الفصل الثانى

٢

أنظمة العد

Numbering Systems

٢ – ١ مقدمة

نحن نعيش فى عالم من الأرقام العشرية التى تتكون من العشرة أرقام الشهيرة صفر حتى تسعة . فلماذا ارتبطنا بهذا النظام ؟ ولماذا توقفت صورة الأرقام عند تسعة ؟ هل هذا له علاقة بأن أصابع الأيدى عشرة ؟ لا أحد يدرى ! السؤال الآن هو : هل من الممكن أن نستخدم نظام للعد غير النظام العشرى ؟ تخيل أننا افترضنا وجود نظام ثنائى لا يحتوى إلا الرقم صفر والرقم واحد ، أى أن أصابع اليد كانت اثنين بدلا من عشرة ! . كيف سيكون العد فى ظل هذا النظام ، وكيف سنجمع أو نطرح فى هذه الحالة ؟ ولماذا النظام الثنائى فقط ؟ ماذا لو فرضنا نظام عد آخر يتكون من ثمانية أرقام ، الصفر حتى سبعة (النظام الثمانى) ! أو النظام الستعشرى الذى يتكون من ستة عشرة رقما ، صفر حتى ١٥ ، أو حتى أى نظام عد آخر . سنرى بالتفصيل فى هذا الفصل كيفية استخدام أى نظام عد يختلف عن النظام العشرى . المفاجأة كما سنرى هى أن بعض هذه الأنظمة تكون مفيدة جدا فى بعض المواقف ، فالنظام الثنائى مثلا هو النظام المستخدم بكثرة فى أنظمة الحاسبات ، وشاع استخدام النظام الثمانى والنظام الستعشرى كذلك .

٢ – ٢ النظام العشرى Decimal system

لابد من المرور على نظام العد العشرى وحقائق استخدامه حتى نستخدم هذه الحقائق ونعممها للحصول على أنظمة العد الأخرى . إننا فى النظام العشرى نستخدم عشرة أرقام من صفر حتى تسعة للتعبير عن الكميات من صفر حتى تسعة . عندما نعبر عن كميات أكبر من التسعة نستخدم عددا مركبا من نفس الأرقام من صفر حتى تسعة ولكن فى هذه الحالة فإن موضع الرقم داخل العدد يكون له وزنا معينا . فمثلا العدد أو الكمية ٥١ تتكون من رقمين الواحد والخمسة ولكن الخمسة هنا موجودة في موقع أو فى خانة العشرات التى يوزن كل واحد فيها بعشرة ، لذلك فإن الخمسة فى هذه الخانة تمثل خمسين . بينما الواحد يوجد فى خانة الآحاد التى يمثل كل واحد فيها بنفس قيمته أى بواحد . لذلك فإن الرقم ٥١ يمكن أن نكتبه على هذه الصورة :

$51 = 5 \times 10 + 1 \times 1$

وهكذا تم استحداث خانات جديدة مثل خانات المآت التى يمثل كل واحد فيها بماءة وخانة الآلاف التى يمثل كل واحد فيها بألف ، وهكذا نرى أن هذه الخانات عبارة عن قوى أو أسس الرقم عشرة التى نقول عنها أنها قاعدة هذا النظام . الكمية ٤٩٩ مثلا يمكن كتابتها كما يلى :

$499 = 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

وكذلك الكمية 87535 يمكن كتابتها على الصورة :

$87535 = 8 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

إذا كانت الكمية العشرية تحتوى كسر فإن الأرقام الكسرية التى على يمين العلامة العشرية تكتب منسوبة إلى قوى سالبة من الرقم ١٠ كما يلى :

$535.25 = 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$

وهكذا يمكن التعبير عن أى كمية بالأرقام من صفر حتى تسعة عن طريق فرض قيمة معينة لموضع الرقم داخل الكمية أو داخل العدد . قبل أن نترك النظام العشرى إلى النظام الثنائي نؤكد على أن هذا النظام به عشرة أرقام صفر حتى تسعة ، وقاعدة هذا النظام هى العشرة .

٢-٣ نظام العد الثنائى Binary system

فى النظام الثنائى يوجد رقمان فقط وهما الصفر (٠) والواحد (١) . معنى ذلك أن أى كمية أكبر من الواحد سنعبر عنها بعدد مركب من الأصفار والوحايد ولكن موضع كل صفر أو واحد سيكون له قيمة معينة هنا . أى أننا سنعتبر كل خانة يوجد فيها أى صفر أو واحد بقيمة معينة أخرى ، هذه القيم ستكون قوى الرقم (٢) مثل قوى الرقم ١٠ فى النظام العشرى كما سبق . يتضح ذلك من الأمثلة التالية :

$10 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2 \quad (2\text{-}1)$

$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 5 \quad (2\text{-}2)$

$101011 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 43 \ (2\text{-}3)$

وهكذا أمكن التعبير عن أى كمية فى النظام الثنائى بفرض قيمة للموضع أو الخانة التى يوجد بها الرقم الثنائى مضروبا فى أحد قوى الرقم 2 .

