الفصل الرابع

٤

الجبر البولينى وتبسيط المعادلات المنطقية

Boolean Algebra And Logic Simplification

٤ – ١ مقدمة

يرجع مسمى الجبر البولينى إلى العالم الإنجليزى جورج بول George Boole الذى كان أول من وضع أساسيات ونظريات الجبر المنطقى فى سنة ١٨٥٤ . الجبر البولينى هو مجموعة من النظريات والقوانين التى تسهل التعامل مع الدوائر المنطقية . ونحن فى هذا الفصل سنغطى كل هذه القوانين والنظريات . من خلال هذا الفصل سنرى كيف نعبر عن أى دائرة منطقية بمعادلة جبرية ، ثم نقوم بتبسيط هذه الدائرة إلى أبسط صورة ممكنة ، ثم نعد جدول حقيقة لهذه المعادلة ، ثم نبدأ فى بناء هذه الدائرة .

٤ – ٢ العمليات والتعبيرات المنطقية

الجبر المنطقى هو حساب الأنظمة الرقمية ، لذلك لابد من تعريف العمليات المستخدمة فى الجبر المنطقى . ولقد سبق دراسة هذه العمليات من خلال البوابات المنطقية مثل AND و OR و NOT . هذا الفصل سيغطى ذلك بتفصيل أكثر مع إضافة معلومات جديدة .

٤ – ٢ – ١ المتغير المنطقى Logic Variable

المتغير المنطقى هو رمز يستخدم لتمثيل كمية منطقية . هذا المتغير لا يأخذ إلا واحدة فقط من قيمتين وهى الصفر (0) أو الواحد (1) .

٤ – ٢ – ٢ عملية العكس Complement

بما أن المتغير المنطقى لا يأخذ إلا واحدة من قيمتين ، فإن عملية عكس أى متغير ستكون هى استبدال قيمة المتغير الحالية بالقيمة الأخرى . فإذا كان متغير معين يساوى واحد ، فإن عكسه سيكون هو جعل هذا المتغير يساوى صفر . والعكس إذا كان أى متغير يساوى صفر ، فإن عكسه يكون هو جعل هذا المتغير يساوى واحد . عملية العكس يرمز لها بوضع شرطة أو خط فوق المتغير هكذا $\overline{A}$ ، فى هذه الحالة إذا كان A=1 فإن $\overline{A}=0$.

٤ – ٢ – ٣ عملية الجمع المنطقى Logic addition

عملية الجمع المنطقى هى عملية الأور OR والتى تعتمد على القوانين الآتية : 0=0+0 و 0+1=1 و 1+0=1 و 1+1=1 . فى الجبر المنطقى تعرف الكمية المجمعة sum term على أنها الكمية المكونة من مجموعة متغيرات مجموعة مع بعضها مثل : A+B أو $\overline{A}$+B أو A+B+C وهكذا . الكمية المجمعة تكون واحد إذا كان واحد على الأقل من أجزائها يساوى واحد . والكمية المجمعة تكون صفرا فقط إذا كان كل أجزائها تساوى أصفارا .

٤ – ٢ – ٤ عملية الضرب المنطقى Logic multiplication

الضرب المنطقى يقابل عملية الآند AND والتى تعتمد على القوانين الآتية : 0.0=0 و 0.1=0 و 1.0=0 و 1.1=1 . فى الجبر المنطقى تعرف الكمية المضروبة multiplication term على أنها الكمية المكونة من مجموعة متغيرات مضروبة فى بعضها مثل : AB و ABCD و $\overline{A}$BC . الكمية المضروبة تكون صفر إذا كان أى واحد من أعضائها يساوى صفر ، بينما تكون واحد فى حالة واحدة فقط وهى إذا كان كل أعضائها تساوى وحايد .

مثال ٤-١

ما هى قيمة A, B, C, D التى تجعل كل كمية منطقية فيما يلى تساوى واحد مرة وصفر مرة :

$\overline{A}B\overline{C}$ و $\overline{A}+\overline{C}+B$

بفحص الكمية الأولى سنجد أنها لكى تساوى صفر لابد أن يكون A=1 و C=1 و B=0 . ولكى تكون واحد هناك أكثر من حالة حيث يكفى أن تكون B=1 مثلا أو A=0 أو C=0 مهما كانت قيم المتغيرات الأخرى فى كل حالة .

بفحص الكمية الثانية سنجد أنها لكى تكون واحد لابد أن يكون A=0 و B=1 و C=0 . ولكى تكون صفر فإنه يكفى أن تكون A=1 أو B=0 أو C=1 مهما كانت قيم المتغيرات الأخرى فى كل حالة .

٤-٣ قوانين الجبر المنطقى أو البولينى

هناك بعض القوانين المهمة التى يجب ألا ننساها كما فى العمليات الحسابية العادية . سنقدم فى هذا الجزء كل هذه القوانين بالشرح والأمثلة .

٤-٣-١ قانون التبادل Commutative law

ينص هذا القانون على أنه سواء فى حالة الجمع أو حالة الضرب ، فإن ترتيب المتغيرات ليس له أى أهمية كما فى الأمثلة التالية :

A+(B+C)=(A+B)+C (٤-١)

A.(B.C)=(A.B). (٤-٢)

٤-٣-٢ قانون الضم أو التجميع Associative law

ينص هذا القانون على أنه عند جمع أو ضرب أى عدد من المتغيرات فإنه يمكن ضم أو تجميع هذه المتغيرات بأى كيفية دون التأثير على النتيجة كما يلى :

A+(B+C) = (A+B)+C (٤-٣)

A.(B.C)=(A.B).C (٤-٤)

٤-٣-٣ قانون التوزيع Distributive Law

ينص هذا القانون على أن ضرب أى متغير فى مجموع متغيرين يساوى مجموع حاصل ضرب هذا المتغير فى كل من المتغيرين على حدة ويتضح ذلك من المثال التالى :

A(B+C)=AB+AC (٤-٥)

جدول ٤-١ يبين ١٢ قانونا مفيدة جدا فى التعامل مع التعبيرات والمعادلات المنطقية . هذه القوانين يمكن إثباتها ببساطة بالتعويض فى كل من طرفى المعادلة بقيم معينة للمتغيرات سواء واحد أو صفر والتأكد من أن كل من طرفى المعادلة يعطى نفس النتيجة . فقط القوانين ١٠ و ١١ و ١٢ فى هذا الجدول هى التى ستحتاج لعملية استنتاج كما يلى :

<u>القانون ١٠</u>

A+AB=A(1+B)

=A.1

=A

ويمكن اثبات ذلك أيضا بعمل جدول حقيقة لكل من طرفى القانون والتأكد من أن طرفى القانون متساويين .

جدول ٤-١ قوانين الجبر المنطقى

1	$A+0=A$
2	$A+1=1$
3	$A.0=0$
4	$A.1=A$
5	$A+A=A$
6	$A+\overline{A}=1$
7	$A.A=A$
8	$A.\overline{A}=0$
9	$\overline{\overline{A}}=A$
10	$A+AB=A$
11	$A+\overline{A}B=A+B$
12	$(A+B)(A+C)=A+BC$

القانون ١١

$$\mathbf{A+\overline{A}B=A+B}$$

$$\begin{aligned}A+\overline{A}B&=(A+AB)+\overline{A}B\\&=(AA+AB)+\overline{A}B\\&=AA+AB+A\overline{A}+\overline{A}B\\&=(AA+A\overline{A})+(AB+\overline{A}B)\\&=(A+\overline{A})A+(A+\overline{A})B\\&=A+B\end{aligned}$$

حاول اثبات هذا القنون أيضا باستخدام جدول الحقيقة .

