

النظرية الكلاسيكية (التقليدية) للإشعاع

Classical Theory of Radiation

مقدمة:

ينتج الإشعاع الكهرومغناطيسي نتيجة حركة الشحنات، كما أن الشحنات المتحركة أيضاً تنتج مجالات كهرومغناطيسية توصف بمعادلات ماكسويل للمجالات الكهرومغناطيسية. والشحنات المتحركة إما أن تكون ذات حركة منتظمة أو أن تكون شحنات معجلة (تتحرك بعجلة).

وإذا كانت سرعة إنتشار المجال الكهرومغناطيسي في الفضاء الحر هي c وسرعة الشحنات كمصدر لهذا المجال هي v ، فإن النسبة $\frac{v}{c}$ تلعب دوراً مهماً في تحديد صفات الإشعاع الناتج عن حركة الشحنات.

ولما كانت c كبيرة جداً فإنه في حالة $v \ll c$ تكون المجالات من النوع الإستاتيكي حيث يمكن إهمال السرعة v بالنسبة إلى c ، أما في حالة $v \approx c$ فإن المجالات تكون من النوع المستعرض حيث المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ يكونان متعامدان وكلاهما متعامد مع اتجاه الإنتشار.

وبذلك يكون لدينا حالتان:

(i) حالة لا نسبية ($v \ll c$) ، (ii) حالة نسبية ($v \approx c$)

وفي كلتا الحالتين يمكن التعبير عن المجال بواسطة ما يسمى بالجهد المتأخر (retarded potential) والذي سندرسه بالتفصيل في هذا الباب.

أيضاً فإن هناك عامل هام يتحكم في الإشعاع الناتج عن الشحنات المتحركة وهو عجلة (أو تسارع) تلك الشحنات، ومن الناحية الفيزيائية فإن العجلة تعمل على استحداث نبضات في التيارات ويزداد بذلك المدى الذي يعمل فيه هذا المجال.

١- جهود التأخير (Retarded Potentials):

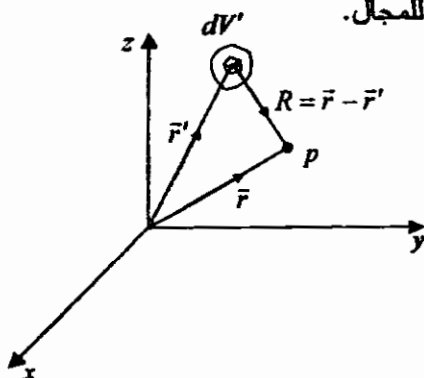
إن مسألة وجود مجال كهرومغناطيسي متغير (في الفراغ) مع توزيع شحني $\rho(\vec{r}', t')$ والتيار $\vec{J}(\vec{r}', t')$ حيث $(\vec{r}', t')$ هي إحداثيات نقطة المصدر أو المنبع (Source field)، يمكن حلها باستخدام ما يعرف بالجهود المتأخرة:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV' \quad (1)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{R} dV' \quad (2)$$

حيث: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

وهنا $\vec{r}$ هي إحداثيات نقطة الرصد p (point of observation) التي نحدد عندها الجهدين $\phi, \vec{A}$ للمجال.



أيضاً فإن: $dV' = dx' dy' dz' = d^3 \vec{r}'$ تمثل عنصر الحجم في منطقة المصدر.

أما t' فتحددها العلاقة: $t' = t - \frac{R}{c}$

والتي تعني أن جهود المجال عند النقطة p التي إحداثياتها $(\vec{r}, t)$ يحدد بقيمتي الشحنة والتيار عند فترة سابقة $t' = t - \frac{R}{c}$. ويقاس الحد $\frac{R}{c}$ التأخر الحادث نتيجة السرعة المحدودة لانتشار الموجات.

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' \quad (4)$$

العلاقان (4)، (3) يمثلان حلاً للمعادلتين الموجبتين غير المتجانستين:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho' \quad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}' \quad (6)$$

مع شرط لورنتز:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

ملحوظة: عند حل المعادلتين (6)، (5) واستخدام (7) نجد أن هناك حلاً آخر يكتب بالصورة:

$$\nabla^*(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t + R/c)}{R} dV' \quad (8)$$

$$\vec{A}^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t + R/c)}{R} dV' \quad (9)$$

حيث ϕ^* , $\vec{A}^*$ تعرفان بالجهدين المتقدمين (advanced potentials).

مثال: أثبت أن إشعاع عنصر شحني لامتناهي في الصغر يتكون من جزئين:

أحدهما يكون منبعثاً من المصدر وصورته $\psi_1(t - \frac{R}{c})$ والآخر متجهاً نحو

المصدر وصورته $\psi_2(t + \frac{R}{c})$ حيث R متجه موضع المصدر، c سرعة

الإشعاع.

الحل: معادلتا الحركة الموجية:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho'$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}'$$

وفي حالة التوزيع الشحني اللامتناهي في الصغر يمكن كتابة $\rho' = 0$, $\vec{J}' = 0$

$$\therefore \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{وبكتابة } f \equiv \phi, \bar{A} \text{ ، فإن:}$$

والتي يمكن كتابتها باستخدام الإحداثيات القطبية الكروية بالصورة:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial f}{\partial R}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

نختار حلاً بالصورة:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\psi(R, t)}{R} = \frac{\psi}{R} = \psi \cdot \left(\frac{1}{R}\right) \\ \therefore \frac{\partial f}{\partial R} &= -\frac{\psi}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \\ \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial f}{\partial R}) &= \frac{\partial}{\partial R} (-\psi + R \frac{\partial \psi}{\partial R}) \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial R} + R \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\partial \psi}{\partial R} = R \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \end{aligned} \quad \text{_____ (2)}$$

أيضاً فإن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\psi}{R}\right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{_____ (3)}$$

بالتعويض من (2), (3) في (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} [R \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2}] - \frac{1}{c^2 R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \\ \therefore \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad \text{_____ (4)}$$

وهي معادلة موجة مستوية يمكن حلها باستخدام طريقة كيرشوف كالآتي:

$$\eta_1 = t - \frac{R}{c} \quad , \quad \eta_2 = t + \frac{R}{c}$$

$$\therefore t = \frac{r_2 + \eta_1}{2}, \quad R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}c$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \eta_1} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta_1} = \frac{c}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \eta_2} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \eta_2} = \frac{c}{2} \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

أيضاً فإن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \right) \left(-\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \right) = -\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta_2 \partial \eta_1} \end{aligned}$$

وتصبح المعادلة (4):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = 0 \quad \text{_____} (5)$$

والحل العام لهذه المعادلة يكتب بالصورة:

$$\psi(\eta_1, \eta_2) = \psi_1(\eta_1) + \psi_2(\eta_2)$$

أو بالصورة:

$$\psi(R, t) = \psi_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + \psi_2\left(t + \frac{R}{c}\right) \quad \text{_____} (6)$$

حيث يمثل الحد $\psi_1\left(t - \frac{R}{c}\right)$ موجة كروية تنبعث من المصدر أو موجة تنبعث

على صورة إشعاع خارج من المصدر بسرعة c ، بينما الحد $\psi_2\left(t + \frac{R}{c}\right)$ يمثل

موجة تتحرك نحو المصدر بنفس السرعة c .

وحيث أن $f = \frac{\psi}{R}$ فإن الحل العام للمعادلة (1) هو:

$$f = \frac{\psi_1}{R} + \frac{\psi_2}{R} = \frac{\psi_1\left(t - \frac{r}{c}\right)}{R} + \frac{\psi_2\left(t + \frac{r}{c}\right)}{R}$$

يمثل الحد الأول: الحل الخاص بالجهود المتأخرة بينما يمثل الحد الثاني الحل الخاص بالجهود المتقدمة، وهو المطلوب.

الجهود المتأخرة عند مسافة كبيرة من منظومة الشحنات:

نعتبر منظومة من الشحنات المتحركة، ونحاول إيجاد الجهدين ϕ, A لهذه المنظومة عند مسافة كبيرة من المنظومة.
فحيث أن:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV'$$

حيث $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

فعند مسافات كبيرة من نقطة الأصل ($r \gg r'$) فإن الكمية $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ يمكن النظر إليها على أنها $f(\vec{r}) = |\vec{r}| = r$ عند النقطة $(\vec{r} + \delta\vec{r})$ حيث $\delta\vec{r} = -\vec{r}'$ ، وباستخدام العلاقة:

$$f(\vec{r} + \delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r}$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r + \vec{\nabla} r \cdot (-\vec{r}') = r - \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{r}' = r - \vec{n} \cdot \vec{r}'$$

يمكننا كتابة:

حيث:

$$\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \quad (\vec{r} \text{ متجه الوحدة في اتجاه } \vec{r})$$

وبذلك يصبح جهدا التأخر عند مسافات كبيرة من منظومة الإشعاع (Radiating system) بالصورة:

$$\nabla(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - r/c + \vec{n} \cdot \vec{r}'/c)}{r - \vec{n} \cdot \vec{r}'} dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - r/c + \vec{n} \cdot \vec{r}'/c)}{r - \vec{n} \cdot \vec{r}'} dV'$$

ومن ذلك نرى أن زمن التأخر (أو التأخير) يتكون من جزئين:

$$(i) \quad t_0 = \frac{r}{c} \quad \text{لا يعتمد على } \vec{r}' \text{ ويسمى زمن التأخير للمنظومة، ويحدد الزمن الذي}$$

تصل فيه الإضطرابات الكهرومغناطيسية إلى نقطة الرصد p من نقطة الأصل.

$$(ii) \quad \tau' = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} \quad \text{ويعرف بالتأخر الذاتي (Self retardation) ويحدد الزمن}$$

اللازم للإضطرابات الكهرومغناطيسية للوصول إلى حدود المنظومة، أو هو

الزمن الذي تأخذه الموجه الكهرومغناطيسية في مرورها خلال منظومة

الشحنات.

وتوضح هذه القيمة مدى تأخر وصول الموجه الكهرومغناطيسية الآتية من

الأجزاء البعيدة من منظومة الشحنات المتحركة (أو منظومة الإشعاع)، بالنسبة إلى

الموجه المنبعثة من الأجزاء القريبة للمنظومة.

ملحوظة: إذا كانت سرعة الشحنات هي v ففي خلال الزمن الذي

$$\text{قيمه } \tau' = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} \text{ سوف تراح الشحنات خلال مسافة تساوي:}$$

$$v\tau' = \frac{v}{c}(\vec{n} \cdot \vec{r}') = \beta(\vec{n} \cdot \vec{r}')$$

حيث $\beta = \frac{v}{c}$ هي النسبة بين سرعة الشحنات وسرعة الموجه الكهرومغناطيسية.

وإذا كانت هذه المسافة صغيرة مقارنة بأبعاد المنظومة فيمكن إهمال التأخير

داخل المنظومة.

٢- إشعاع المزدوج (ثنائي القطب) الكهربائي Electric dipole radiation

مقدمة:

تعرف منظومة الإشعاع (Radiation System) بأنها منظومة الشحنات

المتحركة بعجلة، وفي حالة إذا كانت نقطة الرصد p للمنظومة تقع على مسافة

كبيرة من المنظومة أي إذا كان: $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$

فيمكن كتابة الجهد القياسي لتوزيع الشحنات بالصورة:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \quad (1)$$

حيث $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ تمثل جهود توزيعات أحادي القطب (monopole) وثنائي القطب أو المزدوج الكهربائي (dipole) ورباعي الأقطاب (quadrupole) وثمانى الأقطاب (octupole) والتوزيعات الأعلى للشحنات على التوالي، ويمكن القول بأن الجهد يكون عادة متعدد الأقطاب، وأن المجالات التي يتم حسابها وفقاً لهذه الجهود متعددة الأقطاب وتعرف بالمجالات عديدة الأقطاب (multipole fields)، كما أن الإشعاع الكهرومغناطيسي الناتج عن حركة الشحنات في توزيعاتها المختلفة يعرف بأنه إشعاع متعدد الأقطاب (multipole Radiation).