الآن يمكننا العد بالنظام الثنائى باتباع نفس نظام العد العشرى حيث كنا نعد من صفر حتى تسعة ثم نبدأ خانة جديدة خانة العشرات ونضع بها واحد ونستمر فى العد ١٠ ، ١١ ، ١٢ ،... حتى ١٩ بعدها نزيد واحد فى خانة العشرات ونستمر فى العد ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ،... وهكذا حتى ٩٩ بعدها نفتح خانة جديدة (المئات) ونستمر فى العد ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ... وهكذا حتى ٩٩٩ ثم نبدأ خانة جديدة وهكذا . بنفس الطريقة سنعد فى النظام الثنائى ٠ ، ١ ثم نبدأ خانة جديدة ١٠ ، ١١ ، ثم نبدأ خانة جديدة ١٠٠ ، ١٠١ ،... ، ١١١ ثم نبدأ خانة جديدة ، وهكذا نستمر فى العد . جدول ٢-١ يبين الأعداد من صفر حتى ١٥ ، والقيمة العشرية المقابلة لكل عدد . لاحظ فى هذا الجدول أننا لكى نعد من صفر حتى ١٥ يلزمنا أربع خانات ثنائية . الآن يمكن كتابة القاعدة التالية :

الأرقام العشرية	الأرقام الثنائية			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

جدول ٢-١

<u>أكبر قيمة عشرية يمكن أن نصل إليها لعدد معين من الخانات الثنائية تساوى $(2^n - 1)$</u> حيث n هى عدد الخانات الثنائية . فإذا كانت $n = 4$ فأكبر عدد يمكن أن نصل إليه هو ١٥ وإذا كانت $n = 5$ فأكبر قيمة هى ٣١ وإذا كانت $n = 6$ فأكبر قيمة هى ٦٣ وهكذا .

طريقة التحويل من النظام الثنائى إلى النظام العشرى

طريقة التحويل من النظام الثنائى إلى العشرى سهلة ومباشرة ولقد رأيناها فى المعادلات ٢-١ و ٢-٢ و ٢-٣ ونسوق مثال آخر نوضح به هذه الطريقة :

$11011_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 27_{10}$

الرقم الجانبى بعد أى عدد يدل على نوع هذا العدد ، فالرقم ٢ الجانبى يعنى أن هذا العدد ممثل فى النظام الثنائى والرقم ١٠ يعنى أن هذا العدد ممثل فى النظام العشرى . <u>الخانة فى النظام الثنائى التى تأخذ صفر أو واحد تسمى بت . أول خانة من ناحية اليمين تسمى الخانة ذات القيمة الصغرى Least Significant Bit, LSB وآخر خانة ناحية اليسار تسمى الخانة ذات القيمة العظمى Most significant bit, MSB .</u>

فى حالة احتواء الرقم على كسر مثل 11011.1101 فإن المكافئ العشرى فى هذه الحالة يمكن حسابه كالتالى :

$$
\begin{aligned}
11011.1101 &= 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} + 1x2^{-2} + 0x2^{-3} + 1x2^{-4} \\
&= 16 + 8 + 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.0625 \\
&= 27.8125
\end{aligned}
$$

حيث النقطة فى الرقم الثنائى سنطلق عليها العلامة الثنائية بدلا من العلامة العشرية فى حالة النظام العشرى .

التحويل من النظام العشرى إلى النظام الثنائى

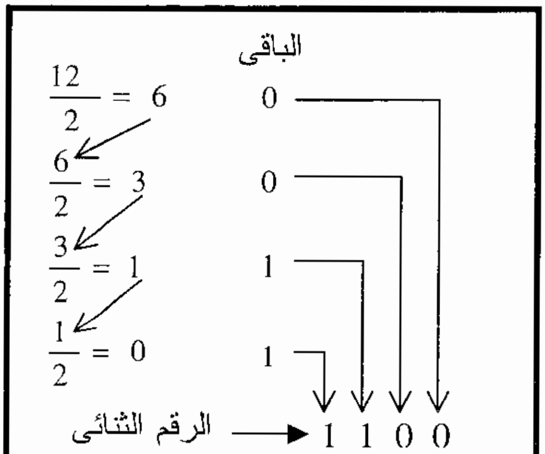
الطريقة الأولى للتحويل من نظام عشرى إلى نظام ثنائى هى عن طريق تحويل الرقم العشرى إلى مجموعة من أوزان الرقم ٢ ابتداء من 2^0 ثم 2^1 ثم 2^2 وهكذا . إن وجد رقم مقابل لواحد من هذه الأوزان توضع الخانة المقابلة بواحد وإن لم يوجد توضع الخانة المقابلة بصفر فالرقم ٩ مثلا عبارة عن ٨ + ١ حيث الثمانية هى $٢^{٣}$ ، و الواحد هو $٢^{٠}$ و على ذلك فالرقم ٩ يمكن وضعه على الصورة :

$$
\begin{array}{cccc}
2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

وهذه هى بعض الأمثلة الإضافية لذلك :

$$12 = 8 + 4 = 2^3 + 2^2 = 1100$$
$$25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11001$$
$$58 = 32 + 16 + 8 + 2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 = 111010$$
$$82 = 64 + 16 + 2 = 2^6 + 2^4 + 2^1 = 1010010$$

هذه الطريقة فى العادة تستخدم مع الأرقام الصغيرة ، أما مع الأرقام الكبيرة فطريقة القسمة المتتالية على ٢ هى الأنسب للتحويل من النظام العشرى إلى النظام الثنائى . فى هذه الطريقة نقسم الرقم العشرى على ٢ على مرات متتابعة . فى كل مرة سيتبقى إما واحد أو صفر هذا الباقى يمثل بتات الرقم الثنائى من اليمين إلى اليسار ، أما ناتج القسمة فنأخذه ونقسمه على ٢ مرة أخرى إلى أن يؤول ناتج القسمة إلى صفر . شكل (٢-١) يوضح هذه العملية . نلاحظ من هذا الشكل أنه تم قسمة الرقم ١٢ على ٢ فكانت النتيجة تساوى ستة والباقى صفر يمثل أول بت فى العدد الثنائى من اليمين ، بعد ذلك أخذنا الرقم ٦ وقسمناه على ٢ مرة أخرى فكان الناتج ٣ والباقى صفر الذى يمثل البت الثانية فى العدد الثنائى ، بعد ذلك قسمنا ٣ على ٢ فكان الناتج واحد والباقى واحد يمثل الخانة الثالثة فى العدد الثنائى . وأخيرا أخذنا الرقم ١ و قسمناه على ٢ فكان الناتج صفر والباقى واحد وهذا يمثل الخانة رقم ٤ والأخيرة فى العدد الثنائى .



