nu,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \ , \ B_{\mu\nu,\lambda} + B_{\nu\lambda,\mu} + B_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

حيث $D_{\mu\nu}$ ممتد الإزاحة الكهرومغنطيسية، $B_{\mu\nu}$ممتد الحث الكهرومغنطيسي.

مسألة: أوجد معادلات التحويل لمركبات المتجهات الكهرومغنطيسية (Electromagnetic Vectors) $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{D}$ وذلك باستخدام قانوني التحويل للممتدين $B_{\mu\nu}, D_{\mu\nu}$.

استنتج الصورة الإتجاهية لهذه المعادلات في حالة السرعات الصغيرة.

الحل: أولاً: معادلات التحويل لمركبات المتجهين $\vec{E}, \vec{B}$

نستخدم قانون التحويل للممتد $B_{\mu\nu}$ (لاحتوائه على مركبات المتجهين $\vec{E}, \vec{B}$)، وصورته:

$$B'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} a_{\alpha\mu}\, a_{\beta\nu}\, B_{\mu\nu} \qquad \text{\_\_\_\_}(1)$$

وبذلك يمكن الحصول على معادلات التحويل للمركبات (E_x, E_y, E_z) والمركبات (B_x, B_y, B_z) بالصورة:

$B'_x = B_x$	$E'_x = E_x$
$B'_y = \alpha(B_y + \beta E_z)$	$E'_y = \alpha(E_y - \beta B_z)$
$B'_z = \alpha(B_z - \beta E_y)$	$E'_z = \alpha(E_z + \beta B_y)$

وللسرعات الصغيرة $(v << c)$: حيث $\beta^2 \to 0$ ، $\alpha \to 1$

فإن العلاقات السابقة يمكن كتابتها في الصورة الإتجاهية الآتية:

$$\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \qquad \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B})_{\perp}] \qquad \vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E})_{\perp}]$$

حيث العلامة // تمثل المركبات الموازية والعلامة $\perp$ تمثل المركبات العمودية للسرعة النسبية v لنظام الإحداثيات (والتي هي في إتجاه محور x).

وحيث أن:

$$\frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{j}(-\frac{v}{c}B_z) + \hat{k}(\frac{v}{c}B_y)$$

$$= \hat{j}(-\beta B_z) + \hat{k}(\beta B_y)$$

$$-\frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E}) = -\frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{j}(\frac{v}{c}E_z) + \hat{k}(-\frac{v}{c}E_y)$$

$$= \hat{j}(\beta E_z) + \hat{k}(-\beta E_y)$$

<u>ثانياً</u>: <u>معادلات التحويل لمركبات المتجهين</u> $\vec{H}, \vec{D}$

نستخدم قانون التحويل للممتد $D_{\mu\nu}$ (لاحتوائه على مركبات المتجهين $\vec{H}, \vec{D}$)

وصورته $$D'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} a_{\alpha\mu}\, a_{\beta\nu} D_{\mu\nu}$$

وبذلك يمكن الحصول على معادلات التحويل للمركبات (H_x, H_y, H_z) والمركبات (D_x, D_y, D_z) بالصورة:

$$H'_x = H_x \qquad\qquad D'_x = B_x$$
$$H'_y = \alpha(H_y + \beta D_z) \qquad\qquad D'_y = \alpha(D_y - \beta H_z)$$
$$H'_z = \alpha(H_z - \beta D_y) \qquad\qquad D'_z = \alpha(D_z + \beta H_y)$$

وللسرعات الصغيرة $(v << c)$: فإن $\beta^2 \to 0$ ، $\alpha \to 1$

وتؤول العلاقات السابقة إلى الصورة الإتجاهية:

$$\vec{H}'_{//} = \vec{H}_{//} \qquad\qquad \vec{D}'_{//} = \vec{D}_{//}$$
$$\vec{H}'_{\perp} = \vec{H}_{\perp} - \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{D})_{\perp} \qquad\qquad \vec{D}'_{\perp} = \vec{D}_{\perp} + \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{H})_{\perp}$$

حيث العلامتين $\perp$,// تمثلان المركبات الموازية والعمودية على السرعة النسبية v (الموازية لمحور x).