وسنقتصر هنا على دراسة المزدوج (ثنائي القطب) فقط.

حساب الجهد القياسي للمزدوج (ثنائي القطب) الكهربائي:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{1}{r} \right) \quad (1)$$

(إكتفينا بالمفكوك حتى الحد الثاني فقط)

ومن (1) وبالاقتصار على الحد الثاني فقط (حد المزدوج الكهربائي) فإن

$$\phi = \phi_0 + \phi_1$$

ولما كانت:

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV' \\ &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV' - \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV' \\ \therefore \phi_0 &= \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}', t') dV' = \frac{e}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

حيث $e = \int \rho' dV'$ تمثل قيمة الشحنة النقطية (المفردة).

$$\phi_1 = - \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV'$$

$$= - \frac{1}{r} \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \rho(\vec{r}', t') dV' = - \frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'} \vec{\nabla}(t') dV'$$

ولكن: $\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$ ، $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ حيث $\vec{\nabla}(t') = \vec{\nabla}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{n}}{c}$

$$\therefore \phi_1 = - \frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'} (-\frac{\vec{n}}{c}) dV'$$

$$= \frac{1}{rc} [\vec{n} \cdot \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t'} dV'] = \frac{1}{rc} [\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \int \rho \vec{r}' dV']$$

وبكتابة: $\int \rho \vec{r}' dV' = \vec{d}$ ، $\frac{\partial}{\partial t'} \int \rho \vec{r}' dV' = \dot{\vec{d}}$

حيث $\vec{d}$ تعرف بعزم ثنائي القطب أو عزم المزدوج (dipole moment) للمنظومة.

$$\therefore \phi_1 = \frac{1}{rc} [\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}] \quad (4)$$

هذه العلاقة تحدد الجهد القياسي للمنظومة في التقريب ثنائي القطب

(dipole approximation) حيث $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$

ولإيجاد الجهد الإجمالي: بكتابة $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \dots$

حيث $\vec{A}_1$ تمثل الجهد الإجمالي للمزدوج أو ثنائي القطب الكهربائي،

وحيث $\vec{A}_2, \vec{A}_3, \dots$ تمثل الجهود الاتجاهية متعددة الأقطاب.

وبالاقتصار على الحد الثاني فإن: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

ولما كان:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV'$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\therefore \bar{A}_1 = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{J}(\bar{r}', t')}{r} dV' = \frac{1}{cr} \int \bar{J}(\bar{r}', t') dV' \quad \text{---(5)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{A}_2 &= -\frac{1}{c} \int \bar{J}(\bar{r}', t') [(\bar{r}' \cdot \bar{\nabla}) \frac{1}{r} dV'] \\ &= -\frac{1}{cr} \int (\bar{r}' \cdot \bar{\nabla}) \bar{J}(\bar{r}', t') dV' \\ &= -\frac{1}{cr} \int \bar{r}' \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial t'} \bar{\nabla}(t') dV' \\ &= -\frac{1}{cr} \int \bar{r}' \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial t'} \left(-\frac{\bar{n}}{c}\right) dV' \quad \left| \bar{\nabla}(t') = -\frac{\bar{n}}{c} \right. \\ &= \frac{1}{c^2 r} \int \frac{\partial}{\partial t'} (\bar{r}' \cdot \bar{n}) \bar{J} dV' \\ &= \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\bar{r}' \cdot \bar{n}) \bar{J} dV' \quad \text{---(6)} \end{aligned}$$

والآن لإيجاد الجهد الإتجاهي ثنائي القطب (المزدوج) الكهربى:

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{cr} \int \bar{J}(\bar{r}', t') dV' \quad \text{من (5):}$$

ولما كان $\bar{J}(\bar{r}', t') = \rho(\bar{r}', t') [\bar{v}']$ حيث $\bar{v}'$ سرعة الشحنات المتحركة.

$$\bar{v}' = \frac{d\bar{r}'}{dt'}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{A}_1 &= \frac{1}{cr} \int \rho(\bar{r}', t') \cdot \frac{d\bar{r}'}{dt'} dV' \\ &= \frac{1}{cr} \frac{d}{dt'} \int \rho \bar{r}' dV' = \frac{1}{cr} \dot{\bar{d}} \quad \text{---(7)} \end{aligned}$$

حيث $\bar{d} = \int \rho \bar{r}' dV'$ هو عزم ثنائي القطب.

تمثل (7) الجهد الإتجاهي للإشعاع في التقريب ثنائي القطب حيث أنه يعتمد على

الكمية $\bar{d}$ (عزم ثنائي القطب الكهربى).

ملخص: في التقريب ثنائي القطب فإن الجهدين القياسي والاتجاهي يعطيان

$$\phi = \frac{1}{cr} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}} \quad \text{بالعلاقين:}$$

$$\text{وبالتالي فإن } \boxed{\phi = (\vec{n} \cdot \vec{A})} \text{ حيث } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

مثال (١): في التقريب ثنائي القطب حيث $|\vec{r}'| \gg |\vec{r}|$ وحيث:

$$\phi = \frac{1}{cr} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}}$$

$$\text{حيث } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ متجه الوحدة في اتجاه } \vec{r}.$$

$$\vec{d} = \int \rho(\vec{r}', t') \vec{r}' dV'$$

لثبت أن:

$$(١) \text{ شدة المجال الكهربائي يعطي بالعلاقة: } \vec{E} = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

$$(٢) \text{ شدة المجال المغنطيسي يعطي بالعلاقة: } \vec{H} = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

$$(٣) \text{ للمجالين } \vec{E}, \vec{H} \text{ يكونان متعامدان وكل منهما عمودي على المتجه } \vec{n}.$$

$$(٤) \text{ متجه بويننتج } \vec{r} \text{ الذي يعطي فيض الطاقة المنبعثة من المنظومة كإشعاع}$$

$$\vec{r} \text{ يعطي بالعلاقة: } \vec{r} = \frac{1}{4\pi r^2 c^3} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})^2 \vec{n}$$

$$(٥) \text{ كمية الحركة التي تنبعث من المنظومة التي تصدر الإشعاع تعطي بالعلاقة:}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{4\pi r^2 c^5} \left| \ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n} \right|^2 \vec{n}$$

$$(٦) \text{ شدة الإشعاع الذي يعبر المساحة } d\vec{S} \text{ في الاتجاه } \vec{n} \text{ يعطي بالعلاقة:}$$

$$I = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2$$

ومن ذلك أثبت أن شدة الإشعاع الصادر من شحنة مفردة تتحرك بسرعة $\vec{v}$ هي:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \left| \dot{\vec{v}} \right|^2$$

$$\phi = \frac{1}{cr} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A} = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}} \quad \text{الحل: لدينا العلاقتين:}$$

أولاً: إيجاد شدة المجال الكهربائي $\vec{E}$:

$$\text{من العلاقة } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ وحيث أن:}$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{cr} \vec{\nabla}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) = \frac{1}{cr} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \vec{\nabla}(t')$$

$$= \frac{1}{cr} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \left(-\frac{\vec{n}}{c}\right)$$

$$\left| \vec{\nabla}(t') = -\frac{\vec{n}}{c} \right|$$

$$= -\frac{1}{c^2 r} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \vec{n}$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{cr} \dot{\vec{d}} \right] = \frac{1}{cr} \ddot{\vec{d}}$$

$$\therefore \vec{E} = -\left[-\frac{1}{c^2 r} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \vec{n} \right] - \frac{1}{c} \left[\frac{1}{cr} \ddot{\vec{d}} \right]$$

$$= \frac{1}{c^2 r} [(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n}) \ddot{\vec{d}}]$$

$$\vec{n} \wedge (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \ddot{\vec{d}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \vec{n}$$

ولكن:

$$\therefore (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} = (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n}) \ddot{\vec{d}}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad \text{_____ (1)}$$

ثانياً: إيجاد شدة المجال المغناطيسي $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

من العلاقة:

$$\therefore \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{1}{cr} \dot{\vec{d}} \right] = \frac{1}{cr} [\vec{\nabla} \wedge \dot{\vec{d}}] = \frac{1}{cr} [\vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d}{dt'} \dot{\vec{d}}]$$

$$\vec{\nabla}(t') = -\frac{\vec{n}}{c} \quad \text{حيث } \dot{\vec{d}} = \frac{d}{dt'} \dot{\vec{d}} \text{، وبما أن}$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{1}{cr} \left[\left(-\frac{\vec{n}}{c}\right) \wedge \ddot{\vec{d}} \right] = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \quad \text{_____ (2)}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad \text{ثالثاً: من (1):}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \quad \text{ومن (2):}$$

$$\therefore \boxed{\vec{E} = \vec{H} \wedge \vec{n}} \quad (3)$$

وهذا يعني أن المتجهين $\vec{E}, \vec{H}$ متعامدان وكل منهما عمودي على المتجه $\vec{n}$ كما في حالة الموجات المستوية، أي أن الإشعاع ثنائي القطب يخضع للخاصية المستعرضة (transverse property). ولهذا السبب فإن المجال عند المسافات البعيدة (أي في تقريب ثنائي القطب) يسمى مجال موجي أو إشعاعي (radiative field).

رابعاً: حساب متجه بوينتج:

تتميز منظومة الإشعاع (منظومة الشحنات المتحركة) بأن لها طاقة محددة تعرف بطاقة الإشعاع، ويعطي فيض الطاقة التي تنبعث من المنظومة في عملية الإشعاع بمتجه بوينتج (Poynting vector) الذي يعرف بالعلاقة:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

وبالتعويض عن $\vec{E} = \vec{H} \wedge \vec{n}$ نحصل على:

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} [(\vec{H} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [(\vec{H} \cdot \vec{H})\vec{n} - (\vec{H} \cdot \vec{n})\vec{H}]$$

ولما كانت $\vec{H}$ عمودية على $\vec{n}$ فإن $\vec{H} \cdot \vec{n} = 0$ ، وأيضاً فإن $\vec{H} \cdot \vec{H} = H^2$

$$\therefore \vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} [H^2 \vec{n}] = \frac{c}{4\pi} \left[\frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \right]^2 \vec{n} = \frac{1}{4\pi r^2 c^3} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})^2 \vec{n}$$

خامساً: حساب كمية حركة المنظومة:

تتميز منظومة الإشعاع بأن لها كمية حركة (مثل الطاقة) تنبعث حين إصدارها للإشعاع، وتعتبر في نفس الوقت كمية حركة للإشعاع نفسه وتعطي بالعلاقة:

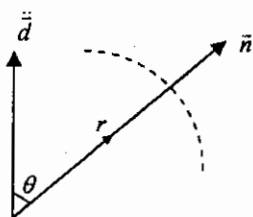
$$\vec{p} = \frac{1}{c^2} \vec{\gamma} = \frac{1}{4\pi r^2 c^5} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})^2 \vec{n}$$

سادساً: إيجاد شدة الإشعاع:

يعبر عن شدة الإشعاع ثنائي القطب بالطاقة المنبعثة في وحدة الزمن خلال الزاوية المجسمة $d\Omega$ ، وتساوي فيض الطاقة الذي يعبر المساحة المتجهة $d\vec{S}$ في الاتجاه $\vec{n}$

$$\therefore dI = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \vec{\gamma} \cdot d\vec{S} = \gamma dS \quad (1)$$

