الباب الخامس
التحويلات الخطية
Linear Transformations

(١.٥) مقدمة عامة:

تعريف (١.٥): نفرض أن لدينا فراغان اتجاهيان V, W ودالة T معرفة على V حيث $T: V \to W$. الفراغ V يسمى النطاق domain والفراغ W يسمى النطاق المصاحب Codomain، $T(V) \subset W$ يسمى مدى Range الدالة T (التحويلة T أو الراسم T)

تعريف (٢.٥): التحويل T يسمى تحويل خطي linear transformation أو راسم خطي إذا كان لأي $u, v \in V$، $r \in R$ يتحقق

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(r\,u) = r\,T(u)$

هذه الشروط كانت محققة في تعريف راسم التشاكل في الباب الأول، بمعنى أن راسم التشاكل هو تحويل خطي ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح، ونوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية :

مثال (١): بين أن الراسم $T: V_3 \to V_2$ المعرف بالقاعدة

$$T(x, y, z) = (2x + y, 4z)$$

هو تحويل خطي ولكن ليست راسم تشاكل.

الحل: نفرض أن

$$u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3) \in V_3$$

$$T(u+v)=T(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$
$$=(2(a_1+b_1)+a_2+b_2, 4(a_3+b_3))$$
$$=((2a_1+a_2, 4a_3), (2b_1+b_2, 4b_3))$$
$$=T(a_1, a_2, a_3)+T(b_1, b_2, b_3)$$
$$=T(u)+T(v)$$
$$T(ru)=T(ra_1, ra_2, ra_3)=(2ra_1+ra_2, 4ra_3)$$
$$=r(2a_1+a_2, 4a_3)=rT(a_1, a_2, a_3)$$
$$= rT(u) \quad , \ r\in R$$

إذن الراسم T يحافظ على عملية جمع المتجهات وعملية الضرب في عدد قياسي وبالتالي فهو تحويل خطي.

التحويل T ليست تناظر أحادي ونبين ذلك حيث أن T ليست one to one (injective) بمعنى إذا كان $(a, b)\in V_2$ هل يوجد $(x, y, z)\in V_3$ بشرط أن $2x+y=a\ ,\ 4z=b$ وهذا النظام من المعادلات له عدد لانهائي من الحلول، أي لا يوجد أصل واحد لأي متجه في V_2. مثلاً

$$T(3, 0, 1)=(6, 4)=T(2, 2, 1)$$

مثال (٢): الراسم $T: V_2\to V_3$ المعرف بالقاعدة

$$T(x, y)=(x, 3x-y, 2x)$$

تحويل خطي وأحادي وليس تشاكل.

الحل: من السهل إثبات أنه تحويل خطي ولإثبات أنه أحادي نفرض أن

$$T(u)=T(v) \ ، u=(a_1,a_2), v=(b_1, b_2)\in V_2$$
$$\therefore (a_1, 3a_1-a_2, 2a_1)=(b_1, 3b_1-b_2, 2b_1)$$

وهذا يؤدي إلى

$$a_1=b_1\ , 3a_1-a_2=3b_1-b_2\ , 2a_1=2b_1$$

أي

$$a_1 = b_1 \ , a_2 = b_2$$

أي أن $u = v$ وبالتالي T تحويل أحادي.

التحويل ليست تشاكل لأنه ليست فوقـــي (surjective) onto لأن بعــض عناصر V_3 ليست لها أصل في V_2 بمعنى هل يوجد $(x, y) \in V_2$ بحيــث يتحقق

$T(x, y) = (a, b, c)$ بشرط أن $x = a, 3x - y = b, 2x = c$

وهذا النظام عبارة عن ثلاث معادلات في مجهولين x, y، وهذا النظـــام غير متوافق non consistent بمعنى ليس له حل، أي أن T ليست راســم فوقي.

تعريف (٣.٥): التشاكل بين فراغ اتجاهي V وفراغ اتجـــاهي W هــو تحويل أحادي وفوقي (تناظر أحادي) وتحويل خطي من V إلى W.

مثال (٣): التحويل $T: V_2 \to V_3, T(a, b) = (0, 0)$ خطي ولكـــن ليســت أحادي وليست فوقي.

مثال (٤): التحويل $T: R[t] \to R[t]$

$$T\left(a_o + a_1 t + \ldots + a_n t^n\right) = a_1 + 2a_2 t + \ldots + n a_n t^{n-1}$$

خطي وفوقي ولكن ليست أحادي.

تعريف (٥.٤): إذا كان V فراغ اتجاهي عبارة عن مجموع مباشـــر أي أن $V = U \oplus W$ فإن رواسم الأسقاط P_1، P_2 من V إلـــى U، W علـــى الترتيب تعرف كالآتي $P_1 : V \to U \,,\, P_2 : V \to W$

حيث $P_1(v) = u \,,\, P_2(v) = w \,,\, v = u + w \,,\, u \in U,\, w \in W$

مثال (٤): رواسم الأسقاط P_1، P_2 تحويلات خطية.

الحل: البرهان متروك للطالب.

