# الباب الثامن
# فراغات الضرب الداخلي (الفراغات القياسية)
# Inner Product Spaces (Metric Spaces)

## (١.٨) الضرب الداخلي Inner Product

نفرض أن V فراغ حقيقي (معرف على R) ونفرض الدالة

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to R$$
$$(a, b) \to \langle a , b \rangle \in R$$

التي تحدد لكل زوج من متجهات V عدد حقيقي. الدالة $\langle\ ,\ \rangle$ تسمى ضرب داخلي إذا حققت الشروط الآتية :

(i) $\langle u , v \rangle = \langle v , u \rangle$ التماثل

(ii) $\langle r\,u + s\,v, w \rangle = r\langle u, w\rangle + s\langle v , w \rangle$ Associative التجميع والخطية

(iii) $\langle u , u\rangle > 0\ ; \langle 0 , 0 \rangle = 0, \forall u \neq 0$

إيجابية بالتحديد positive definite

الفراغ V المعرف عليه الدالة $\langle , \rangle$ يسمى فراغ الضرب الداخلي ويرمز له بالرمز $(V, \langle , \rangle)$

بما أن الدالة $\langle , \rangle$ تحدد لكل متجهين من V عدد قياسي في R، أحياناً تسمى الدالة $\langle , \rangle$ الضرب القياسي، وغالباً فراغات الضرب الداخلي محدودة البعد تسمى الفراغات الاقليدية.

باستخدام خاصية التماثل والخاصية الخطية يمكنك أن تثبت أن الضرب الداخلي خطي في كل متغيراته. ولهذا يقال أن الضرب الداخلي خطي

بالنسبة لكل متغيراته bilinear.

مثال (١): الضرب القياسي ( $E_n = (R^n, \langle\, , \rangle)$ المعرف بالشكل

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \;, u = (a_i), b = (b_i)$$

تحقق خواص الضرب الداخلي.

مثال (٢): نفرض أن $B = \{\, (1, 3)\, , (4, 2)\, \}$ أساس للفراغ $V_2$ وتعرف $\langle\, , \rangle_B$ بالآتي :

$$\langle u\, , v\, \rangle_B = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

حيث $u : (a_1, a_2)_B\, , v : (b_1, b_2)_B$ ، أثبت أن الدالة $\langle\, , \rangle_B$ ضرب داخلي.

الحل: نتحقق من أن $\langle\, , \rangle_B$ موجبة بالتحديد $u \neq 0$ إذا كان وكان فقط الإحداثيات تحقق $(a_1)^2 + (a_2)^2 > 0$ بمعنى أن $u \neq 0$ إذا كان وكان فقط $\langle u , u\, \rangle_B > 0$ .

مثال (٣):

فراغ الضرب الداخلي $(V_2, \langle\, , \rangle_B)$ ليست هو الفراغ $E_2 = (R^2, \langle\, , \rangle_E)$ حيث $E$ هو الأساس القياسي $\{e_1, e_2\}$ ونرمز هنا $\langle\, , \rangle_E$ بالرمز o ليصبح

$$E_n = (R^n, 0) \;, o = \langle\, , \rangle_E$$

الحل: نوضح ذلك بمثال

$$\langle (1, 3), (1, 3) \rangle_B = 1$$

لأن

$$(1, 3) : (1,0)_B$$

لكن

$$(1, 3) \text{ o } (1, 3) = 1 + 9 = 10$$

كذلك

$$(-2, 4) : (2, -1)_B$$
$$(1, -7) : (-3,1)_B$$

إذن

$$\langle(-2, 4), (1, -7)\rangle_B = 2(-3) + (-1)1 = -7$$

استخدام الأساس كتعريف للضرب الداخلي يمكن تطبيقه بسهولة لأي فراغ محدود البعد والمثال على ذلك فراغات كثيرات الحدود

مثال (٤): المجموعة $B = \{1, t, t^2\}$ هي أساس للفراغ $R_3[t]$ وتعرف الدالة $\langle\,,\rangle_B$ كالأتي :

$$\langle a_1 + a_2\, t + a_3\, t^2 , b_1 + b_2\, t + b_3\, t^2\rangle_B = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

من السهل أن نبين أن $\langle\,,\rangle_B$ يحقق شروط الضرب الداخلي ولهذا $R_3[t]$ مع $\langle\,,\rangle_B$ تعرف فراغ ضرب داخلي من كثيرات الحدود.