حيث $dS = r^2 d\Omega$



وإذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{d}$ ، $\vec{n}$

فإن الزاوية المجسمة تعطى بالعلاقة:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$(\vec{d} \wedge \vec{n})^2 = |\vec{d}|^2 |\vec{n}|^2 \cdot \sin^2 \theta = |\vec{d}|^2 \sin^2 \theta$$

وبالتعويض عن $\vec{\gamma} = \frac{1}{4\pi r^2 c^3} (\vec{d} \wedge \vec{n})^2 \vec{n}$ في (1):

$$\therefore dI = \frac{1}{4\pi r^2 c^3} (\vec{d} \wedge \vec{n})^2 (\vec{n} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{4\pi r^2 c^3} (\vec{d} \wedge \vec{n})^2 dS$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3} |\vec{d}|^2 \sin^2 \theta (r^2 d\Omega) \quad | \quad dS = \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3} |\vec{d}|^2 \sin^2 \theta [r^2 (2\pi \sin \theta d\theta)]$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3} |\vec{d}|^2 \sin^2 \theta [r^2 (2\pi \sin \theta d\theta)]$$

$$= \frac{1}{2c^3} |\vec{d}|^2 \sin^3 \theta d\theta$$

وتكون الشدة الكلية للإشعاع هي (بعد التكامل بالنسبة إلى θ من صفر إلى π):

$$I = \int dI = \frac{1}{2c^3} |\vec{d}|^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{2c^3} |\vec{d}|^2 \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3c^3} |\vec{d}|^2$$

ملحوظة: إذا كان $\vec{d} = \sum e_i \vec{r}_i$ فإن:

$$\ddot{\vec{d}} = \sum e_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum e_i \dot{\vec{v}}_i = \sum e_i \vec{a}_i$$

حيث: $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}_i$ هي عجلة الشحنة (i) المتحركة، ولشحنة نقطية (Point charge) مفردة (e) تتحرك تحت تأثير قوة معينة بعجلة $\vec{a}$ ، فإن

$$\vec{d} = e\vec{r} \quad , \quad \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{v}} = e\vec{a}$$

$$\therefore I = \frac{2}{3c^3} (e\vec{a})^2 = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{\vec{v}}|^2$$

مثال (٢): إشعاع متذبذب ثنائي القطب Radiation of the dipole oscillator

باعتبار الإشعاع الصادر من شحنة تتذبذب طبقاً للقانون: $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ حيث $\vec{r}_0$ هي سعة الحركة التوافقية، ω هي التردد الزاوي للحركة، α زاوية للطور (phase angle).

لحسب شدة الإشعاع في التقريب ثنائي القطب لهذا المتذبذب، وأثبت أنها تتناسب مع مربع السعة ومع القوة الرابعة للتردد الزاوي.

الحل: باعتبار أن شدة الإشعاع لثنائي القطب خلال الزاوية المجسمة $d\Omega$ يعطى بالعلاقة:

$$\therefore dI = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{4\pi c^3} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{d}})^2 d\Omega \quad (1)$$

(أنظر مثال رقم (١))

وفي حالة المتذبذب ثنائي القطب فإن:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (2)$$

وتكون العجلة التي تتحرك بها الشحنة المتذبذبة:

$$\therefore \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r} = -\omega^2 \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

وحيث أن عزم ثنائي القطب للشحنة هو:

$$\vec{d} = e\vec{r}$$

$$\therefore \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = -e\omega^2 \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

وبالتعويض في (1):

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [ew^2 (\vec{n} \wedge \vec{r}_0) \cos(wt + \alpha)]^2 d\Omega$$

$$= \frac{e^2 w^4}{4\pi c^3} (\vec{n} \wedge \vec{r}_0)^2 \cos^2(wt + \alpha) d\Omega$$

ولدورة واحدة فإن متوسط (أو القيمة المتوسطة) لشدة الإشعاع في الزاوية المجسمة $d\Omega$ هي:

$$\overline{dI} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dI = \frac{e^2 w^4}{4\pi c^3} (\vec{n} \wedge \vec{r}_0)^2 \left[\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(wt + \alpha) dt \right] d\Omega$$

حيث القيمة المتوسطة الكمية $\cos^2(wt + \alpha)$ هي:

$$\overline{\cos^2(wt + \alpha)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(wt + \alpha) dt$$

$$= \frac{w}{2\pi} \int_0^{2\pi/w} \frac{1}{2} (1 + \cos 2wt) dt = \frac{w}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2wt}{2w} \right) \right]_0^{2\pi/w}$$

$$= \frac{w}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{w} + \frac{\sin 4\pi}{2w} \right) - 0 \right] = \frac{2\pi}{w} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{w} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{dI} = \frac{e^2 w^4}{4\pi c^3} (\vec{n} \wedge \vec{r}_0)^2 \left[\frac{1}{2} \right] d\Omega = \frac{e^2 w^4}{8\pi c^3} |\vec{r}_0|^2 \sin^2 \theta d\Omega$$

وبذلك تكون الشدة الكلية للإشعاع (أو ما يعرف بالتوزيع الزاوي للقوة الإشعاعية للمتنبذب) هي:

$$I = \int \overline{dI} = \frac{e^2 w^4}{8\pi c^3} |\vec{r}_0|^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot (2\pi \sin \theta d\theta)$$

$$= \frac{e^2 w^4}{8\pi c^3} (2\pi) |\vec{r}_0|^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{e^2 w^4 r_0^2}{4c^3} \left[\frac{4}{3} \right] = \frac{e^2 w^4 r_0^2}{3c^3} = \frac{e^2}{3c^3} (w^4 r_0^2)$$

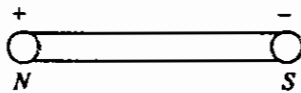
وهذا يعني أن شدة إشعاع المتذبذب في التقريب ثنائي القطب يتناسب مع مربع السعة (r_0^2) ومع القوة الرابعة للتردد الزاوي (ω^4). وهو المطلوب.

٣- إشعاع ثنائي القطب ورباعي الأقطاب المغنطيسي

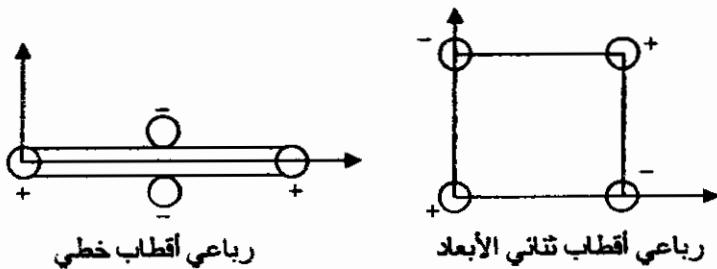
Magnetic dipole and quadrupole radiation

مقدمة:

يتكون ثنائي القطب المغنطيسي من قطبين مغنطيسيين متساويي الشدة ومختلفي الإشارة أحدهما شمالي (N) موجب الإشارة والآخر جنوبي (S) سالب الإشارة.



لما رباعي الأقطاب (quadrupole) فيكون من أربعة أقطاب مرتبة ترتيباً خاصاً كما في الأشكال الآتية:



وقد بينا فيما سبق أن الشحنات يجب أن تكون معجلة (أي تتحرك بعجلة) حتى تصدر إشعاعاً، ونوضح هنا أنه في بعض الأحيان فإن منظومة الشحنات لا يكون لها عزم ثنائي الأقطاب أي أن $\vec{d} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = 0$ وبالتالي فإن $\ddot{\vec{d}} = 0$ وهذا لا يعني عدم وجود إشعاع على وجه العموم، وفي تلك الحالة يجب أن ندرس الحدود الأعلى من مفكوك الجهد، أي الحدود التي أهملت عند دراسة التقريب ثنائي القطب، وهذا يعني أنه في تلك الحالات فإن التقريب ثنائي القطب لا يصف الإشعاع ويجب أن نستخدم التقريبات الأعلى.

وقد سبق أن أوضحنا أنه في حالة الجهد الإتجاهي لمنظومة الإشعاع عند المسافات الكبيرة من المنظومة فإن:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \dots$$

وبالإكتفاء بالحدين الأول والثاني فإن: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ حيث:

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{cr} \int \vec{J}(\vec{r}', t') dV' \quad \text{---(1)}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \vec{J} dV' \quad \text{---(2)}$$

(أنظر الفقرة رقم (٢) في هذا الباب)

وقمنا بحساب $\vec{A}_1$ حيث وجدنا أن:

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{cr} \vec{d}, \quad \vec{d} = \int \rho(\vec{r}', t') \cdot \vec{r}' dV'$$

والآن لإيجاد $\vec{A}_2$: باستخدام العلاقة الإتجاهية:

$$\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

$$\therefore \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{2} [\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})] + \frac{1}{2} [\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})]$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{J}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) &= \frac{1}{2} [\vec{n} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{r}')] + \frac{1}{2} [\vec{J}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J} \cdot \vec{n})] \\ &= \frac{1}{2} [(\vec{r}' \wedge \vec{J}) \wedge \vec{n}] + \frac{1}{2} [\vec{J}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J} \cdot \vec{n})] \end{aligned}$$

وبالتعويض في (2):

$$\begin{aligned} \therefore \vec{A}_2 &= \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int [(\vec{r}' \wedge \vec{J}) \wedge \vec{n}] dV' + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int [\vec{J}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J} \cdot \vec{n})] dV' \\ &= \vec{A}_M + \vec{A}_Q \end{aligned} \quad \text{---(3)}$$

حيث:

$$\vec{A}_M = \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int [(\vec{r}' \wedge \vec{J}) \wedge \vec{n}] dV' = \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{1}{2c} \int [(\vec{r}' \wedge \vec{J}) \wedge \hat{n}] dV' \right\}$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int (\vec{r}' \wedge \vec{J}) dV' \quad \text{وتعريف العزم المغنطيسي للمنظومة بالعلاقة:}$$

$$\therefore \vec{A}_M = \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t'} (\vec{M} \wedge \vec{n}) = \frac{1}{cr} (\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \quad \text{_____ (4)}$$

ويعرف الجهد $\vec{A}_M$ بالجهد المغنطيسي للإشعاع (أو جهد ثنائي القطب المغنطيسي)، ويعرف الإشعاع المناظر بإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي (Magnetic dipole radiation).

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial t'} \int [\vec{J}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J} \cdot \vec{n})] dV' \quad \text{أيضاً:}$$

ويكتابة:

$$\begin{aligned} \int [\vec{J}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{J} \cdot \vec{n})] dV' &= \sum e [\vec{v}(\vec{r}' \cdot \vec{n}) + \vec{r}'(\vec{v} \cdot \vec{n})] \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} [\sum e \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n})] \end{aligned}$$

حيث اعتبرنا أن: $\int \vec{J} dV' = \sum e \vec{v}$ ، $\vec{v}$ سرعة الشحنة المتحركة.

وبذلك نحصل على:

$$\begin{aligned} \vec{A}_Q &= \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} [\sum e \vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n})] \\ &= \frac{1}{2c^2 r} \cdot \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \sum e [3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - r'^2 \vec{n}] \end{aligned}$$

حيث أضفنا في الطرف الأيمن متجهاً متناسباً مع $\vec{n}$ وذلك حيث أن $\vec{A}_Q$ هو متجه لا يتغير (non-varying vector).

وبتعريف متجه عزم رباعي الأقطاب للمنظومة وصورته:

$$Q = \sum e [3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - r'^2 \vec{n}]$$

فإن $\vec{A}_Q$ تصبح:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{2c^2 r} \cdot \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \vec{Q}}{\partial t'^2} = \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}} \quad \text{_____ (5)}$$

يعرف الجهد $\vec{A}_Q$ بمجهد رباعي الأقطاب المغنطيسي للمنظومة، ويعرف الإشعاع المناظر بإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي (Magnetic quadrupole radiation).

