

الجزء الثاني

الباب الثالث

الفراغات الاتجاهية

Vector Spaces

(١.٣) الفراغ الإتجاهي (الخطي)

Vector Space (Linear Space)

يعرف الفراغ الإتجاهي (الخطي) على حقل الأعداد الحقيقية R عناصر R تسمى كميات قياسية) على أنه مجموعة غير خالية V معرف عليها بناء جبري Algebraic structure (عناصر المجموعة تسمى متجهات) كالآتي:

1- $(V, +)$ (Abelian group) Commutative group زمرة إبدالية

2- $R \times V \rightarrow V$ الضرب في عدد حقيقي

$r u \in V, \forall u \in V, r \in R$ معرف بالآتي :

$r(u_1 + u_2) = r u_1 + r u_2$
 $(r_1 + r_2)u = r_1 u + r_2 u$ } قوانين التوزيع distributive laws

$(r_1 r_2)u = r_1 (r_2 u)$ قانون الدمج associative law

$1 u = u, 1 \in R$ Identity element product العنصر المحايد الضربي

مثال (١): V_3 مجموعة كل الثلاثيات المرتبة $\{a = (a_1, a_2, a_3)\}$ فراغ

اتجاهي حيث

$$a + b = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$r a = (r a_1, r a_2, r a_3), \forall r \in R$$

مثال (٢): $R^n = R \times R \dots \times R$ حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة R

عدد n من المرات تكون فراغ اتجاهي، كل عنصر فيه له الشكل

$$a = (a_i) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$$

المجموعة R^n هي فراغ اتجاهي حيث

$$a + b = (a_i + b_i), \quad r a = (r a_i)$$

مثال (٣): مجموعة كل كثريرات الحدود $[t]$ في المتغير t ذات

المعاملات الحقيقية تكون فراغ اتجاهي حيث

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, \quad P_2(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i$$

$$P_1(t) + P_2(t) = \sum_{i=0}^{\mu} (a_i + b_i) t^i \quad \text{فإن المجموع}$$

حيث μ لا تزيد عن m أو n .

$$r P(t) = \sum_{i=0}^n (r a_i) t^i = \sum_{i=0}^n b_i t^i, \quad \text{الضرب في عدد قياسي } r,$$

مثال (٤): مجموعة كل الدوال المتصلة $F[0,1]$ المعرفة على النطاق

$[0,1]$ ومداها R تكون فراغ اتجاهي حيث

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in F$$

$$(r f)(x) = r(f(x)), \quad \forall r \in R, f \in F$$

مثال (٥): مجموعة كل المتتابعات $\{ \langle a_n \rangle \}$ المعرفة على الأعداد الحقيقية

والتي تتقارب إلى الصفر هي فراغ اتجاهي حيث

$$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle$$

$$r \langle a_n \rangle = \langle r a_n \rangle$$

(راجع خواص تقارب المتتابعات) حيث مجموع متابعتين تقاربتين هو متتابعة تقاربية.

مثال (٦): مجموعة كل المتسلسلات اللانهائية المتقاربة $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right\}$ تكون فراغ اتجاهي (راجع خواص تقارب المتسلسلات) حيث مجموع متسلسلتين تقاربتين هو متسلسلة تقاربية.

(٢.٣) الفراغات الاتجاهية الجزئية Subspaces

المجموعة الجزئية الغير خالية S من الفراغ الاتجاهي V يقال أنها فراغ اتجاهي جزئي أو فراغ جزئي إذا كانت فراغ اتجاهي بالنسبة للعمليات (الجمع والضرب في عدد قياسي) المعرفة على V ويكتب $S \subset V$

مثال (١): $\{0\} \subset V, V \subset V$ تسمى الفراغات الجزئية الغير خالصة (الغير حقيقية) trivial or improper Subspaces.

مثال (٢): المجموعة $S = \{(0, r, 0) : r \in \mathbb{R}\}$ فراغ جزئي حقيقي من V_3 .

تعريف (١.٣): نفرض أن $S \subset V$ ، يقال أن S مغلقة بالنسبة لعملية الجمع إذا تحقق

$$u + v \in S, \forall u, v \in S$$

وأن S مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي إذا تحقق

$$r u \in S, \forall u \in S, r \in \mathbb{R}$$

حيث الضرب في عدد قياسي والجمع معرف في V .

مثال (٣): المجموعة $S = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ مغلقة تحت عملية الجمع

وليست مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي حيث

$$(-1)u = (-x, 0), \quad -x < 0$$

$$u = (x, 0), \quad x > 0$$

حيث

العرض السابق يقودنا إلى تقديم النظرية الآتية للتعرف على

الفراغات الجزئية.

نظرية (١.٣): المجموعة S فراغ جزئي من فراغ اتجاهي V إذا تحقق

(i) $S \neq \Phi$ (ii) S مغلقة بالنسبة لعملية الجمع

(iii) S مغلقة بالنسبة لعملية الضرب في عدد قياسي

مثال (٤): مجموعة كثيرات الحدود $R_n[t]$ في المتغير t ذات الدرجة الأقل

من n تكون فراغ جزئي من فراغ كثيرات الحدود.

الحل: بما أن $\Phi \neq R_n(t) \subset R[t]$ لأن $t^{n-1} \in R_n[t]$

بتطبيق شروط النظرية السابقة من السهل أن نتبين أن $R_n[t]$ فراغ

جزئي من $R[t]$.

مثال (٥): بين أن $S = \left\{ f \in F : f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \right\}$ فراغ جزئي من فراغ الدوال F .

الحل: من نظرية (١.٣) ومثال (٤) يتضح المطلوب.

مثال (٦): المجموعة $S = \{f \in F : f \text{ تفاضلية}, f' = f\}$ فراغ جزئي من فراغ الدوال F .

مثال (٧): بالنسبة للفراغ R^3 أي خط مستقيم يمر بنقطة الأصل يعتبر فراغ جزئي من R^3 .