وذلك لأن:

$$-\frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{D}) = -\frac{1}{c}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 0 & 0 \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{j}(\frac{v}{c}D_z) + \hat{k}(-\frac{v}{c}D_y) = \hat{j}(\beta D_z) + \hat{k}(-\beta D_y)$$

وهكذا ...

[٩] ممتد الطاقة – كمية الحركة للمجال الكهرومغنطيسي:

Energy-Momentum Tensor of Electromagnetic Field

لإيجاد هذا الممتد نبدأ بتمهيدين هما

(١) أساسيات في الميكانيكا التحليلية.

(٢) ممتد الطاقة – كمية الحركة لمنظومة ميكانيكية.

وذلك بإعتبار أن المجال الكهرومغنطيسي هو منظومة ميكانيكية (مثل الأجسام) تتحرك في الفراغ أو في الوسط المادي بقوانين حركة معينة، ويكون له بذلك – مثل سائر المنظومات الميكانيكية – كميات خاصة به تدل على حركته، مثل الطاقة، كمية الحركة وغيرها.

تمهيد(١): أساسيات الميكانيكا التحليلية (Analytical Mechanics)

[١] في الميكانيكا التحليلية ندرس المنظومات الميكانيكية (Mechanical Systems) التي هي عبارة عن تجمع من عدد كبير جداً من الجسيمات الخاضعة لشروط محدودة، ومنها، مثلاً: الجسم المتماسك أو الجاسئ (Rigid Body) الذي يتكون من عدد كبير جداً من الجسيمات بحيث أن المسافة بين كل أثنين منها تكون ثابتة إذا تعرض الجسم لأي قوة خارجية.

[٢] إذا تحرك جسم (منظومة ميكانيكية) بحرية في الفراغ مثلاً فيقال أن له ثلاثة درجات حرية (Degrees of Freedom) أي أن له حرية الحركة في ثلاثة أبعاد، وإذا تحرك الجسم في المستوى فيكون له درجتان من درجات الحرية، وهكذا.

[٣] في الميكانيكا التحليلية توصف حالة المنظومة الميكانيكية بدالة لاجرانج (Lagrangian) وهي دالة في الإحداثيات (الموضع) (q_k) والسرعة $(\dot{q}_k)$ والزمن t $\leftarrow$ $L = L(q_k, \dot{q}_k, t)$، حيث الإحداثيات q_k تسمى بالإحداثيات المعممة (Generalized Coordinates) فمثلاً:

في الفراغ الأقليدي: الإحداثيات الكرتيزية x, y, z، فإن $x = q_1, y = q_2, z = q_3$

وأيضاً: إذا كانت المنظمة تتكون من عدد k من الجسيمات:

الجسيم الأول: إحداثياته $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$

الجسيم الثاني: إحداثياته $q_2 = (x_2, y_2, z_2)$

وهكذا حتى الجسيم k فتكون إحداثياته هي q_k.

أيضاً $\dot{q}_k = \dfrac{dq_k}{dt}$ (السرعة المعممة)

[٤] يعرف تكامل الفعل (Action Integral) بالعلاقة:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt$$

وهي كمية هامة جداً في الميكانيكا التحليلية.

[٥] تنص قاعدة أقل فعل (Principle of least action) علـــى أن التغيــر فـــي الفعل (δS) يساوي صفراً .

$$\boxed{\delta S = 0}$$

حيث التغير (Variation) في أي دالة $F = F(q, \dot{q}, t)$ يعرف بالعلاقة:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial q}\delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}$$

[٦] دالة لاجرانج L تحقق معادلة تفاضلية هامة هي معادلة لاجرانج وصورتها:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

وهي المعادلة الأساسية في الميكانيكا التحليلية.