بالتعويض من (5)، (4) في (3) نجد أن:

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{cr} (\vec{M} \wedge \vec{n}) + \frac{1}{6c^2 r} \ddot{Q}$$

وبذلك فإن $\vec{A}_2$ يمثل الجهد الإتجاهي لثنائي الأقطاب ورباعي الأقطاب المغنطيسي.

ويلاحظ أننا فيما سبق أوجدنا العلاقتين:

$$\phi_1 = \frac{1}{cr} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad , \quad \vec{A}_1 = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}}$$

ويمثلان الجهدين القياسي والإتجاهي للإشعاع ثنائي القطب ويعتمدان على الكمية $\vec{d}$ التي تمثل عزم ثنائي القطب الكهربائي الذي يتكون من شحنتين متساويتين في الشدة ومختلفتان في الإشارة.

ملخص: يمكن كتابة الجهد الإتجاهي لمنظومة الإشعاع بالصورة:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}_d + \vec{A}_M + \vec{A}_Q$$

حيث $\vec{A}_d$ تمثل الجهد الإتجاهي للمزدوج (ثنائي القطب) الكهربائي: $\vec{A}_d = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}}$

$\vec{A}_M$ تمثل الجهد الإتجاهي للمزدوج (ثنائي القطب) المغنطيسي:

$$\vec{A}_M = \frac{1}{cr} (\vec{M} \wedge \vec{n})$$

$\vec{A}_Q$ تمثل الجهد الإتجاهي لرباعي الأقطاب المغنطيسي:

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r} \ddot{Q}$$

وهنا:

$$\vec{d} = \int \rho \vec{r}' dV' \quad , \quad \vec{M} = \frac{1}{2c} \int (\vec{r}' \wedge \vec{J}) dV'$$

$$\ddot{Q} = \sum e [3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - r'^2 \vec{n}]$$

تمثل عزم ثنائي القطب الكهربائي وثنائي القطب المغنطيسي ورباعي الأقطاب المغنطيسي على التوالي.

مثال (1): سبق أن أوجدنا المجالين الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ لثنائي القطب الكهربائي بالصورة:

$$\vec{E}_d = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad , \quad \vec{H}_d = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

والمطلوب إيجاد المجالين $\vec{E}, \vec{H}$ لثنائي القطب المغناطيسي بالصورة:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{c^2 r} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) \quad , \quad \vec{H}_M = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

مع المقارنة بين الحالتين.

الحل: نوجد أولاً $\vec{H}_M$:

$$\begin{aligned} \vec{H}_M &= \text{curl } \vec{A}_M = \frac{1}{cr} \text{curl } (\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \\ &= \frac{1}{cr} [\vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d}{dt} (\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n})] \\ &= \frac{1}{cr} [(-\frac{\vec{n}}{c}) \wedge (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})] \\ &= -\frac{1}{c^2 r} [\vec{n} \wedge (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})] = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

نوجد ثانياً: $\vec{E}_M$:

$$\begin{aligned} \text{حيث أن } \vec{E}_M &= \vec{H}_M \wedge \vec{n} \text{ فبالتعويض عن } \vec{H}_M \text{ من (1) نحصل على:} \\ \vec{E}_M &= \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] = \frac{1}{c^2 r} [\vec{n} \wedge \vec{n} \wedge (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})] \\ &= \frac{1}{c^2 r} [\vec{n} \wedge \{(\vec{n} \cdot \vec{n}) \ddot{\vec{M}} - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{M}}) \vec{n}\}] \\ &= \frac{1}{c^2 r} [(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}})(\vec{n} \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \wedge \vec{n})(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{M}})] \\ &= \frac{1}{c^2 r} [(\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}})(1) - 0] = \frac{1}{c^2 r} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

ملحوظة (١):

$$\text{curl } \vec{A}(t') = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(t') = \vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d\vec{A}}{dt'} = \vec{\nabla}(t') \wedge \dot{\vec{A}}$$

ملحوظة (٢): بمقارنة مجالات إشعاع المزدوج المغنطيسي:

$$\vec{E}_M = \frac{1}{c^2 r} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) = -\frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n})$$

$$\vec{H}_M = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]$$

مع مجالات إشعاع المزدوج الكهربائي:

$$\vec{E}_d = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad , \quad \vec{H}_d = \frac{1}{c^2 r} (\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n})$$

نجد أن: معادلة $\vec{H}_M$ بدلالة $\ddot{\vec{M}}$ تماثل معادلة $\vec{E}_d$ بدلالة $\ddot{\vec{d}}$ ، بينما معادلة $\vec{E}_M$ بدلالة $\ddot{\vec{M}}$ تماثل معادلة $\vec{H}_d$ ولكن بإشارة مخالفة.

مثال (٢): إذا كان الجهد $\vec{A}_Q$ الخاص برباعي الأقطاب المغنطيسي لمنظومة

$$\vec{A}_Q = \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}} \quad \text{الإشعاع يعطي بالعلاقة:}$$

حيث $\vec{Q}$ هو متجه عزم رباعي الأقطاب للمنظومة

$$\vec{Q} = \sum e [3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - r'^2 \vec{n}]$$

أثبت أن المجالين $\vec{E}_Q, \vec{H}_Q$ يعطيان بالعلاقين:

$$\vec{H}_Q = \frac{1}{6c^2 r} (\ddot{\vec{Q}} \wedge \hat{n}) \quad , \quad \vec{E}_Q = \frac{1}{6c^2 r} [(\ddot{\vec{Q}} \wedge \hat{n}) \wedge \hat{n}]$$

الحل: نوجد أولاً $\vec{H}_Q$:

$$\vec{H}_Q = \text{curl } \vec{A}_Q = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_Q$$

$$= \vec{\nabla}(t') \wedge \dot{\vec{A}}_Q = \left(-\frac{\vec{n}}{c}\right) \wedge \left[\frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}\right]$$

$$= -\frac{1}{6c^3 r} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{Q}}) = \frac{1}{6c^3 r} (\ddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n}) \quad \text{_____ (1)}$$

نوجد ثانياً $\vec{E}_Q$: حيث أن $\vec{E}_Q = \vec{H}_Q \wedge \vec{n}$ ، فبالتعويض من (1):

$$\therefore \vec{E}_Q = \frac{1}{6c^3 r} [(\ddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}] \quad (2)$$

ملخص: من مثالي (2), (1) نجد أن:

الصورة العامة لمجال الإشعاع المشتملة على الأنواع الثلاثة (المزدوج أو ثنائي القطب الكهربائي، المزدوج أو ثنائي القطب المغنطيسي، رباعي الأقطاب المغنطيسي)، يمكن كتابتها كالتالي:

$$\vec{E} = \vec{E}_d + \vec{E}_M + \vec{E}_Q = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n} + (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{M}}) + \frac{1}{6c} \{(\ddot{\vec{D}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}\}]$$

$$\vec{H} = \vec{H}_d + \vec{H}_M + \vec{H}_Q = \frac{1}{c^2 r} [(\ddot{\vec{d}} \wedge \vec{n}) + \{(\ddot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}\} + \frac{1}{6c} (\ddot{\vec{D}} \wedge \vec{n})]$$

مثال (3): أوجد شدة الإشعاع الكلي لمنظومة الإشعاع بالصورة:

$$I = I_d + I_M + I_Q$$

$$I_d = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2, \quad I_M = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{M}}|^2, \quad I_Q = \frac{2}{180c^5} (\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 \quad \text{حيث}$$

هي الشدة الكلية للإشعاع ثنائي القطب الكهربائي وثنائي القطب المغنطيسي ورباعي الأقطاب المغنطيسي على التوالي، $Q_{\alpha\beta}$ هو ممتد العزم رباعي الأقطاب.

الحل:

نبدأ أولاً بتعريف ممتد العزم رباعي الأقطاب (quadrupole moment tensor) $Q_{\alpha\beta}$ الذي يمكن كتابته بالصورة:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) \quad (1)$$

حيث $\delta_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta$ ويكون المتجه Q_α بالصورة:

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta} n_\beta = \sum e[3x_\alpha (x_\beta n_\beta) - n_\alpha r^2]$$

والذي يمكن كتابته بالصورة الاتجاهية:

$$\vec{Q} = \sum e[3\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{n}) - \vec{n} r^2]$$

وهي العلاقة التي سبق استخدامها لمتجه عزم رباعي القطب المغنطيسي.

ولإيجاد شدة الإشعاع: نعرف شدة الإشعاع في الزاوية المجسمة $d\Omega$ بالعلاقة:

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi c} (\dot{\vec{A}} \wedge \vec{n})^2 r^2 d\Omega \quad (3)$$

حيث:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(t') = \vec{\nabla}(t') \wedge \frac{d\vec{A}}{dt'} \\ &= \left(-\frac{\vec{n}}{c}\right) \wedge \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} (\vec{n} \wedge \dot{\vec{A}}) = \frac{1}{c} (\dot{\vec{A}} \wedge \vec{n}) \end{aligned} \quad (4)$$

وفي حالة الإشعاع ثنائي القطب الكهربائي فإن: $\vec{A}_d = \frac{1}{cr} \ddot{\vec{d}}$

$$\therefore dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{d}})^2 d\Omega \quad (5)$$

وفي حالة الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي فإن: $\vec{A}_M = \frac{1}{cr} (\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n})$

$$\therefore dI_M = \frac{1}{4\pi c^3} [(\dot{\vec{M}} \wedge \vec{n}) \wedge \vec{n}]^2 d\Omega \quad (6)$$

وفي حالة الإشعاع رباعي القطب المغنطيسي فإن:

$$\begin{aligned} A_Q &= \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}} \\ \therefore dI_Q &= \frac{1}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{36c^2} (\ddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

أما شدة الإشعاع الكلي للمنظومة:

فيمكن حسابها باعتبارها الطاقة المنبعثة في وحدة الزمن في كل الاتجاهات وذلك بأخذ القيمة المتوسطة للكمية dI على كل الاتجاهات $\vec{n}$ وضرب هذا المتوسط في (4π) وإعتبار أن: $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$

وقد سبق حساب شدة الإشعاع الكلي في حالة ثنائي القطب الكهربائي (مثال سابق) وكانت النتيجة:

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{d}} \right|^2$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب شدة الإشعاع الكلي في حالة ثنائي القطب «مغناطيسي» والنتيجة هي:

$$I_M = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\vec{M}} \right|^2$$

أما شدة الإشعاع الكلي في حالة رباعي الأقطاب المغناطيسية فيمكن حسابه كالآتي:

$$dI_Q = \frac{1}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{36c^2} (\ddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2 \right] d\Omega \quad (8)$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \quad \text{ولكن:}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\ddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2 &= (\ddot{\vec{Q}})^2 - (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{Q}})^2 \\ &= \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma - \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\lambda\mu} n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu \end{aligned}$$

وبالتعويض في (7) والتكامل على $d\Omega$:

$$\begin{aligned} I_Q &= \frac{1}{4\pi c^3} \left(\frac{1}{36c^2} \right) \int (\ddot{\vec{Q}} \wedge \vec{n})^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi c^3} \left(\frac{1}{36c^2} \right) \left[\ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\gamma} \int n_\beta n_\gamma d\Omega - \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\lambda\mu} \int n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu d\Omega \right] \end{aligned}$$

وباستخدام العلاقات الآتية (يمكن إثباتها):

$$\begin{aligned} \int n_\beta n_\gamma d\Omega &= \frac{3}{3} \pi \delta_{\beta\gamma} \\ \int n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu d\Omega &= \frac{4}{15} \pi (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}) \\ \therefore I_Q &= \frac{1}{4\pi c^3} \left(\frac{1}{36c^2} \right) \left[\frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma} \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\gamma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}) \ddot{Q}_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\lambda\mu} \right] \\ &= \frac{1}{36c^5} \left[\frac{1}{3} (\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 - \frac{1}{15} \{ \ddot{Q}_{\alpha\alpha} \ddot{Q}_{\beta\beta} + 2(\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 \} \right] \\ &= \frac{1}{36c^5} \left[\frac{1}{5} (\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 \right] = \frac{1}{180c^5} (\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2 \end{aligned}$$

أي أن شدة الإشعاع رباعي الأقطاب يتناسب مع مربع المشتقة الثالثة للعزم رباعي الأقطاب $Q_{\alpha\beta}$ للمنظومة.