أي خط مستقيم L يمر بنقطة الأصل يمكن اعتباره مجموعة من النقط التي تحقق

$$L = \{ru : r \in R, u \in R^3\}$$

مثال (٨): المجموعة

$$S = \{a(2,1,3) + b(1,4,1) + c(1,-3,2) : a, b, c \in R\}$$

فراغ جزئي حقيقي من V_3 حيث $S \neq \{0\}$.

مثال (٩): المجموعة

$$S = \{a(2, -5) + b(3, -7) : a, b \in R\}$$

فراغ جزئي تافه (غير حقيقي) من الفراغ V_2 حيث $S = V_2$.

(٣.٣) الارتباط الخطي Linear dependence

تعريف (٢.٣): لأي عدد k من المتجهات $u_i \in V$ وعدد k من الأعداد

القياسية $r_i \in V$ فإن التعبير $\sum_{i=1}^k r_i u_i = r_1 u_1 + r_2 u_2 + \dots + r_k u_k$ يسمى

تركيبة خطية Linear Combination

تعريف (٣.٣): نفرض أن S مجموعة جزئية من فراغ اتجاهي V . مجموعة كل التركيبات الخطية الممكنة من عناصر S تسمى تمديد للمجموعة S ($\text{Span } S$) ويرمز لها بالرمز $L(S)$. إذا كانت $S = \Phi$ فإن $L(S)$ تحتوي فقط المتجه الصفري للفراغ V .

مثال (١٠): V_2 يعتبر تمديد لمجموعة المتجهات $\{(2,1), (3,-5), (6,2)\}$ أو $V_2 = L\{(2,1), (3,-5), (6,2)\}$

مثال (١١): التمديد لمجموعة مكونة من متجه واحد هو مجموعة كل المتجهات الناتجة من ضرب المتجه في أعداد قياسية. فمثلا إذا كان $u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$ فإن $L\{u\}$ هو خط مستقيم في المستوى \mathbb{R}^2 على امتداد u ويمر بنقطة الأصل.

مثال (١٢): أعط تفسير هندسي للتمديد $L\{u,v\}$ حيث $u, v \in \mathbb{R}^3$ متجهات غير صفرية.

الحل : إذا كانت $u = rv$ فإن $L\{u,v\} = \{rv : r \in \mathbb{R}\}$ عبارة عن خط يمر بنقطة الأصل.

خلاف ذلك فإن $au + bv$ هي رأس متوازي الأضلاع الذي رؤوسه $0, au, bv, au + bv$ أي التمديد لمتجهين من V_3 لا يمكن أن يكون كل V_3 بل هو مستوى في V_3 .

مثال (١٣): بين أن $L\{(2, -1, 5), (0, 3, -1)\}$ يحتوي على المتجه $(3, 6, 5)$

ولا يحتوي على المتجه $(2, 5, 0)$

الحل: المتجه $(3, 6, 5)$ ينتمي إلى L إذا وجدت الأعداد القياسية x, y

$$(3, 6, 5) = x(2, -1, 5) + y(0, 3, -1) \quad \text{بحيث يتحقق}$$

هذه المعادلة الاتجاهية تؤدي إلى ثلاث معادلات في مجهولين x, y

$$\text{ومن السهل أن نجد } x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$$

أما بالنسبة للمتجه $(2, 5, 0)$ لا يمكن إيجاد x, y بحيث يتحقق

$$(2, 5, 0) = x(2, -1, 5) + y(0, 3, -1)$$

مثال (١٤): $L\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\} = R[t]$ أي أن كل كثيرة حدود في

$R[t]$ هي تركيبة خطية من عناصر المجموعة $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$

نظرية (٢.٣): إذا كانت S مجموعة جزئية من فراغ اتجاهي V فإن

$$L(S) \subset V \text{ أي } V$$

البرهان: لإثبات أن $L(S)$ فراغ جزئي يكفي أن نتحقق من الشروط

$L(S) \neq \Phi$ ، $L(S)$ مغلقة بالنسبة لعملية الجمع والضرب في عدد قياسي

المعرفة على V .

تعريف (٤.٣): يقال أن الفراغ الاتجاهي $L(S)$ مولد $generated by$

بالمجموعة S وعناصر S تسمى مولدات $L(S)$.

مثال (١٥): من الأمثلة السابقة : $R[t]$ مولدة بالمتجهات $1, t, t^2, \dots$ كما في مثال (١٤) و R^2 مولد بالمتجهات $(2, 1), (3, -5), (6, 2)$ كما في مثال (١٠).

وأي فراغ اتجاهي يولد نفسه بمعنى أن $L(V) = V$.

تعريف (٥.٣): المتجه $u \in V$ مرتبط خطيا بالمتجهات u_1, u_2, \dots, u_k إذا كان $u \in L\{u_1, \dots, u_k\}$ بمعنى إذا وجد $a_i \in R$ بحيث $u = \sum_{i=1}^k a_i u_i$

مثال (١٦): المتجه $(2, 1, 3)$ مرتبط خطيا بالمتجهات $(1, 4, 1), (1, -3, 2)$.

أي $(2, 1, 3) = a(1, -3, 2) + b(1, 4, 1)$ بمعنى يمكن إيجاد الأعداد a, b التي تحقق هذه العلاقة، ومن السهل التحقق من ذلك.

مثال (١٧): بين أن المتجه $8-t+7t^2$ مرتبط خطيا بالمتجهات $1+t-t^2$,

$$R_3[t] \text{ في فراغ كثيرات الحدود } 2-t+3t^2$$

الحل: نحاول إيجاد الأعداد a, b التي تحقق

$$8-t+7t^2 = a(2-t+3t^2) + b(1+t-t^2)$$

وبمساواة المعاملات على الطرفين نحصل على ثلاث معادلات في

$$a, b \text{ وحلها هو } a = 3, b = 2.$$

مثال (١٨): إذا كان u متجه مرتبط خطيا بالمتجهات u_1, u_2, \dots, u_k إذن

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \quad \text{أو} \quad (-1)u + a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$$

بمعنى أن المتجه الصفري هو تركيب خطي من $(k+1)$ من المتجهات بحيث يوجد على الأقل عدد قياسي مختلف عن الصفر.

