الباب الثاني

مقدمة في المصفوفات والمحددات

Determinates and Matrices

في هذا الباب سوف نعرض المفاهيم الأساسية في نظرية المصفوفات والمحددات وكذلك نذكر بعض العمليات البسيطة على المصفوفات مثل جمع وطرح وضرب وقسمة المصفوفات وكذلك المحددات والعمليات الجبرية عليها وعلاقة المحددات بالمصفوفة وتطبيق المحددات في حل نظام من المعادلات الخطية.

(١.٢) تعريف المصفوفة وخواصها:

المصفوفة من رتبة $m \times n$ هي ترتيب array لكميات تنتمي إلى حقل ما F في m من الصفوف، n من الأعمدة على شكل مستطيل rectangular matrix في الصورة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتكتب في الصورة الرمزية الآتية: $A = [a_{ij}], 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$، وتسمى a_{ij} عناصر المصفوفة سواء كانت حقيقية أو مركبة. ومن الآن فصاعدا سوف نرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة ... A, B, C, D, ولعناصرها بالرموز $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots$.

فمثلا المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة 2×3 أي تتكون من صفين وثلاثة أعمدة والمصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ من رتبة $1\times n$ أي مصفوفة ذات صف واحد، و n من الأعمدة وتسمى مصفوفة صف row matrix. وكذلك المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ من رتبة $m\times 1$ أي لها m من الصفوف، عمود واحد وتسمى مصفوفة عمود column matrix وإذا كانت $n=m$ أي عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة تسمى المصفوفة A بمصفوفة مربعة square matrix وتكتب في الصورة :

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ وهي مصفوفة من الدرجة $n\times n$ وتسمى العناصر $a_{ii}\ (i=1,2,3,\dots,n)$ في المصفوفة المربعة A بعناصر القطر الرئيسي أو العناصر القطرية ونسمي حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة أثر المصفوفة trace ويرمز له بالرمز $Tr(A)$ أي أن:

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$$

(٢.٢) العمليات الجبرية على المصفوفات: Algebraic operations

تعريف (١) : يقال لمصفوفتين $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ أنهما متساويتان أي A=B إذا وإذا فقط كان كل عنصر من A مساوياً للعنصر المقابل له من B أي إذا كان وكان فقط: $a_{ij}=b_{ij}\ ,\ \forall i, j$

تعريف (٢): تسمى المصفوفة التي كل عناصرها أصفاراً بالمصفوفة الصفرية Zero (null) matrix ويرمز لها بالرمز O.

تعريف (٣): يقال للمصفوفتين $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}]$ أنهما قابلتان للجمع (الطرح) إذا كان عدد أعمدة A مساوياً عدد أعمدة B وعدد صفوف A مساوياً لعدد صفوف B أي لهما نفس الأبعاد ويكون $A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]$

مثال (١): إذا كانت $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

بالمثل يكون $A-B=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{bmatrix}$

مثال (٢): إذا كانت $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد A-B& A+B

الحل:
$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 7 & -3\\ 4 & -1 & -2\\ 5 & -3 & 2\\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}, A-B=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -6\\ -3 & 1 & 2\\ 3 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

نظرية (١): إذا كانت A, B, C قابلة للجمع فإنه يكون:

خاصية الإبدال	Commutative	(i) $A + B = B + A$
خاصية الدمج	Associative	(ii) $(A+B) + C = A+(B+C)$
العنصر المحايد	identity	(iii) $A + O = O+A = A$
المعكوس	inverse	(iv) $A - A = O$
خاصية الحذف	canciliation	(v) If $A + B = A + C \Rightarrow B = C$

البرهان:

يمكن للطالب برهان الخواص السابقة ومنها يمكن إثبات أن :

نظرية (٢): مجموعة المصفوفات ذات الأبعاد $n \times n$ تكون زمرة إبدالية مع عملية الجمع.

تعريف (٤): إذا كان $k \in F$ أي عدد حقيقي أو تخيلي فإن حاصل الضرب $k\,A$ هو المصفوفة التي عناصرها $k\,a_{ij}$ أي إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=(a_{ij})$$

$$k\,A=\begin{bmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} & \dots & k\,a_{1n} \\ k\,a_{21} & k\,a_{22} & \dots & k\,a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\,a_{n1} & k\,a_{2n} & \dots & k\,a_{nn} \end{bmatrix}=(k\,a_{ij})$$

إذا كان c, k أي عددان، A, B مصفوفتان قابلتان للجمع فإن الخواص التالية تكون محققة:

(i) $k(A+B)=kA+kB$ (ii) $(c+k)A=cA+kA$

(iii) $c(kA)=c\,k\,A$ (iv) $1\,.\,A=A$

تعريف (٥): المصفوفتان A, B تكونان قابلتان للضرب $A\,B$ إذا وإذا فقط كان عدد أعمدة الأولى مساويا لعدد صفوف الثانية. أي إذا كان $A=[a_{ik}], B=[b_{kj}]$ مصفوفتان ذات الأبعاد $m\times n, n\times s$ على الترتيب فإن $A\,B=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}\right)=(c_{ij}), c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj}$

حيث $A\,B$ مصفوفة ذات الأبعاد $m\times s$

مثال (٣): إذا كان $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

واضح أن A, B قابلتان للضرب فإن:

$$A\,B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

مثال (٤): إذا كان $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ احسب AB

الحل: نلاحظ أن أعمدة A تساوي عدد صفوف B أي تكون المصفوفتان A, B قابلتان للضرب ويكون :

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1+1.5 & 2(-2)+1.3\\ 3.1+4.5 & 3.(-2)+4.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 23 & 6\end{bmatrix}$$

الخواص التالية تعطي خواص الدمج والتوزيع لضرب المصفوفات وهذه الخواص تناظر خواص الدمج والتوزيع في حالة حقول الأعداد، ويمكن ذكر هذه الخواص من خلال النظرية الآتية :

نظرية (٣): نفرض أن A, B, C مصفوفات متوافقة بالنسبة للجمع والضرب فإن الخواص التالية تكون محققة:

(i) $A(BC)=(AB)C$

(ii) $A(B+C)=AB+AC$

(iii) $(A+B)C=AC+BC$

(iv) $AB=0 \nRightarrow A=0, B=0$

(v) $AB=AC \nRightarrow B=C$

(vi) $AB \neq BA$

البرهان :

ويمكن للطالب برهان الخواص (i), (ii), (iii) بسهولة.

ولتوضيح الخواص (iv), (v), (vi) نعطي الأمثلة التالية:

إذا كانت $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 5 & 5\end{bmatrix}$

نلاحظ أن: $AB=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O$ بالرغم من أن $A\neq O, B\neq O$ وهذا يوضح الخاصية (iv).

وللطالب أن يلاحظ الاختلاف الكبير بين ضرب الكميات القياسية وضرب المصفوفات فإذا كانت A, B كميتين قياسيتين فإن: $B = 0$ أو $AB=0 \Rightarrow A=0$

ولتوضيح الخاصية (v) نعطي المثال الآتي:

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&4&1&0\\2&1&1&1\\1&-2&1&2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2&1&-1&-2\\3&-2&-1&-1\\2&-5&-1&0\end{bmatrix}$$

من السهل أن نجد أن $AB = AC$ ولكن $B\neq C$.