وقد استخدمنا في إثبات العلاقة السابقة العلاقات الآتية:

$$\delta_{\beta\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\gamma} = Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$$

$$\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} Q_{\alpha\beta} Q_{\lambda\mu} = \delta_{\beta\mu} Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\mu} = Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$$

$$\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} Q_{\alpha\beta} Q_{\lambda\mu} = \delta_{\alpha\mu} Q_{\alpha\beta} Q_{\beta\mu} = Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$$

أيضاً: فمن خواص الممتد $Q_{\alpha\beta}$ أن عناصره القطرية تساوي صفراً أي أن $Q_{\alpha\alpha} = 0$.

مثال (٤): أحسب بصورة تقريبية الشدة النسبية لأنواع الإشعاع الثلاثة (ثنائي قطب كهربى، ثنائي قطب مغنطيسي، رباعي قطب مغنطيسي)، وأثبت أن النسبة بين الأنواع الثلاثة هي كنسبة:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{حيث} \quad I_d : I_M : I_Q = 1 : \beta^2 : \beta^2$$

الحل: للتبسيط نعتبر أن شحنات المنظومة تتحرك حركة دورية بحيث أن:

$$r' \approx \ell \cos \omega t \quad \text{حيث} \quad \ell \text{ كمية من رتبة أبعاد المنظومة}$$

وتكون سرعة الشحنة: $v \approx \ell \omega \sin \omega t$.

وباعتبار أن القيمة المتوسطة لكل من $|\cos \omega t|$, $|\sin \omega t|$ من رتبة الواحد

$$\therefore v \approx \ell \omega, \quad \cos \omega t \approx 1, \quad \sin \omega t \approx 1$$

ويكون عزم ثنائي القطب بالتقريب:

$$d \approx e r' = e \ell \cos \omega t$$

$$\dot{d} \approx e \ell \omega \sin \omega t$$

$$\ddot{d} \approx e \ell \omega^2 \cos \omega t \approx e \ell \omega^2$$

شدة الإشعاع ثنائي القطب الكهربى يكون من رتبة:

$$I_d \approx \frac{(\ddot{d})^2}{c^3} \approx \frac{e^2 \ell^2 \omega^4}{c^3} \approx \frac{e^2 v^2 \omega^2}{c^3} \quad \text{_____ (1)}$$

وباعتبار الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي: وحيث أن $\vec{M} = \frac{1}{2c} \sum e(\vec{r}' \wedge \vec{v})$

$$\therefore M \approx \frac{er'v}{c} \approx \frac{e}{c} v \ell \cos wt \approx \frac{e}{c} \ell^2 w \cos wt \sin wt \approx \frac{e}{c} \ell^2 w \sin 2wt$$

$$\therefore \dot{M} \approx \frac{e}{c} \ell^2 w^2 \cos 2wt \quad , \quad \ddot{M} \approx \frac{e}{c} \ell^2 w^3 \sin 2wt \approx \frac{e}{c} \ell^2 w^3$$

وباعتبار شدة الإشعاع لثنائي القطب المغنطيسي:

$$I_M \approx \frac{(\ddot{M})^2}{c^3} \approx \frac{e^2 \ell^4 w^6}{c^5} \approx \frac{e^2 v^4 w^2}{c^5} \quad \text{_____} (2)$$

من (1), (2) نجد أن:

$$\frac{I_M}{I_d} = \frac{(v/c)^2}{1} \rightarrow I_M : I_d = \left(\frac{v}{c}\right)^2 : 1 = \beta^2 : 1 \quad \text{_____} (3)$$

أي أن شدة الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي يكون أقل من شدة الإشعاع ثنائي القطب الكهربائي بنسبة β^2 .

في حالة العزم رباعي الأقطاب المغنطيسي:

يمكن اعتبار أن: Q من رتبة er'^2

$$Q \approx er'^2 \approx e\ell^2 \cos^2 wt$$

$$\dot{Q} \approx e\ell^2 w \cos wt \sin wt \approx e\ell^2 w \sin 2wt$$

$$\ddot{Q} \approx e\ell^2 w^2 \cos 2wt$$

$$\ddot{\ddot{Q}} \approx e\ell^2 w^3 \sin 2wt$$

وتكون شدة الإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي:

$$I_Q \approx \frac{\ddot{\ddot{Q}}^2}{c^5} \approx \frac{e^2 \ell^4 w^6}{c^5} \approx \frac{e^2 v^4 w^2}{c^5} \quad \text{_____} (4)$$

من (4), (2) نجد أن: $I_Q \approx I_M$ أي أن شدة الإشعاع رباعي الأقطاب المغنطيسي من نفس رتبة شدة الإشعاع ثنائي القطب المغنطيسي.

وباستخدام (3) نجد أن:

$$I_d : I_M : I_Q \approx 1 : \beta^2 : \beta^2$$

وهو المطلوب.

٤- الإشعاع رباعي الأقطاب الكهربائي Electric quadrupole Radiation

مقدمة: وجدنا أنه إذا كانت نقطة الرصد p لمنظومة الإشعاع تقع على مسافة كبيرة من المنظومة أي إذا كان $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ فإن الجهد القياسي للمجال يكتب بالصورة:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots$$

حيث ϕ_0 تمثل جهد الشحنة المنفردة (النقطية)، ϕ_1 تمثل جهد ثنائي القطب الكهربائي، ϕ_2 تمثل جهد رباعي الأقطاب الكهربائي، وهكذا... وقد قمنا بحساب ϕ_0, ϕ_1 ووجدنا أن

$$e = \int \rho' dV', \quad \vec{d} = \int \rho' \vec{r}' dV' \quad \text{حيث} \quad \phi_0 = \frac{e}{r}, \quad \phi_1 = \frac{1}{rc} (\vec{n} \cdot \vec{d})$$

هما قيمة لشحنة الكلية (e) وعزم ثنائي القطب الكهربائي ($\vec{d}$).

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

ولإيجاد ϕ_0, ϕ_1 قمنا بكتابة:

واكتفينا بالحدين الأولين فقط.

أما إذا أردنا إيجاد ϕ_2 والجهود الأعلى فيلزمنا كتابة الحدود التالية في $\frac{1}{R}$ كالتالي:

$$\frac{1}{R} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{-1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2)^{1/2} \quad \text{حيث}$$

$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2rr' \cos \theta}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2r'}{r} \cos \theta + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-1/2} = \frac{1}{r} [1 - 2z \cos \theta + z^2]^{-1/2}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \theta, \quad z = \frac{r'}{r} \quad \text{حيث}$$

وحيث أن $(1 - 2z \cos \theta + z^2)^{-1/2}$ تمثل الدالة المولدة (generating function) لكثيرة حدود ليجنر والمعرفة بالعلاقة:

$$(1 - 2z \cos \theta + z^2)^{-1/2} = \sum p_n(\cos \theta) \cdot z^n$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{R} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum p_n(\cos \theta) \cdot z^n = \frac{1}{r} \sum p_n(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^n \\ &= \frac{1}{r} [p_0(\cos \theta) + p_1(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right) + p_2(\cos \theta) \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \dots]\end{aligned}$$

ولما كان:

$$\begin{aligned}p_0(\cos \theta) &= 1, \quad p_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad p_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} + \left(\frac{r'}{r^2}\right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^3}\right) (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots\end{aligned} \quad \text{_____ (1)}$$

مثال: باستخدام مفكوك $\frac{1}{R}$ بدلالة كثيرات حدود ليجندر (المعادلة (1))، أوجد

الجهد القياسي لإشعاع ثنائي القطب ورباعي الأقطاب الكهربية بالصورة:

$$\phi_1 = \frac{1}{rc} (\vec{n} \cdot \vec{d}), \quad \phi_2 = \frac{1}{2r^3} |\vec{D}|$$

حيث $\vec{d}, \vec{D}$ هما عزمًا ثنائي القطب ورباعي الأقطاب الكهربية على التوالي.

الحل: بكتابة

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 = \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV'$$

والتعويض عن $\frac{1}{R}$ من (1):

$$\begin{aligned}\therefore \phi &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{r} dV' + \int \frac{r' \rho(\vec{r}', t')}{r^2} \cos \theta dV' \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{r'^2}{r^3} \rho(\vec{r}', t') (3 \cos^2 \theta - 1) dV'\end{aligned}$$

حيث:

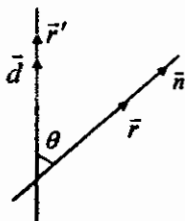
$$\phi_0 = \frac{1}{r} \int \rho' dV' = \frac{e}{r} \quad \text{_____ (1)}$$

$$\therefore \phi_1 = \int \rho' \frac{r' \cos \theta}{r^2} dV' = \int \rho' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} dV'$$

$$= - \int \rho' (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{1}{r} \right) dV'$$

$$|\vec{r} \cdot \vec{r}'| = r r' \cos \theta$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{حيث}$$



$$\therefore \phi_1 = - \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{\rho'}{r} dV' = - \frac{1}{r} \int (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \rho' dV'$$

$$= - \frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \vec{\nabla}(t') dV' = - \frac{1}{r} \int \vec{r}' \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \left(- \frac{\vec{n}}{c} \right) dV'$$

$$\vec{\nabla}(t') = \vec{\nabla}(t - \frac{r}{c}) = - \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r} = - \frac{\vec{n}}{c} \quad \text{حيث}$$

$$\therefore \phi_1 = \frac{1}{rc} [\vec{n} \cdot \int \vec{r}' \frac{\partial \rho'}{\partial t'} dV'] = \frac{1}{rc} [\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \int \vec{r}' \rho' dV']$$

$$= \frac{1}{rc} (\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{d}}{\partial t'}) = \frac{1}{rc} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}) \quad \text{_____ (2)}$$

حيث $\vec{d} = \int \vec{r}' \rho' dV'$ هي عزم ثنائي القطب الكهربائي.