فراغ الضرب الداخلي ليس بالضرورة أن يكون محدود البعد ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (٥): نعتبر الفراغ $F[0, 1]$ ونعرف

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \;\; , \;\forall\; f, g \in F$$

إذن $\langle x , x\rangle=\frac{1}{3}\ ,\ \left\langle 6x , \sqrt{1-x^2}\right\rangle=2$

$$\langle \sin \pi x , \cos \pi x\rangle=\int_0^1 \sin \pi x \cos \pi x \, dx = 0$$

ومن خواص التكامل يمكن التحقق من أن شروط الضرب الداخلي محققة.

## (٢.٨) التعامد والمعيار The norm and orthogonality

نعلم أن طول المتجه u في المستوى $E_2$ يعطى من $\sqrt{u \circ u}$ وهذه الفكرة يمكن تعميمها في فراغات الضرب الداخلي.

**تعريف (١.٨)**: نفرض أن $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ فراغ ضرب داخلي، يعرف معيار المتجه $u \in V$ بالقيمة $\sqrt{\langle u , u\rangle}$ ويرمز له بالرمز $\| u \|$ ويقال أن u متجه وحدة إذا تحقق $\| u \|=1$ .

**نوجد علاقة هامة بين الضرب الداخلي لمتجهين ومعيار كل منهم** تعطى من خلال متباينة شفارتز Schwartz Inequality

**نظرية (١.٨)**: نفرض أن u, v متجهات في فراغ الضرب الداخلي إذن

$$\langle u , v\rangle^2 \le \| u \|^2 \| v \|^2$$

أو

$$|\langle u , v\rangle| \le \| u \| \| v \|$$

البرهان: نعتبر المتجه $x u + v$ لأي عدد $x \in R$ وبما أن $\langle\ ,\ \rangle$ موجب بالتحديد

$$0 \le \langle x u + v , x u + v\rangle$$

وباستخدام خصائص الضرب الداخلي نجد أن :

$$0 \le x^2 \langle u, u \rangle + 2x \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$
$$= \| u \|^2 x^2 + 2 \langle u, v \rangle x + \| v \|^2$$

لجميع قيم x الحقيقية. وهذا يعني أن القطع المكافئ

$$y = \| u \|^2 x^2 + 2 \langle u, v \rangle x + \| v \|^2$$

بالكامل يقع فوق محور x أو يمسه ولهذا توجد على الأكثر قيمة حقيقية للعدد x بحيث $y = 0$ والمميز discriminant

$$(2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 \| u \|^2 \| v \|^2$$

يجب أن يكون غير موجب ومنها

$$(2 \langle u, v \rangle)^2 - 4 \| u \|^2 \| v \|^2 \le 0$$

بالقسمة على 4 نحصل على المطلوب.

**متباينة المثلث Triangle Inequality**

**نظرية (٢.٨):** نفرض أن u, v متجهات في فراغ الضرب الداخلي

إذن $\| u + v \| \le \| u \| \| v \|$

البرهان:

$$\| u + v \|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$$

$= \| u \|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \| v \|^2$ من التماثل والتوزيع

$\le \| u \|^2 + \| u \| \| v \| + \| v \|^2$ (من متباينة شفارتز)

$$\le (\| u \| + \| v \|)^2$$

وفي الفراغ الاقليدي يتضح أن هذه المتباينة تعميم لخواص المثلث وهي مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث.