مثال (٥): نفرض أن

$$U = \{ (x, y, z) \mid x + y + z = 0 \}$$
$$W = L \{ (2, 5, 7) \}$$

إذن $U + W$ هو مجموع مباشر، V_3 هو مجموع مباشر لمستوى وخـــط أي أن

$$V_3 = U \oplus W$$

نعتبر المساقط

$$P_1 : V_3 \to U \;,\, P_2 : V_3 \to W$$

نفرض أن $(7, 3, 4) \in V_3$، ويمكن أن نرى أن هذه النقطة يمكن كتابتـــها في صورة مجموع على الصورة

$$(7, 3, 4) = (5, -2, -3) + (2, 5, 7)$$

حيث $(2, 5, 7) \in W \,,\, (5, -2, -3) \in U$

ولهذا فإن

$$P_1(7, 3, 4) = (5, -2, -3)$$
$$P_2(7, 3, 4) = (2, 5, 7)$$

ملاحظة : راسم الاسقاط أكثر تعميماً من المساقط العمودية في الهندسة الإقليدية. لكن المسقط العمودي يمكن التعبير عنه كراسم اسقاط. ونعطي مثال يوضح ذلك، إذا استبدلنا W في مثال (٥) بالفراغ $W=L\{(1,1,1)\}$، إذن W فراغ جزئي (خط مستقيم) عمودي على المستوىU إذن $P_1(v_3)$ هو مسقط عمودي للفراغV على المستوى U. أي أن P_1 هو المسقط العمودي للفراغ V_3 على المستوىU.

نظرية (١.٥): $T:V\to W$ تحويل خطي إذا كان وكان فقط

$$T(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)=\lambda_1 T(u_1)+\lambda_2 T(u_2)\ ,\ \forall \lambda_1,\lambda_2\in R\,;\,u_1,u_2\in V$$

البرهان: نفرض أن T تحويل خطي، إذن

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)&=T(\lambda_1 u_1)+T(\lambda_2 u_2)\\ &=\lambda_1 T(u_1)+\lambda_2 T(u_2)\end{aligned}$$

وبالعكس نفرض أن

$$T(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)=\lambda_1 T(u_1)+\lambda_2 T(u_2)$$

بوضع $\lambda_1=\lambda_2=1$ نحصل على الشرط الأول من تعريف التحويلات الخطية

$$T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)$$

بوضع $\lambda_2=0$ نحصل على الشرط الثاني

$$T(\lambda_1 u_1)=\lambda_1 T(u_1)$$

$\therefore$ T تحويل خطي.

نظرية (٢.٥): نفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطـــي إذا كـــان $U \subset V$ فراغ اتجاهي جزئي فإن $T(U) \subset W$ فراغ اتجاهي جزئي من W. وكذلك $T(V) \subset W$

البرهان: نفرض أن $a, b \in T(U)$ إذن يوجد $A, B \in U$ بحيث يكون

$$
\begin{aligned}
& T\,A = a\,,\ T\,B = b \\
\therefore\ & a + b = T\,A + T\,B = T\,(A + B) \\
\therefore\ & a + b \in T\,(U)
\end{aligned}
$$

وحيث أن $T(U)$ هي مجموعة جزئية من W فإن T(U) هي فراغ جزئي (نظرية في الباب الثالث). بوضع $U = V$ تكون T(V) فراغ جزئي مـــن W.

نظرية (٣.٥): نفرض أن $T: V \to W$ ، $U \subset V$ فراغ جزئي إذا كان $U = L\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ فإن $T\,U = L\{T\,X_1, ..., T\,X_n\}$

البرهان : لإثبات أن المتجهات $T\,X_i$ تولـــد الفـــراغ T(U) نفـــرض أن $Y \in T(U)$

إذن يوجد $X \in U$ بحيث يكون $Y = T\,X$، وحيث أن $X \in U$ فإن

$$
\begin{aligned}
& X = \lambda_1\, X_1 + \lambda_2\, X_2 + ... + \lambda_n\, X_n \ \ ; \lambda_1, ..., \lambda_n \in R \\
\therefore\ & Y = TX = \lambda_1\, T\,X_1 + \lambda_2\, T\,X_2 + ... + \lambda_n\, T\,X_n
\end{aligned}
$$

أي أن المتجه Y يمكن كتابته كارتباط خطي من المتجهات $\{T\,X_1, ..., T\,X_2\}$ وبذلك فإن هذه المتجهات تولد الفراغ T(U).

ملحوظة: التحويل الخطي له تأويل هندسي كالآتي :

التحويل الخطي يحافظ على توازي الخطوط المستقيمة بمعنى أنه إذا كان لدينا خط مستقيم معادلته الاتجاهية

$$p = k\,u + v \;,\; k \in R \;,\; u, v \in V_n \;,\; T : V_n \to V_n$$

تحويل خطي فإن

$$T(p) = T(k\,u + v) = k\,T(u) + T(v)$$

ولهذا إذا كانت $T(u) \neq 0$ فإن $T(p)$ خط مستقيم يمر بالنقطة $T(v)$ واتجاهه $T(u)$. وبالتالي صورة الخط المستقيم $p = k\,u + v$ هو الخط المستقيم $T(p) = k\,T(u) + T(v)$

(٢.٥) نواة التحويلة (قلب التحويلة) Kernel of transformation

نواة التحويل الخطي $T : V \to W$ يرمز لها بالرمز Ker T وتعرف على أنها مجموعة جزئية من V معرفة كالآتي :

$$\text{Ker}\,T = \{x : x \in V , T\,x = 0\} \subset V$$

أي أن نواة التحويلة هي مجموعة المتجهات من V والتي صورتها تحت تأثير T هي المتجه الصفري في W (العنصر المحايد الجمعي للفراغ W)