والآن لإيجاد ϕ_2 :

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \int \frac{r'^2}{r^3} \rho' (3 \cos^2 \theta - 1) dV'$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 = r^2 r'^2 \cos^2 \theta \quad \leftarrow \vec{r} \cdot \vec{r}' = r r' \cos \theta \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \phi_2 = \frac{1}{2r^5} \int \rho' [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2] dV' \quad \text{_____ (3)}$$

وبتعريف متجه عزم رباعي الأقطاب الكهربائي بالعلاقة:

$$|\vec{D}| = D = \int \rho' [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2] dV'$$

$$\therefore \phi_2 = \frac{1}{2r^5} D = \frac{1}{2r^5} |\vec{D}| \quad \text{_____ (4)}$$

(Electric quadrupole moment tensor)

باعتبار الكمية $[3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2]$:

$$\begin{aligned} 3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 &= 3(xx' + yy' + zz')^2 - (x^2 + y^2 + z^2)r'^2 \\ &= 3x^2 x'^2 + 3y^2 y'^2 + 3z^2 z'^2 \\ &\quad + 6xx'yy' + 6yy'zz' + 6zz'xx' - (x^2 + y^2 + z^2)r'^2 \\ &= x^2(3x'^2 - r'^2) + y^2(3y'^2 - r'^2) + z^2(3z'^2 - r'^2) \\ &\quad + 6xx'yy' + 6yy'zz' + 6zz'xx' \end{aligned}$$

وبوضع

$$x = x_1, y = x_2, z = x_3, x' = x'_1, y' = x'_2, z' = x'_3$$

$$\begin{aligned} \therefore 3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 &= x_1^2(3x_1'^2 - r'^2) + x_2^2(3x_2'^2 - r'^2) + x_3^2(3x_3'^2 - r'^2) \\ &\quad + 6x_1x'_1x_2x'_2 + 6x_2x'_2x_3x'_3 + 6x_3x'_3x_1x'_1 \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 x_{\alpha} x_{\beta} (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^2) \end{aligned}$$

حيث

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

وبالتعويض في العلاقة (3):

$$\phi_2 = \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 x_{\alpha} x_{\beta} \int \rho' (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^2) dV'$$

ويعرف ممتد عزم رباعي الأقطاب الكهربائي بالعلاقة:

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho' (3x'_{\alpha} x'_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} r'^2) dV'$$

وتصبح العلاقة الخاصة بالجهد ϕ_2 بالصورة:

$$\phi_2 = \frac{1}{2r^5} x_{\alpha} x_{\beta} D_{\alpha\beta}$$

حيث استخدمنا قاعدة التجميع (summation Convention).

٥- المجال الناتج عن حركة إختبارية لجسيم مشحون (جهود لينارد- فيخبرت)

The Field due to arbitrary motion of charged Particle
(Lienard-Wiechert Potentials)

باعتبار شحنة مقدارها e تتحرك إختبارياً بسرعة $\vec{v}_0$ على المسار:
والتيار بدلالة دالة دلتا لنفا لدير اك كالآتي:

$$\rho = e\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \quad , \quad \vec{j} = \rho\vec{v}_0 = e\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)\vec{v}_0(t)$$

ونأخذ جهود التأخير الصورة الآتية:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{R} dV' \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{R} dV'$$

$$t' = t - \frac{R}{c} \quad , \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad \text{حيث:}$$

$$\therefore \phi(\vec{r}, t) = e \int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{---(1)}$$

$$A(\vec{r}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)\vec{v}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{---(2)}$$

وبأخذ المتغير الجديد $\vec{\ell} = \vec{r}' - \vec{r}_0(t')$

والاقتصار على المركبة في إتجاه محور x للتبسيط (أي إعتبار الحركة في إتجاه

$$\therefore \vec{\ell} \rightarrow \ell_x = x' - x_0(t) \quad , \quad \vec{v}_0 \rightarrow v_x = \frac{\partial x_0}{\partial t'} \quad \text{محور } x).$$

$$\therefore \frac{\partial \ell_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x'} = 1 - \vec{v}_0 \frac{\partial}{\partial x'} \left[t - \frac{R}{c} \right]$$

$$= 1 - \vec{v}_0 \frac{\partial}{\partial x'} \left[t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right] = 1 - \frac{\vec{v}_0}{c} \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= 1 - \frac{\vec{\beta}}{R} (x - x') \quad , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_0}{c}$$

$$\therefore \frac{\partial(\ell_x, \ell_y, \ell_z)}{\partial(x', y', z')} = 1 - \frac{\vec{\beta}}{R} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = 1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}$$

وبذلك يمكن كتابة:

$$\begin{aligned}\therefore dV' &= d^3r' = dx' dy' dz' = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(\ell_x, \ell_y, \ell_z)} d\ell_x d\ell_y d\ell_z \\ &= \frac{d\ell_x d\ell_y d\ell_z}{1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}} = \frac{d^3\ell}{1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}}\end{aligned}$$

وبالتعويض في (1):

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= e \int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = e \int \frac{\delta(\vec{\ell})}{R} dV' \\ &= e \int \frac{\delta(\vec{\ell})}{R[1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}]} d^3\ell = e \int \frac{\delta(\vec{\ell}) d\vec{\ell}}{R[1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}]}\end{aligned}$$

ولكن: $\vec{r}' = \vec{\ell} + \vec{r}_0$ ، وعندما $\vec{\ell} \rightarrow 0$ فإن:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{\ell}| = |\vec{r} - \vec{r}_0|$$

$$\int \delta(\vec{\ell}) d\vec{\ell} = 1$$

ومن خواص دالة دلتا ديراك:

$$\therefore \phi(r', t) = e \left[\frac{1}{R(1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R})} \right] = \frac{e}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \quad (3)$$

حيث $R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ هو المتجه الواصل من الشحنة إلى نقطة الرصد

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

وبالمثل فإن الجهد الإتجاهي $\vec{A}$ يمكن كتابته بالصورة:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{e}{c} \int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{R} \vec{v}_0(t') dV' \\ &= \frac{e}{c} \int \frac{\delta(\vec{\ell}) \vec{v}_0(t')}{R} \left[\frac{d^3\ell}{1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}} \right] = \frac{e}{c} \vec{v}_0 \left[\frac{1}{R(1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R})} \right] \\ &= e \frac{\vec{v}_0}{c} \left[\frac{1}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \right] = e\beta \left(\frac{1}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} \right) \quad (4)\end{aligned}$$

حيث $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ ، $\int \delta(\vec{\ell}) d\vec{\ell} = 1$ عندما $\ell \rightarrow 0$

العلاقان (4)، (3) والتي تكتبان بالصورة:

$$\phi = \frac{e}{R - \beta \cdot \vec{R}} , \quad \vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{R - \beta \cdot \vec{R}}$$

يعرفان بجهد لينارد- فيخيرت (Lienard-Wiechert pot.) لحركة شحنة إختيارية السرعة $\vec{v}_0$.

ومن هاتين العلاقتين نجد أن:

$$\vec{A} = \vec{\beta} \phi = \frac{\vec{v}_0}{c} \phi \quad (5)$$

مثال: لوجد متجهي المجالين الكهربائي ($\vec{E}$) والمغناطيسي ($\vec{H}$) لشحنة إختيارية متحركة بعجلة وجهدها يعطيان بالعلاقتين:

$$\phi = \frac{e}{R - \beta \cdot \vec{R}} , \quad \vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{R - \beta \cdot \vec{R}}$$

(ويعرفان بجهد لينارد- فيخيرت)

وكذلك العلاقة بين هذين المجالين مع دراسة الحالات الخاصة الممكنة.

الحل: لإيجاد $\vec{E}, \vec{H}$ نستخدم العلاقتين:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A} \quad (2)$$

حيث:

$$\phi = \frac{e}{R - \beta \cdot \vec{R}} \quad (3)$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{R - \beta \cdot \vec{R}} \quad (4)$$

فبوضع $S = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}$

$$\therefore \boxed{\phi = \frac{e}{S}} , \quad \boxed{\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{S} = \frac{e}{c} \frac{\vec{v}_0}{S}}$$

حيث $S = S(R, t')$

أولاً: إيجاد المجال الكهربائي:

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -e\vec{\nabla}\left(\frac{1}{S}\right) - \frac{e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}_0}{S}\right) \\ &= \frac{e}{S^2} \vec{\nabla}(S) - \frac{e}{c^2} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} - \frac{\vec{v}_0}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

ولحساب كل من $\nabla(S)$, $\frac{\partial S}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}$

(i) حساب $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t}$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t') , \quad t' = t - \frac{R}{c}$$

$$\therefore \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

بالضرب في $\frac{\partial t}{\partial t'}$:

$$\therefore 1 = \frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'} \rightarrow \boxed{\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'}}}$$

____(6)

ولكن:

$$R \frac{\partial R}{\partial t} = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \frac{\partial (\vec{r} - \vec{r}_0)}{\partial t'}$$

$$= -\vec{R} \cdot \vec{v}_0 , \quad \vec{v}_0 = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial t'} \quad | \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_0(t')$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}_0}{R}}$$

____(7)

بالتعويض من (7) في (6):

$$\therefore \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}_0}{cR}} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{R}}{R}} = \frac{R}{R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}} = \frac{R}{S} \quad \text{--- (8)}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{S} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t'} = \frac{R}{S} \dot{\vec{v}}_0 \quad \text{--- (9)}$$

(ii) حساب $\frac{\partial S}{\partial t}$: حيث أن $S = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}$

$$\therefore \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{S} \frac{\partial}{\partial t'} (R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) = \frac{R}{S} \left[\frac{\partial R}{\partial t'} - \vec{\beta} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t'} - \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right]$$

حيث $\dot{\vec{\beta}} = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} = \frac{\dot{\vec{v}}_0}{c}$ ، وحيث أن $\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R}$ ، فإن

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{R}{S} \left[\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{v}_0 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right] \quad \text{--- (10)}$$

(iii) حساب $\vec{\nabla}(S)$: حيث أن $S = S(R, t')$ ، فإن:

$$\vec{\nabla}(S) = (\vec{\nabla}S)_{t'} + \frac{\partial S}{\partial t'} \vec{\nabla}(t') \quad \text{--- (11)}$$

ولكن:

$$(\vec{\nabla}S)_{t'} = \vec{\nabla}_R (R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) = \frac{\vec{R}}{R} - \vec{\beta} \quad \text{--- (12)}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(t') &= \vec{\nabla} \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{1}{c} \vec{\nabla}(R) \\ &= -\frac{1}{c} (\vec{\nabla}R)_{t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \left(\frac{R}{S} \right) = -\frac{\vec{R}}{cS} \end{aligned} \quad \text{--- (13)}$$

ايضاً فإن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t'} &= \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} = -\frac{R}{S} \left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{v}_0 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \left(\frac{R}{S} \right) \\ &= -\left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{v}_0 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \end{aligned} \quad \text{--- (14)}$$

بالتعويض من (14), (13), (12) في (11) نحصل على:

$$\begin{aligned}\vec{V}(S) &= \left(\frac{\vec{R}}{R} - \vec{\beta}\right) + \left(\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{v}_0 + \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}\right) \left(\frac{\vec{R}}{cS}\right) \\ &= \frac{1}{R}(\vec{R} - \vec{\beta} R) + \frac{\vec{R}}{cS}[\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{v}_0}{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R)]\end{aligned}\quad (15)$$

وأخيراً بالتعويض من (15), (10), (9) في (5) نحصل على:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{e}{S^2} \left[\frac{1}{R}(\vec{R} - \vec{\beta} R) + \frac{\vec{R}}{cS} \{ \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{v}_0}{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R) \} \right] \\ &= -\frac{e}{c^2} \left[\frac{1}{S} \frac{R}{S} \dot{\vec{v}}_0 + \frac{\vec{v}_0}{S} \frac{R}{S} \{ \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{v}_0}{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R) \} \right] \\ &= \frac{e}{S^3} (\vec{R} - \vec{\beta} R)(1 - \beta^2) + \frac{e}{cS^3} [(\vec{R} - \vec{\beta} R)(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - RS\dot{\vec{\beta}}] \\ &= \frac{e}{S^3} (1 - \beta^2) \vec{S} + \frac{e}{cS^3} [\vec{S}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - RS\dot{\vec{\beta}}]\end{aligned}\quad (16)$$

حيث

$$\vec{S} = \vec{R} - \vec{\beta} R, \quad S = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_0}{c}, \quad \dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}_0}{c}$$

ويمكن كتابة العلاقة (16) بصورة أخرى وذلك بإعادة كتابة الحد الثاني بالصورة:

$$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - RS\dot{\vec{\beta}} &= (\vec{R} - \vec{\beta} R)(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - R(\vec{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{R})\dot{\vec{\beta}} \\ &= \vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta} R) \wedge \dot{\vec{\beta}} = \vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}} \\ \therefore \vec{E} &= \frac{e}{S^3} (1 - \beta^2) \vec{S} + \frac{e}{cS^3} [\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}] = \vec{E}_i + \vec{E}_r\end{aligned}\quad (17)$$

من هذه العلاقة نرى أن المجال الكهربائي $\vec{E}$ للشحنة المتحركة يتكون من جزئين:

(i) الجزء $\vec{E}_i$ ويعتمد على سرعة الشحنة $\vec{v}_0$ ويسمى بالمجال التآثيري (Inductive field) أو مجال السرعة (Velocity field).