متباينة شفارتز تعمم قياس الزاوية في المستوى الاقليدي $E_2$ لأي فراغ ضرب داخلي، أي أنه لأي متجهين غير صفرين يكون

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \| u \|^2 \| v \|^2$$

وهذه المتباينة تؤدي إلى

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|} \leq 1$$

وبالتالي توجد بالتحديد زاوية $0 \leq \theta \leq \pi$ تحقق

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}$$

## قانون جيب التمام Law of Cosines

**لأي فراغ ضرب داخلي، قانون جيب التمام ينتج تبعاً لتعريف الزاوية**

**نظرية (٣.٨): إذا كان u, v متجهات في فراغ ضرب داخليو $\theta$ الزاوية بينهم، إذن**

$$\| u - v\|^2 = \| u \| + \| v \|^2 - 2\| u \| \| v \| \cos\theta$$

البرهان: البرهان يتضح من أن

$$\begin{aligned}\| u - v\|^2 &= \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

ومن تعريف المعيار والزاوية نصل إلى نهاية البرهان.

**ملاحظة:** الزاوية بين أي متجهين في فراغ ضرب داخلي عام ليس بالضرورة أن تفسر هندسياً.

مثال (٦): إذا كان $u, v \in V_n$ حيث $V_n$ معرف عليه الضرب الداخلي $\langle \, , \rangle$

أثبت أن $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

الحل: باستخدام النظرية السابقة نحصل على المطلوب.

**تعريف (٢.٨):** نفرض أن $(V, \langle , \rangle)$ فراغ ضرب داخلي، المتجهان $u, v \in V$ يقال أنهم متعامدين إذا تحقق $\langle u, v \rangle = 0$.

**نظرية فيثاغورث: Pythagorean theorem**

يمكن صياغتها في أي فراغ ضرب داخلي ويمكن برهنتها باستبدال $v$ بالمتجه $-v$

في قانون جيب التمام يتضح

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

لأي متجهين متعامدين $u, v$

**تعريف (٣.٨):** الأساس $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ للفراغ $V$ يقال أنه أساس عياري متعامد orthogonal basis لفراغ الضرب الداخلي $(V, \langle , \rangle)$ إذا تحقق

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \;, \; \forall \; i, j$$

مثال (٧): المجموعات $B_1 = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ ،

$$B_2 = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

أساسات عيارية متعامدة للفراغات $E_2$، $E_3$ على الترتيب.

الحل: باستخدام التعريف (٢) لكل مجموعة نصل إلى المطلوب.

مثال (٨): المجموعات

$$B_1 = \{ ( \cos\phi , \sin\phi ), ( -\sin\phi, \cos\phi ) \},$$
$$B_2 = \{ ( \cos\phi , \sin\phi ), ( \sin\phi, \cos\phi ) \},$$

أساسات عيارية متعامدة للمستوى $E_2$.

الحل: باستخدام المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ نحصل على المطلوب.

مثال (٩): نفرض أن $T : E_2 \to E_2$ حيث الأساس القياسي (المعتاد) $\{e_1, e_2\}$ للمستوى $E_2$ تغير إلى الأساس $B_1$ في المثال السابق، إذن

$$T\,e_1 = T(1,0) = (\cos\phi , \sin\phi)$$
$$T\,e_2 = T(0,1) = (-\sin\phi , \cos\phi)$$

إذن مصفوفة التحويل الخطي هي :

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

ولهذا $T$ تعطى بالآتي :

$$T(x, y) = T\left( x\,e_1 + y\,e_2 \right)$$

أو

$$T(x, y) = (x\cos\phi - y\sin\phi , x\sin\phi , y\cos\phi )$$

بمعنى أن التغير في الأساس يكافئ دوران المحاور بزاوية $\phi$.

**مثال (١٠):** نفرض أن $B = \{ (2, 5), (1, 4) \}$ أساس للفراغ $V_2$ ، $\langle , \rangle_B$ ضرب داخلي للفراغ $V_2$ معرف باستخدام الإحداثيات بالنسبة إلىB إذن

$$\langle (2,5),(2,5) \rangle_B = 1 = \langle (1,4),(1,4) \rangle_B$$
$$\langle (2,5),(1,4) \rangle_B = 0$$

ولهذا B أساس عياري متعاد لفراغ الضرب الداخلي $(V_2, \langle , \rangle_B)$. لاحظ أن الأساس القياسي $\{e_1, e_2\}$ للفراغ $V_2$ ليست متعامدة بالنسبة لفراغ الضرب الداخلي $(V_2, \langle , \rangle_B)$، على سبيل المثال معيار المتجه (1,0) هو $\sqrt{41/3}$ ولهذا (1, 0) ليست متجه وحدة في هذا الفراغ.