تعريف (٦.٣): يقال أن مجموعة المتجهات المحدودة

$\{V_1, \dots, V_k\}$ مرتبطة خطيا Linearly dependent إذا وجدت الأعداد

القياسية b_1, \dots, b_k ليست جميعها أصفارا بحيث يتحقق

$$b_1 V_1 + \dots + b_k V_k = 0$$

وأي مجموعة لانهائية من المتجهات تكون مرتبطة خطيا إذا احتوت على مجموعة جزئية محدودة مرتبطة خطيا.

مثال (١٩): أي مجموعة تحتوي على المتجه الصفري تكون مرتبطة خطيا حتى وإن كانت $\{0\}$.

مثال (٢٠): بين أن المتجهات $(2, 5)$, $(-1, 1)$, $(-4, -3)$ مرتبطة خطيا.

الحل: نفرض أن

$$x(2, 5) + y(-1, 1) + z(-4, -3) = (0, 0) \quad (*)$$

هذه المعادلة الاتجاهية تؤدي إلى معادلتين خطيتين في x, y, z من السهل أن نجد أن $x=1, y=-2, z=1$ تحقق (*), إذن المتجهات المعطاة مرتبطة خطيا.

مثال (٢١): المتجهات $(2, 5)$, $(-1, 1)$ ليست مرتبطة خطيا لأنه لا يمكن

إيجاد x, y تحقق

$$x(2, 5) + y(-1, 1) = (0, 0)$$

بحيث x, y ليست جميعها أصفارا، بمعنى أن $(x, y) \neq (0, 0)$.

تعريف (٧.٣): مجموعة المتجهات يقال أنها مستقلة خطيا Linearly independent إذا كانت ليست مرتبطة خطيا.

مثال (٢١): مجموعة المتجهات في مثال (٢١) مستقلة خطيا.

مما سبق يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية (٣.٣): مجموعة المتجهات $\{u_1, \dots, u_k\}$ مستقلة خطيا إذا فرضنا

$$t_1 u_1 + \dots + t_n u_n = 0 \text{ فإنه يؤدي إلى } t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$$

بمعنى أن التركيبة الخطية الوحيدة للمتجه الصفري هي التي معاملاتها تساوي أصفارا.

مثال (٢٣): المجموعة $\{\sin x, \cos x\}$ مستقلة خطيا.

مثال (٢٤): $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ مستقلة خطيا.

من العرض السابق للفراغات الاتجاهية نلاحظ أنه توجد استخدامات كثيرة لمعنى كلمة خطي مثل معادلة خطية، تركيبة خطية، ارتباط خطي، استقلال خطي وهذا يوضح لماذا تسمى دراسة الفراغات الاتجاهية بالجبر الخطي Linear Algebra.

(٤.٣) الأساس والبعد Base and Dimension

نعلم أن محاور الإحداثيات في المستوى R^2 يمكن النظر إليها

على أنها ناتجة من حاصل ضرب المتجهات $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ في أعداد

قياسية. ولهذا المتجهات $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ تولد المستوى R^2 وهذا يقودنا إلى إعطاء التعريف الآتي.

تعريف (٨.٣): أساس الفراغ الاتجاهي V هو مجموعة B مرتبة من المتجهات المستقلة خطيا والتي تولد V .

مثال (٢٥): $B = \{ (0, 1), (1, 0) \}$ أساس للمستوى R^2 حيث أن أي

متجه يمكن كتابته كتركيبه خطية من متجهات المجموعة B ، مثلا

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

المجموعة B تسمى الأساس العياري orthonormal base (المعتاد standard base) ومثل هذا الأساس نتعرض له الأبواب القادمة.

مثال (٢٦): المجموعة $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ أساس لفراغ كثيرات الحدود $R[t]$.

النظرية الآتية تستخدم لبرهنة أنه إذا كان فراغ اتجاهي V له أساس محدود فإن كل الأساسات الممكنة له لها نفس عدد العناصر.

نظرية (٤.٣): إذا كان $\{u_1, \dots, u_k\}$ مجموعة مرتبة من المتجهات الغير صفرية المرتبطة خطيا. إذن $u_j \in L\{u_1, \dots, u_{j-1}\}$ لبعض قيم j ، $2 \leq j \leq k$ ، بمعنى أن أحد المتجهات هو تركيب خطي من المتجهات التي تسبقه في الترتيب.

نظرية (٥.٣): إذا كان B أساس محدود للفراغ الاتجاهي V فإن أي أساس آخر يكون له نفس عدد عناصر B .

تعريف (٩.٣): بعد Dimension الفراغ V هو عدد عناصر الأساس. فمثلا إذا كان B يحتوي على n من المتجهات فإن بعد الفراغ V هو n ويكتب $\dim V = n$ ، إذا كان $V = \{0\}$ فإن $\dim V = 0$. في مثل هذه الحالات يقال أن V فراغ محدود البعد finite dimensional ويقال أن V لانهائي البعد infinite dimensional إذا لم يكن محدود البعد. أي أن الأساس يتكون من عدد لانهائي من المتجهات.

مثال (٢٧): من الأمثلة السابقة يمكن أن نرى $F[0,1]$, $R[t]$ فراغات لانهائية البعد.

مثال (٢٨): $\dim R^n = n$.

الحل: إن المجموعة $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ حيث $e_i = (\delta_i^j)$ تكون أساس للفراغ R^n ومنها $\dim R^n = n$ ، B تسمى الأساس المعتاد للفراغ R^n .

مثال (٢٩): المجموعة $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$ أساس لفراغ $R_n[t]$ (كثيرات الحدود في t ذات الدرجة الأقل من n) إذن $\dim R_n[t] = n$.