ولتوضيح الخاصية (vi) نعطي المثال التالي :

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $AB\neq BA$ أي أن عملية الضرب لا تحقق خاصية الإبدال.

قسمة المصفوفات:

على الطالب ملاحظة أنه لا وجود لقسمة مصفوفة على مصفوفة فإذا كانت A, B مصفوفتين فإن $\frac{A}{B}$ غير موجود ولكن إذا كانت B^{-1} موجودة فإن العملية المكافئة AB^{-1} أو $B^{-1}A$ هي المعرفة على المصفوفات.

يسمى B^{-1} معكوس المصفوفة B وسوف ندرس كيفية إيجاد معكوس المصفوفة فيما بعد.

التجزيء Partitioning

في حالة المصفوفة ذات الأبعاد الكبيرة نجزئ المصفوفة إلى مجموعة من المصفوفات الجزئية فمثلا:
$$A = \left[a_{ij}\right] \Leftrightarrow A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

وكذلك
$$B = \left[b_{ij}\right] \Leftrightarrow B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

ويمكن استخدام هذا التجزيء في العمليات المختلفة على المصفوفات فعملية الضرب مثلا
$$A\,B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

مثال (٥): استخدم طريقة التجزيء في حساب $A\,B$

حيث
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:
$$A\,B = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال (٦): إذا كانت $A=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ P & -I_2 \end{array}\right)$ حيث I_2 مصفوفة الوحدة، $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ أثبت أن $A^2=I_4$.

الحل:

$$A^2=A\ A=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline P & -I_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline P & -I_2 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline P-P & I_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline O & I_2 \end{array}\right)=I_4$$

تعريف (٦): إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ فإن مدور المصفوفة A (المصفوفة البديلة Matrix Transpose) هو المصفوفة الناتجة من جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف ونرمز له بالرمز A^T وتعرف كما يلي:

$$A^T=\left[a_{ji}\right]$$

مثال (٧): إذا كان $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ فإن $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$

ويجب على الطالب ملاحظة أنه لأي مصفوفتين A, B يمكن بسهولة إثبات صحة العلاقات الآتية:

(i) $(A\,B)^T=B^T\,A^T$ (ii) $(A+B)^T=A^T+B^T$

(iii) $(k\,A)^T=k\,A^T$

تعريف (٧): إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان $a_{ij}=0, \forall\, i>j$ فإن المصفوفة تسمى مثلثية عليا Upper triangular matrix. وإذا كان $a_{ij}=0, \forall\, i<j$ فإن المصفوفة تسمى مصفوفة مثلثية سفلى Lower triangular matrix أي يكون كل منهما على الصورة

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ & & & \\ 0 & 0 & & a_{nm}\end{bmatrix}$$ مصفوفة مثلثية عليا.

$$\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}\end{bmatrix}$$ مصفوفة مثلثية سفلى.

وتسمى المصفوفة المربعة $D=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ وهي على صـــورة مصفوفة مثلثية عليا وسفلى بالمصفوفة القطرية (Diagonal Matrix) وعـادة تكتب على الصورة : $D=\text{diag}(a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn})$

أما إذا كانت $a_{ii}=\lambda, \forall i=1,,\dots,n$ أي $D=\text{diag}(\lambda\ \ \lambda \dots \lambda)$ فإن المصفوفـة تسمى بالمصفوفة العاملية Scalar Matrix.

أما إذا كانت $\lambda=1$ فإن $I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ تســمى بمصفوفــة الوحــدة Identity Matrix.

والمصفوفات السابقة لها الخواص التالية :

(i) إذا كانت A, B مصفوفتان قطريتان لهما نفس الأبعاد فـإن A+B, A-B, A B, BA تكون مصفوفات قطرية.

(ii) إذا كانت A, B مصفوفتان مثلثيتان عليا (سفلى) لهما نفس الأبعاد فــإن: A+B, A-B, AB تكون أيضا مصفوفات مثلثية عليا (سفلى).

تعريف (٨): لأي مصفوفة مربعة A إذا كان $A=A^T$ فــإن المصفوفــة A تسمى مصفوفة متماثلة Symmetric Matrix

وعلى ذلك يكون شرط التماثل هو: $a_{ij}=a_{ji}, \forall i, j$

مثال (٨): إذا كان $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 5 & 1 & 8\\ 7 & 8 & 2\end{bmatrix}$ فإن $A^T=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 5 & 1 & 8\\ 7 & 8 & 2\end{bmatrix}$ ومن ذلك تكون المصفوفة A متماثلة.

تعريف (٩): المصفوفة المربعة A والتي تحقق الشرط $A=-A^T$ تسمى مصفوفة شبه متماثلة Skew Symmetric Matrix أي يكون:

$$a_{ij}=-a_{ji} \qquad (*)$$

وعلى الطالب أن يلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة شبه المتماثلة يجب أن يكون أصفاراً وذلك لأنه بوضع $i=j$ في (*) فإننا نحصل على

$$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow 2a_{ii}=0\Rightarrow a_{ii}=0,\ \forall i=j$$

وعلى هذا الأساس المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ -3 & 0 & 1\\ -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$ تكون شبه متماثلة.

ولكن المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ -3 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$ ليست شبه متماثلة.

تعريف (١٠): المصفوفة الهيرميتية Hermitian Matrix هي مصفوفة مربعة عناصرها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة وتحقق الشرط :

$$A=\overline{A}^T$$

حيث (-) تمثل عملية الترافق (مرافق العدد المركب $z=x+iy$ هو $\overline{z}=x-iy$) أي تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]$ مصفوفة هيرميتية إذا كان

$$a_{ij}=\overline{a_{ji}}\ ,\forall i,j \qquad (*)$$

فمثلاً المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 5 & -1+i & \sqrt{5}-i \\ -1-i & 6 & 1+3i \\ \sqrt{5}+i & 1-3i & 7 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة هيرميتية.

وعلى الطالب أن يلاحظ أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الهرميتية يجب أن يكون أعداداً حقيقية (وذلك بوضع $i=j$ في (*) ومن تعريف الترافق ينتج المطلوب).

تعريف (١١): تسمى A مصفوفة شبه هيرميتية Skew Hermitian Matrix إذا تحقق $A=-\overline{A}^{T}$ أي يكون

$$a_{ij}=-\overline{a_{ji}} \qquad (*)$$

وعلى الطالب ملاحظة أن المصفوفة شبه الهرميتية يكون عناصر قطرها الرئيسي كميات مركبة (وذلك بوضع $i=j$ في (*) واستخدام خواص الأعداد المركبة).

فمثلاً المصفوفة $A=\begin{bmatrix} -i & 1+i & 3 \\ -1+i & i & 5-3i \\ -3 & -5-3i & 3i \end{bmatrix}$ هي مصفوفة شبه هيرميتية.

تعريف (١٢): يقال أن المصفوفة A أنها دورية ودورتها k إذا تحقق $A^{k+1}=A, k\in z^{*}$ وإذا كانت $k=1$ أي إذا كان $A^2=A$ حيث $A^2=A\,.\,A$ فإننا نقول أن A متساوية القوى Idempotent وهذا يؤدي إلى أن $A^k=A, k\in z^{+}$ حيث $A^k=A^{k-1}A$

فمثلاً المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة دورية لأن:

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}=A$$

وهذا يؤدي إلى أن

$$A^3=A^2\,A=A\,A=A^2=A$$

$$A^4=A^3\,A=A\,A=A^2=A$$

تعريف (١٣): يقال لمصفوفة A أنها ملتفة إذا تحقق $A^2=I$

مثال (٩): أثبت أن A تكون ملتفة إذا كان وكان فقط $(I-A)\,(I+A)=0$.