مثال (٦): نعتبر التحويل الخطي $T : R^3 \to R^3$ المعرف كالآتي :

$$T(x, y, z) = (x, y, 0)$$
$$\therefore\ \text{Ker}\,T = \{(0, 0, c) : c \in R\}$$

تعريف (٥.٥): يعرف مدى التحويل الخطي $T : V \to W$ بأنه الفراغ الجزئي $T(V) \subset W$ ويرمز له بالرمز Im T أي أن $T(V) = \text{Im}\,T$

من نظرية (٣.٥) يمكن استنتاج أن Im T فراغ جزئي من W (النطاق المصاحب) وكذلك Ker T فراغ جزئي من V (النطاق).

في مثال (٦) $\mathrm{Im}\, T = \{(x, y, 0) : x, y \in R\}$

(٣.٥) رتبة التحويل وصفرية التحويل Rank and nullity

رتبة التحويل الخطي $T : V \to W$؛ يرمز لـــها بـــالرمز rank T وتعرف كما يلي :

$$\text{rank } T = \dim(\mathrm{Im}\, T)$$

أما صفرية التحويل فيرمز لها بالرمز nullity T وتعرف كما يلي :

$$\text{nullity } T = \dim(\mathrm{Ker}\, T)$$

في مثال (٦) $\text{rank } T = 2, \;\; \text{nullity } T = 1$

نظرية (٤.٥): $\dim V = \text{nullity } T + \text{rank } T$

البرهان : نفرض أن $\text{rank } T = r, \;\; \dim V = n$

ونفرض أن المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$ هي أســـاس للفـــراغ الاتجـــاهي الجزئي Ker T.

يمكن إكمال المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$ بعدد n-r من المتجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$ بحيث تكون مجموعة المتجهات

$X_1, X_2, \ldots, X_r ; Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$ أساساً للفراغ V

نفرض أن

$$Y = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_{n-r} Y_{n-r}$$

$$\therefore \; T\, Y = T(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_{n-r} Y_{n-r})$$

$$= \lambda_1 T\, Y_1 + \lambda_2 T\, Y_2 + \ldots + \lambda_{n-r} T\, Y_{n-r}$$

حيث أن المتجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$ مستقلة خطياً فإن $Y = 0$ يؤدي إلـــى $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0$ أي أن $T\, Y = 0$ وبذلك يكون $Y \in \mathrm{Ker}\, T$

$$\therefore\ Y = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \dots + \mu_r X_r \ , \mu_1, \dots, \mu_r \in R$$
$$\therefore\ \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_{n-r} Y_{n-r} - \mu_1 X_1 - \dots - \mu_r X_r = 0$$

وحيث أن المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_{n-r}$ مستقلة خطياً لأنها تكون أساساً للفراغ V، فأن

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$$

وعليه فإن المتجهات $T\,Y_1, \dots, T\,Y_{n-r}$ مستقلة خطيا.

ومن نظرية (٣.٥) فإن هذه المتجهات تولد الفراغ الجزئي T(V)

$$\therefore\quad \dim T(V) = \dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rank} T = n - r$$
$$\operatorname{rank} T = n - r = \dim V - \operatorname{nullity} T$$

i. e., $\dim V = \operatorname{nullity} T + \operatorname{rank} T.$

وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

(٥ . ٤) التحويلات غير الشاذة Nonsingular transformation

يقال أن التحويل T غير شاذ إذا كان وفقط إذا كان T تناظر أحادي (راسم فوقي وأحادي). Bijection (1-1 and onto)

تمهيدية (١): التحويل الخطي T يكون أحادي إذا كان وفقط إذا كان
$\operatorname{Ker} T = \{0\}$

البرهان: نفرض أن التحويل أحادي، وبفرض أن $X \in \operatorname{Ker} T$ إذن $TX = 0$

وحيث أن $T\,0 = 0$ إذن $X = 0$.

والعكس نفرض أن $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ ولإثبات أن التحويل أحادي نفرض أن $X, Y \in V$ بحيث أن $T\,X = T\,Y$، إذن $T\,X - T\,Y = 0$ وهذا يؤدي إلى $T(X - Y) = 0$، إذن $X - Y \in \operatorname{Ker} T$ إذن $X-Y=0$ ومنها $X = Y$

أي أن T تحويل خطي أحادي.

نظرية (٥.٥): التقارير الثلاث الآتية متكافئة

(١) $T: V \to W$ تحويل خطي غير شاذ (تناظر أحادي).

(٢) T له معكوس. أي يوجد تحويل وحيد غير شاذ S بحيث

$$S: W \to V, TS = I_W, ST = I_V$$

حيث I_W, I_V هي تحويلات الوحدة (التطابق) على W, V على الترتيب أي أن $I_V x = x, \forall x \in V; I_w x = x, \forall x \in W$

(٣) إذا كان $X_1, X_2, ..., X_n$ أساس للفراغ V فإن $T X_1, ..., T X_n$ تكون أساساً للفراغ W، أي أن T تحافظ على كل أساس.