[٧] إذا كانت T هـــي طاقـــة الحركـــة (Kinetic Energy) لجـــسيم متحـــرك، وكانت u هي طاقة الجهد (Potential Energy) فـــإن دالـــة لاجـــرانج L تعرف بالعلاقة: $\boxed{L = T - u}$

[٨] هناك دالة أخـــرى هامـــة فـــي الميكانيكـــا التحليليـــة هـــي دالـــة هـــاملتون (Hamitltonian) H وهي دالة في q_k, p_k, t حيث p_k هي كمية الحركة المعممة (Generalized Momentum) $H = H(q_k, p_k, t)$ وترتبط H مع L بالعلاقة الآتية:

$$\boxed{H = \sum_{k=1} p_k \dot{q}_k - L}$$

<u>وفي الحالة البسيطة</u>: إذا كانت $\vec{p}$ هي كمية حركة جـــسيم وكانـــت $\vec{v}$ هـــي سرعته فإن: $\boxed{H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L}$

[٩] يعرف المجال المحافظ (conservative Field): بأنه المجال الـــذي يتحـــرك فيه الجسم بحيث أن القوة المؤثرة على هذا الجسيم تـــرتبط بطاقـــة الجهـــد u بالعلاقة الآتية: $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} u = -grad\ u}$

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \ , \ F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \ , \ F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

وفي حالة المجالات المحافظة فإن دالة هاملتون تساوي الطاقة الكلية:

$$\boxed{H = T + u}$$

[١٠] العلاقة بين كمية الحركة ودالة لاجرانج هي:

$$\boxed{p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}$$

وفي الحالة البسيطة: فإن $\boxed{p = \frac{\partial L}{\partial v}}$

<u>معادلة لاجرانج المعممة (Generalized L. E.):</u>

لتعميم معادلة لاجرانج أي وضعها في صورة ممتـدات (Tensorial Form) أو صورة متآلفة (Covatiant):

نكتب السرعة المعممة بالصورة:

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial x_\mu} = \partial_\mu q = q_{,\mu} \qquad \_\_\_\_(1)$$

ونكتب تكامل الفعل $S = \int L(q, \dot{q}, t)\, dt$ بالصورة:

$$S = \int \mathfrak{L}(q, q_{,\mu}, x_\mu)\, dx_\mu \qquad \_\_\_\_(2)$$

وتعرف بالصورة المعممة لـــ S، حيـث $\mu = 1,2,3,4$ فـي حالـة فـراغ منكوفسكي ذو الأربعة أبعاد.

ونلاحظ أن: $$\frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$$

$$\frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial q_{,\nu}}{\partial x_\mu} \quad \rightarrow \quad q_{,\mu,\nu} = q_{,\nu,\mu} \qquad \_\_\_\_(3)$$

ويلاحظ أيضاً أن $\mathfrak{L}$ هي دالة لاجرانج المعممة.

التغير في S (من العلاقة (2)):

$$\delta S = \delta \int \mathfrak{L}\, dx_\mu = \int \delta \mathfrak{L}\, dx_\mu = \int [\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} \partial q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}} \partial q_{,\mu}]\, dx_\mu = 0 \qquad \_\_\_(4)$$

(من قاعدة أقل فعل).