الحل: نفرض أن $(I-A)\,(I+A)=0$ وبفك الأقواس نحصل على $I-A^2=0$ أو $A^2=I$ أي أن A مصفوفة ملتفة.

نفرض أن A ملتفة أي $A^2=I$ فإن $(I-A)(I+A)=I-A^2=I-I=0$

تعريف (١٤): تسمى المصفوفة A التي تحقق الخاصية: $A^p=0\,,p\in z^+$ مصفوفة معدومة القوى من الرتبة p حيث p أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة $A^p=0$ Nilpotent.

فمثلاً المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ مصفوفة معدومة القوى من الرتبة 3

لأن:
$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 3 & 9\\-1 & -1 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=A^2\,.\,A=0$$

(٢.٢) المحددات

نفرض أنه أعطي جدول مربع من تسعة أعداد

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ومحدد الرتبة الثالثة المناظر للجدول (1) هو العدد الذي يرمز له بالرمز :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ويحدد بالمتساوية

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \tag{2}$$

$$a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

وتسمى الأعداد $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ بعناصر المحدد. وتقع العناصر a_1, b_2, c_3 على القطر الرئيسي للمحدد. وتكون العناصر a_3, b_2, c_1 قطر المحدد الثانوي.

ونلاحظ أن الحدود الثلاثة الأولى في الطرف الأيمن للمتساوية (2) هي عبارة عن حواصل ضرب كل ثلاثة عناصر من عناصر المحدد كما هو موضح بالخطوط المختلفة على الرسم التالي:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

وللحصول على الحدود الثلاثة الأخرى في الطرف الأيمن للمتساوية (2) لابد من ضرب كل ثلاثة عناصر من عناصر المحدد في بعضها بالطريقة الموضحة بالخطوط المختلفة في الرسم السابق، ثم تغيير إشارة كل حاصل ضرب ينتج.

وتكفل القاعدة المذكورة الآن والتي تسمى بقاعدة المثلثات كتابة العلاقة (2) دون إجهاد للذاكرة، كما تكفل أيضا حساب المحدد من الرتبة الثالثة عندما تكون عناصره أعداد معطاة (دون كتابة العلاقة (2) مسبقا). فعلى سبيل المثال:

مثال (١):

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3.1.(-2) + (-2).3.2 + (-2).0.1 - $$
$$-2.1.1 - 3.0.3 - (-2).(-2).(-2) = -12$$

تطبق المحددات على نطاق واسع سواء في الرياضيات نفسها أو تطبيقاتها المختلفة. وسنبين فيما بعد تطبيق المحددات من الرتبة الثالثة في مسألة دراسة وحل مجموعات من ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل. ولكننا سنضطر أولا إلى التعرف على بعض خواص المحددات. وسنجري كل التوضيحات والبراهين المتعلقة بهذه الخواص آخذين في الاعتبار المحددات من الرتبة الثالثة. غير أن كل هذه الخواص إنما تتمتع بها المحددات من كل الرتب.

خواص المحددات:

١ـ لا تتغير قيمة المحدد إذا استبدلت كل صفوفه بأعمدته، وعند ذلك يستبدل كل صف بالعمود الذي يحمل نفس الرقم، أي

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

ويمكن أيضاً التعبير عن هذه الخاصية كالتالي: إذا تبدلت أماكن عناصر المحدد الواقعة متماثلة بالنسبة للقطر الرئيسي، لا تتغير قيمة المحدد.

ولإثبات هذه الخاصية يكفي تطبيق قاعدة المثلثات على الطرف الأيمن والطرف الأيسر للمتساوية (3) ومقارنة النتائج.

ملاحظة (١): الخاصية (١) تكافؤ صفوف وأعمدة المحدد، ولذا يكفي في المستقبل إثبات خواص المحدد المتعلقة بصفوفه وأعمدته لحالة صفوفه فقط أو أعمدته فقط.

٢ـ إن تبديل مكاني عمودين أو صفين في المحدد يكافئ ضربه في (1-).
فعلى سبيل المثال

مثال (٢):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ولإثبات المتساوية (4) يكفي تطبيق قاعدة المثلثات على طرفيـــــها الأيمـــن والأيسر ومقارنة النتائج (وبالمثل تنشأ المتساويات المتشابهة في حالة تبديـل أي صفين آخرين في المحدد).

٣ــ إذا كان للمحدد صفان متساويا العناصر المناظرة أو عمودان متســـاويا العناصر المناظرة يكون المحدد مساوياً للصفر.

بالفعل، نفرض أن Δ محدد ما فيه عمودان عناصرهما المناظرة متســاوية. وإذا بدلنا مكاني هذين العمودين فإن المحدد من ناحية (وفقاً للخاصيـــة (٢)) يغير إشارته، ولكن من ناحية أخرى (نظراً لأن العموديـــن متســاويان) لا يمكن أن يؤدي تبادل مكانيهما إلى تغيير قيمة المحدد. وبالتالي فإن $\Delta=-\Delta$، أي أن $2\Delta=0$ أو $\Delta=0$.

مثال (٣):
$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 17 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

٤ــ ضرب كل عناصر عمود واحد أو صف واحد للمحدد في أي عـــدد k يكافئ ضرب المحدد في هذا العدد k.

ويمكن التعبير عن هذه الخاصية أيضاً كالتـــالي: يمكــن إخــراج العـــامل المشترك لعمود واحد أو لصف واحد في المحدد خارج علامة المحدد كلــه. فعلى سبيل المثال

$$\begin{vmatrix} k a_1 & b_1 & c_1 \\ k a_2 & b_2 & c_2 \\ k a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ولإثبات هذه الخاصية يكفي أن نشير إلى أن المحدد يصاغ على صورة مجموع يحتوي كل حد من حدوده على عنصر من كل صف ومن كل عمود (انظر الخاصية (2)).

٥ـ إذا كانت كل عناصر عمود ما أو صف ما تساوي صفرا فإن المحدد نفسه يكون مساويا للصفر. وهذه الخاصية هي حالة خاصة من الخاصية السابقة (عندما $k = 0$) فعلى سبيل المثال:

مثال (٤):
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

٦ـ إذا كانت العناصر المناظرة لعمودين أو لصفين متناسبة فإن المحدد يكون مساويا للصفر.

تنتج هذه الخاصية من الخاصيتين ٣، ٤. فبالفعل إذا كانت عناصر عمودين متناسبة فإن عناصر أحد هذين العمودين تنتج من عناصر الآخر بضربها في معامل مشترك، وبإخراج هذا المعامل خارج علامة المحدد نحصل على محدد ذي عمودين عناصرهما المناظرة متساوية ووفقا للخاصية ٣ يكون هذا المحدد مساويا للصفر. فعلى سبيل المثال.