نتيجة هذا المثال يمكن تعميمها لأي فراغ ضرب داخلي اختياري ذو بعد محدود.

**نظرية (٤.٨):** المجموعة B أساس عياري متعامد للفراغ $(V, \langle , \rangle)$ إذا كان وكان فقط $\langle , \rangle$ تساوي $\langle , \rangle_B$ . بمعنى أنه إذا كان

$$u : (a_1, a_2, ..., a_n)_B$$
$$v : (b_1, b_2, ..., b_n)_B$$

إذن B عيارية متعامدة إذا كان وكان فقط $\langle u , v \rangle = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$

وهذه النظرية تعني أن إحداثيات المتجه بالنسبة لأساس معياري متعامد يمكن التعبير عنها من خلال الضرب الداخلي.

**نتيجة:** إذا كان $B = \{ r_1, ..., r_n \}$ أساس عياري متعامد للفراغ $(V, \langle , \rangle)$ إذن الإحداثي i للمتجه u بالنسبة للأساس B هو $\langle u , v_i \rangle$ بمعنى أن :

$$u : (\langle u , v_1 \rangle, ..., \langle u , v_n \rangle)$$

في بعض الحالات لا نتمكن من الحصول على أساس عياري متعامد لفراغ الضرب الداخلي ولذلك نلجأ إلى التعريف التالي :

**تعريف (٤.٨):** نفرض أن S مجموعة جزئية من متجهات غير صفرية من فراغ ضرب داخلي $(V,\langle\,,\rangle)$. المجموعة S تكون متعامدة إذا كان

$$\langle u , v \rangle = 0 \ , \forall u, v \in S , u \neq v$$

المجموعة المتعامدة S تكون عيارية متعامدة إذا كان

$$\| u \| = 1 , \forall u \in S$$

**ملاحظة:** الأساس العياري المتعامد هو عبارة عن مجموعة عيارية متعامدة وكذلك مجموعة متعامدة وعلى العكس أي مجموعة جزئية عيارية متعامدة في فراغ ضرب داخلي ليست بالضرورة أن تكون أساس للفراغ، مثال لذلك المجموعة $\{(1, 0, 0) , (0, 1, 0)\}$ عيارية متعامدة في $E_2$ ولكن ليست أساس له. المجموعة العيارية المتعامدة يمكن الحصول عليها من المجموعة المتعامدة (لماذا؟).

**نظرية (٥.٨):** مجموعة المتجهات المتعامدة orthogonal مستقلة خطيا.

البرهان: نفرض S مجموعة جزئية من المتجهات المتعامدة في فراغ ضرب داخلي $(V,\langle\,,\rangle)$، المجموعة S تكون مستقلة خطيا إذا لم يوجد مجموعة جزئية محدودة منها مرتبطة خطيا (لاحظ أن V ليست بالضرورة أن تكون محدودة البعد).

ولهذا نفرض أن $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k = 0$ لعدد k من متجهات $v_i$ من S.

إذن $$0 = \langle 0 , v_i \rangle = \langle a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_k v_k , v_i \rangle$$

$$= a_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + a_i \langle v_i , v_i \rangle + \ldots + a_k \langle v_k , v_k \rangle$$
$$= a_i \langle v_i , v_i \rangle$$

بما أن $v_i \neq 0$ فإن $a_i = 0$ لبعض قيم $i$، $1 \le i \le k$ إذن S مستقلة خطيا.