نتيجة (١): إذا كان $\dim V = n$ ، S مجموعة من المتجهات عددها n ، تولد الفراغ V إذن S أساس للفراغ V .

مثال (٣٠): بين أن المجموعة $B = \{1+t+t^2, 1+t, 1\}$ هي أساس للفراغ $R_3[t]$.

الحل: $\dim R_3[t] = 3$ ، B عدد عناصرها 3 وأي كثيرة حدود في $R_3[t]$

يمكن كتابتها في الصورة

$$a + bt + ct^2 = c(1 + t + t^2) + (b - c)(1 + t) + (a - b)1$$

أي أن B تولد $R_3[t]$ ومن النتيجة (١) نصل إلى أن B أساس للفراغ $R_3[t]$.

نتيجة (٢): إذا كان $\dim V = n$ ، $S \subset V$ مجموعة جزئية من المتجهات المستقلة خطيا وعددها n ، إذن S أساس للفراغ V .

مثال (٣١): المجموعة $S = \{(a, b), (c, d)\} \subset R^2$ مستقلة خطيا بشرط أن $\dim R^2 = 2$ ، $ad - bc \neq 0$ إذن S أساس للفراغ R^2 بشرط أن $ad - bc \neq 0$.

نتيجة (٣): إذا كان $\dim V = n$ إذن أي مجموعة جزئية من V تحتوي على أكثر من n متجه تكون مرتبطة خطيا.

مثال (٣٢): المجموعة $\{(1, 5), (2, 7), (4, 0)\}$ مرتبطة خطيا في R^2 .

نظرية (٦.٣): نفرض أن U فراغ جزئي خالص من فراغ اتجاهي محدود البعد V ، إذن $\dim U < \dim V$.

البرهان: نفرض أن $\dim V = n$ ، إذن لا يوجد مجموعة جزئية من U

تحتوي على متجهات مستقلة خطيا عددها يزيد على n وذلك من نتيجة

(٣) إذن $\dim U \leq \dim V$.

لكن إذا كانت U تحتوي على مجموعة من المتجهات المستقلة خطياً عددها n ، إذن باستخدام النتيجة (٢) تكون هذه المجموعة أساساً للفراغ V ويكون $U = V$.

وبما أن U فراغ جزئي خالص من V ، إذن أي مجموعة من المتجهات المستقلة خطياً من U لا يزيد عددها عن n بمعنى أن $\dim U < \dim V$.

مثال (٣٣): بعد $R[t]$ لانهائي ولهذا النظرية (٦.٣) لا تطبق عليه. فسي الحقيقة $\{1, t^2, t^4, \dots, t^{2n}, \dots\}$ هو فراغ جزئي خالص من $R[t]$ ومع ذلك هو أيضاً لانهائي البعد.

تعريف (١٠.٣): نفرض أن $\dim V = n$ ونفرض أن S مجموعة جزئية من الفراغ V وتحتوي على $k < n$ من المتجهات المستقلة خطياً. إذا كان B أساساً للفراغ V ، B تحتوي على عناصر S ، إذن B تمديد للمجموعة S .
نظرية (٧.٣): أي مجموعة جزئية من المتجهات المستقلة خطياً من فراغ اتجاهي محدود البعد يمكن تمديدها (توسيعها) لتصبح أساساً للفراغ الاتجاهي.

البرهان: يمكن الوصول إلى البرهان باستخدام نتيجة (٢) ، (٣).

ملحوظة: في الحالة العامة ، إذا ما أعطينا أساساً لفراغ V لا يحتوي على أساس لأي فراغ جزئي $S \subset V$. لكن نظرية (٧.٣) تبين أن V

محدود البعد إذن دائما من الممكن تمديد أي أساس للفراغ الجزئي S ليصبح أساس للفراغ V .

مثال (٢٤): إذا كان $B = \{1+t-2t^2, 2t+3t^2\}$ مجموعة من المتجهات المستقلة خطيا - هل يمكن تمديد B لتصبح أساس لفراغ $R_3[t]$.

الحل: هذا يعني هل يوجد متجه في $R_3[t]$ لا ينتمي إلى الفراغ

$$S = L\{1+t-2t^2, 2t+3t^2\}$$

المتجه $a+bt+ct^2 \in S$ إذا تحقق

$$a+bt+ct^2 = x(1+t-t^2) + y(2t+3t^2)$$

أي أن مجموعة المعادلات

$$a = x, \quad b = x + 2y, \quad c = -2x + 3y$$

متفقة لجميع قيم a, b, c وهذا ممكن إذا تحقق

$$7a - 3b + 2c = 0$$

ولهذا

$$S = \{a+bt+ct^2 \mid 7a-3b+2c=0\}$$

وبالتالي أي متجه $a+bt+ct^2$ بحيث $7a-3b+2c \neq 0$ يجب أن

يضاف للمجموعة B وليكن المتجه $1+t+t^2$.

إذا المجموعة $B = \{1+t-2t^2, 2t+3t^2, 1+t+t^2\}$ أساس لفراغ

$R_3[t]$.

(٥.٣) الإحداثيات Coordinates

نظرية (٨.٣): المجموعة $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ تكون أساساً للفراغ V إذا كان وكان فقط أي متجه في V يمكن كتابته كتركيب خطية وحيدة من متجهات B .

البرهان: (\Leftarrow) نفرض أن $\{u_1, \dots, u_n\}$ أساساً للفراغ V ، $u \in V$ ، بما أن

الأساس يولد الفراغ إذن u يمكن التعبير عنها كتركيب خطية أي

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

لإثبات أن هذه التركيبية وحيدة نفرض أن المتجه يمكن كتابته بصورة أخرى

$$u = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$$

إذن

$$0 = u - u = (a_1 - b_1)u_1 + \dots + (a_n - b_n)u_n$$

ولكن عناصر الأساس مستقلة خطياً ولهذا فإن

$$a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

(\Rightarrow) إذا كان كل عنصر في V له تعبير خطي وحيد من المتجهات

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ ، إذن B تولد V . يتبقى أن نثبت أن عناصر B مستقلة

خطياً ولذلك نفرض أن

$$c_1 u_1 + \dots + c_n u_n = 0$$

وبما أن التركيبية الخطية وحيدة بالنسبة للمتجه الصفري

$$0 = 0 u_1 + \dots + 0 u_n$$

∴ $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ، أي أن المتجهات u_1, \dots, u_n مستقلة

خطياً.