شكل (٢-١) التحويل من عشرى إلى ثنائى عن طريق القسمة المتتالية على ٢

لتحويل الأرقام الكسرية من النظام العشرى إلى النظام الثنائى يمكن اتباع طريقة الأوزان للرقم ٢ عن طريق وضع الرقم العشرى فى صورة مجموعة من الكسور كل منها أحد قوى

الرقم ٢ السالبة ولكن هذه الطريقة تكون فى العادة أصعب . لذلك نفضل استخدام الطريقة الثانية وهى طريقة الضرب المتتالى فى ٢. فى هذه الطريقة نضرب الكسر فى ٢ فإذا ظهر واحد صحيح فى نتيجة الضرب ، نضع هذا الواحد فى الرقم الثنائى ، وإذا لم يظهر واحد صحيح نضع صفر فى الرقم الثنائى ، بعد ذلك نأخذ الكسر الناتج ونجرى عليه نفس العملية ، وهكذا إلى أن يتلاشى الكسر أو نكتفى بعدد معين من الخانات بعد العلامة الثنائية . شكل (٢-٢) يبين هذه الطريقة بوضوح . فى هذا الشكل نريد تحويل الكسر 0.3125 إلى ثنائى لذلك تم ضرب هذا الكسر فى ٢ فكان الناتج هو 0.625 أى صفر صحيح ، لذلك فإن أول خانة فى الكسر الثنائى ستكون صفر كما فى الشكل . بعد ذلك نأخذ الكسر 0.625 ونضربه فى ٢ فيكون الناتج هو 1.25 وهو عبارة عن واحد صحيح يوضع فى الخانة الثانية للرقم الثنائى ، ونأخذ الكسر 0.25 ونضربه فى ٢ مرة أخرى فيكون الناتج هو 0.5 فنضع صفر فى الرقم الثنائى ونضرب الكسر 0.5 فى ٢ ، فيكون الناتج هو 1.0 فنضع واحد فى الرقم الثنائى ونوقف عملية الضرب طالما أن الكسر الناتج أصبح صفرا . وعلى ذلك فالكسر الثنائى سيكون 0.0101 .

	الناتج الصحيح
0.3125 x 2 = 0.625	0
0.625 x 2 = 1.25	1
0.25 x 2 = 0.5	0
0.5 x 2 = 1.0	1

0.0101

شكل (٢-٢) تحويل الكسور العشرية إلى كسور ثنائية بالضرب المتتالى فى ٢

العمليات الحسابية فى النظام الثنائى

سنرى فى هذا الجزء كيفية إجراء العمليات الحسابية الأساسية ، الجمع والطرح والضرب والقسمة فى النظام الثنائى لما فى ذلك من أهمية فى التعامل مع الإشارات الثنائية داخل الحاسب كما سنرى فى الفصول القادمة .

أولا: الجمع الثنائى

القوانين الأساسية لجمع خانتين ثنائيين موضحة فى شكل (٢-٣) . نلاحظ من هذا الشكل أن جميع هذه العمليات تعطى صفرا فى الحمل ما عدا العملية الأخيرة وهى جمع ١+١ التى تعطى مجموع أو ناتج صفر وحمل واحد . بتطبيق هذه القوانين يمكن إجراء عمليات الجمع على أى عددين كما فى شكل (٢-٤) الذى يبين عملية جمع الرقمين 011 و 011 والتى تعطى ناتج 110 . القاعدة هى كلما تم جمع واحد زائد واحد فإن الناتج يكون صفر فى نفس العمود ويتم حمل واحد إلى الخانة أو العمود التالى كما فى الشكل . فى شكل (٢-٤) حاصل جمع العمود الأول يعطى ناتج صفر وحمل واحد يجمع مع العمود الثانى . حاصل جمع العمود الثانى 1+1+1 يعطى واحد وحمل واحد للخانة الثالثة ، وحاصل جمع العمود الثالث

	الناتج	الحمل
0 + 0 =	0	0
0 + 1 =	1	0
1 + 0 =	1	0
1 + 1 =	0	1

شكل (٢-٣) القوانين الأساسية لعملية الجمع الثنائى

$$
\begin{array}{rl}
1\ 1\ \ & \leftarrow \text{الحمل} \\
0\ 1\ 1 & \\
+\ 0\ 1\ 1 & \\
\hline
1\ 1\ 0 &
\end{array}
$$

شكل (٢-٤) مثال لعمليات الجمع الثنائى

١+٠+٠ يعطى واحد وحمل صفر حيث تنتهى العملية . فى وجود الحمل من أى عمود للعمود التالى فإنك ستجمع ثلاث بتات وناتج الجمع لثلاث بتات موضح فى شكل (٢-٥) .