مثال (٥):
$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

٧ـ إذا كان كل عنصر من عناصر العمود رقم n (أو الصف رقم n) للمحدد عبارة عن مجموع حدين، فإنه يمكن التعبير عن المحدد في صورة مجموع محددين يحتوي أحدهما في عموده رقم n (أو في صفه

رقم n) على الحدود الأولى من الحدود المذكورة سابقا، والثاني على الحدود الثانية، وتكون العناصر في باقي الأماكن في كل المحددات الثلاثة هي نفسها، فعلى سبيل المثال

مثال (٦):

$$\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'+a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ولإثبات هذه المتساوية، يكفي تطبيق قاعدة المثلثات على المحددات في الطرفين ومقارنة النتائج.

٨ــ إذا أضيفت إلى عناصر عمود ما (أو صف ما) العناصر المناظرة في عمود آخر (أو في صف آخر)، مضروبة في أي معامل مشترك، لا تتغير قيمة المحدود عند ذلك.

والخاصية ٨ تنتج من الخاصيتين ٦، ٧ : ولنوضح هذا بمثال. نفرض أنه أضيفت إلى عناصر العمود الأول عناصر العمود الثاني مضروبة في عدد ما k. عندئذ نحصل، وفقا للخاصية ٧، على :

$$\begin{vmatrix} a_1+k\,b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k\,b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k\,b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k\,b_1 & b_1 & c_1 \\ k\,b_2 & b_2 & c_2 \\ k\,b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وللمحدد الثاني من المحددين الناتجين عمودان متناسبا العناصر. وبالتالي ووفقا للخاصية ٦ يكون مساويا للصفر، فنحصل على المتساوية التالية:

$$\begin{vmatrix} a_1+k\,b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k\,b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k\,b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

التي تعبر، في هذه الحالة، عن الخاصية ٨ المذكورة للمحدد.

وترتبط الخواص الأخرى للمحددات بمفهوم المكمل الجبري أو المرافق الأصغر (minor).

٩ـ إذا كانت A مصفوفة قطرية أو مثلثية عليا أو سفلى فإن محدد A هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي أي يكون:

$$\text{Det}(A) = |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

المكملات الجبرية (المرافقات) والمحددات الصغرى (المحيددات)
Cofactors and minors

ندرس المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

ووفقا للتعريف فإن قيمة المحدد هي:

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 \qquad (2)$$

نجمع هنا الحدود المحتوية على عنصر واحد ما من عناصر المحدد ثم نخرج هذا العنصر خارج قوسين. ويسمى المقدار المتبقي داخل القوسين بالمكمل الجبري أو المرافق لهذا العنصر. وسنرمز إلى المكمل الجبري بحرف كبير بنفس تسمية الحرف الذي يرمز إلى نفس العنصر وبنفس رقمه. فمثلا نرمز إلى المكمل الجبري للعنصر a_1 بالحرف A_1، وللعنصر b_1 بالحرف B_1 وهكذا.

٩ــ المحدد يساوي مجموع حواصل ضرب عناصر عمود ما (أو صــــف) في مكملاتها الجبرية أو مرافقاتها. أو بعبارة أخرى تكون المتســاويات التالية صحيحة:

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \quad ، \quad \Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 \quad (3)$$

$$\Delta = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 \quad ، \quad \Delta = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 \quad (4)$$

$$\Delta = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 \quad ، \quad \Delta = a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 \quad (5)$$

ولإثبات المتساوية الأولى من هذه المتساويات، على سبيل المثال، يكفــي أن نكتب الطرف الأيمن للعلاقة (2) في الصورة :

$$\Delta = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 + b_2 c_1)$$

حيث المقادير داخل الأقواس هي عبارة عن المكملات الجبريـــة للعنــاصر a_1, a_2, a_3 أي أن:

$$b_2 c_3 - b_3 c_2 = A_1 ;\ b_3 c_1 - b_1 c_3 = A_2 , b_1 c_2 - b_2 c_1 = A_3$$

ومن هنا، ومما سبق نحصل على: $\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$

وهو المطلوب إثباته. ونثبت المتساويات الأخرى (5 -3) بالمثل.

وتسمى طريقة كتابة المحدد وفقا لعلاقة من العلاقات (5-3) بفــك المحــدد بعناصر عمود ما أو صف ما (تعطى العلاقة الأولى مفكوك المحدد بعناصر العمود الأول والخ ...).

المحدد الأصغر (المحيدد) لعنصر ما من عناصر المحدد هو المحدد النــاتج من المحدد المعطى بواسطة شطب العمود والصف الذي يقع في تقاطعــهما هذا العنصر. فعلى سبيل المثال المحدد الأصغر للعنصر a_1 في المحدد Δ

هو المحدد $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ والمحدد الأصغر للعنصر b_1 هو المحدد $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ وهكذا.

ويتضح أن المكمل الجبري cofactor لأي عنصر من عناصر المحدد يساوي المحدد الأصغر لهذا العنصر مأخوذا بإشارته، إذا كان مجموع رقمي العمود والصف اللذين يقع في تقاطعهما هذا العنصر عددا زوجيا، وبإشارة مخالفة إذا كان هذا المجموع عددا فرديا. ولكي يتأكد الطالب من صحة هذه المقولة عليه أن يدرس المكملات الجبرية لكل عناصر المحدد ويقارنها بالمحددات الصغرى.

ويسهل الموضوع المذكور أعلاه كثيرا باستخدام العلاقات (3-5) بشكل جوهري، إذ يكفل كتابة المكملات الجبرية لعناصر المحدد بمجرد النظر إلى هذا المحدد ومباشرة. وعند ذلك فمن المفيد أيضا الأخذ في الاعتبار الجدول التالي:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

حيث الإشارة الموجبة تعلم أماكن تلك العناصر التي مكملاتها الجبرية تساوي محدداتها الصغرى مأخوذة بنفس إشارتها.

مثال (٧): احسب المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix} = \Delta$ بفكه عن طريق عناصر الصف الأول.

الحل: $$\Delta = 2\begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8$$

ملاحظة (٢): يمكن تسهيل حساب المحدد بواسطة فكه بعناصر عمود أو صف، إذا حولنا هذا المحدد مسبقا بالاستعانة بالخاصية ٨. وبالذات، بضرب عناصر عمود ما (أو صف ما) في أي معامل مشترك ثم بعد ذلك بإضافتها إلى عناصر عمود آخر (أو صف آخر) نحصل على محدد جديد مساو للمعطى، وعند الاختيار المناسب للمعامل المشترك يمكن التوصل إلى أن يكون أحد عناصر المحدد الناتج مساويا للصفر. وبتطبيق هذه العملية مرتين نحصل على محدد يكون عنصران من عناصر أحد صفوفه (أو أعمدته) مساويين للصفر. ولحساب مثل هذا المحدد بواسطة فكه بعناصر الصف المذكور (أو العمود) يتحتم علينا أن نحسب محددا أصغر واحدا فقط، نظرا لأن المحددين الأصغرين الآخرين يكونان مضروبين في هذه الحالة في عنصرين مساويين للصفر. وهكذا، فمثلا، بحساب المحدد Δ الوارد في المثال السابق نضيف إلى عناصر عموده الثاني عناصر عموده الأول مضروبة في (2-) ثم نضيف إلى عناصر عموده الثالث عناصر عموده الأول مضروبة في (3-) فنحصل على :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

وبفك هذا المحدد بعناصر الصف الأول نجد أن:

$$\Delta = 2.\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

سنعرض هنا عدة صيغ هامة لحل ودراسة مجموعات المعادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل (تستخدم صيغ مماثلة تتعلق بالمحددات من الرتب الأعلى من الثالثة لحل ودراسة مجموعات المعادلات من الدرجة الأولى في أي عدد من المجاهيل).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