تعريف (١١.٣): نفرض أن $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ أساس لفراغ اتجاهي V محدود البعد ونفرض أن $w \in V$ حيث $w = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ ، الأعداد القياسية a_1, \dots, a_n هي إحداثيات w بالنسبة إلى الأساس B وسوف نكتب $w : (a_1, \dots, a_n)_B$ ليدل على أن w لها إحداثيات a_1, \dots, a_n بالنسبة للأساس B .

مثال (٣٥): نعتبر الأساس $B = \{(1, 3), (-2, 4)\}$ للفراغ V_2 . المتجه

$$(1, 3) \text{ يمكن كتابته على الصورة } (1, 3) = 1(1, 3) + 0(-2, 4)$$

ولهذا إحداثيات المتجه $(1, 3)$ بالنسبة للأساس B هي $1, 0$ أو

$$(1, 3) : (1, 0)_B \text{ بالمثل } (0, 1)_B : (-2, 4)$$

لإيجاد إحداثيات أي متجه آخر وليكن $(7, 9)$ بالنسبة للأساس B . أنه من

الضروري حل المعادلة الاتجاهية $(7, 9) = x(1, 3) + y(-2, 4)$ بالنسبة

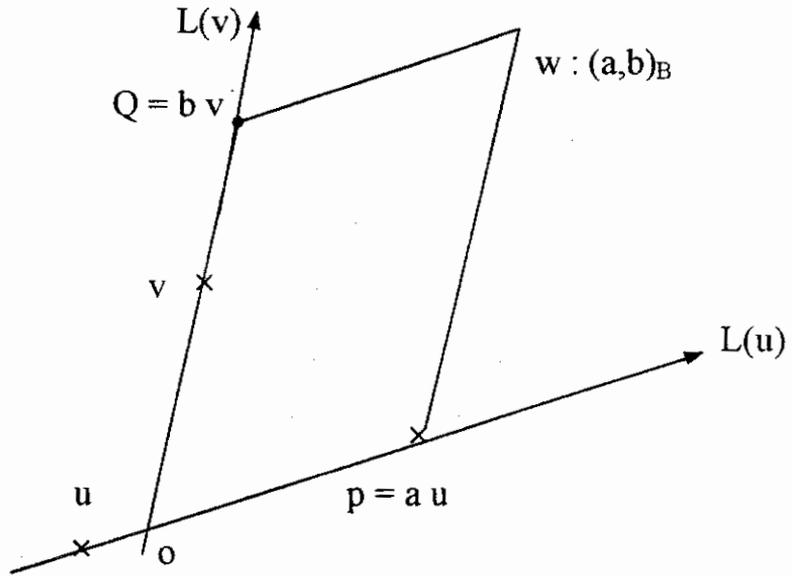
للمجهيل x, y والحلول هي $x = 5, y = -2$ إذن إحداثيات المتجه $(7, 9)$

$$\text{هي } (7, 9) : (5, -2)_B$$

هندسيا يمكن تمثيل أساس B للمستوى V_2 والإحداثيات بالنسبة للأساس

B . نفرض أن $B = \{u, v\}$ ، إذن B تحدد خطين في المستوى يناظرا

$L(u), L(v)$ وهذه الخطوط تسمى محاور الإحداثيات (شكل (١)).



شكل (١)

إحداثيات أي متجه w يمكن إيجادها باستخدام قاعدة التحصيل بالنسبة لمتوازي الأضلاع الذي فيه au, bv ضلعين متجاورين. بمعنى أنه إذا كان الخط pw يوازي $L(v)$ والخط Qw يوازي $L(u)$ إذن $Q = b v$, $p = a u$ ويؤدي إلى $w : (a, b)_B$

مثال (٣٦): نعتبر الأساس $B = \{t^2 + 1, t + 1, t^2 + t\}$ لفراغ كثيرات

الحدود $R_3[t]$. إحداثيات متجهات الأساس بالنسبة للأساس هي

$$t^2 + 1 : (1, 0, 0)_B, t + 1 : (0, 1, 0)_B, t^2 + t : (0, 0, 1)_B$$

لإيجاد إحداثيات أي متجه آخر مثل $2t$ بالنسبة للأساس B نعتبر المعادلة

$$x(t^2 + 1) + y(t + 1) + z(t^2 + t) = 2t \quad \text{الاتجاهية}$$

ومنها نحصل على $x = -1, y = z = 1$ ، ولهذا $2t : (-1, 1, 1)_B$.

بنفس الطريقة يمكن أن نبين $2 : (1, 1, -1)_B$ ، $8t^2 + 3t + 1 : (3, -2, 5)_B$.

مثال (٣٧): إحدائيات أي متجه في الفراغ R^n بالنسبة للأساس القياسي

(المعتاد) $\{e_i\}$ هي نفسها مركبات المتجه أي أن

$$(7, -1) : (7, -1)_{\{e_i\}}; (4, 8, 2) : (4, 8, 2)_{\{e_i\}}$$

ومن الجدير بالذكر أن نكرر أن المتجه ليس له إحدائيات. له إحدائيات فقط بالنسبة لأساس محدد. إذن الأعداد 4, 8, 2 تسمى مركبات المتجه (4, 8, 2) وليست إحدائياته.