القانون ١٢

$$\mathbf{(A+B)(A+C)=A+BC}$$

$$\begin{aligned}&=AA+AC+AB+BC\\&=A(1+C)+AB+BC\\&=A.1+AB+BC\\&=A(1+B)+BC\\&=A.1+BC\\&=A+BC\end{aligned}$$

حاول اثبات هذا القانون أيضا باستخدام جدول الحقيقة .

٤-٤ نظريات ديمورجان Demorgans Theorems

ديمورجان هو عالم رياضيات أضاف نظريتين أساسيتين لنظريات الجبر المنطقى . هاتان النظريتان يمكن كتابتهما لمعادلات من متغيرين كما يلى :

$$\overline{XY}=\overline{X}+\overline{Y} \qquad (٤-٦)$$

$$\overline{X+Y}=\overline{X}\,\overline{Y} \qquad (٤-٧)$$

تنص هذه النظرية على أن عكس مضروب أى عدد من المتغيرات يساوى مجموع العكس لهذه المتغيرات كما فى المعادلة (٤-٦) . كما أن عكس مجموع أى عدد من المتغيرات يساوى مضروب العكس لهذه المتغيرات كما فى المعادلة (٤-٧) . يمكن اثبات المعادلتين (٤-٦) و (٤-٧) باستخدام جداول الحقيقة لكل من الطرفين فى كل معادلة . نظريات ديمورجان يمكن تطبيقها على أى عدد من المتغيرات وليست مقتصرة على متغيرين فقط .

مثال ٤-٢

طبق نظريات ديمورجان على التعبيرين $\overline{WXYZ}$ و $\overline{W+X+Y+Z}$. بالنسبة للتعبير الأول يمكن كتابته كما يلى :

$$\overline{WXYZ}=\overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$$

وأما التعبير الثانى فيمكن كتابته كما يلى :

$$\overline{W+X+Y+Z}=\overline{W}.\overline{X}.\overline{Y}.\overline{Z}$$

يمكن تطبيق نظريات ديمورجان على تعبيرات أكثر تعقيدا كما فى التعبير التالى :

$$\overline{(AB+C)(A+BC)}$$

يمكن النظر لهذا التعبير على أنه مكون من متغيرين ، الأول هو القوس الأول ، والثانى هو القوس الثانى . بتطبيق نظرية ديمورجان على الأقواس كمتغيرات نحصل على :

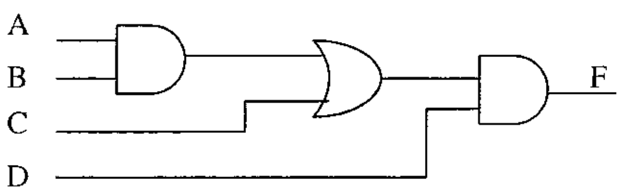
$$\overline{(AB+C)(A+BC)} = \overline{(AB+C)} + \overline{(A+BC)}$$

حيث تم استبدال معكوس حاصل ضرب القوسين بمجموع معكوس كل من القوسين . الآن يمكن تطبيق نظرية ديمورجان على ما بداخل كل قوس حيث كل عملية جمع تستبدل بحاصل ضرب المعكوس ، وكل ضرب تستبدل بمجموع المعكوس كما يلى :

$$\overline{(AB+C)} + \overline{(A+BC)} = (\overline{A}+\overline{B}).\overline{C} + \overline{A}.(\overline{B}+\overline{C})$$

وهذا آخر ما يمكن عمله بنظرية ديمورجان لهذا المثال . بالطبع قد يمكن تبسيط هذا التعبير ، ولكن هذا يتم باستخدام طرق سيتم شرحها فى الأجزاء القادمة .

٤-٥ الحصول على المعادلة المنطقية لأى دائرة منطقية



شكل (٤-١) المعادلة المنطقية التى تمثل هذه الدائرة المنطقية هى : F=(AB+C)D

عملية الحصول على المعادلة المنطقية التى تمثل دائرة منطقية معينة تعتبر عملية سهلة . بالنظر للدائرة الموجودة فى شكل (٤-١) فإننا نبدأ من أقصى اليسار ونحسب خرج كل بوابة متجهين ناحية اليمين إلى أن نصل إلى الخرج الأخير . حيث نلاحظ من هذا الشكل أن الخرج F سيكون حاصل ضرب المتغيرين A و B مجموعا مع C والكل مضروبا فى المتغير D ، ويمكن كتابة الخرج F كما يلى :

F=(AB+C)D (٤-٨)

جدول ٤-٢ جدول الحقيقة للدائرة الموجودة فى شكل (٤-١)

الدخل				الخرج
D	C	B	A	F=(AB+C)D
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

٤-٦ الحصول على جدول الحقيقة من المعادلة المنطقية

بمجرد الحصول على المعادلة المنطقية يمكن وضع جدول الحقيقة لهذه المعادلة أو هذه الدائرة . جدول الحقيقة يمثل فى أحد جوانبه جميع الدخول الخاصة بالدائرة وفى الجانب الآخر مخارج الدائرة . للحصول على هذا الجدول يتم تمثيل جميع الحالات الممكنة للمداخل ، وفى المقابل لكل حالة يتم حساب الخرج تبعا لقيم المداخل فى هذه الحالة . كمثال على ذلك سنكتب جدول الحقيقة للدائرة الموجودة فى شكل (٤-١) . هذه الدائرة لها ٤ مداخل (,A, B, C

D) وخرج واحد هو الخرج F . لذلك فإن جميع الحالات الممكنة لجميع المداخل من وحايد وأصفار ستكون $2^4=16$ ، أى أن هذا الجدول سيحتوى ١٦ صفا كما فى جدول ٤-٢ .

٤-٧ تبسيط المعادلات المنطقية

قبل محاولة بناء أو تحقيق أى معادلة منطقية باستخدام البوابات المنطقية المعروفة ، لابد من محاولة تبسيط هذه المعادلات فقد توفر الكثير من البوابات ، وقد تحصل على دائرة أكثر بساطة . سنرى فى هذا الجزء كيفية تبسيط هذه المعادلات باستخدام قوانين ونظريات الجبر المنطقى التى رأيناها فى هذا الفصل . لذلك فإنه لكى نستخدم هذه الطريقة لابد من المعرفة الجيدة لهذه القوانين وهذه النظريات . من عيوب هذه الطريقة أنها ليست خطوات محددة يتم اتباعها بالترتيب ، ولكنها كما قلنا تعتمد بالدرجة الأولى على المعرفة الجيدة بالقوانين السابقة . كما أن هناك عيب آخر وهو أن الصورة المبسطة التى قد تصل إليها ليس هناك أى تأكيد على أنها أبسط صورة ، ولكن قد يستطيع شخص آخر الحصول على صورة أبسط لأنه أمهر فى استخدام هذه القوانين . لكى نرى كيف نتبع هذه الطريقة سنسوق المثال التالى لنرى من خلاله أهمية تبسيط أى معادلة قبل محاولة بناؤها :

مثال ٤-٣

بسط المعادلة التالية إلى أبسط صورة ممكنة :

$F=(A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\overline{B})C$

١- فك القوس الداخلى باستخدام قانون التوزيع :

$F=(A\overline{B}C+A\overline{B}BD+\overline{A}\overline{B})C$

٢- لاحظ أن الكمية الثانية داخل القوس تحتوى المضروب $\overline{B}B$ وهذه الكمية تبعا للقانون الثامن فى جدول ١ تساوى صفر . لذلك فإن المعادلة تؤول إلى :

$F=(A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B})C$

٣- طبق قانون التوزيع مرة أخرى على المعادلة السابقة للتخلص من القوس :