البرهان: $(1) \Leftrightarrow (2)$

نفرض أن T تناظر أحادي (من دراستنا في الجبر المجرد) $\Leftrightarrow T$ له معكوس $\Leftrightarrow T^{-1}$

$$T^{-1}(\lambda T X_1 + \mu T X_2) = T^{-1}(T(\lambda X_1 + \mu X_2))$$
$$= \lambda X_1 + \mu X_2, X_1, X_2 \in V; \lambda, \mu \in R$$

أي أن T تحويل خطي غير شاذ $\Leftrightarrow T^{-1}$ تحويل خطي غير شاذ.

$(1) \Rightarrow (3)$

نفرض T تحويل خطي غير شاذ، وأن المتجهات $X_1, ..., X_n$ تكون أساس للفراغ V.

$\therefore$ المتجهات $T X_1, ..., T X_n$ تولد الفراغ $T V = W$

نفرض $\lambda_1 (T X_1) + ... + \lambda_n (T X_n) = 0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in R$

$$\therefore T(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n = 0$$

وحيث أن المتجهات $X_1, ..., X_n$ مستقلة خطياً

$$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

وبذلك تكون المتجهات $T X_1, T X_2, \dots, T X_n$ مستقلة خطياً. وحيث أنها تولد الفراغ W فهي أساس له.

$(3) \Rightarrow (1)$

نفرض المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_n$ أساس للفراغ V

$\therefore$ $T X_1, \dots, T X_n$ أساس للفراغ W.

$\therefore$ لأي متجه $Y \in W$ يوجد $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in R$ بحيث

$$\begin{aligned} Y &= \mu_1 T X_1 + \dots + \mu_n T X_n \\ &= T(\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \dots + \mu_n X_n) \end{aligned}$$

وحيث أن $\mu_1 X_1 + \dots + \mu_n X_n \in V$

فإن أي متجه $Y \in W$ يمكن التعبير عنه بدلالة متجه من V عن طريق T. أي أن T فوقي.

نفرض أن $0 \neq Z \in \text{Ker}\, T$ ؛ حيث أن Z متجه غير صفري. إذن يمكن أن نكمل Z بالمتجهات $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ لكي تكون أساس للفراغ V.

وحيث أن $Z \in \text{Ker}\, T$ إذن $T Z = 0$ وهذا يحقق أن T غير محافظة على الأساس. وهذا عكس الفرض. إذن $\text{Ker}\, T = \{ 0 \}$.

ومن تمهيدية (١) تكون T أحادية وهذا يكمل البرهان.

نظرية (٦.٥): نفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ أساس للفراغV، $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ هي n من متجهات W. إذن

(١) يوجد تحويل خطي $T: V \to W$ بحيث يكون $T X_i = Y_i, i = 1, \dots, n$

(٢) لا يوجد أكثر من تحويل خطي يحقق العلاقة (١)

البرهان: أي متجه $X \in V$ يمكن التعبير عنه تعبيراً وحيداً بدلالة أساسV.

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n \ ; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$$

نفرض التحويل الخطي T المعرفة كما يلي :

$$T(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 Y_1 + \dots, \lambda_n Y_n$$

واضح أن T تحويل خطي من V إلى W حيث أن

$$T\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i \right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) X_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) Y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i Y_i$$

$$= \alpha T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \right) + \beta T\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i \right)$$

التحويل T يحقق الشرط (١) وذلك لأن :

$$\begin{aligned} T X_i &= T(0 X_1 + \dots + 0 X_{i-1} + 1 X_i + 0 X_{i+1} + \dots + 0 X_n) \\ &= 0 Y_1 + \dots + 0 Y_{i-1} + 1 Y_i + 0 Y_{i+1} + \dots + 0 Y_n \\ &= Y_i \qquad ; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

وهذا يثبت وجود تحويل خطي يحقق الشرط (١)

والآن نفرض وجود تحويل خطي أخر S يحقق (١)

$$\therefore \ T X_i = Y_i = S X_i \quad , i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \therefore \ S(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) &= \lambda_1 S X_1 + \dots + \lambda_n S X_n \\ &= \lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_n Y_n \\ &= \lambda_1 T X_1 + \dots + \lambda_n T X_n = T(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) \end{aligned}$$

$$\therefore \ S X = T X \ , \ \forall \ X \in V \Rightarrow S = T$$

نتيجة : التحويل الخطي يتحدد تماماً بشكل تأثيره على الأساس.

(٥.٥) المصفوفات والتحويلات الخطية :

Matrix of the linear transformation

نفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي، $\dim W = m, \dim V = n$،

نفرض أن $X_1, \dots, X_n$ أساس للفراغ V و $Y_1, \dots, Y_m$ أساس للفراغ W.

عند التأثير بالتحويل T على أساس V تنتج المتجهات $Z_1, \dots, Z_n \in W$

والتي يمكن التعبير عنها خطياً بدلالة أساس W. أي أن

$$T X_i = Z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} Y_j \ , \ i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

الشكل الرياضي $A = (a_{ij})$ يسمى بمصفوفة التحويلة T بالنسبة للأساسين المرتبين $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}; \{Y_i, Y_2, \dots, Y_m\}$ للفراغات V، W على الترتيب. ويكتب

$$T X = A Y$$

حيث $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t , Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)^t$

جمع التحويلات الخطية :

نفرض أن $S: V \to W$، T تحويلات خطية معرفة بالمصفوفات $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ على الترتيب أي أن

$$T X = A Y \quad , \quad S X = B Y$$

فإن $T + S : V \to W$

يعرف كالآتي :

$$\begin{aligned}(T + S) X &= T X + S X \\ &= A Y + B Y = (A + B) Y\end{aligned}$$

أو $$(T + S) X_i = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} + b_{ij}\right) Y_j$$

أي أن المصفوفة المناظرة للتحويلة $T + S$ هي $C = A + B$

ملاحظة : المصفوفات A، B، C لها نفس الأبعاد $m \times n$ حيث m بعد W، n بعد V.