ولكن (من قوانين حساب المتغيرات (Calculus of variations):

$$\delta(y') = (\delta\, y)' \rightarrow \delta\,(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(\delta\, y)$$

$$\therefore\ \delta\,(\frac{d}{dx}) = \frac{d}{dx}(\delta)$$

$$\therefore\ \delta(q_{,\mu}) = \delta(\frac{\partial q}{\partial x_\mu}) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta\, q)$$

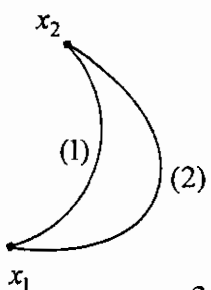
وتصبح (4):

$$\int [\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q}\delta\, q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\, q]\, dx_\mu = 0 \qquad \_\_\_(5)$$

وبأخذ الحد الثاني من (5) وإجراء التكامل عليه بالتجزئ:

$$\int\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\, q\, dx_\mu = \int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}\frac{d}{dx_\mu}(\delta\, q)\ dx_\mu = \int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}} d\ (\delta\, q)$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}\delta\, q \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta\, q\, d(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}) \qquad \_\_\_\_(6)$$



ولكن: من حساب التغيرات أيضاً:

إذا كان لدينا منحنيان متجـــاوران (1), (2) يتقاطعان عند x_1 , x_2 ، وكانت $\delta\, q$ تمثل التغير في الإحداثيات بين (1), (2).

$\therefore$ فعند x_1 , x_2 لا يوجد تغير $\delta\, q(x_2) = 0\ ,\ \ \delta\, q(x_1) = 0$

وبذلك يتلاشى الحد الأول في (6) ونحصل على:

$$\int\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\delta\, q\, dx_\mu = -\int \delta\, q\, d(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}})$$

$$= -\int \delta\, q \frac{d}{dx_\mu}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}})\, dx_\mu$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}})\,\delta\, q\ dx_\mu$$

وبالتعويض في (5):

$$\int [\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q}\delta q - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}})\,\delta q]\,dx_\mu = 0$$

$$\therefore \int [\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}})]\delta q\;dx_\mu = 0$$

وحيث أن δq إختيارية فشرط تحقق هذه المعادلة هو (نظرية):

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\mu}}) = 0} \qquad \_\_\_\_(7)$$

وهي معادلة لاجرانج المعممة، وهي عبارة عن الصورة الممتدة (أو المتآلفة) لمعادلة لاجرانج العادية التي صورتها:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = 0$$

<u>تمهيد(٢): ممتد الطاقة – كمية الحركة لمنظومة ميكانيكية</u>

<u>**Energy – Momentum Tensor**</u>

باستخدام العلاقتين (7) ,(3) يمكننا كتابة:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}}\frac{\partial q_{,\nu}}{\partial x_\mu}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}})q_{,\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}}\frac{\partial q_{,\mu}}{\partial x_\nu}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu}(q_{,\mu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}}) \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولكن:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_\mu} = \delta_{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta_{\mu\nu}\mathfrak{L}) \qquad \Big|\, \delta^\nu_\mu A^\mu = A^\nu$$

وبذلك نحصل على العلاقة الآتية:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\delta_{\mu\nu}\mathfrak{L}) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(q_{,\mu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}})$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_\nu}[q_{,\mu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu}\mathfrak{L}] = 0 \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

وبكتابة:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = q_{,\mu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu}\mathfrak{L}} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

فإن (2) تصبح:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$$

$$\therefore \boxed{T_{\mu\nu,\nu} = 0} \qquad \text{\_\_\_\_(4)}$$

حيث $\mu, \nu = 1,2,3,4$.

المعادلة (3) تمثل ممتداً يعرف بممتد الطاقة – كمية الحركة للمنظومة الميكانيكية، وهو ممتد متماثل $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

لمعادلة (4) هي القانون العام (أو مبدأ) ثبوت (أو حفظ) الطاقة – كمية الحركة بمعنى أن: $T_{\mu\nu} = const.$.

ملحوظة: في فراغ منكوفسكي الرباعي فإن الطاقة وكمية الحركة يرتبطان معاً بمتجه رباعي هو متجه الطاقة – كمية الحركة p_μ.

ممتد الطاقة – كمية الحركة للمجال الكهرومغنطيسي:

أثبتنا أن ممتد الطاقة – كمية الحركة لمنظومة ميكانيكية يكتب بالصورة:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = q_{,\mu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu}\mathfrak{L}}$$

حيث $\mathfrak{L}$ هي دالة لاجرانج للمنظومة.