مثال (١١): مجموعة الدوال العيارية المتعامدة من الفراغ F[0,1] والمعرف عليها تكامل الضرب الداخلي $\langle f , g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, d\,x$ يمكن تكوينها باستخدام الحقيقية :

$$\int_0^1 \sin 2\, n\, \pi\, x\, d\, x = \int_0^1 \cos 2\, n\, \pi\, x\, d\, x = 0 \,,\, n > 0$$

مثلا

$$\langle \sin 2\, \pi\, n\, x \,,\, \cos 2\, m\, \pi\, x \rangle = \int_0^1 \sin 2\, \pi\, x \cos 2\, m\, \pi\, x\, d\, x = 0$$

ولهذا الدوال $\cos 2\, m\, \pi\, x \,,\, \sin 2\, \pi\, n\, x$ متعامدين لكل الأعداد الصحيحة الموجبة m, n وأكثر من ذلك بما أن

$$\int_0^1 \sin^2 2\, n\, \pi\, x\, d\, x = \frac{1}{2}$$

أي أن معيار الدالة $\sin 2\, n \pi\, x$ يساوي $\frac{1}{2}$ وتكون الدالة $\sqrt{2} \sin 2\, n\, \pi\, x$ متجه وحدة.

باتباع هذا الأسلوب يمكن أن نرى أن

$$\{1, \sqrt{2} \sin 2\, \pi\, x \,,\, \sqrt{2} \cos 2\, \pi\, x \,, \ldots, \\ , \sqrt{2} \sin 2\, n\, \pi\, x \,,\, \sqrt{2} \cos 2\, n\, \pi\, x, \ldots \}$$

مجموعة عيارية متعامدة للفراغ $F[0, 1]$ المعرف عليه تكامل الضرب الداخلي.

وهذا المثال غاية في الأهمية بالنسبة لتحليل فورير Fourier analysis

## (٣.٨) طريقة جرام ـ شميدت : The Gram – Schmidt Process

رأينا سابقاً أن الأساسات العيارية المتعامدة تكون أحسن وأفضل أساسات لفراغات الضرب الداخلي ـ طريقة جرام شميدت تمكننا من الحصول على أساس عياري متعامد من أساس معطى.

مثال (١٢): نفرض أن $S = L\{u_1, u_2\} \subset E_3$ فراغ جزئي من $E_2$ مولد بالمتجهات $u_1 = (2,1,-2), u_2 = (0,1,2)$

بوضع $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

نكون المتجه

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

حيث $\langle\, , \rangle$ معرف على $E_3$ بالطريقة $\langle u, v \rangle = u \circ v$

بوضع $v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

نحصل على : $\{v_1, v_2\} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right), \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\right\}$

وهي أساس عياري متعامد للفراغ الجزئي $S$ أمكن تكوينه من $u_1, u_2$.

هذا الأسلوب يمكن تعميمه من خلال النظرية التالية :

**نظرية (٦.٨) (طريقة جرام شميدت) :**

نفرض أن $R^n$ فراغ ضرب داخلي له الأساس $\{u_1, \ldots, u_n\}$. إذن $E_n$ له أساس عياري متعامد $\{v_1, \ldots, v_n\}$ حيث

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \;, v_k = \frac{w_k}{\|w_k\|} \;, \; 1 < k \le n$$

$$w_k = u_k - \langle u_k , v_1 \rangle v_1 \ldots - \langle u_k , v_{k-1} \rangle v_{k-1}$$

إذن

$$L\{v_1, \ldots, v_n\} = L\{u_1, \ldots, u_n\}$$

وهذه النظرية يمكن برهنتها بالاستنتاج الرياضي Mathematical induction

**تعريف (٥.٨):** نفرض S فراغ اتجاهي جزئي من فراغ ضرب داخلي E. المجموعة

$$S^{\perp} = \{ v \in E \mid \langle u , v \rangle = 0, \forall u \in S \}$$

تسمى المكمل العمودي للفراغ الجزئي S orthogonal complement

**مثال (١٣):** إذا كانت S هي الخط المستقيم

$$S = L\{ (1, 3, -2) \}$$

في الفراغ $E_3$ ما هو المكمل العمودي للخط S.

**الحل:** نفرض $(x, y, z) \in S^{\perp}$ إذن

$$(x, y, z) \circ (1, 3, -2) = 0$$

أو

$$x + 3y - 2z = 0$$

وهي معادلة مستوى أي أن $S^{\perp}$ عمودي على الخط المستقيم S بالمفهوم الهندسي.