من خواص المصفوفات يمكن إثبات أن مجموعة التحويلات الخطية تحقق خواص الإبدال والدمج بالنسبة لعملية الجمع وأن العنصر المحايد الجمعي هو التحويل الصفري والذي يعرف بالمصفوفة الصفرية أي أن $OX = O$. وكذلك المعكوس الجمعي للتحويل T هو $-T$ والذي يعرف بالمصفوفة $-A = (-a_{ij})$ حيث

$$(-T)X = -(TX), \ \forall X \in V$$

مثال (٧): نفرض التحويل $T: R_3 \to R_3$ معرف بالقاعدة :

$$Te_1 = e_2 + e_3 \ , Te_2 = e_1 + e_3 \ , Te_3 = e_1 + e_2$$

حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساس مرتب للفراغ R_3 أوجد مصفوفة التحويل.

الحل: من تعريف التحويل نجد أن

$$T\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: من المثال السابق يتضح أن ترتيب صفوف مصفوفة التحويل T يعتمد على ترتيب أساسV وترتيب أعمدتها يعتمد على ترتيب أساس W.

ضرب تحويلة في عدد قياسي :

نفرض أن $T: V \to W$ تحويل خطي معرف بالآتي $TX = AY$ فإن

$$\lambda \ T: V \to W \ , \ \lambda \in R$$

هو أيضاً تحويل خطي معرف بالآتي :

$$(\lambda T)X = \lambda(TX) = \lambda AY$$

أي أن مصفوفة التحويل λT هي

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

مما سبق يتضح أن مجموعة التحويلات الخطية تكون فراغ اتجاهي.

تحصيل (تركيب التحويلات) :

نفرض أن U, V, W فراغات اتجاهية معرفة على R وذات أبعاد m, n, k على الترتيب ولها الأساسات المرتبة

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m\}; \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}; \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$$

على الترتيب ونفرض أن $T: U \to V, S: V \to W$ تحويلات خطية معرفة بالمصفوفات A، B على الترتيب

$$TX = AY \quad , TY = BZ$$

$$TX_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j \quad , \quad TY_j = \sum_{h=1}^{k} b_{jh} Z_h$$

التحويل الخطي $ST: U \to W$ يعرف بالآتي :

$$(ST)X = S(T(X))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jh} Z_h$$

أو

$$(ST)X_i = \sum_{h=1}^{k} C_{ih} Z_h$$

أي أن

$$(ST)X = ABY = CY$$

حيث C مصفوفة التحويلة S T وتعطى من

$$C = AB$$

المصفوفة C ذات الأبعاد $m \times k$. وبالتالي تحصيل التحويلات الخطية يتبع خواص ضرب المصفوفات، لاحظ أن قابلية ضرب المصفوفات محققة بمعنى أن عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B.

تحويل الوحدة (تحويل التطابق) Identity transformation

التحويل $I: V \to V$ حيث V فراغ اتجاهي بعده n، $\{X_i\}$ أساس مرتب للفراغ V حيث $I(X_i) = X_i \;; i = 1, 2, ..., n$

أي أن $IX = X, \ \forall\ X \in V$ وبالتالي مصفوفة تحويل الوحدة (التطابق) هي مصفوفة الوحدة.

مثال (٨): أوجد $I\,m\,T$ حيث $T: V_2 \to V_3$

$$T(a, b) = (2a + b, b - a, 3a + 4b)$$

الحل:

$$I\,m\,T = \{T(a, b) \mid a, b \in R\}$$

$$= \{(2a + b, b - a, 3a + 4b) \mid a, b \in R\}$$

نضع $a = 0, b = 1$ ، $a = 1, b = 0$ لنحصل على أي متجهين في $I\,m\,T$

إذن $I\,m\,T = L\{(2, -1, 3), (1, 1, 4)\}$

نحاول إيجاد أساس الفراغ $I\,m\,T$ أي إيجاد فراغ الصف المناظر للمصفوفة التي صفوفها $(2, -1, 3), (1, 1, 4)$

أي بإجراء العمليات الأولية على صفوف المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix}$$

واضح أن فراغ الصف بعده 2 وهو بعد $I\,m\,T$ والأساس هو

$$\left\{\left(0,1,\frac{5}{3}\right) ،\left(1,0,\frac{7}{3}\right)\right\}$$

أي أن $(x, y, z) \in I\,m\,T$ يجب أن تحقق

$$(x, y, z) = u\left(0,1,\frac{5}{3}\right) + v\left(1,0,\frac{7}{3}\right) \;, u, v \in R$$

إذن (x, y, z) تحقق المعادلة $7\,x + 5\,y - 3\,z = 0$ أو

$$\begin{aligned} I\,m\,T &= L\left\{\left(1,0,\frac{7}{3}\right), \left(0,1,\frac{5}{3}\right)\right\} \\ &= \{\, (x, y, z) \mid 7\,x + 5\,y - 3\,z = 0 \,\} \end{aligned}$$