1	1	1	1	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
11	10	10	01	الحمل

شكل (٢-٥) الحمل وناتج الجمع لثلاث بتات

ثانيا: الطرح الثنائى

القوانين الأساسية للطرح موضحة فى شكل (٢-٦) . نلاحظ من هذا الشكل أن الاستلاف دائما صفر ما عدا الحالة التى يتم فيها طرح واحد من صفر حيث أنه فى هذه الحالة يكون الناتج واحد والاستلاف borrow واحد أيضا . لاحظ أنه عند استلاف واحد من عمود إلى العمود الذى على يمينه فإن هذا الواحد يكون باثنين (يكافئ عملية استلاف الواحد بعشرة فى النظام العشرى) . شكل (٢-٧) يوضح مثال لطرح الرقم ٠١١ من الرقم ١٠١ حيث كان الناتج هو ٠١٠ . فى العمود الأول من اليمين تم طرح واحد من واحد فكان الناتج صفرا . فى العمود الثانى تم طرح واحد من صفر لذلك لزم استلاف واحد باثنين (١٠) كما فى الشكل حيث تم طرح واحد من اثنين فكان الناتج واحد . فى العمود الثالث تم طرح صفر من صفر فكان الناتج صفرا وعلى ذلك كانت النتيجة النهائية هى ٠١٠ كما فى الشكل .

	الناتج	الاستلاف
$0 - 0 =$	0	0
$1 - 1 =$	0	0
$1 - 0 =$	1	0
$0 - 1 =$	1	1

شكل (٢-٦) القوانين الأساسية لعملية الطرح الثنائى

الاستلاف ⟵ 10

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 0 \end{array}$$

شكل (٢-٧) مثال لعمليات الطرح الثنائى

ثالثا: الضرب الثنائى

شكل (٢-٨) يبين العمليات الأساسية للضرب الثنائى . نلاحظ أن ناتج الضرب دائما صفر إلا عندما يكون الطرفين وحايد . عند ضرب أى رقمين نتبع نفس طريقة الضرب فى النظام العشرى حيث نضرب خانات المضروب فى المضروب فيه خانة بعد خانة مع الإزاحة ناحية اليمين بمقدار خانة ثم نقوم بالجمع كما فى شكل (٢-٩) الذى يبين عملية ضرب الرقمين ١٠١١ و١٠٠١ حيث كان الناتج هو ١١٠٠٠١١ .

	الناتج
$0 \times 0 =$	0
$0 \times 1 =$	0
$1 \times 0 =$	0
$1 \times 1 =$	1

شكل (٢-٨) القوانين الأساسية لعملية الضرب الثنائى

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\ 1001 \\ \hline 1011 \\ 0000 \\ 0000 \\ 1011 \\ \hline 1100011 \end{array}$$

شكل (٢-٩) مثال للضرب الثنائى

رابعا: القسمة الثنائية

القسمة فى النظام الثنائى تتم بنفس طريقة النظام العشرى . شكل (٢-١٠) يبين مثالا لذلك حيث تم قسمة الرقم ١١١٠ على الرقم ١٠ حيث كانت النتيجة تساوى ١١١ .

```
   111
10 |1110
   |10
    011
     10
     010
      10
      00
```
شكل (٢-١٠) مثال للقسمة الثنائية

٢-٤ المتمم الأحادى والمتمم الثنائى
Ones and twos complement

المتممات الأحادية والثنائية مفيدة جدا فى تمثيل الأرقام السالبة وفى إجراء العمليات الحسابية التى تتم داخل الحاسب . المتمم الأحادى لأى رقم نحصل عليه ببساطة عن طريق عكس كل واحد إلى صفر ، وكل صفر إلى واحد كما فى المثال التالى :

الرقم الثنائى	1 1 0 1 0 0 1
المتمم الأحادى	0 0 1 0 1 1 0

المتمم الثنائى لأى رقم ثنائى يمكن الحصول عليه بإضافة واحد للمتمم الأحادى لهذا الرقم كما فى المثال التالى :

الرقم الثنائى	1 1 0 1 0 0 1
المتمم الأحادى	0 0 1 0 1 1 0
إجمع ١مع المتمم الأحادى	+ 1
المتمم الثنائى	0 0 1 0 1 1 1

هناك طريقة بسيطة وسهلة للحصول على المتمم الثنائى فى خطوتين كما يلى :

١- ابدأ من ناحية اليمين للرقم المطلوب إيجاد المتمم الثنائى له و اكتب بتاته كما هى حتى أول واحد تقابله اكتبه كما هو أيضا .

٢- كل البتات بعد أول واحد إعكسها فتحصل على المتمم الثنائى .

كمثال على ذلك الرقم 10111000 :

١- من أقصى اليمين هناك ٣ أصفار مع أول واحد نكتبها كما هى كالتالى : 1000 .

٢- ثم كل البتات بعد ذلك يتم عكسها فنحصل على 01001000 وهو المتمم الثنائى للرقم المعطى .

كمثال آخر على ذلك نفترض الرقم 011 :

١- نبدأ من ناحية اليمين أول بت واحد نكتبها كما هى .

٣- ثم نعكس كل البتات بعد ذلك فنحصل على الرقم 101 الذى يمثل المتمم الثنائى للرقم المعطى .