$F=A\overline{B}CC+\overline{A}\overline{B}C$

٤- بتطبيق القانون رقم ٧ فى جدول ١ نجد أن CC=C ، لذلك نعيد كتابة المعادلة السابقة كما يلى :

$F=A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C$

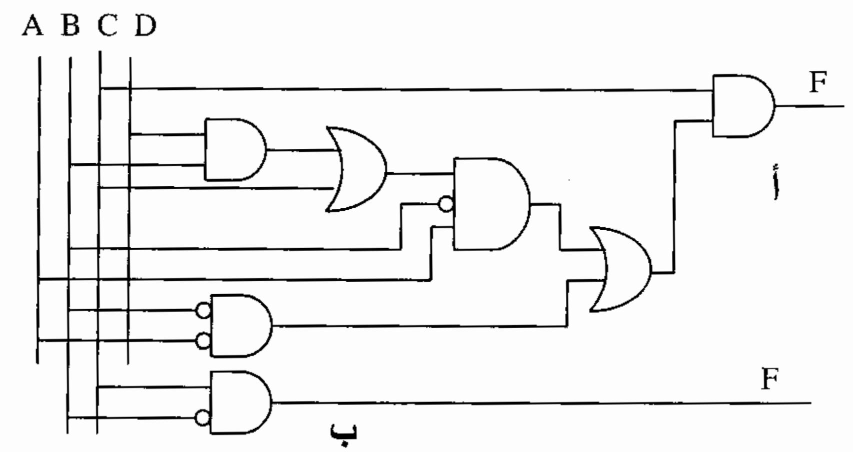
٥- من المعادلة السابقة يمكن أن نأخذ الكمية $\overline{B}C$ كعامل مشترك :

$F=\overline{B}C(A+\overline{A})$

٦- بتطبيق القانون رقم ٦ فى جدول ١ نجد أن $A+\overline{A}=1$. وعلى ذلك فإن المعادلة السابقة تؤول إلى الكمية

$F=\overline{B}C$

وهذا أقصى ما يمكن الوصول إليه من اختصار ، وهذا بالطبع اختصارا كبيرا إذا ما قورن بالمعادلة الأصلية . شكل (٤-٢أ،ب) يبين بناء المعادلة الأصلية (أ) والمعادلة المختصرة (ب) حتى نقدر مدى فائدة محاولة اختصار أى معادلة قبل بناؤها فقد يكون فيها التوفير الكثير كما رأينا . المعادلة المختصرة تحتاج لبوابة AND واحدة ، بينما الدائرة الأصلية تحتاج إلى ستة بوابات . هذا مع إهمال بوابات العكس فى كل حالة . اكتب جدول الحقيقة لكل من الصورتين الأصلية والمختصرة وتأكد من أنهما سيعطيان نفس النتائج .

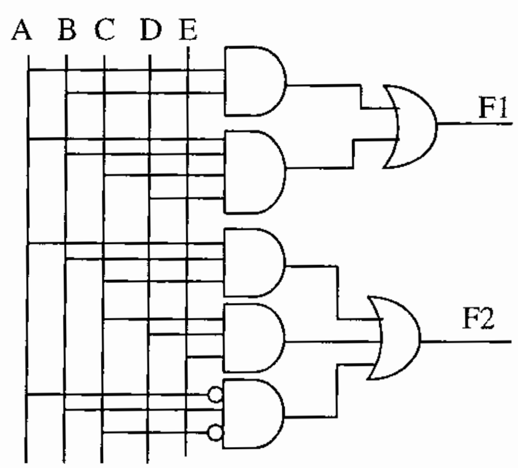


شكل (٤-٢) بناء الدائرة المنطقية الأصلية والمختصرة

٤-٨ الصور القياسية للمعادلات المنطقية

هناك صورتان من الصور القياسية التى يمكن أن نضع أى معادلة منطقية عليها . الصورة الأولى هى صورة مجموع المضاريب ، والصورة الثانية هى صورة مضروب المجاميع . وضع أى معادلة فى واحدة من هذه الصور يسهل عملية اختصار وبناء هذه المعادلات كما سنرى .

٤-٨-١ صورة مجموع المضاريب Sum of product form



شكل (٤-٣) بناء صورة مجموع المضاريب القياسية

فى هذه الصورة تكون المعادلة فى صورة كميات ، كل منها عبارة عن مضروب AND لمجموعة متغيرات ، وهذه الكميات مجمعة OR مع بعضها . كمثال على ذلك انظر التعبيرات الآتية :

$F1=AB+ABCD$

$F2=ABC+CDE+\bar{A}B\bar{C}$

عند بناء أى معادلة موضوعة فى صورة مجموع مضاريب فإن الدائرة المنطقية الناتجة تتكون من مجموعة من بوابات AND كل منها تمثل أحد الكميات المضروبة ، وكل هذه البوابات مجمعة فى بوابة OR واحدة كما فى شكل (٤-٣) الذى يبين بناء كل من المعادلتين السابقتين . الدائرة المبينة فى شكل (٤-٣) تسمى دائرة آند أور AND-OR circuit . باستخدام قوانين ونظريات الجبر المنطقى يمكن وضع أى معادلة فى صورة مجموع مضاريب . فى الصورة القياسية لمجموع المضاريب يجب أن تكون كل كمية من الكميات المضروبة ممثلة لكل متغيرات المعادلة . فمثلا المعادلة F1 السابقة ليست

معادلة مجموع مضاريب قياسية لأن هذه المعادلة مكونة من ٤ متغيرات هى A, B, C, D والكمية الأولى تحتوى متغيرين فقط هما A, B لذلك فهذه المعادلة ليست قياسية كما قلنا . لاحظ أن ما يهمنا هنا هو تمثيل كل المتغيرات فى كل الكميات المضروبة ، ونعنى بتمثيل المتغير هنا هو إما المتغير أو عكسه . لتحويل أى معادلة إلى الصورة القياسية نضرب الكمية الغير قياسية فى مجموع المتغير الناقص وعكسه ثم نفك هذا المجموع إلى كميتين . يتضح ذلك من المثال التالى :

مثال ٤ – ٤

ضع المعادلة F1 السابقة فى صورة معادلة مجموع مضاريب قياسية . المعادلة F1 هى :

$F1=AB+ABCD$

الكمية الأولى AB هى الكمية الغير قياسية ، حيث أن المتغيرين C و D غير ممثلين فيها . لذلك سنضرب هذه الكمية أولا فى الكمية $\overline{C}+C$ كما يلى : (لاحظ أن الكمية $\overline{C}+C=1$)

$F1=AB(C+\overline{C})+ABCD$

ثم نفك القوس فنحصل على المعادلة التالية :

$F1=ABC+AB\overline{C}+ABCD$

هذه المعادلة لازالت غير قياسية لغياب المتغير D فى أول كميتين . للحصول على الصورة القياسية نكرر الخطوتين السابقتين كما يلى :

$F1=ABC(D+\overline{D})+AB\overline{C}(D+\overline{D})+ABCD$

ومنه نحصل على :

$F1=ABCD+ABC\overline{D}+AB\overline{C}D+AB\overline{C}\,\overline{D}+ABCD$

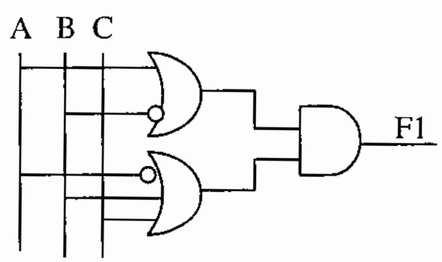
وهذه هى صورة مجموع المضاريب القياسية التى نبحث عنها للمعادلة F1 .