مثال (٩): للتحويل $T : V_2 \to V_3$ المعرف بالقاعدة

$$T\,(a, b) = (2\,a - b,\ 3b\text{-}a,\ a\text{+}b)$$

أوجد $I\,m\,S$ حيث $S = L\{(1,2)\} \subset V_2$

الحل:

$$\begin{aligned} T\,(S) &= \{\,T\,(u) \mid u \in S\,\} \\ &= \{\,T\,(k, 2\,k) \mid k \in R\,\} \\ &= \{\,(2\,k - 2\,k\,, 3\,(2\,k) - k\,, k + 2\,k\,) \mid k \in R\,\} \\ &= \{\,(0, 5\,k, 3\,k\,) \mid k \in R\,\} \\ &= L\,\{\,(0, 5, 3)\,\} \end{aligned}$$

(بوضع $k = 1$)

هذا المثال له تفسير هندسي هو أن S خط مستقيم في المستوى يمر بالنقطة (1, 2) صورتها خط مستقيم في الفراغ يمر بالنقطة (0, 5, 3).

مثال (١٠): أوجد رتبة وصفرية التحويل الخطي $T : V_3 \to V_3$

$$T\,(a, b, c) = (2\,a\text{-}b\text{+}3c\,,\ a - b + c,\ 3\,a - 4\,b + 2\,c)$$

الحل: المتجه $(x, y, z) \in N_T$ إذا تحقق

$$2x - y + 3z = 0$$
$$x - y + z = 0$$
$$3x - 4y + 2z = 0$$

وهذا النظام يكافئ

$$x + 2z = 0$$
$$y + z = 0$$

ولهذا N_T تعطى من

$$N_T = \{ (x, y, z) \mid x + 2z = 0, y + z = 0 \}$$
$$= L\{ (2, 1, -1) \}$$

إذن صفرية T تساوي واحد (بعد N_T) ورتبة T تساوي

$$\dim V_3 - \dim N_T = 2 = 3 - 1$$

مثال (١١): نفرض أن $T : R_2[t] \rightarrow R_3[t]$

$$T(a + bt) = 3a + b + (a - 4b)t + (a + 2b)t^2$$

أوجد مصفوفة التحويل.

الحل: صورة أي متجه في $R_2[t]$ لها الشكل $x + yt + zt^2$ والمعادلة

$$T(a + bt) = x + yt + zt^2$$

تؤدي إلى نظام من المعادلات الخطية

$$3a + b = x$$
$$a - 4b = y$$
$$a + 2b = z$$

أو الصورة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ولهذا صورة أي متجه $a+bt\in R_2[t]$ يمكن إيجادها عن طريق ضرب المصفوفات.

كمثال لذلك

$$T(4-6t)=6+28t-8t^2$$

أو
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 28 \\ -8 \end{pmatrix}$$

بما أن
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

نستنتج أن
$$T(1+3t)=6-11t+7t^2$$

وباستخدام الأساسات المرتبة للفراغات $R_2[t]$ ، $R_3[t]$ على الترتيب

$$B_2=\{1,t,t^2\}, B_1=\{1,t\};$$

إذن

$$4-6t:(4,-6)_{B_1}$$

$$6+28t-8t^2:(6,28,-8)_{B_2}$$

أي أن إحداثيات $4-6t$ بالنسبة للأساس B_1 هي $\{4,-6\}$ وكذلك إحداثيات $6+28t-8t^2$ بالنسبة للأساس B_2 هي $\{6,28,-8\}$

مثال (١٢): إذا كان $T:V_3\to V_2\ ,\ S:V_2\to V_3$

حيث
$$T(a,b,c)=(a+b,a-c),$$
$$S(x,y)=(x-y,2x-y,3y)$$

أوجد $S\,T$؟

الحل: من تعريف تحصيل التحويلات يكون

$$\begin{aligned}(ST)(a, b, c) &= S(T(a, b, c))\\ &= S(a+b, a-c)\\ &= ((a+b)-(a-c), 2(a+b)-(a-c), 3(a-c))\\ &= (b+c, a+2b+c, 3a-3c)\end{aligned}$$

واضح أن $ST: V_3 \to V_3$

معكوس التحويل Inverse transformation:

نفرض أن $T: V \to W$ ، $S: W \to V$ تحويلات خطية تحقق

$$ST = I_V \quad , TS = I_W$$

يقال أن S تحويل عكسي للتحويل T، ويقال أن T قابلة للعكس Invertible ومعكوسها Inverse يرمز له بالرمز T^{-1} أي أن

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

ومن هنا يتضح أن خصائص التحويلات الخطية انعكست على المصفوفات المناظرة لها والعكس بالعكس.