تعريف (١٢.٣): يقال أن الفراغ V يشاكل (على شاكلة) الفراغ W

isomorphic ويكتب $V \cong W$ إذا وجد تناظر إحادي T من V إلى W

بحيث يحافظ على البناء الجبري في كل منهما بمعنى

$$(i) \quad \forall u, v \in V, T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$(ii) \quad \forall u \in V, r \in R, T(ru) = rT(u)$$

وهذا يعني أن الفراغات الاتجاهية المتشاكلة لا يمكن أن تختلف عن بعضها بطرق جبرية.

نظرية (٩.٣): إذا كان $0 \neq \dim V = n$ إذن $V \cong R^n$.

أي أن دراسة الفراغات الاتجاهية محدودة البعد يمكن إجرائها باستخدام الفراغات R^n . وهذه النظرية غاية في الأهمية في دراسة الفراغات التي

تشاكل R^n .

مثال (٣٨) : فراغ المصفوفات 2×2 يشاكل R^4 عن طريق كتابة عناصر

$$(a_{ij}) \leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in R^4$$

مثال (٣٩) : فراغ كثيرات الحدود $R_n[t]$ يشاكل R^4 حيث

$$1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \leftrightarrow (1, a_1, a_2, a_3) \in R^4$$

(٦.١) المجموع المباشر Direct Sum

تعريف (١٣.٣) : مجموع فراغين اتجاهيين جزئيين U, V من فراغ اتجاهي

W يرمز له بالرمز $U+V$ يعرف كالاتي

$$U+V = \{u+v : u \in U, v \in V\}$$

ويمكن التأكد من أن $U+V$ هو فراغ اتجاهي جزئي من W . الفراغات

U, V تسمى عناصر Summands (مركبات) المجموع $U+V$

مثال (٤٠) : نفرض أن

$$U = L \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

$$V = L \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

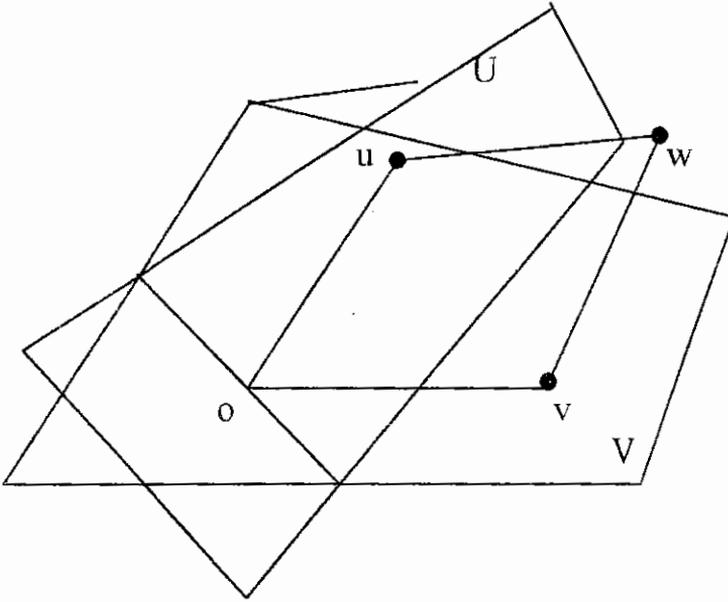
$$U+V = L \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\} \quad \text{إن}$$

المجموع $U+V$ يكافئ V_3 لأن أي ثلاثة من المتجهات تكون مستقلة

خطيا. إذا اعتبرنا U, V مستويات مارة بنقطة الأصل في V_3 إذن $U+V$

يعبر عن V_3 كمجموع مستويين وأي متجه في V_3 يمكن التعبير عنه

كمجموع متجهين $v \in V, u \in U$ كما هو مبين بالشكل.



شكل (٢)

ملحوظة : يوجد تشابه وثيق بين كتابة متجه كتركيبه خطية من متجهات وكتابة فراغ اتجاهي كمجموع فراغات جزئية منه.

إذا كانت التركيبية الخطية وحيدة نحصل على الإحداثيات.

نناقش مثل هذه الحالة في مجموع الفراغات الجزئية، نفرض أن $w \in W$

أمكن كتابته بطريقتين $w = u_1 + v_1, w = u_2 + v_2, u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$

وكل المتجهات u_1, u_2, v_1, v_2 مختلفة.

إذن $0 = w - w = u_1 - u_2 + v_1 - v_2$ تؤدي إلى $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = z$

إذن $z = u_2 - u_1 \in U, z = v_1 - v_2 \in V, z \in U \cap V$ ولهذا ومن الفرض

إذن $U \cap V, z \neq 0$ ليست الفراغ الصفري.

إذن إذا كتب متجه كمجموع متجهين من فراغين جزئيين U, V بأكثر من طريقة فإن $U \cap V$ ليست فراغ اتجاهي صفري أو تافه بمعنى أن

$$U \cap V \neq \{0\}$$

وبهذا نكون قد برهنا النظرية.

نظرية (١٠.٣): نفرض أن U, V فراغين جزئيين من فراغ اتجاهي W ، $W=U+V$. كل متجه $w \in W$ له تعبير وحيد كمجموع $w = u + v$ ، $u \in U, v \in V$ إذا كان وكان فقط $U \cap V = \{0\}$

تعريف (١٤.٣): نفرض أن U, V فراغين جزئيين من فراغ اتجاهي W . المجموع $U + V$ يقال أنه مجموع مباشر $direct\ sum$ ويكتب $U \oplus V$ إذا كانت $U \cap V = \{0\}$. إذا كان $W = U \oplus V$ فإن $U \oplus V$ تحليل مجموع مباشر للفراغ V ، أن U, V تسمى المركبات المباشرة للفراغ V .

مثال (٤١): إذا كان $B = \{(4, -7), (2, 5)\}$ أساس للمستوى R^2 ، $U = L\{(4, -), R^2$ ، $V = L\{(2, 5)\}$ هل المجموع $U + V$ مجموع مباشر لفراغ اتجاهي؟

الحل: بما أن B تولد R^2 إذن $R^2 = U + V$ ، نفرض أن $z \in U \cap V$ إذن

$$z = a(4, -7), z = b(2, 5) \text{ حيث } a, b \in R \text{ وبما أن } B \text{ مستقلة خطياً إذن}$$

$$z = 0 \text{ ولهذا } U + V \text{ هو مجموع مباشر ويكتب } R^2 = U \oplus V.$$

هندسياً المستوى الكارتيزي R^2 يمكن كتابته كمجموع مباشر

لخطين يمران بنقطة الأصل.