لاحظ أن $E_3 = S \oplus S^{\perp}$ أي أنه عموماً يمكن أن نقول

$$E_n = S \oplus S^{\perp}, E_n = \langle V_n, 0 \rangle$$

**تعريف (٦.٨):** التحويل الخطي $T:(V, \langle , \rangle_v) \to (W, \langle , \rangle_w)$

يقال أنه عمودي orthogonal إذا تحقق

$$\langle T(u), T(v) \rangle_W = \langle u, v \rangle_V$$

بما أن المعيار لمتجه يعرف باستخدام الضرب الداخلي إذن التحويل العمودي يحافظ على المعيار (الطول). إذن صورة متجه غير صفري هي متجه غير صفري وهذا يؤدي إلى أن التحويل العمودي يكون غير شاذ non singular وفي هذه الحالة التحويل T عمودي إذا كانت مصفوفتة $A = (a_{ij})$ عمودية بمعنى أن $A^t = A^{-1}, \text{Det } A = \pm 1$

مثال (١٤) : دوران المستوى حول نقطة الأصل بزاوية حادة هو تحويل عمودي من المستوى إلى نفسه حيث

$$T(a, b) = (a \cos\phi - b \sin\phi, a \sin\phi + b \cos\phi)$$

والضرب الداخلي هو $0 = \langle , \rangle$ (الضرب القياسي)

**نظرية (٧.٨):** إذا كان T مؤثر خطي $T: V \to V$ حيث V فراغ ضرب داخلي (معرف عليه الدالة $\langle , \rangle$ ) فإن التقارير الآتية متكافئة منطقياً :

(i) T يحافظ على الضرب الداخلي.

(ii) T يحافظ على أطوال المتجهات.

(iii) T يحافظ على المسافة بين المتجهات.

البرهان:

$(i)\Rightarrow(iii)$

$$\begin{aligned}\|TX-TY\|^2 &= \|T(X-Y)\|^2\\ &= \langle T(X-Y),T(X-Y)\rangle=\langle X-Y,X-Y\rangle\\ &=\|X-Y\|^2\end{aligned}$$

$(iii)\Rightarrow(ii)$

$$\|TX\|^2=\|T(X-o)\|=\|X\|$$

$(ii)\Rightarrow(i)$

$$\begin{aligned}\langle X+Y,X+Y\rangle=\|X+Y\|^2 &= \|X\|^2+2\langle X,Y\rangle+\|Y\|^2\\ &=\|T(X+Y)\|^2=\|TX+TY\|^2\\ &=\|TX\|^2+2\langle TX,TY\rangle+\|TY\|^2\end{aligned}$$

ولكن

$$\|TX\|=\|X\|\ ,\|TY\|=\|Y\|$$

$$\therefore\ \langle TX,TY\rangle=\langle X,Y\rangle,\ \forall\ X,Y\in V$$

**نتيجة:** المؤثرات العيارية تحافظ على الزوايا بين المتجهات وذلك لأن

$$\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}=\frac{\langle TX,TY\rangle}{\|TX\|\|TY\|}$$

عكس هذه النتيجة ليس صحيحا ونوضح ذلك بالمثال العكسي.

**مثال (١٣):** المؤثر $TX=2X$ مؤثر يحافظ على الزوايا بين المتجهات

ولكنه لا يحافظ على أطوال المتجهات وحاصل ضربها القياسي.

فيما يلي سنقتصر دراستنا على الفراغات الاقليدية (فراغات محددة البعد ولها أساس معياري متعامد) في هذه الحالة يسمى المؤثر المعياري بالمؤثر العمودي وتسمى المصفوفة المناظرة للمؤثر العمودي بالمصفوفة العمودية.