مثال (١٣): نفرض أن $T: V_2 \to V_2$

$$T(a, b) = (2a+3b, 3a+4b)$$

تحويل خطي. بين أن T قابلة للعكس بإيجاد T^{-1}

الحل: نفرض أن $T(a, b) = (x, y)$

هل يوجد راسم S يحقق $ST = I$ أي أن

$$S(x, y) = (a, b)$$

ولهذا S يمكن إيجادها بحل المعادلات وإيجاد a, b

$$2a + 3b = x$$
$$3a + 4b = y$$

هذه المعادلات لها حل وحيد في الصورة :

$$a = -4x + 3y$$
$$b = 3x - 2y$$

إذن S يعرف كالآتي : $S(x, y) = (-4x + 3y, 3x - 2y)$

باستخدام تعريف T، S يمكن إثبات أن

$$\begin{aligned}(ST)(a, b) &= S(T(a, b))\\ &= S(2a + 3b, 3a + 4b)\\ &= (a, b) = I(a, b)\end{aligned}$$

وكذلك يمكن إثبات أن $TS = I$.

مما سبق نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

نظرية (٧.٥): مجموعة التحويلات الخطية الغير شاذة المعرفة على فراغV المعرف عليها عملية تحصيل التحويلات (عملية ضرب المصفوفات) تكون زمرة (ليست إبدالية).

وهذا يكافئ أن مجموعة المصفوفات المربعة الغير شاذة (أي لها معكوس) المعرف عليها عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة (ليست إبدالية).

(٦.٥) تطبيقات التحويلات الخطية في المستوى :

(١.٦.٥) تحويل الدوران :

لتكن θ زاوية ثابتة وليكن $T : R^2 \to R^2$ تحويل خطي مصفوفته A

حيث $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

إذا كان $\vec{V}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$

عندئذ

$$T\left(\vec{V}\right)=A\vec{V}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

يمكن ملاحظة هذا هندسياً باعتبار $T\left(\vec{V}\right)$ هو المتجه الناتج من دوران $\vec{V}$ بزاوية مقدارها θ . لبيان ذلك نفرض ϕ الزاوية بين $\vec{V}$ والاتجاه x الموجب لمحور X وليكن $\vec{V}'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ المتجه الناتج من دوران المتجه $\vec{V}$ بزاوية θ . سوف نثبت أن

$$\vec{V}'=T\left(\vec{V}\right)$$

نفرض r طول $\vec{V}$ عندئذ

$$x=r\cos\phi \quad , \quad y=r\sin\phi$$

وبالمثل لما كان معيار $\vec{V}'$ هو نفس معيار $\vec{V}$، نحصل على

$$x'=r\cos(\theta+\phi) \quad , \quad y'=r\sin(\theta+\phi)$$

عندئذ

$$\vec{V}'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= A\vec{V} = T\left(\vec{V}\right)$$

يطلق على هذا التحويل الخطي تدوير R^2 بزاوية θ أو تحويل الدوران بزاوية θ .

(٢.٦.٥) الانعكاس (Reflection)

الانعكاس حول مستقيم ما يمر بنقطة الأصل هو تحويل ينقل كل نقطة من المستوى إلى صورتها بواسطة مرآة على المستقيم. وعليه فإن أي نقطة $A(x,y)$ صورتها بالانعكاس في الخط المستقيم L تكون $A'(x', y')$ بحيث يتحقق $A A'$ عمودي على L وأن L ينصف القطعة المستقيمة AA'، ومن معادلة الخط المستقيم يمكن الحصول على الصورة (x', y').

يمكن إثبات أن الانعكاس هذا هو تحويل خطي.

إن أهم الانعكاسات في المستوى هي حول المحورين والمستقيم $y=x$ ومن تعريف الانعكاس نحصل على مصفوفات التحويل كالآتي :

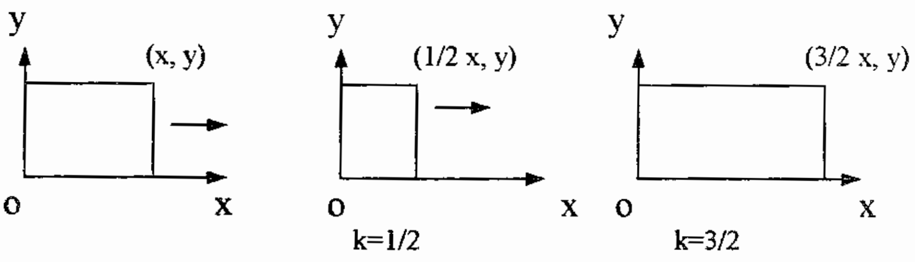
مصفوفة الانعكاس بواسطة المحور y هي $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الانعكاس بواسطة المحور x هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الانعكاس بواسطة المستقيم $y = x$ هي $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(٣.٦.٥) التمدد والتقلص (Expansions and Compressions)

إذا ضرب الإحداثي x لكل نقطة في المستوى بعدد ثابت k موجب عندئذ يكون التأثير تمدد أو تقلص كل شكل في المستوى باتجاه محور x. إذا كان $0 < k < 1$ تكون النتيجة انكماش وإذا كانت $k > 1$ تؤدي إلى التمدد. نطلق على تأثير كهذا تمدد أو تقلص باتجاه محورx بعامل k كما في الشكل التالي إذا ضرب الإحداثيy لكل نقطة بعدد ثابت موجب k نحصل على تمدد أو تقلص باتجاه محور y بعامل k كما هو موضح في شكل (١).