٤–٨–٢ صورة مضروب المجاميع القياسية Product of sum form

فى هذه الصورة تكون المعادلة فى صورة كميات مضروبة فى بعضها (AND) ، كل منها عبارة عن مجموع (OR) لمجموعة متغيرات . كمثال على ذلك انظر التعبيرات الآتية :

$F1=(A+\overline{B})(\overline{A}+B+C)$

$F2=(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+C+D)$



شكل (٤–٤) بناء صورة مجموع المضاريب القياسية

عند بناء أى معادلة موضوعة فى صورة مضروب مجاميع فإن الدائرة المنطقية الناتجة تتكون من مجموعة من بوابات OR كل منها تمثل أحد الكميات المجموعة ، وكل هذه البوابات مجمعة فى بوابة AND واحدة كما فى شكل (٤–٤) الذى يبين بناء المعادلة الأولى F1 . الدائرة المبينة فى شكل (٤–٤) تسمى دائرة أور آند OR-AND circuit . باستخدام قوانين ونظريات الجبر المنطقى يمكن وضع أى معادلة فى صورة مضروب مجاميع .

فى الصورة القياسية لمضروب المجاميع يجب أن تكون كل كمية من الكميات المجمعة ممثلة لكل متغيرات المعادلة . فمثلا المعادلة F1 السابقة ليست معادلة مضروب مجاميع قياسية لأن هذه المعادلة مكونة من ٣ متغيرات هى A, B, C والكمية الأولى تحتوى متغيرين فقط هما $\overline{B}$ و A لذلك فهذه المعادلة ليست قياسية كما قلنا . لاحظ أن ما يهمنا هنا هو تمثيل كل المتغيرات

فى كل الكميات المجمعة ، ونعنى بتمثيل المتغير هنا هو إما المتغير أو عكسه . لتحويل أى معادلة إلى الصورة القياسية نضيف المتغير الناقص مضروبا فى عكسه إلى الكمية الغير قياسية وهذا بالطبع لن يؤثر على هذه الكمية لأنه تبعا للقانون ٨ فى جدول ٤-١ فإن حاصل ضرب أى متغير فى عكسه يساوى صفر . بعد ذلك نستخدم القانون ١٢ فى نفس الجدول الذى ينص على $A+BC=(A+B)(A+C)$ وبذلك تتحول الكمية الغير قياسية إلى كميتين قياسيتين ، يتضح ذلك من المثال التالى :

مثال ٤-٥

ضع المعادلة F1 السابقة فى صورة معادلة مضروب مجاميع قياسية . المعادلة F1 هى :

$F1=(A+\overline{B})(\overline{A}+B+C)$

الكمية الأولى $A+\overline{B}$ هى الكمية الغير قياسية ، حيث أن المتغير C غير ممثل فيها . لذلك سنضيف الكمية $\overline{C}C$ والتى تساوى صفر إلى الكمية الغير قياسية كما يلى :

$F1=(A+\overline{B}+C\overline{C})(\overline{A}+B+C)$

ثم نستخدم القانون ١٢ كما ذكرنا لنحصل على المعادلة التالية :

$F1=(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)$

وهذه هى صورة مضروب المجاميع القياسية التى نبحث عنها للمعادلة F1 . نكرر ذلك لكل كمية غير قياسية فى المعادلة إن وجد .

٤-٩ جدول الحقيقة والمعادلات المنطقية

جدول الحقيقة هو طريقة شائعة للتعبير عن المعادلات المنطقية . جدول الحقيقة هو استجابة الدائرة المنطقية أو المعادلة المنطقية لجميع الاحتمالات الممكنة لمتغيرات الدخل للدائرة . المثال التالى يوضح ذلك :

مثال ٤-٦

أكتب جدول الحقيقة للمعادلة المنطقية التالية :

$F=\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$

هذه المعادلة تحتوى ٣ متغيرات ، لذلك فإن جدول الحقيقة سيحتوى $2^3=8$ من الصفوف ، كل صف يحتوى أحد الحالات الممكنة لمجموعة الدخل . لكل حالة من حالات الدخل نحسب الخرج المقابل كما فى الجدول ٤-٣ .

بنفس الطريقة يمكن إيجاد جدول الحقيقة لأى معادلة منطقية سواء كانت قياسية أو غير قياسية أو أى دائرة منطقية .

جدول ٤-٣ جدول الحقيقة للمعادلة F

الدخل			الخرج
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

٤-١٠ الحصول على المعادلة المنطقية القياسية من جدول الحقيقة

فى الكثير من التطبيقات نبدأ بالدائرة المنطقية ونحسب لها جدول الحقيقة ، فهل يمكن وضع معادلة منطقية (من هذا الجدول) فى أحد الصور القياسية لهذه الدائرة ؟

٤-١٠-١ الحصول على المعادلة المنطقية فى صورة مجموع المضاريب

فى هذه الحالة نبحث فى جدول الحقيقة عن الكميات التى يكون فيها الخرج يساوى واحد ، كل واحد من هذه الكميات يمثل مضروب مجموعة المتغيرات كل على حسب إذا كان صفر أو واحد ، وكل هذه المضاريب يتم جمعها لتعطى دالة الخرج . فمثلا فى جدول الحقيقة فى المثال السابق (جدول ٤-٣) نجد أن الخرج $F=1$ عند ثلاثة أماكن فى الجدول : المكان الأول عندما $A=0, B=0, C=1$ وهذا يمكن وضعه فى صورة الكمية المضروبة $C\bar{B}\,\bar{A}$. المكان الثانى عندما $A=1, B=0, C=0$ وهذا يمكن وضعه فى صورة الكمية المضروبة $\bar{C}\,\bar{B}A$. المكان الثالث عندما $A=1, B=1, C=1$ وهذا يمكن وضعه فى صورة الكمية المضروبة ABC . وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة المنطقية من مجموع هذه الكميات الثلاثة كما يلى :

$$F=\bar{A}\,\bar{B}C+A\bar{B}\,\bar{C}+ABC$$

وهذه هى نفس المعادلة المنطقية السابقة . يمكن تطبيق ذلك على أى جدول حقيقة حيث يمكن بناء الدائرة فى هذه الحالة فى صورة آند أور .

٤-١٠-٢ الحصول على المعادلة المنطقية فى صورة مضروب المجاميع

فى هذه الحالة نبحث فى جدول الحقيقة عن الكميات التى يكون فيها الخرج يساوى صفر ، كل واحد من هذه الكميات نكتبه فى صورة مضروب مجموعة المتغيرات كل على حسب إذا كان صفر أو واحد ، وكل هذه المضاريب يتم جمعها لتعطى دالة الخرج المعكوسة بدلا من دالة الخرج الحقيقية كما سبق . فمثلا فى جدول الحقيقة فى المثال السابق (جدول ٤-٣) نجد أن الخرج $F=0$ عند خمسة أماكن فى الجدول : المكان الأول عندما $A=0, B=0, C=0$ وهذا يمكن وضعه فى صورة الكمية المضروبة $\bar{C}\,\bar{B}\,\bar{A}$ ، المكان الثانى عندما $A=0, B=1, C=0$ وهذا يمكن وضعه فى صورة الكمية المضروبة $\bar{A}B\bar{C}$ ، وهكذا يمكن كتابة باقى الخمسة كميات . فى النهاية يمكن كتابة المعادلة المنطقية لمعكوس الخرج كما يلى :

$$\bar{F}=\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$$

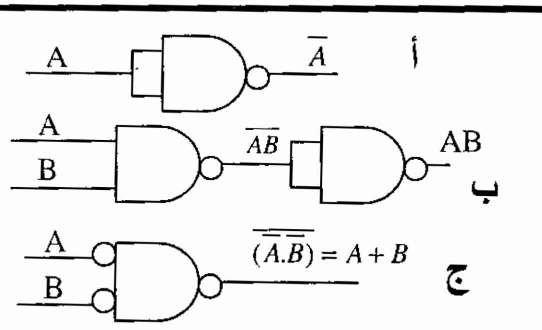
لاحظ أن الذى حصلنا عليه هو معكوس الخرج وليس الخرج الحقيقى . للحصول على الخرج الحقيقى F نعكس كل من طرفى المعادلة السابقة كما يلى :

$$\overline{\overline{(f)}}=(\overline{\overline{\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}+\bar{A}.B.\bar{C}+\bar{A}.B.C+A.\bar{B}.C+A.B.\bar{C}}})$$