**نظرية (٨.٨)**: إذا كان $T$ مؤثر عمودي على الفراغ الاقليدي $V_n(R)$ وكانت المصفوفة المناظرة للمؤثر $T$ بالنسبة لأساس عياري متعامد في $V_n(R)$ فإن $A A^t = I$

البرهان:

نفرض أن $x_1, x_2, ..., x_n$ متجهات عيارية متعامدة أي أن :

$$\langle x_i , x_j \rangle = \delta_{ij}$$

وأن :

$$T x_1 = a_{11} x_1 + ... + a_{1n} x_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$T x_n = a_{n1} x_1 + ... + a_{nn} x_n$$

وحيث أن $T$ يحافظ على حاصل الضرب القياسي وأطوال المتجهات والزوايا بين المتجهات فإن :

$$\langle T x_i , T x_j \rangle = \langle x_i , x_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$= a_{i1} a_{j1} + a_{12} a_{2j} + ... + a_{in} a_{jn} = \delta_{ij} \qquad (*)$$

ومن ذلك نستنتج

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & o \\ & 1 & \\ o & & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore\ A^t A = A A^t = I \Rightarrow A^t = A^{-1}$$

**نتائج:** في المصفوفة العمودية A يكون $|A| = \pm 1$

وذلك لأن :

$$A^t A = I \Rightarrow |I| = 1 = |A^t||A| = |A|^2$$

$$\therefore\ |A| = \pm 1$$

كذلك من العلاقة (*) نستنتج أن الصفوف (الأعمدة) في المصفوفة A تكون متجهات عيارية متعامدة وأيضاً معكوس المصفوفة العمودية مصفوفة عمودية.

جميع الخصائص التي سبق دراستها واستنتاجها على المؤثرات العيارية تكون صحيحة أيضاً على المصفوفات العمودية.

## تمارين (٨)

(١) نفرض أن $B = \{(0,1),(1,3)\}$ أساس للفراغ $V_2$ ونعرف $\langle\,,\,\rangle_B$ بالآتي :

$$\langle u , v \rangle_B = a_1\, a_2 + b_1\, b_2$$

حيث $v : (a_1, b_1)_B \,, u : (a_2, b_2)_B$

(i) أوجد $\langle (0,1),(0,1) \rangle_B , \langle (1,3),(1,3) \rangle_B , \langle (0,1),(1,3) \rangle_B$

(ii) بين أن $\langle\,,\,\rangle_B$ دالة ضرب داخلي.

(iii) بين أنه إذا كان $v : (a, b)_B$ فإن :

$$\langle v , (0,1) \rangle_B = a \,, \langle v , (1,3) \rangle_B = b$$

(٢) نفرض أن $B = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ أساس للفراغ $R_3[t]$ وتعرف $\langle\,,\,\rangle_B$ كالآتي :

$$\langle v , w \rangle_B = \sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i \,, v : (a_1, ..., a_3)_B \,, w : (b_1, ..., b_3)_B$$

احسب $\langle 1+t , 1+t \rangle_B , \langle 1 , 1+t+t^2 \rangle_B$

(٣) نفرض أن $x, y, z$ أعداد حقيقية اختيارية ليست جميعها أصفاراً هل الدالة ثنائية الخطية bilinear

$$f((a,b),(c,d)) = (a \quad b)\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

تعرف ضرب داخلي على المستوى $V_2$.

(٤) بين أن $\langle u , v \rangle^2 = \| u \|^2 \| v \|^2$ إذا كان وكان فقط u, v مرتبطين خطياً.

(٥) استخدم طريقة جرام شميدت للحصول على أساس عياري متعامد للفراغات المولدة بالمجموعات الجزئية الآتية في الفراغ $E_n$

(i) $\{ (2, 0, 0) , (3, 0, 5) \}$

(ii) $\{ (2, 2, 2, 2) , (3, 2, 0, 3) , (0, -2, 0, 6) \}$

(٦) كون أساس عياري متعامد من $\{1, t, t^2\}$ لفراغ الضرب الداخلي $(R_3[t], \langle , \rangle)$ حيث

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) \, dt$$

(٧) أوجد $S^\perp$ للمجموعات الجزئية S من $E_n$

(i) $S = L \{ (2, 1, 4) , (1, 3, 1) \}$

(ii) $S = L \{ (1, 3) \}$

(٨) بين أن محصلة تحويلات خطية عمودية هو تحويل خطي عمودي.

(٩) أن محصلة دورانيين في $E_2$ هو دوران.