نفكه بعناصر صف ما أو عمود ما، مثلا بعناصر العمود الأول:

$$\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \qquad (6)$$

نستبدل في الطرف الأيمن لهذه المتساوية الأعدد a_1, a_2, a_3 بأية ثلاثة أعداد h_1, h_2, h_3، عندئذ يكون الطرف الأيمن للمتساوية (6) هو عبارة عن مفكوك بعناصر العمود الأول للمحدد الذي ينتج من المحدد Δ باستبدال عناصر عموده الأول بالأعداد h_1, h_2, h_3 :

$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

نختار الآن بمثابة h_1, h_2, h_3 عناصر العمود الثاني أو الثالث للمحدد المعطى (أي نأخذ $h_1 = b_1, h_2 = b_2, h_3 = b_3$ أو نأخذ $h_1 = c_1, h_2 = c_2,$ $h_3 = c_3$). وفي هذه الحالة يكون للمحدد (7) عمودان متساويا العناصر، وبالتالي يكون هذا المحدد مساويا للصفر، فنحصل على المتساوية:

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0 \qquad (8)$$

أو

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0 \tag{9}$$

وإذا انطلقنا في البداية من مفكوك Δ بعناصر عموده الثاني، فإننا نحصل بطريقة مشابهة على المتساويتين:

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0, \tag{10}$$

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3 = 0 \tag{11}$$

وانطلاقا من مفكوك Δ بعناصر عموده الثالث، نحصل على المتساويتين:

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0, \tag{12}$$

$$b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0 \tag{13}$$

وعلاوة على ذلك تنتج ست متساويات مماثلة لصفوف المحدد.

وعلى أساس ما سبق عرضه يمكننا أن نصيغ الخاصية التالية للمحددات:

١٠ـ مجموع حواصل ضرب عناصر عمود ما (أو صف ما) للمحدد في المكملات الجبرية للعناصر المناظرة في عمود آخر (أو صف آخر) يساوي صفرا.

(٣.٢) حل مجموعة من المعادلات الخطية باستخدام المحددات:

حل ودراسة مجموعة الثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل:

ندرس مجموعة الثلاث معادلات

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= h_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= h_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= h_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

في المجاهيل x, y, z (نفرض أن المعاملات $a_1, b_1, \ldots, c_3$ والحدود المطلقة h_1, h_2, h_3 معلومة).

ويسمى ثلاثي الأعداد x_o, y_o, z_o بحل المعادلة (1) إذا حققت هذه الأعداد معادلات المجموعة (1)، أي عند استبدال الرموز x, y, z بالأعداد x_o, y_o, z_o تتحول كل معادلة من المجموعة (1) إلى متطابقة حسابية. نقوم بإيجاد كل حلول المجموعة (1)، وأثناء ذلك نجري بحثها ودراستها، أي بالذات نوضح في أي الحالات يكون للمجموعة (1) حل واحد فقط، وفي أي الحالات يكون لها أكثر من حل، وفي أي الحالات لا يكون لها حلول على الإطلاق.

وفي التحليل التالي سيلعب المحدد دورا رئيسيا :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

المكون من معاملات المجاهيل، وهو ما يسمى بمحدد المجموعة المعطاة.

سنرمز كما سبق إلى المكملات الجبرية للعناصر $a_1, a_2, \ldots$ للمحدد Δ بالرموز $A_1, A_2, \ldots$. نضرب طرفي المعادلة الأولى من المجموعة (1)

في A_1 والثانية في A_2 والثالثة في A_3 ثم نجمع هذه المعادلات حدا حـــدا فنحصل على

$$\left(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3\right)x+\left(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3\right)y+$$
$$+\left(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3\right)z=\left(h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3\right)$$

ومن هنا وعلى أساس الخاصيتين ٩، ١٠ نحصل على :

$$\Delta . x=h_1\ A_1+h_2\ A_2+h_3\ A_3 \qquad (3)$$

وبالمثل نجد أن:

$$\Delta . y=h_1\ B_1+h_2\ B_2+h_3\ B_3 \qquad (4)$$

$$\Delta . z=h_1\ C_1+h_2\ C_2+h_3\ C_3 \qquad (5)$$

نرمز للأطراف اليمنى للمتساويات (5) ,(4) ,(3) على الـــترتيب بـــالرموز $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$. عندئذ تأخذ المعادلات (5) ,(4) ,(3) الصورة

$$\Delta . x=\Delta_x,\Delta . y=\Delta_y,\Delta . z=\Delta_z \qquad (6)$$

حيث

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1\\ h_2 & b_2 & c_2\\ h_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1\\ a_2 & h_2 & c_2\\ a_3 & h_3 & c_3\end{vmatrix},\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1\\ a_2 & b_2 & h_2\\ a_3 & b_3 & h_3\end{vmatrix} \qquad (7)$$

ومن المفيد أن نشير إلى أن المجددات $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ تنتج مـــن المحـــدد Δ بواسطة استبدال عموده الأول والثاني والثالث على الترتيب بعمود الحـــدود المطلقة للمجموعة المعطاة.

نفرض أن $\Delta\neq 0$، وفي حالة تحقق هذا الشرط نحصل من المعـــادلات (6) على :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \quad , \quad \Delta \neq 0 \qquad (8)$$

ومن الواضح أن هذه العلاقات تعطي حل المجموعة المستنبطة المكونة من المعادلات (6)، وهي نفسها تعطي أيضا حل المجموعة الأصلية (1). ولإثبات ذلك يجب التعويض في معادلات المجموعة (1) عن x, y, z بصيغها (8) والتأكد من تحقق كل معادلة من المجموعة (1). وبإجراء هذا التعويض للمعادلة الأولى، نجد أن:

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta}+b_1\frac{\Delta_y}{\Delta}+c_1\frac{\Delta_z}{\Delta}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}a_1\left(h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3\right)+\frac{1}{\Delta}b_1\left(h_1B_1+h_2B_2+h_3B_3\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta}c_1\left(h_1C_1+h_2C_2+h_3C_3\right)=\frac{1}{\Delta}h_1\left(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1\right)+$$

$$+\frac{1}{\Delta}h_2\left(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2\right)+\frac{1}{\Delta}h_3\left(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3\right)$$

ولكن وفقا للخاصية التاسعة للمحددات، يكون:

$$a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=\Delta$$

ووفقا للخاصية العاشرة، يكون:

$$a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0,\ a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0$$

وبذلك يكون:

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta}+b_1\frac{\Delta_y}{\Delta}+c_1\frac{\Delta_z}{\Delta}=h_1$$

أي الأعداد x, y, z المحددة بالعلاقات (8) تحقق المعادلة الأولى من المجموعة المعطاة. وبالمثل يثبت أن هذه الأعداد تحقق أيضا المعادلتين الأخريين.

ويكفل ما سبق عرضه استنتاج النتيجة التالية: إذا كان المحدد $\Delta \neq 0$، فإن المجموعة (1) يكون لها حل وحيد يحدد بالعلاقات (8).

مثال (٨): نعتبر مجموعة المعادلات

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=4, \\ 3x+5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8 \end{array}\right\}$$

عين كل حلولها.