٢-٥ الأرقام السالبة والأرقام الموجبة فى النظام الثنائى

لا تخلو العمليات الحسابية فى الحاسبات من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة أرقام قد تكون سالبة وقد تكون موجبة . فمثلا ما هى نتيجة جمع الرقمين (3-) + (9-) ، وهكذا فإن هناك حاجة ضرورية للتعبير عن الإشارة فى الأرقام الثنائية . بالطبع فإن العلامة (+) و (-) غير معرفة فى النظام الثنائى فما هو العمل ؟

فى النظام الثنائى تعتبر آخر بت فى الرقم من ناحية الشمال هى بت الإشارة . فإذا كانت هذه البت تساوى صفر فالرقم موجب وإذا كانت هذه البت تساوى واحد فالرقم سالب . بعد ذلك هناك ثلاث طرق للتعبير عن الرقم كما يلى :

النظام الأول: نظام مقدار الإشارة Sign magnitude

فى هذا النظام تعتبر خانة الإشارة هى الخانة التى فى أقصى يسار الرقم وباقى البتات تمثل مقدار هذا العدد . فمثلا الرقم 0101 ، فيه خانة الإشارة تساوى 0 فالرقم موجب وباقى الرقم هو 101 الذى يمثل القيمة 5 ، إذن فهذا الرقم عبارة عن +5 . بينما الرقم 1101 فيه خانة الإشارة بواحد والأرقام 101 تمثل 5 ، إذن فالرقم 1101 يمثل الرقم (-5) أى أن الفرق الوحيد بين الرقمين +5 ، -5 هو الواحد أو الصفر فى الخانة الموجودة فى أقصى اليسار . أى أنه في نظام مقدار الإشارة للتعبير عن الأرقام السالبة والموجبة ، فإن كل من الرقمين السالب والموجب يكون لهما نفس شكل البتات و يختلفان فقط في بت الإشارة .

النظام الثانى: نظام المتمم الأحادى

فى هذا النظام يمثل الرقم السالب بالمتمم الأحادى لنظيره الموجب فمثلا الرقم 0101 يمثل (+5) وعلى ذلك فالرقم 1010 يمثل الرقم (-5) .

النظام الثالث: نظام المتمم الثنائى

فى هذا النظام يمثل الرقم السالب بالمتمم الثنائى لنظيره الموجب . فمثلا الرقم 0101 يمثل الرقم (+5) والمتمم الثنائى له هو 1011 يمثل الرقم (-5) . نظام المتمم الثنائى هو الأكثر استخداما فى الأنظمة الرقمية .

مثال

ما هى قيمة الرقم 11000 والرقم 01011 فى كل نظام من الأنظمة السابقة ؟

فى النظام الأول نظام مقدار الإشارة: الرقم 11000 هو رقم سالب لأن آخر بت تساوى واحد مقداره $1 * 2^3 = 8$ وعلى ذلك فهذا الرقم هو (-8) بينما الرقم 01011 هو رقم موجب لأن آخر بت صفر و قيمته هى +11 .

فى نظام المتمم الأحادى: الرقم 11000 هو رقم سالب لأن آخر بت تساوى واحد وعلى ذلك فقيمة هذا الرقم هى المتمم الأحادى له وهى 00111 ، وعلى ذلك فإن الرقم 11000 يمثل الرقم (-7) . بينما الرقم 01011 فهو رقم موجب و قيمته هى (+11) .

فى نظام المتمم الثنائى: الرقم 11000 سالب لأن آخر بت تساوى واحد وقيمة الرقم هى المتمم الثنائى له 01000 وهى (-8) . أما الرقم 01011 فهو موجب و قيمته هى (+11) .

فى نظام المتمم الثنائى الرقم 11000 يمكن كتابته على الصورة :

$$11000 = -1 * 2^4 + 1 * 2^3$$
$$= -16 + 8 = -8$$

و الرقم 01011 يمكن كتابته على الصورة :

$$01011 = -0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 11$$

أى أن قيمة الرقم هى التمثيل الحقيقى للوحايد الموجودة فيه بما فى ذلك بت الإشارة سوى أن قيمة بت الإشارة تكتب سالبة . وهذه ميزة من مميزات استخدام المتمم الثنائي . إيجاد قيمة الرقم العشرية تحسب مباشرة بطريقة التحويل من ثنائي إلي عشرى العادية سوى أن بت الإشارة تكتب سالبة . أيضا من عيوب طريقة المتمم الأحادى أن الصفر (0000) متممه الأحادى (1111) أى أن هناك فرق بين (+0) و (-0) . بينما فى المتمم الثنائى فإن (0000) متممه الثنائى هو أيضا (0000) .

عندما يمثل رقم ثنائى بأربع خانات مثلا فإنه إذا كان هذا الرقم بدون إشارة فإن قيمة هذا الرقم ستتراوح بين الصفر و ٢^٤-١ = ١٥ . بينما إذا كان هذا الرقم بإشارة فإن قيمته تتراوح بين $-(2^{n-1})$ حتى $(2^{n-1}-1)$ أى $(-8 = -2^3)$ حتى $(2^3-1=7)$. لاحظ أن المدى لم يتغير سوى أنه فى حالة اعتبار الإشارة فإن الرقم يتراوح بين -٨ حتى +٧ . فى حالة ٨ خانات تتراوح قيمة الرقم بين صفر و ٢٥٥ فى حالة عدم اعتبار لإشارة ، وبين -١٢٨ حتى ١٢٧ فى حالة اعتبار الإشارة .

٢-٦ العمليات الحسابية على الأعداد ذات الإشارة

سنرى فى هذا الجزء كيف نجرى العمليات الحسابية المختلفة على الأعداد ذات الإشارة وسنقتصر على نظام المتمم الثنائى فقط لأنه النظام الشائع كما قلنا فى الأنظمة الرقمية عامة وأنظمة الحاسبات و المعالجات بصفة خاصة .

أولا: عملية الجمع

سنجرى العمليات فى هذا الجزء على أعداد من ٨ بت (١بايت) . هناك أربع احتمالات لطبيعة الأعداد التى سنجرى عليها عملية الجمع وهى كالتالى :

١- كلا العددين موجب .
٢- عدد موجب والآخر سالب و الموجب هو الأكبر .
٣- عدد موجب و الآخر سالب و السالب هو الأكبر .
٤- كلا العددين سالب .

سنأخذ كل حالة على حدة وسنسوق مثال لكل منها .