مثال (٤٢): نفرض أن $U = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ ، $V = L\{(3, 1, 4)\}$

هل المجموع $U + V$ هو مجموع مباشر $U \oplus V$ ؟

الحل: نفرض أن $(a, b, c) \in U \cap V$ إذن

$$a + b + c = 0, (a, b, c) = t(3, 1, 4)$$

بحذف a, b, c نحصل على $t = 0$ أي أن $U \cap V = \{0\}$ ، $(a, b, c) = 0$.

وبالتالي $U + V$ هو مجموع مباشر $U \oplus V$

مثال (٤٣): هل $U \oplus V = V_3$ ؟ حيث U, V كما في مثال (٤٢).

الحل: بما أن $(1, -1, 0)$ ، $(1, 0, -1)$ تولد U إذن المجموع المباشر هو

$L\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (3, 1, 4)\}$. وبما أن الثلاث متجهات في هذه

المجموعة مستقلين خطياً إذن $V_3 = U \oplus V$.

باستخدام المجموع المباشر $U \oplus V$ المطلوب كتابة متجه وليكن المتجه

$(8, 9, -1)$ ولهذا يجب أن نجد الأعداد x, y, t بحيث

$$(8, 9, -1) = (x, y, -x - y) + t(3, 1, 4)$$

وهذه المعادلة لها حل في الصورة

$$(8, 9, -1) = (2, 7, -9) + (6, 2, 8)$$

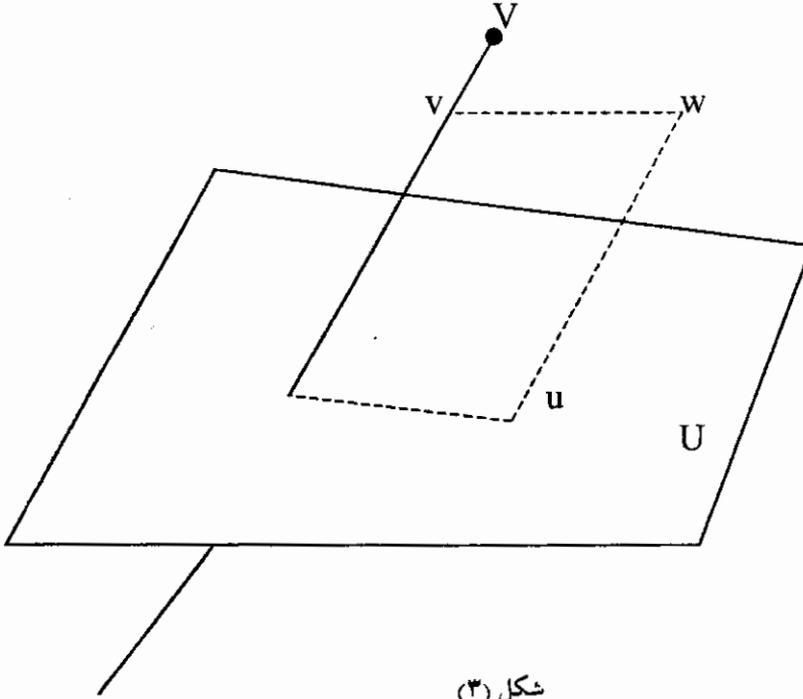
حيث $(2, 7, -9) \in U$ ، $(6, 2, 8) \in V$ كما هو مطلوب.

من هذا المثال يمكننا القول بأن أي فراغ ثلاثي يمكن التعبير عنه

كمجموع مباشر لمستوى وخط مستقيم غير واقع في هذا المستوى

ومتقاطعين في نقطة الأصل (لماذا؟).

للإجابة على هذا السؤال، نفرض أن w نقطة معلومة والنقاط $v \in V, u \in U$ يمكن الحصول عليهما هندسياً. النقطة u هي تقاطع المستوى U والخط المار بالنقطة w موازياً للخط V . النقطة v هي تقاطع الخط V وخط مار بالنقطة w موازياً للمستوى U . كما هو موضح بشكل (٣).



من الأمثلة السابقة يكون لدينا النظرية التالية :

نظرية (١١.٣): إذا كان U, V فراغات جزئية من فراغ اتجاهي محدود

البعد، وكان $U \oplus V$ هو المجموع المباشر إذن

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$$

البرهان : نفرض أن $\{u_1, \dots, u_m\}$ ، $\{v_1, \dots, v_n\}$ أساسات للفراغات U ، V على الترتيبين إذن $\dim U = m$ ، $\dim V = n$ ونحاول إثبات أن $B = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ أساس للمجموع المباشر $U \oplus V$.

لذلك نفرض أن B تولد $U \oplus V$ أي أن

$$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = 0$$

$$z = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m \quad \text{نفرض أن}$$

$$z = -b_1 v_1 - \dots - b_n v_n \quad \text{أي أن } z \in U \text{ ولكن}$$

$$z \in V \quad \text{أي أن } z \in U \cap V = \{0\} \text{ إذن } z = 0 \text{ ولهذا}$$

الآن المجموعة $\{u_i\}$ ، $\{v_i\}$ مستقلة خطياً، إذن $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ مستقلة خطياً وهي أساس للفراغ $U \oplus V$.

تمارين (٣)

١- هل مجموعة الدوال $F = \{f: f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ الحقيقية المعرفة على \mathbb{R} بحيث $f(0) = 1$ تحت تأثير العمليات المعرفة على F فراغ اتجاهي.

٢- أثبت أن مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة الثانية تكون فراغ اتجاهي.