وسوف نقوم هنا بحساب هذا الممتد للمجال الكهرومغنطيسي، ومن أجل ذلك نعتبر ما يلي:

(١) في نظرية المجالات (Field Theory) ومنها المجال الكهرومغنطيسي: يعتبر المجال كمنظومة ميكانيكية لها خواص المنظومات الميكانيكية المعروفة في علم الميكانيكا، بمعنى أن

" أي مجال يكون له كتلة وسرعة وكمية حركة وطاقة ... إلخ "

وهي الكميات التي تحدد عادة المنظومات الميكانيكية في علم الميكانيكا.

(٢) إن قوانين علم الإلكتروديناميكا تشبه إلى حد كبير قوانين علم الميكانيكا، حيث أننا ندرس في الميكانيكا حركة الجسيمات غير المشحونة، بينما ندرس في الإلكتروديناميكا حركة الجسيمات المشحونة.
والاختلاف بين العلمين ناتج عن وجود الشحنة.

(٣) في علم الميكانيكا نتعامل مع كُتل لها مجال تجاذبي (gravitational Field)، بينما في علم الإلكتروديناميكا نتعامل مع شحنات لها مجال كهربي وإذا تحركت تولد مجالاً مغنطيسياً أي أننا نتعامل في الإلكتروديناميكا مع مجالات كهرومغنطيسية (Electromagnetic Fields).

(٤) يعتبر علم الإلكتروديناميكا هو: ديناميكا المجالات الكهرومغنطيسية بإعتبارها منظومات ميكانيكية.

<u>فبالمقارنة مع علم الديناميكا (الميكانيكا):</u>

حيث أن قوانين الميكانيكا هي من الدرجة الثانية في الزمن t بالنسبة إلى الإحداثيات المعممة q، بينما قوانين الإلكتروديناميكا (المجال الكهرومغنطيسي) والتي تعبر عن الجهدين $\vec{A},\phi$ هي أيضاً من الدرجة الثانية في الزمن.

وبذلك يمكن أخذ هذين الجهدين كأحداثيات معممة لوصف المجال الكهرومغنطيسي أي إعتبار أن $\vec{A},\phi$ هي الإحداثيات المعممة في علم الإلكتروديناميكا.

$$\boxed{q} \longleftrightarrow \boxed{\vec{A},\phi}$$

في الميكانيكا   في الإلكتروديناميكا

ويمكن بذلك أخذ المتجه $A_\mu = (\vec{A}, \phi)$ كإحداثيات معممة للمجال الكهرومغنطيسي.

وأيضاً يمكن أخذ مشتقة هذا المتجه بالنسبة إلى x_μ كسرعات معممة للمجال، وبذلك يأخذ الممتد $T_{\mu\nu}$ الصورة الآتية للمجالات الكهرومغنطيسية.

$$T_{\mu\nu} = q_{,\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_{\mu\nu}\, \mathfrak{L}$$

$$= \frac{\partial q}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\frac{\partial q}{\partial x_\nu})} - \delta_{\mu\nu}\, \mathfrak{L}$$

$$= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\nu})} - \delta_{\mu\nu}\, \mathfrak{L} \left| \begin{array}{l} q \to \underset{\downarrow}{A}_\mu \\ \quad (A_\alpha) \end{array} \right.$$

$$= A_{\alpha,\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (A_{\alpha,\nu})} - \delta_{\mu\nu}\, \mathfrak{L}$$

وهي صورة ممتد الطاقة – كمية الحركة للمجال الكهرومغنطيسي (أي في علم الإلكتروديناميكا).

$$\therefore \quad \boxed{T_{\mu\nu} = A_{\alpha,\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (A_{\alpha,\nu})} - \delta_{\mu\nu}\, \mathfrak{L}}$$