الحل: نحسب محدد المجموعة: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$

وحيث أن $\Delta \neq 0$، فإن المجموعة المعطاة يكون لها حل وحيد يتحدد بالعلاقات (8) ووفقاً للعلاقات (7)، نجد أن:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33$$

وبالتالي فإن $x = 1, y = 1, z = 1$.

نفرض الآن أن محدد المجموعة (1) يساوي الصفر $(\Delta = 0)$ وإذا كان في حالة $\Delta = 0$ أن أحد المحددات $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ مختلفاً عن الصفر فإنه لا يكون للمجموعة (1) أية حلول على الإطلاق (يقال أن معادلات هذه المجموعة غير متوافقة أو متناقضة non consistent).

بالفعل، إذا كان $\Delta = 0$، ولكن كان أحد المحددات $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ غير مساو للصفر فإنه تكون على الأقل إحدى المتساويات (6) غير ممكنة، أي لا يكون

للمجموعة (6) مستنبطة من المجموعة (1)، وبالتالي فكل حل للمجموعة (1) إذا وجد يكون حلاً للمجموعة (6). فعلى سبيل المثال:

مثال (٩): المجموعة

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 1, \\ 4x + 3y + 3z = 4 \end{array}\right\}$$

ليس لها حلول لأن $\Delta = 0, \Delta_y = 1 \neq 0$، ويمكن التأكد مباشرة من أن هذه المعادلات متناقضة، وذلك بجمع المعادلتين الأوليين منها حداً حداً ثم طرح الناتج من المعادلة الأخيرة. فنجد أن $1 = 0$ أي متساوية غير صحيحة.

يتبقى علينا دراسة الحالة عندما $\Delta = 0$ وكذلك $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$.
غير أننا سندرس هذه الحالة بعد دراسة ما يسمى بالمجموعة المتجانسة Homogenous equations.

المجموعة المتجانسة من ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل هي المجموعة على الصورة:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

أي مجموعة المعادلات التي حدودها المطلقة تساوي صفرا. من الواضح أنه يكون دائما لهذه المجموعة الحل $x = 0, y = 0, z = 0$، وهو ما يسمى بالحل الصفري. وإذا كان $\Delta \neq 0$ يكون هذا الحل وحيدا. وسنثبت أنه إذا كان $\Delta = 0$ فإنه يكون للمجموعة المتجانسة (9) عدد لانهائي من الحلول

غير الصفرية. (في هذه الحالة تكون إما معادلة واحدة من معادلاتها نتيجة للمعادلتين الأخريين، وإما تكون معادلتان من معادلاتها نتيجة للمعادلة الثالثة).

نقوم بالإثبات أولاً بافتراض أن أحد المحددات الصغرى للمحدد لا يساوي الصفر. فنفرض مثلاً أن $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ وبتحقيق هذا الشرط يكون للمعادلتين الأوليين من المجموعة (9) عدد لانهائي من الحلول المشتركة غير الصفرية. تتحدد بالعلاقات:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \qquad (10)$$

لأي t. وليس من العسير التأكد من أن في حالة $\Delta = 0$ تحقق كل هذه الأعداد المعادلة الثالثة أيضاً من المجموعة (9). وبالفعل بالتعويض بها بدلاً من المجاهيل في الطرف الأيسر للمعادلة (9). نجد أن:

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = \left(a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) t = \Delta . t$$

فنحصل نتيجة للتعويض على صفر نظراً لأنه حسب الشرط يكون $\Delta = 0$. وعلى هذا الأساس تحدد العلاقات (10) لأي t حل المجموعة (9). وإذا كان $t \neq 0$ يكون هذا الحل غير صفري. وفي الحالة المدروسة يكون في المجموعة معادلتان جوهريتان مستقلتان (المعادلة الثالثة نتيجة للمعادلتين الأوليين).

نفرض الآن أن كل المحددات الصغرى للمحدد Δ تساوي صفراً عندئذ يكون لكل زوج من المعادلات (9) معادلات متناسبة، وبالتالي فكيفما اخترنا من المجموعة (9) أية معادلتين فإن إحداهما ستكون نتيجة من الأخرى بضرب حدودها في معامل مشترك. وهذا يعني أن في المجموعة (9) معادلة جوهرية واحدة مستقلة فقط (تكون المعادلتان الآخريين نتيجة لها)، ومن الواضح أن لمثل هذه المجموعة عدداً لانهائياً من الحلول غير الصفرية (نظراً لأنه يمكن إعطاء أي مجهولين أية قيم عددية، وتحديد المجهول الثالث من المعادلة الجوهرية المستقلة الوحيدة من المجموعة).

وبهذا أثبتنا فرضنا، ويمكن صياغة النتيجة التي حصلنا عليها كالتالي :

يكون للمجموعة المتجانسة (9) حلول غير صفرية، فقط وفقط، عندما يكون $\Delta = 0$.

مثال (١٠): المجموعة

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 0, \\ 3x - 5y + 3z = 0, \\ 2x + 7y - z = 0 \end{array}\right\}$$

لها حل صفري فقط، لأن $\Delta = 33 \neq 0$

مثال (١١): المجموعة

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 4x + 5y + 4z = 0 \end{array}\right\}$$

لها عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية لأن: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

وتتحدد كل الحلول بالعلاقات (10)، والتي وفقاً لها يكون: $x=-t,\ y=0,\ z=t$ لأية قيمة بارامتر.

مثال (١٢): المجموعة

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 2x + 2y + 2z &= 0, \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

لها أيضاً عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية لأن $\Delta = 0$. وفي هذه الحالة تكون كل المحددات الصغرى للمحدد Δ مساوية للصفر وتؤول المجموعة إلى معادلة واحدة $x+y+z=0$. ويتكون كل من حلول المجموعة من الأعداد الثلاثة x,y,z حيث x,y أي عددين، أما z فيتحدد من العلاقة $z=-x-y$.

نعود مرة أخرى إلى مجموعة اختيارية غير متجانسة

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= h_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= h_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= h_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

سنثبت أنه إذا كان $\Delta = 0$ وكان للمجموعة (1) حل واحد فإنه يكون لها عدد لانهائي من الحلول المختلفة.

نفرض أن الأعداد x_o, y_o, z_o تكون حلاً ما من حلول المجموعة (1). نعوض بـ x_o, y_o, z_o في المعادلات (1) بدلاً من المجاهيل فنحصل على متطابقات حسابية:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x_o + b_1 y_o + c_1 z_o &= h_1, \\ a_2 x_o + b_2 y_o + c_2 z_o &= h_2, \\ a_3 x_o + b_3 y_o + c_3 z_o &= h_3 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

نطرح المتطابقات (11) حداً حداً من المعادلات المناظرة (1) (نطرح المتطابقة الأولى من (11) من المعادلة الأولى من (1)، والمتطابقة الثانية من المعادلة الثانية والمتطابقة الثالثة من المعادلة الثالثة). فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} a_1 (x - x_o) + b_1 (y - y_o) + c_1 (z - z_o) &= 0, \\ a_2 (x - x_o) + b_2 (y - y_o) + c_2 (z - z_o) &= 0, \\ a_3 (x - x_o) + b_3 (y - y_o) + c_3 (z - z_o) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