عكس الطرف الأيسر مرتين كما سبق يعطى الخرج الحقيقى F ، بينما عكس الطرف الأيمن يمكن تطبيق نظرية ديمورجان عليه لنحصل على المعادلة فى صورة مضروب مجاميع كما يلى :

$$F=(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

وهى الصورة التى نبحث عنها حيث منها يمكن بناء الدائرة فى صورة أور آند .

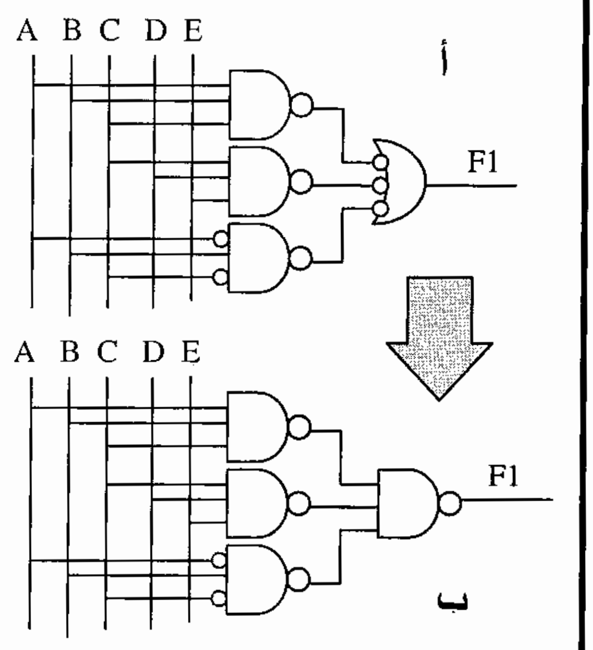


شكل (٤-٥) الحصول على البوابات الأساسية من بوابة ناند

٤-١١ بناء الدوائر المنطقية باستخدام بوابات ناند فقط

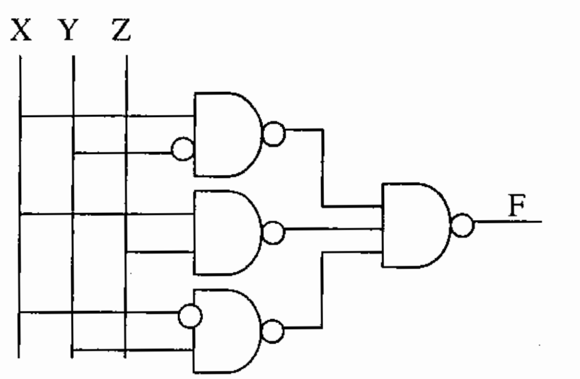
فى الكثير من الدوائر العملية ، وبالذات

فى تصنيع الدوائر التكاملية المنطقية يكون فى العادة من المفيد بناء كل الدائرة أو كل النظام المنطقى من نوع واحد من البوابات . سنرى فى هذا الجزء كيف نستخدم بوابات ناند فقط لبناء الدائرة المنطقية بالكامل . شكل (٤-٥) يبين كيفية الحصول على البوابات الأساسية ، العاكس ، وأند ، وأور باستخدام بوابة ناند فقط . كما فى شكل (٤-٥أ) فإن العاكس يمكن الحصول عليه بتوصيل دخلى البوابة ناند مع بعضهما فيكون خرج البوابة فى هذه الحالة هو : $\overline{AA} = \overline{A}$ حيث كما نعلم فإن عملية الآند على نفس المتغير تعطى المتغير نفسه كما سبق . شكل (٤-٥ب) يبين كيفية الحصول على بوابة آند من ناند حيث الدخلين الأساسين يدخلان على بوابة ناند فنحصل من خرجها على $\overline{AB}$ ، بإدخال هذا الخرج على بوابة ناند تعمل كعاكس نحصل فى الخرج النهائى على AB الذى يمثل خرج بوابة آند . شكل (٤-٥ج) يبين كيفية الحصول على بوابة أور من ناند . دخل البوابة ناند الأولى هو معكوس المتغيرين الأساسيين ، فيكون خرج البوابة ناند الأولى هو $\overline{(\overline{A}.\overline{B})}$. هذا الخرج يمكن تطبيق نظرية ديمورجان عليه فنحصل على A+B التى تمثل خرج بوابة أور .



شكل (٤-٦) بناء دائرة آند أور باستخدام بوابات ناند فقط

يمكن تحويل أى دائرة مبنية بنظام آند أور ، أى مجموع مضاريب ، إلى دائرة مبنية باستخدام بوابات ناند فقط وذلك بوضع عاكسين على خرج كل بوابة آند كما فى شكل (٤-٦أ) . العاكس الأول مع كل بوابة آند يعطى بوابة ناند . باقى العواكس فى دخل بوابة الأور ، مع بوابة الأور ، تكافىء بوابة ناند حسب قوانين الجبر المنطقى . بذلك تصبح الدائرة كلها مبنية باستخدام بوابات الناند كما فى شكل (٤-٦ب) .



شكل (٤-٧) بناء دائرة منطقية باستخدام بوابات ناند وذلك ابتداء من المعادلة المنطقية

فى الكثير من الأحيان يكون الرسم المنطقى للدائرة غير متاح ، وحتى جدول الحقيقة من الممكن أن يأخذ وقتا طويلا فى حالة إعداده بالذات إذا كانت المعادلة المنطقية معقدة . لذلك سنقدم فى هذا الجزء طريقة سهلة فى عدة خطوات ثابتة يمكن بعدها تحويل أى معادلة منطقية إلى الصورة المناسبة للبناء باستخدام بوابات الناند . هذه الخطوات كما يلى :

١- ضع المعادلة المنطقية فى صورة مجموع مضاريب كما يلى :

$F=X(\overline{Y}+Z)+\overline{X}Y$

$F=X\overline{Y}+XZ+\overline{X}Y$

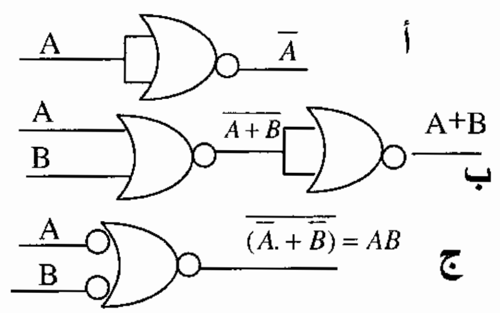
٢- إعكس الطرف الأيمن للمعادلة مرتين ، حيث سيكون ليس هناك أى تأثير نتيجة هذا العكس المزدوج . فى هذه الحالة ستكون المعادلة السابقة كما يلى :