(ii) الجزء $\vec{E}_r$ ويعتمد على العجلة $\dot{\vec{v}}_0$ ويسمى بالمجال الإشعاعي (Radiative field) أو مجال العجلة (Acceleration field).

ملاحظات:

(١) يمكن اعتبار الحركة الإختيارية كأنها مجموع الحركة المنتظمة (المعتمدة على السرعة) مضافاً إليها الحركة المعجلة (التي تصدر إشعاعاً).

(٢) في حالة الحركة المنتظمة فإن $\dot{v}_0 = 0$ ويتلاشى الحد الثاني $\vec{E}_r$ (لتلاشي العجلة) وهذا يعني أن المجال الإشعاعي يوجد فقط للأجسام المعجلة (ذات العجلة).

(٣) في حالة الشحنات الساكنة ($v_0 = 0$) فإن $\beta = 0$ وتصبح $\vec{S} = \vec{R}$ وتكون شدة المجال: $\vec{E} = \vec{E}_i = \frac{e}{R^3} \vec{R}$.

(٤) في حالة السرعات $v_0 \ll c$ فإن $\beta \rightarrow 0$ وتصبح $\vec{S} = \vec{R}$ ويصبح المجال التأثيري (الناتج عن الحركة المنتظمة للشحنات) بالصورة: $\vec{E} = \vec{E}_i = \frac{e}{R^3} \vec{R}$.

ثانياً: إيجاد المجال المغنطيسي:

بنفس الطريقة السابقة يمكن الحصول على شدة المجال المغنطيسي $\vec{H}$ للجسيمات المشحونة المتحركة بعجلة، حيث:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{e \vec{v}_0}{c S} \right) = \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{e \vec{\beta}}{S} \right)$$

$$= e \left[\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{S} \right) \vec{\beta} \right] = e \left[\text{curl} \left(\frac{1}{S} \right) \vec{\beta} \right]$$

$$= e \left[\left(\frac{1}{S} \right) \text{curl} \vec{\beta} + \text{grad} \left(\frac{1}{S} \right) \wedge \vec{\beta} \right]$$

$$= \frac{e}{S} \text{curl} \vec{\beta} - \frac{e}{S^2} [(\text{grad} S \wedge (\vec{\beta}))]$$

(ونذلك لأن: $\text{curl}(\phi \vec{A}) = \phi \text{curl} \vec{A} + \text{grad} \phi \wedge \vec{A}$)

$$\text{curl} \vec{\beta} = \frac{1}{c} \text{curl} \vec{v}_0 = -\frac{1}{c} [\dot{\vec{v}}_0 \wedge \text{grad} t'] \quad \text{ولكن}$$

$$\text{curl } \vec{v}_0 = -[\dot{\vec{v}}_0 \wedge \text{grad } t'] \quad \text{حيث:}$$

الإثبات:

$$\begin{aligned} [\text{curl } v_0]_x &= \frac{\partial v_{0z}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} = \frac{\partial v_{0z}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} \\ &= \dot{v}_{0z} \frac{\partial t'}{\partial y} - \dot{v}_{0y} \frac{\partial t'}{\partial z} = \dot{v}_{0z} (\text{grad } t')_y - \dot{v}_{0y} (\text{grad } t')_z \\ &= -[\dot{\vec{v}}_0 \wedge \text{grad } t']_x, \dots \end{aligned}$$

أيضاً حيث أن:

$$\begin{aligned} \text{grad } (t') &= -\frac{\vec{R}}{cS} \\ \therefore \text{curl } \vec{\beta} &= -\frac{1}{c^2 S} (\vec{R} \wedge \dot{\vec{v}}_0) = -\frac{1}{cS} (\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}) \end{aligned}$$

ومن العلاقة:

$$\begin{aligned} \text{grad } S &= \vec{\nabla}(S) = \frac{1}{R} (\vec{R} - \vec{\beta} R) + \frac{\vec{R}}{cS} [\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + (\frac{\vec{v}_0}{R}) \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} R)] \\ \therefore \vec{H} &= -\frac{e}{cS^2} (\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}) - \frac{e}{S^2} [\frac{1}{R} (\vec{R} - \vec{\beta} R) \wedge \vec{\beta} \\ &\quad + \frac{\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}}{cS} \{ \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}} + (\frac{\vec{v}_0}{R}) \cdot (\vec{R} - R\vec{\beta}) \}] \\ &= \frac{e}{RS^3} (1 - \beta^2) \{ \vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta} R) \} \\ &\quad + \frac{e}{RcS^3} [\{ \vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta} R) \} (\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \vec{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) (\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}})] \end{aligned}$$

ولكن الحد الثاني يساوي:

$$\begin{aligned} &\frac{e}{RcS^3} [\vec{R} \wedge \{ (\vec{R} - \vec{\beta} R) (\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \vec{R} \cdot (\vec{R} - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) \dot{\vec{\beta}} \}] \\ &= \frac{e}{RcS^3} [\vec{R} \wedge \{ \vec{R} \wedge \ddot{S} \wedge \dot{\vec{\beta}} \}] \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{e}{RS^3}(1 - \beta^2)(\vec{R} \wedge \vec{S}) + \frac{e}{RcS^3}[\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}})]$$

$$= \vec{H}_i + \vec{H}_r \quad \text{--- (18)}$$

ومنها يتضح أن المجال المغنطيسي للشحنة المتحركة بعجلة تتكون أيضاً من جزئين:

(١) $\vec{H}_i$ وهو المجال التأثيري (Induction field)

(٢) $\vec{H}_r$ وهو المجال الإشعاعي (Radiation field)

ملاحظات:

(١) من العلاقتين (18), (17) نجد أن:

$$\vec{H} = \frac{1}{R}(\vec{R} \wedge \vec{E}) = \hat{n} \wedge \vec{E}$$

حيث $\hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ متجه وحدة في اتجاه المتجه $\vec{R}$.

ومن ذلك يتضح أن المجالين المغنطيسي للإشعاع الناتج عن الشحنة المتحركة بعجلة يكون عمودياً على المجال الكهربائي وعلى المتجه $\vec{R}$ ، وينطبق ذلك على المجالين التأثيري والإشعاعي.

(٢) في حالة الشحنات الساكنة فإن $v_0 = 0$ (أي أن $\beta = 0$) ونصبح $\vec{S} = \vec{R}$ وتكون شدة المجال:

$$\vec{H} = \vec{H}_i = \frac{e}{R(R^3)}(\vec{R} \wedge \vec{R}) = 0$$

وهذا يعني إنعدام المجال المغنطيسي في هذه الحالة (قارن مع المجال الكهربائي).

(٣) في حالة $v \ll c$ (السرعات البطيئة) فإن $\beta \ll 1$ ونصبح $\vec{S} = \vec{R}$ وتؤول شدة المجال الإشعاعي إلى:

$$\vec{H}_r = \frac{e}{Rc(R^3)}[\vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}})]$$

$$= \frac{e}{cR^4} \vec{R} \wedge [(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}})\vec{R} - (\vec{R} \cdot \vec{R})\dot{\vec{\beta}}]$$

$$= \frac{e}{cR^4}[-R^2(\vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}})] = \frac{e}{cR^2}(\dot{\vec{\beta}} \wedge \vec{R}) = \frac{e}{c^2 R^2}(\dot{\vec{v}} \wedge \vec{R})$$

وفي حالة الحركة المنتظمة فإن: $\dot{\vec{v}} = 0$ وبصبح $\vec{H}_r = 0$ (إنعدام المجال الإشعاعي).

(٤) يمكن كتابة شدة المجال التأثيري (الناتج عن الحركة المنتظمة للشحنات) بالصورة:

$$\begin{aligned}\vec{H}_i &= \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)(\vec{R} \wedge \vec{S}) = \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)[\vec{R} \wedge (\vec{R} - \vec{\beta} R)] \\ &= \frac{e}{RS^3}(1-\beta^2)[-R(\vec{R} \wedge \vec{\beta})] = \frac{e}{S^3}(1-\beta^2)(\vec{\beta} \wedge \vec{R}) \\ &= \frac{e}{cS^3}(1-\beta^2)(\vec{v} \wedge \vec{R})\end{aligned}$$

وفي حالة $v \ll c$ فإن $\beta \rightarrow 0$ ، $S \rightarrow R$ ، ونحصل على:

$$\vec{H}_i = \frac{e}{cR^3}(\vec{v} \wedge \vec{R})$$

وقد سبق حصولنا على المجال الكهربائي للتأثيري في تلك الحالة بالصورة:

$$\vec{E}_i = \frac{e}{R^3}\vec{R} \rightarrow \therefore \boxed{\vec{H}_i = \frac{1}{c}(\vec{v} \wedge \vec{E}_i)}$$

(٥) يمكن استنتاج قانون بيو-سافار من العلاقة $\vec{H}_i = \frac{e}{cR^3}(\vec{v} \wedge \vec{R})$ كالآتي:

باعتبار المجال $\vec{H}$ ناتجاً عن عنصر تيار $(I d\vec{\ell})$ حيث I شدة التيار المار خلال طول قدره $d\ell$ من موصل، فإذا عرفنا:

$$e\vec{v} = \int dq \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \int \frac{dq}{dt} d\vec{\ell} = \int I d\vec{\ell}$$

$$\therefore \boxed{\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{I(d\vec{\ell} \wedge \vec{R})}{R^3}}$$

وهو قانون بيو-سافار (Biot-Savart Law) لشدة المجال الناتج عن تيار يمر خلال موصل.

٦- تطبيقات على الحركة الإختيارية لجسيم مشحون:

هناك العديد من التطبيقات التي يمكن دراستها بخصوص الحركة الإختيارية لجسيم مشحون ومن هذه التطبيقات:

(١) الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون معجل يتحرك بسرعات منخفضة (لا نسبية)، ويعرف بإشعاع لارمور (Larmor Radiation).

(٢) الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون معجل يتحرك بسرعات عالية (نسبية)، ويعرف بإشعاع لينارد (Lenard Radiation).

(٣) الإشعاع الناتج عن حركة الإلكترون في مداراتها الدائرية (حالة العجلة المتعامدة مع السرعة).