<u>أمثلة محلولة</u>

<u>مثال(١):</u> إذا كان اللاجرانجيان (دالة لاجرانج) للمجال الكهرومغنطيسي ترتبط بممتد المجال $F_{\mu\nu}$ بالعلاقة:

$$\mathfrak{L} = a F^2$$

حيث a ثابت قيمته في النظام الجاوسي للوحدات (Gaussian System of units) هي $a = -\frac{1}{16\pi}$ ، $F^2 = F_{mn} F_{mn}$

فأثبت أن ممتد الطاقة – كمية الحركة $T_{\mu\nu}$ يأخذ الصورة الآتية:

باعتبار أن $A_{\alpha,\mu} = \dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu}$

$$\therefore \quad \boxed{T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} A_{\alpha,\mu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu} F^2}$$

<u>الحل</u>: حيث أن

$$T_{\mu\nu} = A_{\alpha,\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(A_{\alpha,\nu})} - \delta_{\mu\nu}\, \mathfrak{L} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

$$\mathfrak{L} = a F^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

$$F^2 = F_{mn} F_{mn}$$

$$\frac{\partial(F^2)}{\partial(A_{\alpha,\nu})} = 2F_{mn} \frac{\partial F_{mn}}{\partial(A_{\alpha,\nu})} = 2F_{mn} \frac{\partial(A_{n,m} - A_{m,n})}{\partial(A_{\alpha,\nu})}$$

حيث:

$$F_{mn} = \frac{\partial A_n}{\partial x_m} - \frac{\partial A_m}{\partial x_n} = A_{n,m} - A_{m,n}$$ (من تعريف الممتد F_{mn})

ولكن:

$$\frac{\partial A_{m,n}}{\partial A_{\alpha,\nu}} = \delta_{m\alpha}\,\delta_{n\nu}$$ (من خواص دالة دلتا)

$$\frac{\partial(F^2)}{\partial(A_{\alpha,\nu})} = 2F_{mn}(\delta_{n\alpha}\,\delta_{m\nu} - \delta_{m\alpha}\,\delta_{n\nu})$$

ولكن من خواص دلتا كرونيكر أيضاً:

$$\delta_{n\alpha}\,\delta_{m\nu} F_{mn} = \delta_{m\nu}\,\delta_{n\alpha}\, F_{mn} = \delta_{m\nu}\, F_{\alpha m} = F_{\nu\alpha}$$

$$\delta_{m\alpha}\,\delta_{n\nu} F_{mn} = \delta_{m\alpha}\, F_{\nu m} = F_{\alpha\nu}$$

$$\therefore \ \frac{\partial(F^2)}{\partial(A_{\alpha,\nu})} = 2(F_{\nu\alpha} - F_{\alpha\nu}) = 2(F_{\nu\alpha} + F_{\nu\alpha}) \qquad \Big| F_{\alpha\nu} = -F_{\nu\alpha}$$

$$= 4F_{\nu\alpha}$$

ولكن:

$$\pounds = a F^2 = -\frac{1}{16\pi} F^2 \qquad \_\_\_\_\_(3) \qquad \Big| \; a = -\frac{1}{16\pi}$$

$$\therefore \; \frac{(\partial \pounds)}{\partial(A_{\alpha,\nu})} = 4a F_{\nu\alpha} = -\frac{1}{4\pi} F_{\nu\alpha} \qquad \_\_\_\_\_(4)$$

بالتعويض من (4) ,(3) في (1) نحصل على:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} A_{\alpha,\mu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2} \qquad \_\_\_\_\_(I)$$

وهي الصيغة المطلوبة للممتد $T_{\mu\nu}$.

<u>مثال(٢):</u> الممتد (I) هو ممتد غير متماثل ولجعله متماثلاً يجب إضافة ممتد آخـــر إليه (ذو قيمة تساوي صفراً) حتى يتحول إلى ممتد متماثل.