<u>جمع عددين كل منهما موجب :</u>

9	00001001
5 +	00000101 +
14	00001110

النتيجة موجبة كما نرى .

<u>جمع عددين أحدهما موجب والآخر سالب والموجب أكبر :</u>

9	00001001
+ (-5)	11111011 +
+ 4	1 00000100

النتيجة 4 + وهى كما نرى موجبة مع إهمال الحمل الأخير .

<u>جمع عددين أحدهما موجب والآخر سالب والسالب أكبر :</u>

(-9)	11110111
+ 5	00000101 +
- 4	11111100

النتيجة سالبة و بأخذ المتمم الثنائى له يعطى 00000100 (4 -) .

<u>كلا العددين سالب :</u>

-9	1 1 1 1 0 1 1 1
+(-5)	1 1 1 1 1 0 1 1 +
-14	1 1 1 1 1 0 0 1 0

النتيجة سالبة كما نرى (آخر بت تساوى ١) وبأخذ المتمم الثنائى للنتيجة بعد إهمال الحمل الأخير تعطى 00001110 وهى (14 -) .

خطأ الفيضان Over flow error

عند جمع عددان (فى الغالب كل منهما موجب أو كل منهما سالب) فإذا زادت النتيجة عن 127+ فإنه يحدث حمل على خانة الإشارة وتكون الإشارة فى هذه الحالة غير ممثلة تمثيلا صحيحا للنتيجة . كمثال على ذلك جمع العددين الآتيين :

125	0 1 1 1 1 1 0 1
58 +	0 0 1 1 1 0 1 0 +
+183	1 0 1 1 0 1 1 1

نجد أن بت الإشارة تساوى ١ مما يعنى أن النتيجة سالبة وهذا خطأ لأننا نجمع عددين موجبين لذلك يجب أن تكون النتيجة موجبة كما فى الجمع العشرى . هذا كما رأينا نتج عن جمع عددين نتيجتهما كانت أكبر من 127+ لذلك حصل حمل على خانة الإشارة فأفسدها . هذا الخطأ عندما يحدث تحذر منه الحاسبات .

<u>ثانيا: عملية الطرح</u>

عملية الطرح هى فى الأصل عملية جمع بعد تغيير إشارة المطروح . فمثلا (5-9) هى حاصل جمع (9) زائد (5-) . ومعروف أن الرقم (5-) هو المتمم الثنائى للرقم 5 . أيضا (5-)-9 هى حاصل جمع الرقمين (9) زائد (5-)− و هو ما يكافئ المتمم الثنائى للمتمم الثنائى للرقم 5 ، أى الرقم 5 الأصلى . لذلك يمكننا أن نخلص أن عملية الطرح هى عملية جمع المطروح منه زائد المتمم الثنائى للمطروح . يتضح ذلك من الأمثلة التالية :

8	0 0 0 0 1 0 0 0
-3	1 1 1 1 1 1 0 1 +
+5	0 0 0 0 0 1 0 1

-8	1 1 1 1 1 0 0 0
-3	1 1 1 1 1 1 0 1 +
-11	1 1 1 1 1 0 1 0 1

النتيجة سالبة و تساوى 00001011 وهى (11-) .

بالنسبة للضرب والقسمة يتم اتباع نفس الخطوات السابقة .

٢-٧ النظام الثمانى Octal system

يتكون نظام العد الثمانى من ثمانية أرقام هى :

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7

أى رقم أكبر من 7 يكتب فى أكثر من خانة كما يلى :

6 , 7 , 10 , 11 , 12 , ... , 15 , 16 , 17 , 20 , 21 , ... , 25 , 26 , 27 , 30 , 31 , ...

التحويل من النظام الثمانى إلى النظام العشرى

عملية التحويل هذه سهلة حيث أننا نضرب كل رقم فى وزن الخانة التى يوجد بها هذا الرقم فى النظام الثمانى . قاعدة العد فى النظام الثمانى هى ٨ ولذلك فإن أوزان الخانات ستكون كالتالى: 8^0 , 8^1 , 8^2 , 8^3 وهكذا . كمثال على ذلك :

$$(235)_8 = 2 * 8^2 + 3 * 8^1 + 5 * 8^0$$
$$= 2 * 64 + 3*8 + 5 = (157)_{10}$$

التحويل من النظام العشرى إلى النظام الثمانى

هنا أيضا تتم عملية التحويل عن طريق القسمة المتتابعة على الرقم ٨ كما فى المثال التالى :

	الباقى
$\frac{157}{8} = 19$	5
$\frac{19}{8} = 2$	3
$\frac{2}{8} = 0$	2

وعلى ذلك فالرقم الثمانى الناتج هو 235 .

بنفس الطريقة يمكن تحويل الكسور من النظام الثمانى إلى النظام العشرى عن طريق الضرب فى قوى الرقم ٨ السالبة وتحويل الكسور العشرية إلى كسور ثمانية عن طريق الضرب المتتالى فى ٨ ونعتبر دائما الناتج الصحيح من عملية الضرب كما فعلنا مع الأعداد الثنائية وكما فى الأمثلة التالية :

$$(0.35)_8 = 3 * 8^{-1} + 5 * 8^{-2}$$
$$= 0.453_{10}$$

$$(0.56)_{10} = \quad \begin{array}{r} 0.56 \\ 8\ x \\ \hline 4.48 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 0.48 \\ 8\ x \\ \hline 3.\ 84 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 0.84 \\ 8\ x \\ \hline 6.72 \end{array} \nearrow$$

$$= 0.436..._8$$

التحويل من ثمانى إلى ثنائى و العكس

كل رقم فى النظام الثمانى يمكن تمثيله بثلاث بتات فى النظام الثنائى كما فى جدول ٢-٢ . يمكن استغلال ذلك فى تحويل أى رقم فى النظام الثمانى إلى مكافئ له فى النظام الثنائى عن طريق وضع كل رقم ثمانى بما يكافئه فى النظام الثنائى كما فى المثال التالى :

$$(354)_8 = 011\ 101\ 100_2$$

كما يمكن تحويل أى عدد فى النظام الثنائى إلى مكافئ له فى النظام الثمانى عن طريق تقسيمه إلى مجاميع كل منها ٣ بت ونكتب الرقم الثمانى المكافئ لكل مجموعة كما يلى :