٣- بين أن المجموعات الآتية فراغات جزئية من الفراغات المشار إليها.

(i) $\{(x, y, z) \mid x = 3y, x + y = z\} \subset V_3$

(ii) $\{a t^3 + b t \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[t]$

(iii) $\{f \mid f(x) = a \sin x + b \cos x, a, b \in \mathbb{R}\} \subset F$

٤- هل المجموعات الآتية فراغات جزئية؟ (من الفراغات المشار إليها).

(i) $\{(x, y) \mid y = x^2\} \subset V_2$

(ii) $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\} \subset V_3$

(iii) $\{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f' = 0\} \subset F$

٥- أي من المتجهات الآتية $(0, 3, 3), (1, 0, 1), (1, -4, 1), (1, 0, 0)$ ينتمي إلى الفراغ $L \{(-2, 1, 9), (2, -4, 6)\}$.

٦- أي من كثيرات الحدود الآتية $t^2, t-1, t^3 + 3t^2 + 3t - 1$ ينتمي إلى الفراغ $L \{t^3 - t + 1, 3t^2 + 2t, t^3\}$

٧- أي من المجموعات الآتية يولد V_3

- (i) $\{ (1,1,0), (0,1,1), (1,1,1) \}$
(ii) $\{ (1,1,1), (1,2,3) \}$
(iii) $\{ (1,1,0), (2,0,-1), (4,4,0), (5,3,-1) \}$

٨- أوجد الشروط التي يجب أن تحققها الأعداد القياسية a, b كي تكون مجموعة المتجهات الآتية مستقلة خطياً :

- (i) $\{ (1,a,2), (1,1,b) \}$
(ii) $\{ (1,2,0), (a,b,2), (1,0,1) \}$
(ii) $\{ (a,2,3), (0,4,6), (0,0,b) \}$

٩- هل المجموعات الآتية مستقلة خطياً

- (i) $\{ e^x, e^{2x}, e^{3x} \}$ في فراغ الدوال F .
(ii) $\{ 4t, t^2 + t, 3 - t^2 - t \}$ في فراغ كثيرات الحدود $R[t]$.
(iii) $\{ \tan x, \sin x \}$ في فراغ الدوال F .
(vi) $\left\{ \frac{3x^2}{x+1}, \frac{-x}{2x+2}, 4x \right\}$ في فراغ الدوال F .

١٠- نفرض أن $S = \{ (2,-4), (1,3), (-6,-3) \} \subset V_2$ ، بين أن

- (i) S مستقلة خطياً.
(ii) المتجه $(5,0)$ يمكن التعبير عنه كتركيبية خطية من متجهات S بعدد لانهائي من الطرق.
(iii) أي متجهين من S وليكن أول اثنين يولدا V_2 .
(vi) $L(S) = V_2$ هو فراغ جزئي تافه (صفرى) من V_2 .

١١- هل المجموعات الآتية تصلح أن تكون أساساً للفراغات المشار إليها.

- (i) $\{(2,1,-5), (7,4,3)\}, V_3$
(ii) $\{t, 3t^2 + 1, 4t + 2, 1 - 5t\}, R_3[t]$
(iii) $\{(2,1), (-3,4)\}, V_2$

١٢- حدد بعد الفراغات الآتية

- (i) $L \{(2,-3,1), (1,4,2), (5,-2,4)\} \subset V_3$
(ii) $L \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\} \subset F$
(iii) $L \{t-1, 1-t^2, t^2-t\} \subset R_3[t]$

١٣- أوجد إحداثيات المتجه $(2,-5)$ في الفراغ V_2 بالنسبة لكل من الآتية

- (i) $\{(6,-5), (2,5)\}$ (ii) $\{(3,1), (-2,6)\}$
(iii) $\{e_i\}$ (iv) $\{(1,0), (2,-5)\}$

١٤- بين أن $B = \{t^3, t^3 + t, t^2 + 1, t + 1\}$ أساس للفراغ $R_4[t]$ وأوجد

إحداثيات المتجهات الآتية بالنسبة إلى B

- (i) $t^2 + 1$, (ii) t^3 (iii) $t^2 - t$

١٥- أوجد إحداثيات المتجه $(2,-3,5)$ بالنسبة إلى

- (i) $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$
(ii) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,-5,5)\}$

١٦- بفرض أن B أساس للفراغ V بحيث

$$(1,1):(6,-3)_B, (3,2): (4,1)_B \text{ أوجد الأساس } B.$$

١٧- أوجد الأساس B الذي يحقق $(0,1):(-1,2)_B, (1,0):(5,-8)_B$.

- ١٨- بين أن $L\{(1,7)\}$ ، $L\{(2,3)\}$ تحليل جمعي مباشر للفراغ V_2
- ١٩- بين أن المجموع $L\{(3,0,1)\} + L\{(1,4,-2)\}$ هو مجموع مباشر. هل هذا المجموع يعطي تحليل جمعي مباشر للفراغ V_3 .
- ٢٠- نفرض أن

$$V = \{(x,y,z) \mid 5y - 3z = 0\}, \quad U = \{(x,y,z) \mid 2x - y + 4z = 0\}$$

فراغات جزئية من V_3 ، بين أن

(i) المجموع $U + V$ ليس مباشر أو

(ii) $u + v = (2,9,6)$ بحيث أن $u \in U, v \in V$

- ٢١- هل V_3 هو مجموع $U + V$ أو مجموع مباشر $U \oplus V$ في الحالات الآتية

- (i) $U = \{(x,y,z) \mid x = 2y\}$ ، $V = \{(x,y,z) \mid z = 0\}$
- (ii) $U = \{(x,y,z) \mid x = y, z = 0\}$ ، $V = \{(x,y,z) \mid x = 0, y = z\}$
- (iii) $U = L\{(4,1,3)\}$ ، $V = L\{(2,1,1), (1,0,2)\}$
- (v) $U = L\{(2,-1,1)\}$ ، $V = L\{(1,5,3), (3,4,4)\}$