$F=\overline{\overline{X\overline{Y}+XZ+\overline{X}Y}}$

٣- طبق نظرية ديمورجان على عملية العكس الداخلية ، وعلى عمليات الجمع فقط دون عمليات الضرب . فى هذه الحالة ستكون المعادلة السابقة كما يلى :

$F=\overline{(\overline{X\overline{Y}})(\overline{XZ})(\overline{\overline{X}Y})}$

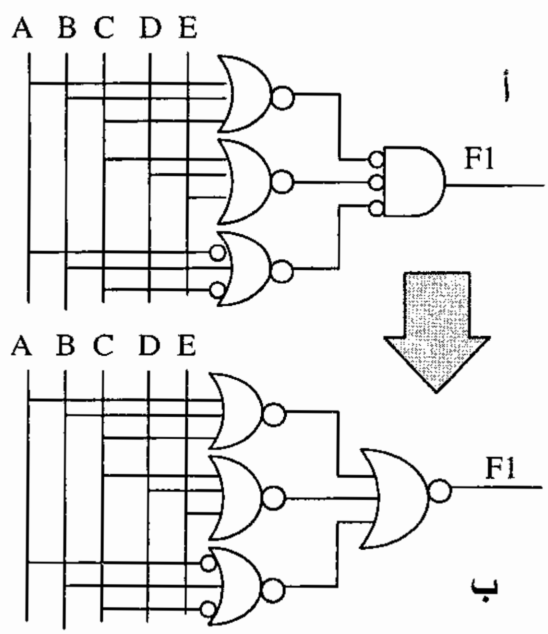
وهذه كما نرى عبارة عن بوابات ناند (عددها ثلاثة) كلها مجمعة على بوابة ناند . شكل (٤-٧) يبين هذه الدائرة .



شكل (٤-٨) الحصول على البوابات الأساسية من بوابة نور

٤-١٢ بناء الدوائر المنطقية باستخدام بوابات نور فقط

سنرى فى هذا الجزء كيف نستخدم بوابات نور فقط لبناء الدائرة المنطقية بالكامل كما فعلنا مع بوابات الناند . شكل (٤-٨) يبين كيفية الحصول على البوابات الأساسية ، العاكس ، وأور ، وآند باستخدام بوابة نور فقط . كما فى شكل (٤-٨أ) فإن العاكس يمكن الحصول عليه بتوصيل دخلى البوابة نور مع بعضهما فيكون خرج البوابة فى هذه الحالة هو : $\overline{A+A}=\overline{A}$ حيث كما نعلم فإن عملية الأور على نفس المتغير تعطى المتغير نفسه كما سبق . شكل (٤-٨ب) يبين كيفية الحصول على بوابة أور من نور حيث الدخلين الأساسين يدخلان على بوابة نور فنحصل من خرجها على الصورة $\overline{A+B}$ ، بإدخال هذا الخرج على بوابة نور تعمل كعاكس نحصل فى الخرج النهائى على الصورة A+B الذى يمثل خرج بوابة أور . شكل (٤-٨ج) يبين كيفية الحصول على بوابة آند من نور . دخل البوابة نور الأولى هو معكوس المتغيرين الأساسيين ، فيكون خرج البوابة نور الأولى هو $\overline{(\overline{A}.+\overline{B})}$. هذا الخرج يمكن تطبيق نظرية ديمورجان عليه فنحصل على AB التى تمثل خرج بوابة آند .



شكل (٤-٩) بناء دائرة أور آند باستخدام بوابات نور فقط

يمكن تحويل أى دائرة مبنية بنظام أور

آند ، أى مضروب مجاميع ، إلى دائرة مبنية باستخدام بوابات نور فقط وذلك بوضع عاكسين على خرج كل بوابة أور كما فى شكل (٤-٩أ) . العاكس الأول مع كل بوابة أور يعطى بوابة نور . باقى العواكس فى دخل بوابة الآند ، مع بوابة الآند ، تكافىء بوابة نور حسب قوانين الجبر المنطقى . بذلك تصبح الدائرة كلها مبنية باستخدام بوابات نور كما فى شكل (٤-٩ب) .
فى الكثير من الأحيان يكون الرسم المنطقى للدائرة غير متاح ، وحتى جدول الحقيقة من الممكن أن يأخذ وقتا طويلا فى حالة إعداده بالذات إذا كانت المعادلة المنطقية معقدة . لذلك سنقدم فى هذا الجزء طريقة سهلة فى عدة خطوات ثابتة يمكن بعدها تحويل أى معادلة منطقية إلى الصورة المناسبة للبناء باستخدام بوابات النور. هذه الخطوات كما يلى :

١- ضع المعادلة المنطقية فى صورة مضروب مجاميع .
٢- إعكس الطرف الأيمن للمعادلة مرتين ، حيث سيكون ليس هناك أى تأثير نتيجة هذا العكس المزدوج .
٣- طبق نظرية ديمورجان على عملية العكس الداخلية ، وعلى عمليات الضرب فقط دون عمليات الجمع فتحصل على دائرة مبنية باستخدام بوابات نور فقط . حاول تطبيق ذلك على مثال من عندك .

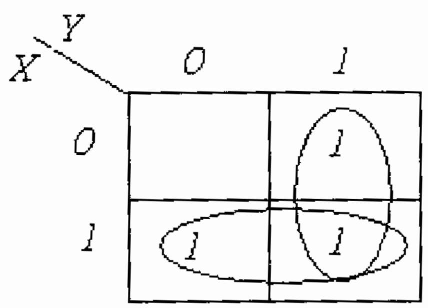
٤-١٣ اختصار الدوال المنطقية (خريطة كارنوف)
Karnaugh Map

لقد رأينا فى جزء سابق كيفية استخدام قوانين ونظريات الجبر المنطقى فى اختصار الدوال أو الدوائر المنطقية . مثل هذه الطريقة كما أشرنا سابقا لا تعطى أى تأكيد على أن الصورة النهائية التى تم الحصول عليها للمعادلة المنطقية هى الصورة المثلى ولا يمكن اختصارها أكثر من ذلك لأن الصورة النهائية التى سنصل إليها تعتمد بدرجة كبيرة على مهارة مستخدم هذه القوانين والنظريات . سنقدم هنا طريقة بسيطة لاختصار أى معادلة منطقية ووضعها فى الصورة المثلى التى لا يمكن إجراء أى اختصار عليها أكثر من ذلك . ميزة هذه الطريقة أنها خطوات مرتبة فى صورة أشكال توضيحية مثل جدول الحقيقة كما سنرى . هذه الطريقة تسمى طريقة أو خريطة كارنوف لتبسيط المعادلات المنطقية .
طريقة كارنوف تشبه تماما جدول الحقيقة فى تمثيل المعادلة المنطقية . حيث أنها تعرض جميع الحالات الممكنة لمتغيرات الدخل ، وكذلك الخرج المقابل لهذا الدخل . بدلا من استخدام الصفوف والأعمدة كما فى جدول الحقيقة ، فإن خريطة كارنوف تستخدم مصفوفة من الخلايا ، حيث كل خلية من هذه الخلايا تمثل واحدة من حالات الدخل الممكنة . يتم ترتيب هذه الخلايا بطريقة تسمح بتبسيط الدالة المنطقية عن طريق تجميع بعض هذه الخلايا مع بعضها بطريقة معينة . يمكن استخدام هذه الخريطة لتبسيط المعادلات ذات المتغيرين والثلاثة والأربعة وحتى الخمسة متغيرات ، ولكن مع زيادة عدد متغيرات المعادلة عن خمسة فإن التعامل مع الخريطة يكون صعب ومتعب . فى هذه الحالة (زيادة عدد المتغيرات عن خمسة) نلجأ لطريقة أخرى تسمى طريقة كوين مكلوسكى Quine McClusky ، وهذه الطريقة خارج نطاق هذا الكتاب .
سنقدم هنا أمثلة على استخدام خرائط كارنوف ذات المتغيرين والثلاثة والأربعة .
سنفترض أولا معادلة منطقية فى متغيرين كما يلى :

$$F=X\overline{Y}+XY+\overline{X}Y$$

شكل (٤-١٠) يبين خريطة كارنوف لمتغيرين . نلاحظ أن هذه الخريطة مكونة من ٤ خلايا مرتبة فى صفين وعمودين . الصف الأول يمثل عكس المتغير الأول $\overline{X}$ والصف الثانى يمثل المتغير نفسه X . كذلك العمود الأول يسارا يمثل عكس المتغير الثانى $\overline{Y}$ والعمود الثانى يمثل