ندخل الرموز

$$x - x_o = u, y - y_o = v, z - z_o = w \qquad (13)$$

ومن ثم نكتب المتساويات (12) كالتالي:

$$\left.\begin{aligned} a_1 u + b_1 v + c_1 w &= 0, \\ a_2 u + b_2 v + c_2 w &= 0, \\ a_3 u + b_3 v + c_3 w &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

وهذه مجموعة متجانسة من ثلاث معادلات من الدرجة الأولى في المجاهيل u, v, w بنفس معاملات المجاهيل كما في المجموعة المعطاة (1). وهي تسمى بالمجموعة المتجانسة المناظرة للمجموعة غير المتجانسة المعطاة (1). وحيث أن $\Delta = 0$ من الشرط، فإن المجموعة المتجانسة (14) لها عدد لانهائي من الحلول المختلفة. ومن هنا ينتج أن للمجموعة المعطاة (1) أيضاً عدداً لانهائياً من الحلول المختلفة. وبالذات، ووفقاً للمتساويات (13) يناظر كل حل u, v, w للمجموعة (14) حل:

$$x = x_o + u,$$
$$y = y_o + v,$$
$$z = z_o + w$$

للمجموعة (1). وبذلك أثبتنا فرضنا السابق.

وعلى أساس ما ذكر تنتج مباشرة الصيغة التالية :

إذا كان $\Delta = 0$ وأيضا $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$، فإنه إما لا يكون للمجموعة (1) حلول على الإطلاق، وإما يكون لها عدد لانهائي من الحلول المختلفة (في الحالة الأخيرة تكون على الأقل إحدى معادلات المجموعة نتيجة من المعادلتين الأخريين، وتسمى مثل هذه المجموعة بالمجموعة غير المحددة).

مثال (١٣): المجموعة

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2x + 2y + 2z &= 3, \\ 3x + 3y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

(التي تحقق الشروط $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$) ليس لها حلول على الإطلاق. بالفعل فحتى المعادلتين الأوليين من هذه المجموعة تكونان متناقضتين ولأننا إذا ضربنا المعادلة الأولى في 2 ثم طرحنا الناتج حدا حدا من المعادلة الثانية لحصلنا على متساوية غير ممكنة $0 = 1$.

مثال (١٤): المجموعة

$$\left.\begin{aligned} 3x + y - z &= 1, \\ 5x + 2y + 3z &= 2, \\ 8x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

(التي تحقق الشروط $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$) لها عدد لانهائي من الحلول. فبالفعل، تكون المعادلة الثالثة من هذه المجموعة نتيجة للمعادلتين الأوليين، فهي تنتج منهما بواسطة جمعهما حداً حداً. وعلى هذا الأساس يكون في هذه المجموعة معادلتان جوهريتان فقط:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y - z &= 1, \\ 5x + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

ولتعيين كل حلولهما المشتركة نكتب المجموعة (*) على الصورة:

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 1 + z, \\ 5x + 2y &= 2 - 3z \end{aligned}\right\}$$

ونعتبر أن المجهول z هنا قد أعطي قيمة عددية ما. بتطبيق العلاقات (8)، نجد أن:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = 5z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z \\ 5 & 2-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = 1 - 14z,$$

ويكون العددان x, y مع العدد z حل المجموعة المعطاة. ولهذه المجموعة عدد لانهائي من الحلول، لأنه يمكن تحديد القيمة العددية للمجهول z اختيارياً.

المحدد من أية رتبة:

في المسألة العامة لحل ودراسة مجموعات المعادلات من الدرجة الأولى في مجاهيل كثيرة، وأيضاً في عدد من مسائل الرياضيات الحسابية تستخدم المحددات من الرتبة n (n=2, 3, 4, ...) وتبنى نظرية المحددات من أية رتبة في الملامح العامة مثل عرضنا السابق لنظرية المحددات من الرتبة الثالثة،

غير أن بناءها العملي بكل تفاصيله إنما يتطلب عدة فروض مساعدة، ومن ثم فهو يشكل بعض الصعوبات. وتعرض هذه النظرية مثلها مثل النظرية العامة للمعادلات من الدرجة الأولى في مجاهيل كثيرة، في أي كتاب من كتب الجبر العالي.

وسنكتفي هنا فقط بالتوضيحات التالية :

١ـ يعطى المحدد من الرتبة n في جدول مربع من الأعداد (عناصر المحدد) له n صف و n عمود، ويرمز له بالمحدد من الرتبة n بالمثل كالمحدد من الرتبة الثانية أو الثالثة.

٢ـ والمحدد الأصغر (المحيدد) لعنصر ما من عناصر المحدد من الرتبة n هو المحدد من الرتبة n-1 الناتج من المحدد المعطى بشطب الصف والعمود اللذين يقع في تقاطعهما هذا العنصر.

٣ـ المكمل الجبري (المرافق) لعنصر ما من عناصر المحدد هو المحدد الأصغر لهذا العنصر مأخوذاً بنفس أشارته، إذ كان مجموع رقمي الصف والعمود اللذين يقع في تقاطعهما هذا العنصر عدداً زوجياً، وبإشارة عكسية إذا كان هذا المجموع عدداً فردياً.

٤ـ المحدد يساوي مجموع حواصل ضرب عناصر عمود ما (أو صف) في مكملاتها الجبرية. وبهذا يؤول حساب المحدد من الرتبة n إلى حساب n محدد كل منها من الرتبة (n-1).

٥ـ تتعلق كل خواص المحددات التي سبق لنا عرضها بالمحددات من أية رتبة.

مثال (١٥): احسب المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

الحل: بفك هذا المحدد بعناصر أعلى صف، أي بوضعه على صورة مجموع حواصل ضرب عناصر أعلى صف في مكملاتها الجبرية، نجد أن:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 296$$

ملاحظة (١): يمكن تبسيط عملية حساب المحدد إذا استخدمنا مسبقاً الخاصية ٨.

المصفوفة المترافقة (المصفوفة المصاحبة) Adjoint Matrix

إذا كان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من درجة n فإننا نعرف المعامل المرافق α_{ij} لعنصر a_{ij} ويحسب كالآتي: $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

حيث M_{ij} هو المحيدد minor الناتج بشطب الصف i والعمود j من المصفوفة A ومصفوفة المرافقات ونرمز لها بالرمز

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ & & & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

وتسمى المصفوفة المصاحبة أو المترافقة أو المرتبطة.

مثال (١٦): أوجد adj(A) عندما $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}$

الحل: نحسب الكميات α_{ij} على الصورة:

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}=-7 \quad , \quad \alpha_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6$$

$$\alpha_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=-1 \quad , \quad \alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=1 \quad , \quad \alpha_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}=-2$$

$$\alpha_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=-1 \quad , \quad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}=0$$

$$\alpha_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1 \quad , \quad \mathrm{adj}(A)=\left(\alpha_{ij}\right)^{t}$$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}-7&6&-1\\1&0&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

مثال (١٧): احسب adj(A) عندما $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&1\\2&0&4\end{bmatrix}$

الحل: متروك للطالب كتمرين.