$1011100101 = 1\ 011\ 100\ 101_2 = 1345_8$

النظام الثمانى	النظام الثنائى		
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

جدول ٢-٢

٢-٨ نظام العد الستعشرى
Hexadecimal system

فى النظام الستعشرى يوجد ١٦ رقما وهى كالتالى :

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

فى هذا النظام نجد أن أشكال الأرقام حتى ٩ نفدت ، لذلك تم استخدام باقى الأشكال الستة عشرة فى صورة حروف وهى الحروف A و B و C و D و E و F . بعد الرقم F يبدأ استخدام خانات إضافية لتمثيل الأعداد حيث كل خانة يكوم لها وزن وهذا الوزن هو قوى العدد ١٦ وهى كالتالى 16^0 و 16^1 و 16^2 و 16^3 وهكذا . يمكن أن نعد فى النظام الستعشرى كما يلى :

0,1,...,9,A,B,C,D,E,F,10,11,12,...,19,1A,1B,...,1F,20,21,...,29,2A,...,2F,30,31,...,39,3A ,...3F,40,...

للتحويل من النظام الستعشرى للعشرى نتبع الطرق السابقة وهى الضرب فى قوى العدد ١٦ كما يلى :

$$3F2_{16} = 3 * 16^2 + 15 * 16^1 + 2 * 16^0$$
$$= 1010_{10}$$

وللتحويل من النظام العشرى إلى النظام الستعشرى نتبع نظام القسمة المتتابعة على ١٦ كما يلى :

	الباقى
$\frac{323}{16} = 20$	3
$\frac{20}{16} = 1$	4
$\frac{1}{16} = 0$	1

$323_{10} = 143_{16}$

بالنسبة للكسور نتبع معها نفس ما اتبعناه فى الأنظمة السابقة .

الأرقام الستعشرية	الأرقام الثنائية			
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
A	1	0	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	1	1	0	1
E	1	1	1	0
F	1	1	1	1

جدول ٢-٣

أى عدد ستعشرى يمكن تمثيله فى ٤ خانات ثنائية كما فى جدول ٢-٣ . ويمكن استغلال ذلك فى عملية التحويل من ستعشرى إلى ثنائى والعكس كما فى الأمثلة التالية :

$4F2_{16} = 010011110010_2$

$1A49_{16} = 1101001001001_2$

لاحظ أنه باستخدام النظام الثمانى والستعشرى يكون هناك

توفير فى عدد الخانات المستخدمة وهذه ميزة من استخدام هذه الأنظمة . انظر مثلا إلى العدد $١٢٤_{١٠}$ فى النظام العشرى وتمثيله فى الأنظمة المختلفة :

$$124_{10} = 1111100_2$$
$$= 174_8$$
$$= 7C_{16}$$

نلاحظ أن العدد 124_{10} مكون من ٣ خانات وفى النظام الثنائى يحتاج إلى ٧ خانات وفى النظام الثمانى احتاج إلى ٣ خانات وفى النظام الستعشرى احتاج إلى خانتين فقط .

٢ – ٩ الأرقام العشرية المكودة ثنائيا
Binary Coded Decimal (BCD) Numbers

الأرقام العشرية المكودة ثنائيا هى طريقة لتمثيل الأرقام العشرية صفر حتى تسعة فى صورة أكواد ثنائية . بالطبع لكى يتم ذلك فإننا سنحتاج لأربعة بتات حتى يمكن تمثيل هذه الأرقام . جدول ٢–١ يبين الأرقام العشرية صفر حتى ٩ والكود الثنائى لكل منها . هذه الطريقة لتمثيل الأرقام تكون مفيدة جدا بالذات فى إدخال البيانات إلى الحاسب من خلال لوحة المفاتيح أو إظهار هذه الأرقام على شاشة عرض أو مظهر وذلك لأننا نعيش فى عالم من الأرقام العشرية لا يكتب أو يقرأ إلا الأرقام العشرية .

التحويل من النظام العشرى إلى العشرى المكود ثنائيا والعكس

إن هذه تعتبر عملية سهلة جدا ، حيث يتم التعبير عن كل رقم عشرى بالعدد الثنائى المقابل له من أربع بتات . فمثلا الرقم ٥٥ سيكون 0101 0101 و العدد ٩٣ سيكون 10010011 وهكذا . بنفس السهولة تتم عملية تحويل الأرقام العشرية المكودة ثنائيا إلى الصورة العشرية عن طريق تقسيم أى رقم إلى مجموعات من ناحية اليمين كل منها من ٤ بت ونكتب المكافئ العشرى لكل مجموعة كما يلى :

349 = 001101001001
158 = 1 0101 1000

وهكذا .