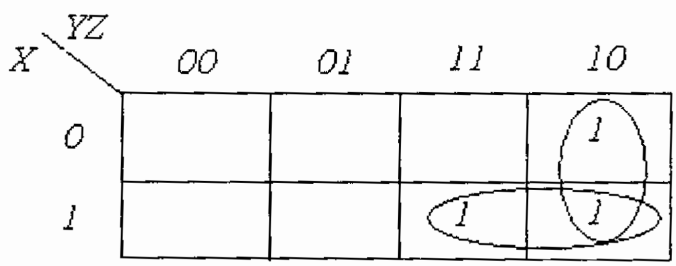
نفس المتغير Y . وعلى ذلك فإن ترتيب الخلايا من حيث تقاطع الصفوف مع الأعمدة سيجعل الخلية الأولى (أعلى يسار) تمثل الكمية $\overline{X}\,\overline{Y}$ ، والخلية الثانية (أعلى يمين) تمثل الكمية $\overline{X}\,Y$ ، والخلية الثالثة (أسفل يسار) تمثل الكمية $X\overline{Y}$ ، والخلية الرابعة (أسفل يمين) تمثل الكمية XY . أى أن الخريطة تحتوى ٤ خلايا تمثل جميع الاحتمالات الممكنة لمتغيرات الدخل X و Y . الخطوة التالية بعد رسم الخريطة هى مقارنة الكميات الموجودة فى المعادلة المراد تبسيطها ثم وضع واحد فى كل خلية من خلايا الخريطة يقابلها كمية فى المعادلة . وحيث أن المعادلة تحتوى ٣ كميات فقد تم توقيع ٣ وحايد فى الخريطة كما هو موضح فى شكل (٤-١٠) . الخطوة التالية تجميع كل خليتين متجاورتين أفقيا أو رأسيا وكل منهما تحتوى واحد . الخلايا المجمعة والمتجاورة بهذا الشكل يمكن تبسطها إلى المتغيرات الثابتة فى هذا التجميع فقط . فمثلا التجميعة الرأسية تحتوى الخلية الثانية والرابعة ، ومجموع هاتين الخليتين هو $Y\overline{X}+XY$. فى هذه المجموعة المتغير Y ثابت لم يتغير فى كل من الكميتين ، بينما المتغير X كان فى الكمية الأولى حقيقى ومعكوس فى الكمية الثانية . لذلك فإن هذه المجموعة تؤول إلى الكمية Y فقط . وهذا فى الحقيقة يمكن اثباته من قوانين الجبر المنطقى حيث يمكن أن نأخذ المتغير Y مشترك فى هذه المجموعة ويتبقى المتغير X مجموعا مع معكوسه وهذا يساوى واحد حسب قوانين الجبر المنطقى . الآن ننتقل إلى المجموعة الأفقية التى تحتوى الخلية الثالثة مع الخلية الرابعة . فى هذه الخلية المتغير X ثابت بينما المتغير Y ليس ثابتا فى الخليتين . لذلك فإن هذه المجموعة تؤول إلى المتغير X فقط . لذلك فإن الصورة المبسطة للمعادلة F ستكون ناتج هاتين المجموعتين كما يلى :



شكل (٤-١٠) خريطة كارنوف لمعادلة فى متغيرين موقعا عليها كميات الخرج F

$$F=X+Y$$

وهذا هو أبسط ما يمكن الوصول إليه فى هذه المعادلة .



شكل (٤-١١) خريطة كارنوف لثلاثة متغيرات

سنفترض الآن معادلة فى ثلاثة متغيرات كما يلى :

$$F=\overline{X}\,Y\overline{Z}+XY\overline{Z}+XYZ$$

شكل (٤-١١) يبين خريطة كارنوف لثلاث متغيرات موقعا عليها الكميات الموجودة فى المعادلة السابقة . من هذه الخريطة يمكن كتابة الصورة المبسطة للمعادلة كما يلى :

$$F=XY+Y\overline{Z}$$

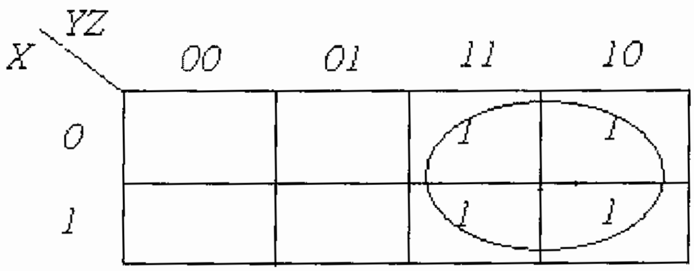
لاحظ طريقة ترتيب الخلايا أفقيا من خلال المتغيرين Y و Z . نلاحظ أنه بالانتقال من عمود للتالى له فإن متغير واحد فقط هو الذى يغير حالته . فتجد العمود الأيسر مثلا ممثلا بالكمية YZ=00 ، والعمود التالى له YZ=01 المتغير Z فقط تغير من صفر لواحد ، يأتى بعد ذلك

العمود YZ=11 تجد أن الفرق بينه وبين العمود السابق أن المتغير Y تغير من صفر إلى واحد ، وهكذا . المهم أنه عند الانتقال من خلية لخلية مجاورة لها أن يتغير واحد فقط من المتغيرات من صفر إلى واحد أو العكس .

ما زلنا مع المعادلات ثلاثية المتغيرات حيث نعرض المعادلة التالية :

$$F= \bar{X}Y\bar{Z}+XY\bar{Z}+XYZ+\bar{X}YZ \qquad (٨-٤)$$

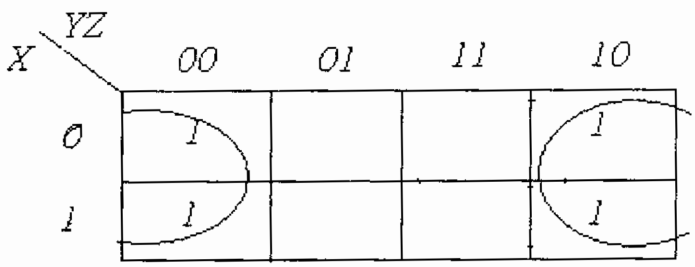
هذه المعادلة بها أربع كميات بعد توقيعها على خريطة كارنوف المناسبة جاءت الأربع كميات فى أربع خلايا متجاورة كما فى شكل (٤-١٢) . معنى ذلك أن هناك متغيرين سيتم تبسيطهم ، ويبقى متغير واحد فقط وهو المتغير Y الذى لم يتغير فى الأربع خلايا . معنى ذلك أن هذه المعادلة يمكن تبسيطها إلى متغير واحد فقط كما يلى :



شكل (٤-١٢) خريطة كارنوف للمعادلة (٤-٨)