مثال (١٨) : باستخدام خواص المحددات أثبت أن

$$2(x+y+1)^3 = \begin{vmatrix} y & x & x+y+z \\ y & y+2x+1 & 1 \\ x+2y+1 & x & 1 \end{vmatrix}$$

مثال (١٩): باستخدام خواص المحددات أثبت أن

$$(b-a)(b-c)(c-a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & b+c \\ ab & ac & bc \end{vmatrix}$$

تمارين (٢)

(١) إذا كانت $C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ احسب

(i) $B+A\,,\,A+B$ (ii) $B-A\,,\,A-B$

(iii) $4A-2B\,,\,2(2A-B)$ (iv) $A^T, B^T, (B^T)^T$

(v) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (vi) $A+A^T\,,\,A-A^T$

(vii) هل $A+C$ معرف؟ (viii) هل $C+C^T$ معرفة ؟

(٢) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

أثبت أن $A+(B+C)=(A+B+C).,\ \mathrm{Det}(\mathrm{adj}(A)) = (\mathrm{Det}(A))^{n-1}$

(٣) لأي مصفوفتين مربعتين A, B أثبت أن:

$\mathrm{Trac}(A+B) = \mathrm{Trac}(A) + \mathrm{Trac}(B),\ \mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B).\ \mathrm{adj}(A)$

(٤) إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}$ احسب

(i) $B^T A, CB, A^T B, AB$ (ii) C^T, CB, B^TC, BC

(iii) $BB^T, B^T B$ (iv) BB^T, B^TB

(v) CC^T, C^TC (vi) $C^2, C^4, C^4-3C+2I$

(vii) BCA, B^TCA, A^TCA

(٥) إذا كان: $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 5 & 4 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & -4 & 0\\ 0 & 7 & 8\end{bmatrix}$ احسب AB، هل BA معرفة؟

(٦) احسب BA, AB وبين أي منهما يحقق خاصية الإبدال في الحالات الآتية:

$$\text{(i)}\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 0 & 3\\ 6 & -3 & 4 & -2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\\ -6 & 5\\ 7 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 6 & -3 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & 3 & 1\\ 2 & 4 & -8\\ 3 & -6 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)}\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

(٧) إذا كان: $B=\begin{bmatrix}\cos y & \sin y\\ -\sin y & \cos y\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$ أثبت أن

$$AB=\begin{bmatrix}\cos(x+y) & \sin(x+y)\\ -\sin(x+y) & \cos(x+y)\end{bmatrix}=BA,\ \forall\, x, y\in R$$

(٨) أثبت أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{bmatrix}$ مصفوفة دورية، أوجد دورتها

وبين فيما إذا كانت متساوية القوى أم لا؟

(٩) احسب $A\,B$ في الحالات الآتية:

$$(i)\quad A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$(ii)\quad A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&2\end{bmatrix}$$

(١٠) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&4\\3&1&1\end{bmatrix}$ أثبت أن $A^3-5A^2-4A+30I=0$.

حيث I مصفوفة الوحدة.

(١١) إذا كان $A\,B=B\,A$ أثبت أن:

(a) $(A+B)^2=A^2+2\,A\,B+B^2$ (b) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

(١٢) أثبت أنه لأي مصفوفة حقيقية مربعة A:

(i) $A+A^T$ مصفوفة متماثلة (ii) $A-A^T$ مصفوفة شبه متماثلة

(١٣) أثبت أن المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}1&i+1&3+i\\i-1&2&-i\\2-3i&i&0\end{bmatrix}$ هيرميتية، وأن

المصفوفة $B=\begin{bmatrix}i&i+1&2-3i\\-1+i&2i&i\\-2-3i&-1&0\end{bmatrix}$ شبه هيرميتية. وأن iB

هيرميتية حيث $i=\sqrt{-1}$.

(١٤) أوجد المصفوفة المترافقة (المصاحبة أو المرتبطة) لمصفوفة A في الحالات الآتية

(i) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(iii) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(١٥) برهن أن المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ متساوية القوى.

(١٦) برهن أنه إذا كان $AB = A$, $BA = B$ فإن B, A تكونا متساويتا القوى.

(١٧) برهن أن المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ معدومة القوى من الرتبة الثالثة.

(١٨) إذا كانت A مصفوفة معدومة القوى من الرتبة الثانية برهن أن $A(I \pm A)^n = A, \forall n \in z^+$

(١٩) أثبت أن $A.\ \mathrm{adj}(A) = \mathrm{Det}(A)\ I$

(٢٠) برهـن أن المصفوفتـان $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

متساويتا القوى

(٢١) إذا كانت المصفوفة A متساوية القوى فبرهن أن B = I-A متساوية القوى وأن AB=BA=O

(٢٢) برهن أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ مصفوفة دورية دورتها 2.

(٢٣) برهن أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ معدومة القوى.

(٢٤) برهن أن وتأكد من ذلك باستخدام الاستنتاج الرياضي

(i) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}, n \in z^+$

(ii) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n}{2}(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}, n \in z^+$

(iii) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$

(٢٥) أثبت أنه لأي مصفوفتان مربعتان من نفس الأبعاد

(i) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

(ii) $tr(AB) = tr(BA)$

(٢٦) أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة متساوية القوى فإن

$$(I+A)^n = I + (2^n - 1)A$$

(٢٧) إذا كان $AB = BA$، بين أن $(AB)^n = A^n B^n$

(٢٨) بين أنه إذا كان A,P مصفوفتان من درجة $m \times n$، P قابلة للعكس فإن:

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1} A^k P, \quad \forall k \in N$$

(٢٩) إذا كانت $A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right)$ بين أن $A^t = \left(\begin{array}{c|c} t_P & t_R \\ \hline t_Q & t_S \end{array}\right)$

(٣٠) إذا كانت $A = \left(\begin{array}{c|c} P & O \\ \hline O & S \end{array}\right)$ حيث P، Q مصفوفات مربعة، بين أن

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} P^k & O \\ \hline O & Q^k \end{array}\right), \quad \forall k \in K$$

أكثر تعميما، أوجد A^k عندما $A = \text{diag}(P_1, \ldots, P_r)$

حيث $P_1, \ldots, P_r$ مصفوفات مربعة (في هذه الحالة المصفوفة A مجموع مباشر من المصفوفات $P_1, \ldots, P_r$)

(٣١) نفرض أن $A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right)$ حيث P, Q مصفوفات مربعة، A, S قابلتان للعكس، بين أن $A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P' & O' \\ \hline O' & S' \end{array}\right)$

حيث $P' = (P - QS^{-1}R)^{-1}, Q' = -P'QS^{-1}, R' = -S^{-1}RP', S' = S^{-1} - S^{-1}RQ'$

(٣٢) حالة خاصة من تمرين (٣١) بين أن

$$\begin{pmatrix} I & Q \\ O & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -QS^{-1} \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}$$

(٣٣) أثبت أن

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(٣٤) بين أنه إذا كانت $A = \left(a_{ij}\right)$ مصفوفة مثلثية عليا (سفلى) مربعة $n \times m$

فإن $\operatorname{Det}(A) = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$

(٣٥) بين أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة مختلفة التماثل و n عـــدد فـــردي

فإن $\operatorname{Det} A = 0$

(٣٦) بين أنه إذا كانت A مصفوفة هيرميتية فإن $\operatorname{Det}(A) \in R$، ماذا يحدث

إذا كانت A شبه هيرميتية؟

(٣٧) أثبت أن $\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{bmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

(٣٨) تعميم لتمرين (٣٣) أثبت أن قيمة محدد فاندرموند من رتبة n يكون

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ & & & & \\ & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \le q < P \le n} \left(a_P - a_q\right) \neq 0$$