(i) أثبت أن إضافة الممتد $G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\alpha} F_{\nu\alpha}$ إلى (I) يحوله إلى الممتد المتماثل.

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} F^2] \qquad \_\_\_\_\_(II)$$

(ii) أثبت أن قيمة الممتد $G_{\mu\nu}$ تساوي صفراً. حتى لا تغير إضـــافته إلـــى الممتد (I) من قيمة هذا الممتد.

<u>الحل:</u> بإضافة الممتد

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\alpha} F_{\nu\alpha} \qquad \Big| \; A_{\mu,\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}$$

إلى الممتد $T_{\mu\nu}$ المعطي بالعلاقة (I) نحصل على الممتد $P_{\mu\nu}$.

$$p_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} A_{\alpha,\mu} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2$$

$$= -\frac{1}{4\pi} (A_{\alpha,\mu} - A_{\mu,\alpha}) F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2$$

$$= -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} F^2$$

$$= \frac{1}{4\pi}[-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4\pi} \delta_{\mu\nu} F^2] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(I)}$$

حيث

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} = A_{\alpha,\mu} + A_{\mu,\alpha} \qquad \Big| \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1(\mu = \nu) \\ 0(\mu \neq \nu) \end{cases}$$

(ii) لإثبات أن $G_{\mu\nu}$: بإستخدام معادلات المجال لماكسويل في غياب الشحنات

$$\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\nu\alpha,\alpha} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial F_{\alpha\nu}}{\partial x_\alpha} = 0}$$

$$\therefore \ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(A_\mu F_{\alpha\nu})$$

$$\therefore \ \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\nu}] = \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(A_\mu F_{\alpha\nu})] = Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta}$$

حيث: $$Q_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad \text{(متماثل)}$$

$$M_{\alpha\beta} = F_{\alpha\nu} A_\mu \quad \text{(غير متماثل)}$$

ومن خواص الممتدات المتماثلة وغير المتماثلة فإن:

$$Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha} M_{\beta\alpha} = -Q_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}$$

$$\therefore \ 2Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta} = 0$$

$$\therefore \ \boxed{Q_{\alpha\beta} \cdot M_{\alpha\beta} = 0}$$

$$\therefore \ \frac{\partial}{\partial x_\nu}[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\alpha\nu}] = 0$$

$$\therefore G_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\alpha} F_{\nu\alpha} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha} F_{\nu\alpha} = 0$$

أي أن إضافة الممتد $G_{\mu\nu}$ إلى الممتد $T_{\mu\nu}$ للحصول على الممتد المتماثـل $p_{\mu\nu}$ لا يغير من قيمة الممتد $T_{\mu\nu}$. وهو المطلوب.

مثال(٣): باستخدام العلاقة

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F^2] \qquad \text{\_\_\_\_(I)}$$

لممتد الطاقة – كمية الحركة المتماثل ، أحسب المركبات غير الصفرية لهذا الممتد.

الحل: ممتد المجال الكهرومغنطيسي يعطي بالمصفوفة:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore F^2 = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{4}[F_{1\nu} F_{1\nu} + F_{2\nu} F_{2\nu} + F_{3\nu} F_{3\nu} + F_{4\nu} F_{4\nu}]$$

$$= (F_{12} F_{12} + F_{13} F_{13} + F_{14} F_{14})$$

$$+ (F_{21} F_{21} + F_{23} F_{23} + F_{24} F_{24})$$

$$+ (F_{31} F_{31} + F_{32} F_{32} + F_{34} F_{34})$$

$$+ (F_{41} F_{41} + F_{42} F_{42} + F_{43} F_{43})$$

$$= (H_z^2 + H_y^2 - E_x^2) + (H_z^2 + H_x^2 - E_y^2)$$

$$+ (H_y^2 + H_x^2 - E_z^2) + (-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)$$

$$= 2[(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)$$

$$= 2[H^2 - E^2] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

لحساب p_{11}:

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi}[-F_{1\alpha} F_{1\alpha} + \frac{1}{4}F^2]$$

$$F_{1\alpha} F_{1\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{4} F_{1\alpha} F_{1\alpha} = F_{11}\ F_{11} + F_{12}\ F_{12} + F_{13}\ F_{13} + F_{14}\ F_{14}$$
$$= H_z^2 + H_y^2 - E_x^2$$

$$\therefore\ p_{11} = \frac{1}{4\pi}[-H_z^2 - H_y^2 + E_x^2 + \frac{1}{2}(H^2 - E^2)]$$
$$= \frac{1}{8\pi}[-2H_z^2 - 2H_y^2 + 2E_x^2 + (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - E_x^2 - E_y^2 - E_z^2)]$$
$$= \frac{1}{8\pi}[-H_z^2 - H_y^2 + H_x^2 + E_x^2 - E_y^2 - E_z^2]$$
$$= \frac{1}{8\pi}[(E_x^2 + H_x^2) - (E_y^2 + E_z^2 + H_y^2 + H_z^2)]$$
$$= \frac{1}{4\pi}[(E_x^2 + H_x^2) - \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)]$$
$$= \frac{1}{4\pi}[(E_x^2 + H_x^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)] \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

لحساب p_{22} : بنفس الطريقة نحصل على:

$$p_{22} = \frac{1}{4\pi}[(E_y^2 + H_y^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)] \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

أيضاً: فإن

$$p_{33} = \frac{1}{4\pi}[(E_z^2 + H_z^2) - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)] \qquad \_\_\_\_\_(4)$$

أيضاً: لحساب المركبات $p_{\mu\nu}$ حيث $\mu \neq \nu$.

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[E_\mu\ E_\nu + H_\mu\ H_\nu]$$

حيث $\mu, \nu = 1, 2, 3 = x, y, z$

بمعنى أن:

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi}[E_1 E_2 + H_1 H_2] = \frac{1}{4\pi}[E_x E_y + H_x H_y] = p_{21}$$

$$p_{13} = \frac{1}{4\pi}[E_1 E_3 + H_1 H_3] = \frac{1}{4\pi}[E_x E_z + H_x H_z] = p_{31}$$

$$p_{23} = \frac{1}{4\pi}[E_2 E_3 + H_2 H_3] = \frac{1}{4\pi}[E_y E_z + H_y H_z] = p_{32}$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

في علم الإلكتروديناميكا الكلاسيكية يمكن حساب كمية حركة المجال الكهرومغنطيسي بوصفه منظومة ميكانيكية، ومن ذلك يمكن استنتاج ما يعرف بممتد الأجهاد الكهرومغنطيسي (Electromagnetic Stress Tensor) ومركباته عبارة عن مركبات قوة إجهاد تؤثر عمودياً على وحدة المساحات من سطح ما موجود في المجال، والصورة العامة لهذا الممتد هي:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(E^2 + H^2)]$$ (أنظر الباب الأول)

وفي الفراغ الإقليدي (٣ أبعاد) يكون لهذا الممتد تسع مركبات $\mu,\nu = x, y, z$ تشكل مركبات قوى الإجهاد الناتجة عن المجال والمؤثرة علــى جـسيم مــشحون موجود في هذا المجال.

وبالمقارنة مع العلاقة التي حصلنا عليها لممتد الطاقــة – كميــة الحركــة وذلــك باستخدام معادلات لاجرانج المعممة للمجال وصورتها:

$$p_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[-F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} F^2]$$

وبحساب المركبات $p_{11}, p_{22}, \cdots$ للمتد $p_{\mu\nu}$ ومقارنتها بمركبات الممتـد $g_{\mu\nu}$ وهي $g_{11}, g_{22}, \cdots$ نجد أن: مركبات ممتد الإجهاد الكهرومغنطيسي تكافئ تماماً مركبات ممتد الطاقة – كمية الحركة للمجال الكهرومغنطيسي.