F=Y

من خواص خريطة كارنوف أنها يمكن أن تلف على نفسها حول محور رأسى لتكون اسطوانة رأسية أو تلف على نفسها حول محور أفقى لتكون اسطوانة أفقية . سنقوم بتبسيط المعادلة التالية لنوضح هذه الخاصية :



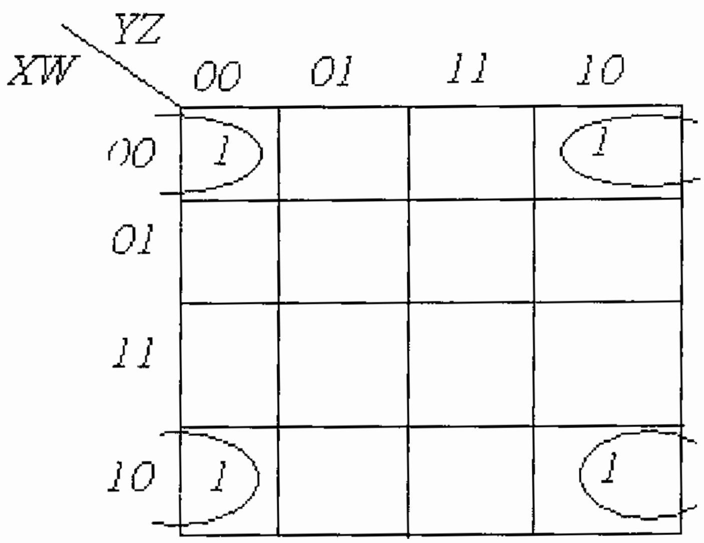
شكل (٤-١٣) خريطة كارنوف كاسطوانة رأسية

$$F= \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}+X\bar{Y}\bar{Z}+\bar{X}Y\bar{Z}+XY\bar{Z}$$

هذه المعادلة تم توقيعها على خريطة كارنوف كما فى شكل (٤-١٣) حيث أمكن تبسيطها إلى الصورة التالية:

$$F=\bar{Z}$$

شكل (٤-١٤) يبين خريطة كارنوف فى ٤ متغيرات ، وهذا المثال يبين أيضا خاصية الالتفاف الأفقى



شكل (٤-١٤) خريطة كارنوف فى ٤ متغيرات

والرأسى للخريطة . المعادلة قبل التبسيط كما يلى :

$F=\overline{X}\,\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{W}\,Y\overline{Z}+X\overline{W}\,\overline{Y}\,\overline{Z}+X\overline{W}\,Y\overline{Z}$

وهذه المعادلة كما نرى يمكن تبسيطها إلى ما يلى :

$F=\overline{W}\,\overline{Z}$

لقد سقنا العديد من الأمثلة التى تبين كيفية استخدام خريطة كارنوف لتبسيط الدوائر المنطقية حتى ٤ متغيرات ، وكما قلنا من قبل يمكن تعميم ذلك لدوائر فى أكثر من ٤ متغيرات ولكن الخريطة ستكون أكثر تعقيدا ، ولذلك فنحن نكتفى بهذا القدر من الأمثلة . لاحظ أنه من الممكن أن تكون هناك كميات أو خلايا لا يمكن أن تؤخذ فى مجموعات لتحقيق عملية التبسيط . تخيل مثلا أن المعادلة السابقة كانت تحتوى الكمية XWYZ . فى هذه الحالة فإن الخلية المقابلة لهذه الكمية لا يمكن أن تؤخذ فى مجموعة مع أى خلية أخرى ، لذلك فإن الصورة النهائية للمعادلة فى هذه الحالة ستكون :

$F=\overline{W}\,\overline{Z}+WXYZ$

٤-١٤ تمارين

١- ما هى قيمة كل من A, B, C التى تجعل كل من التعبيرات التالية مرة واحد ومرة صفر :

a) AB b) $A\overline{B}C$ C) A+B d) $\overline{A}+B+\overline{C}$ e) $\overline{A}B\overline{C}$

٢- أكتب جدول الحقيقة لكل من المعادلات التالية :

a) X=(A+B)C+B b) $X=\overline{(A+B)}C$ c) $X=(A+BC)(\overline{B}+\overline{C})$

٣- طبق نظرية ديمورجان على كل من التعبيرات التالية :

a) $\overline{A+B}$ b) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$ C) $\overline{AB+CD}$ d) $\overline{A\overline{B}(C+\overline{D})}$ e) $\overline{AB(CD+EF)}$

f) $\overline{(A+\overline{B}+C+\overline{D})}+\overline{ABC\overline{D}}$ g) $\overline{\overline{\overline{(ABC)}\,\overline{(EFG)}}+\overline{\overline{(HIJ)}\,\overline{(KLM)}}}$

٤- ارسم الدائرة المنطقية لكل واحد من التعبيرات الموجودة فى تمرين ١ وتمربن ٢ .

٥- استخدم الجبر البولينى فى تبسيط كل من التعبيرات التالية :

a) BD + B(D+E) + D(D+F) b) $AB+\overline{AB}C+A$

c) $\overline{A}B+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BCD+\overline{A}B\overline{CD}E$ d) $(A+\overline{A})(AB+AB\overline{C})$

e) $ABC(AB+\overline{C}(BC+AC))$ f) $ABCD+AB(\overline{CD})+(\overline{AB})CD$

٧- ضع كل من التعبيرات التالية فى صورة مجموع المضاريب SOP القياسية :

a) $(A+B)(C+\overline{B})$ b) $(A+\overline{B}C)C$ c) (A+C)(AB+AC)

d) AB +CD(AB+AC) e) A+B(AC+(B+C)D)

٨- أكتب جدول الحقيقة لكل واحد من التعبيرات الموجودة فى تمرين ٧ .

٩- أرسم خريطة كارنوف لاثنين وثلاثة وأربع متغيرات ثم ضع رقم لكل خلية تبعا لقيمة المتغيرات التى تمثلها هذه الخلية .

١٠- استخدم خريطة كارنوف لتبسيط كل واحد من التعبيرات الموجودة فى تمرين ٥ .

١١- أكتب المعادلة المنطقية للخرج الموجود فى جدول الحقيقة فى شكل (٤-ت١١) فى صورة مجموع مضاريب SOP .

١٢- ارسم الدائرة المنطقية للخرج فى تمرين ١١ .

١٣- ارسم الدائرة الناتجة فى تمرين ١٢ مستخدما بوابات النائد فقط .

١٤- بسط المعادلة الناتجة فى تمرين ١١ مستخدما خريطة كارنوف .

١٥- أكتب المعادلة المنطقية للخرج الموجود فى جدول الحقيقة فى شكل (٤-ت١١) فى

صورة مضروب مجاميع POS .

١٦- ارسم الدائرة المنطقية للخرج فى تمرين ١٥ .

١٧- ارسم الدائرة الناتجة فى تمرين ١٦ مستخدما بوابات نور فقط .

١٨- بسط المعادلة الناتجة فى تمرين ١٥ مستخدما خريطة كارنوف .

١٩- صمم دائرة منطقية لها ٣ مداخل بحيث يكون خرجها يساوى واحد إذا كان الدخل يمثل رقما فرديا . أكتب جدول الحقيقة ثم استنتج المعادلة المنطقية ثم بسطها باستخدام خريطة كارنوف ثم ارسم الدائرة .

٢٠- صمم دائرة منطقية لها ٤ مداخل بحيث يكون الخرج يساوى واحد إذا كان هناك ٣ أو أكثر من المداخل يساوى واحد (دائرة الأغلبية) . اتبع نفس الخطوات الموضحة فى تمرين ١٩ .

الدخل				الخرج
D	C	B	A	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

شكل (٤-ت١١)