(٤) الإشعاع الناتج عن جسيمات مشحونة ذات عجلة تقصيرية (تقصير) مواز لسرعة الجسيمات، وتعرف بحالة أشعة الفرملة أو الأشعة الكابحة (Bremsstrahlung)، وسنتناول هذه التطبيقات في الأمثلة الآتية:

مثال (١): إذا كان الجزء الإشعاعي من المجالين $\vec{E}, \vec{H}$ يعطيان بالعلاقين:

$$\vec{E}_r = \frac{e}{cS^3} (\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}) , \quad \vec{H}_r = \hat{n} \wedge \vec{E}_r$$

$$\vec{S} = \vec{R} - \vec{\beta} R , \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_0}{c} , \quad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

فأدرس الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون معجل يتحرك بسرعة منخفضة (لا نسبية)، واستنتج من ذلك صيغة لارمور (Larmor Formula) التي تعطي الشدة الكلية للإشعاع الناتج عن حركة الجسيم وصورتها:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2$$

الحل: حيث أن:

$$\vec{E}_r = \frac{e}{cS^3} (\vec{R} \wedge \vec{S} \wedge \dot{\vec{\beta}}) \quad (1)$$

$$\vec{H}_r = \vec{n} \wedge \vec{E}_r \quad (2)$$

ففي حالة السرعات المنخفضة فإن: $v_0 \ll c$ وبالتالي فإن $\beta = \frac{v_0}{c} \rightarrow 0$

$$\therefore \vec{S} = \vec{R} - \beta \vec{R} \rightarrow \vec{R}, \quad S = R - \vec{\beta} \cdot \vec{R} \rightarrow R$$

وتؤول العلاقة (1) إلى:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= \frac{e}{cR^3} [\vec{R} \wedge \vec{R} \wedge \dot{\vec{\beta}}] \\ &= \frac{e}{cR} [\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})] \quad , \quad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R} \quad (\text{متجه الوحدة في اتجاه } \vec{R}) \\ &= \frac{e}{cR} [(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \hat{n}) \dot{\vec{\beta}}] \\ &= \frac{e}{cR} \left[\frac{1}{c} (\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}) \hat{n} - \frac{1}{c} \dot{\vec{v}} \right] \quad \left| \begin{array}{l} \hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \\ \dot{\vec{\beta}} = \frac{\dot{\vec{v}}}{c} \end{array} \right. \\ &= \frac{e}{c^2 R} [(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}) \hat{n} - \dot{\vec{v}}] \quad (3) \end{aligned}$$

أيضاً فإن متجه بوينتينج الذي يعطي طاقة الإشعاع المنبعث في وحدة المساحات في الثانية، أو القدرة المنبعثة لوحدة المساحات، يعطي من العلاقة:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_r \wedge \vec{H}_r) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}_r \wedge (\hat{n} \wedge \vec{E}_r)) \\ &= \frac{c}{4\pi} (E_r^2 \hat{n} - (\vec{E}_r \cdot \hat{n}) \vec{E}_r) \end{aligned}$$

وحيث أن $\vec{E}_r \cdot \hat{n} = 0$ فإن $\hat{n}$ على $\vec{R}$ أو على $\hat{n}$

$$\therefore \vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} E_r^2 \hat{n}$$

وبالتعويض عن قيمة $\vec{E}_r$ من (3):

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2} [(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}) \hat{n} - \dot{\vec{v}}]^2 \hat{n} \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2} [(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})^2 - 2(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})(\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}}) + \dot{v}^2] \hat{n} \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2} [\dot{v}^2 - (\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}})^2] \hat{n}\end{aligned}$$

وإذا كانت θ هي الزاوية بين $\vec{R}$, $\dot{\vec{v}}$ أي بين $\hat{n}$, $\dot{\vec{v}}$ فإن:

$$\hat{n} \cdot \dot{\vec{v}} = (1)(\dot{v}) \cos \theta = \dot{v} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{\gamma} &= \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2} [\dot{v}^2 - \dot{v}^2 \cos^2 \theta] \hat{n} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3 R^2} [1 - \cos^2 \theta] \hat{n} \\ &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \hat{n}\end{aligned}\quad (4)$$

وباعتبار الموجات المنبعثة هي موجات كرية (spherical wave) فإن القدرة المنبعثة على السطح الكروي ذي النصف قطر R أي على الزاوية المجسمة 4π تكون:

$$dI = \vec{\gamma} \cdot d\vec{S} = \vec{\gamma} \cdot (4\pi R^2 \hat{n}) = 4\pi R^2 (\vec{\gamma} \cdot \hat{n})$$

وتكون القدرة الإشعاعية لوحدة الزوايا المجسمة:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4\pi R^2 (\vec{\gamma} \cdot \hat{n})}{4\pi} = R^2 (\vec{\gamma} \cdot \hat{n})$$

وبالتعويض عن $\vec{\gamma}$ من (4):

$$\therefore \frac{dI}{d\Omega} = R^2 \left[\frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta (\hat{n} \cdot \hat{n}) \right] = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (5)$$

ومن ذلك نجد أن $\left[\frac{dI}{d\Omega} \propto \sin^2 \theta \right]$ وهو قانون توزيع $\sin^2 \theta$ للقدرة المنبعثة

من إشعاع شحنة معجلة. ونحصل على شدة الإشعاع الكلي (أو القدرة الإشعاعية

الكليّة) بتكامل (5) بالنسبة للزاوية المجسمة $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$

$$\begin{aligned}
 \therefore I &= \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta (2\pi \sin \theta d\theta) \\
 &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} [2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta] \\
 &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^\pi (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\
 &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \left[\frac{4}{3} \right] = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2
 \end{aligned}$$

وهي صيغة لارمور (Larmor Formula) والتي تعطي القدرة الكلية المنبعثة من الإشعاع الناتج عن حركة جسيم مشحون لا نسبي أي يتحرك بسرعات منخفضة. وهو المطلوب.

مثال (٢): لوجد الصيغة العامة للقدرة الإشعاعية المنبعثة عن حركة جسيمات بسرعات نسبية (أي سرعات تقترب من سرعة الضوء) والمعروفة بإسم صيغة لينارد الإشعاعية (Radiation Lienard Formula) والتي تُشكل تعديلاً نسبياً (أو تعميماً) لصيغة لارمور السابقة.

الحل: إذا كان $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ حيث $\beta = \frac{v_0}{c}$ هو معامل فنزجيرالد، فإن صيغة لينارد تأخذ الصورة الآتية:

$$I = \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 \left[\dot{\beta}^2 - | \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}} |^2 \right] \quad (1)$$

$$| \vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}} |^2 = (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 - \beta^2 \dot{\beta}^2$$

وإذا كانت:

فإن (1) تصبح:

$$I = \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 [\dot{\beta}^2 (1 - \beta^2) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2] \quad (2)$$

وهي صورة أخرى لعلاقة أو صيغة لينارد.

ونلاحظ أن علاقة لينارد تشتمل على الحد $(\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})$ والذي يعبر عن الإزدواج بين متجهي السرعة $\vec{\beta}$ والعجلة $\dot{\vec{\beta}}$.

واللحصول على علاقة لينارد:

نستخدم منظومة إحداثيات يكون فيها الجسم المشحون ساكناً، وفي نفس الوقت متحركاً مع المنظومة بسرعتها $\vec{v}$ ، وفي هذه المنظومة ينبعث من الجسم إشعاعاً

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 \quad \text{في وحدة الزمن شدته تعطي بصيغة لأمور:}$$

حيث $\dot{v}$ هي عجلة الجسم في المنظومة، فإذا رمزنا للعجلة بالرمز a فإن: $a = \dot{v}$ وباستخدام المتجه الرباعي للعجلة (a_μ) فإن تلك العلاقة تؤول إلى العلاقة النسبية:

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} a_\mu^2 \quad \text{_____ (1)}$$

ومن النظرية النسبية فإن a_μ^2 تعطي بالعلاقة الآتية:

$$a_\mu^2 = \frac{\dot{v}^2 - 1/c^2 (\vec{v} \wedge \dot{\vec{v}})^2}{(1 - \beta^2)^3}$$

وهذه العلاقة يمكن تبسيطها كالآتي:

$$\begin{aligned} a_\mu^2 &= \alpha^6 \left[\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \wedge \dot{\vec{v}})^2 \right] \\ &= \alpha^6 \left[\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} \{ v^2 \dot{v}^2 - (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2 \} \right] \\ &= \alpha^6 \left[\dot{v}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2 \right] \\ &= \alpha^6 c^2 [\dot{\beta}^2 (1 - \beta^2) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2] \quad \text{_____ (2)} \end{aligned}$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$I = \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 [\dot{\beta}^2 (1 - \beta^2) + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2] \quad \text{_____ (3)}$$

وهي الصورة الثانية لصيغة لينارد المطلوبة.

ويمكن الحصول على الصورة الأولى لها كالآتي:
من (3):

$$I = \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 [\dot{\beta}^2 - \{\beta^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2\}]$$

$$= \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 [\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2] \quad \text{--- (4)}$$

حيث: $(\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2 = \beta^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2$ وذلك لأن :

$$(\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2 = |\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}|^2 = \beta^2 \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta = \beta^2 \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \beta^2 \dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \theta = \beta^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2$$

تمثل العلاقة (3) أو (4) تعميماً لعلاقة لارمور، بحيث يمكن الحصول على علاقة لارمور من إحدى العلاقتين بتطبيق الشرط اللانسيبي $v \ll c$ ، وفي هذه الحالة فلن:

$$\alpha \rightarrow 1, \quad \beta^2 \rightarrow 0$$

وتؤول كلتا العلاقتين (3) أو (4) إلى:

$$I = \frac{2e^2}{3c} \dot{\beta}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} a^2$$

مثال (3): باستخدام علاقة لينارد النسبية للإشعاع وصورتها:

$$I = \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 [\dot{\beta}^2 - |\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}|^2]$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \text{حيث:}$$

أدرس الحالتين الخاصيتين الآتيتين مع ذكر مثال في كل حالة:

(i) إذا كانت السرعة والعجلة في نفس الخط

(Collinear velocity and acceleration)

(ii) إذا كانت السرعة والعجلة متعامدتان:

(Perpendicular velocity and acceleration)

الحل: الحالة الأولى: السرعة والعجلة في نفس الخط

في هذه الحالة تكون الزاوية بينهما مساوية للصفر وبذلك فإن:

$$|\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}| = \beta \dot{\beta} \sin 0 = 0$$

وتؤول علاقة لينارد إلى:

$$I = \frac{2e^2}{3c} \alpha^2 \dot{\beta}^6 = \frac{2e^2}{3c^3} \alpha^6 \dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 - v^2/c^2)^3} \quad (1)$$

وكمثال لهذه الحالة: تولد نوع من الأشعة تكون فيه الإلكترونات المتحركة بالسرعات النسبية في حالة تباطؤ نتيجة تصادمها مثلاً بهدف معدني، وتعرف الأشعة الناتجة عن الحركة المتباطئة للإلكترونات بالأشعة الكابحة أو أشعة الفرملة (Bremsstrahlung Radiation) وبذلك يمكن تعريف تلك الأشعة بأنها الأشعة الناتجة عن حركة جسيم مشحون (إلكترون) بعجلة تقصيرية موازية للسرعة بحيث أن السرعة تتناقص أثناء الحركة فتسبب التباطؤ أو عملية الكبح. أيضاً كمثال لهذه الحالة:

حالة المعجلات الخطية (Linear accelerator) حيث تكون السرعة والعجلة في نفس الخط.

الحالة الثانية: إذا كانت السرعة والعجلة متعامدتان ففي هذه الحالة تكون الزاوية

$$|\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}}| = \beta \dot{\beta} \sin 90^\circ = \beta \dot{\beta} \quad \text{بينهما } 90^\circ \text{ وبذلك فإن:}$$

وتؤول علاقة لينارد إلى:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 [\dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}^2] = \frac{2e^2}{3c} \alpha^6 \dot{\beta}^2 (1 - \beta^2) \\ &= \frac{2e^2}{3c} \alpha^4 \dot{\beta}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \alpha^4 \dot{v}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 - v^2/c^2)^2} \quad (2) \end{aligned}$$

وكمثال لهذه الحالة: حركة الجسيمات بسرعات عالية في المعجلات الدائرية (Circular accelerators) مثل السيكلوترون والبيئاترون والسنكروترون، وغيرها.