عمليات الجمع على الأرقام العشرية المكودة ثنائيا

سننفذ عمليات الجمع فقط هنا وسنترك باقى العمليات (الطرح والضرب والقسمة) لأنها كلها يمكن أن تحول إلى عمليات جمع . عند جمع رقمين من هذا النوع ، فإننا نتبع نفس قوانين الجمع على الأرقام الثنائية التى تم استخدامها من قبل . إذا كانت نتيجة الجمع أقل من ٩ فإنها ستكون نتيجة صحيحة ومحققة . المشكلة هى إذا كانت نتيجة الجمع أكبر من ٩ ، أو حصل حمل من الخانة الرابعة مثلا إلى خانة تالية ، فى هذه الحالة فإن الرقم الناتج لا يمثل النتيجة الصحيحة لعملية الجمع . فى هذه الحالة نضيف الرقم (٠١١٠) ٦ إلى النتيجة حتى تصبح رقما عشريا مكود ثنائيا صحيحا . الأمثلة التالية توضح ذلك :

00100011		23	0011	3
00010101 +	⇐	15 +	0100 + ⇐	4 +
00111000		38	0111	7

0100 0101 0000   450

0100 0101 0000	450
0100 0001 0111 +	417 +
1000 0110 0111	867

فى هذه الأمثلة كانت نتيجة جمع أى رقمين دائما أقل من ٩ لذلك كانت نتيجة عملية الجمع دائما صحيحة . الآن انظر إلى هذه الأمثلة :

	1001	9
	0100 +	4 +
النتيجة ليست رقم عشرى مكود صحيح	1101	13
لذلك لزم إضافة الرقم ٦	0110 +	
	1 0011	

	1001	9
	1001 +	9 +
هناك حمل من الخانة الرابعة	1 0010	18
أضف ٦ للنتيجة	0110 +	
	1 1000	

	0001 0110	16
	0001 0101 +	15 +
المجموعة اليمنى ليست صحيحة	0010 1011	31
لذلك لزم إضافة ٦	0110 +	
	0011 0001	

والمثال الأخير على ذلك هو :

	0110 0111	67
	0101 0011+	53 +
كل من المجموعتين ليس رقما صحيحا	1011 1010	120
لذلك لزم إضافة ٦ لكل منهما	0110 0110 +	
	1 0010 0000	

نخلص من ذلك أنه كلما كانت النتيجة ليست فى صورة الرقم العشرى المكود ثنائيا الصحيحة (أكبر من تسعة) أو أن هناك حمل من الخانة الرابعة ، فإنه يلزم إضافة ٦ لهذه المجموعة لضبطها ثنائيا .

٢-١٠ تمارين

١- ما هى قيمة الرقم ٧ فى كل من الأرقام العشرية التالية :
٤٨٧ ، ٥٧٦،١٢ ، ٨٤٥،٦٧٣ ، ٧٠٠٠،٦٧

٢- حول الأرقام الثنائية التالية إلى مكافئها العشرى :
10100, 1100.101, 01001.001, 1110.1111, 101010.11011

٣- ما هو أكبر رقم يمكن الحصول عليه من رقم ثنائى مكون من :
٤خانات ، ٧ خانات ، ١٠ خانات ، ١١ خانة ، ١٦ خانة .

٤- حول كل من الأرقام العشرية التالية إلى الصورة الثنائية :
٥٥ ، ٧٧٧ ، ٦٥٣ ، ٤٥،٤٣ ، ٣٠،١

٥- نفذ عمليات الجمع والطرح والضرب على كل من أزواج الأرقام التالية :
00011 و 00111 ، 11111 و 10001 ، 100001 و 011110

٦- أكتب المتمم الأحادى والمتمم الثنائى لكل مما يأتى :
1100 ، 1001 ، 110111 ، 00011 ، 110110111 .

٧- ضع كل من الأعداد التالية فى صورة ثنائية من ٨ بتات مستخدما نظام مقدار الإشارة مرة ونظام المتمم الأحادى مرة ونظام المتمم الثنائى مرة أخرى :
+٢٥ ، -٦٦ ، -١٢٣ ، -٩٩ ، +٥٥ .

٨- ما هو المكافىء العشرى لكل من الأرقام الثنائية التالية ، اعتبر أن هذه الأرقام ممثلة بنظام مقدار الإشارة مرة ونظام المتمم الأحادى مرة ونظام المتمم الثنائى مرة أخرى :
10111111 ، 10011001 ، 00011100 ، 01110000 ، 11110111 .

٩- نفذ عملية الجمع على أزواج الأرقام الموجودة فى تمرين ٥ مستخدما المتمم الثنائى .

١٠- حول كل من الأرقام الثمانية التالية إلى النظام العشرى مرة وإلى النظام الثنائى مرة أخرى :
٣٣٥ ، ٣٧٥ ، ١١ ، ١١١ ، ٧٧٧ .

١١- حول الأرقام العشرية الموجودة فى تمرين ١ إلى الصورة الثمانية

١٢- حول الأرقام الثنائية فى تمرين ٦ إلى الصورة الثمانية .

١٣- حول كل من الأرقام الستعشرية التالية إلى النظام العشرى مرة وإلى النظام الثنائى مرة أخرى :
3F4 ، FF1 ، 5A ، B33 .

١٤- حول الأرقام العشرية الموجودة فى تمرين ١ إلى الصورة الستعشرية

١٥- حول الأرقام الثنائية فى تمرين ٦ إلى الصورة الستعشرية .

١٦- حول الأرقام العشرية التالية إلى الصورة العشرية المكودة ثنائيا :
١٠ ، ٣٤٤ ، ٥٥٥ ، ١٢٤ ، ١٠٠ ، ١٥٦ ، ١٠٤٥ .

١٧- حول كل من الأرقام المكودة ثنائيا التالية إلى الصورة العشرية :
10011001 ، 011100110001 ، 1001100000001000 .