الشكل الأصلي التقلص التمدد

شكل (١)

لإيجاد مصفوفة التمدد أو التقلص باتجاه محول x بعامل k. نفرض أن $T : R^2 \rightarrow R^2$ تحويل باتجاه محور x بعامل k. عندئذ

$$T\left(\vec{e_1}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}, T\left(\vec{e_2}\right) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

وبذلك تكون مصفوفة التحويل T

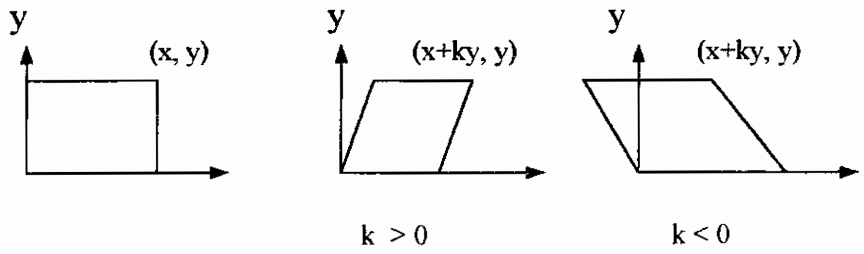
$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالمثل تكون مصفوفة التمدد أو التقلص باتجاه محور y بعامل k هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

(٤.٦.٥) القص (Shears)

يعرف القص باتجاه محور x بعامل k بأنه تحويل يحرك كل نقطة $P(x,y)$ باتجاه يوازي محور x بمقدار ky إلى الموقع الجديد $Q(x+k\ y, y)$ بهذا التحويل سوف لا تتحرك نقاط محور x لأن الإحداثي الثاني $y=0$ بينما النقاط البعيدة عن محور x سوف تتحرك مسافة أكثر من النقاط القريبة من محور x كما هو موضح بالشكل (٢).



شكل (٢)

القص باتجاه محور y بعامل k هو تحويل يحرك كل نقطة (x, y) مسافة kx باتجاه يوازي محور y إلى الموقع الجديد $(x, y+kx)$. بهذا التحويل تبقى نقاط محور y في مواقعها دون تغيير لأن إحداثيها الأول $x=0$ أما

النقاط البعيدة عن محور y سوف تتحرك مسافة أكثر من النقاط القريبة من محور y.

يمكن إثبات أن القص هو تحويل خطي ، فإذا كان

$$T: R^2 \to R^2$$

هو قص بمعامل k في اتجاه محور x ، عندئذ

$$T\left(\vec{e}_1\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\vec{e}_2\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون مصفوفة القص T هي $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

وبالمثل مصفوفة القص باتجاه محور y بمعامل k هي $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

مثال (١٤): (أ) أوجد تحويل خطي من R^2 إلى R^2 الذي هو محصلة قص بعامل 3 باتجاه محور x ثم انعكاس حول $y = x$

(ب) أوجد تحويل خطي من R^2 إلى R^2 الذي هو محصلة انعكاس حول المستقيم $y=x$ ثم قص بعامل 3 باتجاه محور x.

الحل: (أ) مصفوفة القص بمعامل $k = 3$ هي $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ومصفوفة الانعكاس بالمستقيم $y=x$ هي $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

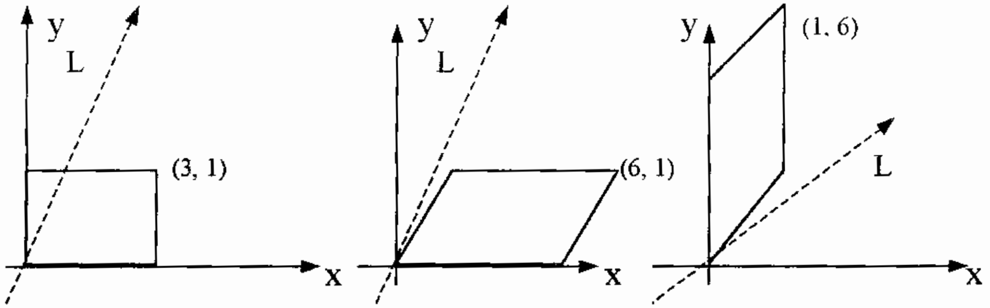
ومصفوفة العمليتين (القص ثم الانعكاس) هي

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(ب) بالمثل مصفوفة الانعكاس ثم القص هي

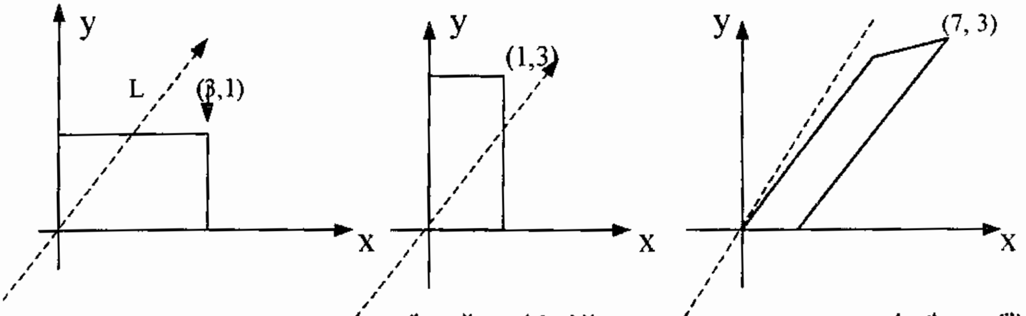
$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

من (أ)، (ب) نجد أن $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$ لذلك فـــإن تـــأثير القـــص ثـــم الانعكاس يختلف عن تأثير الانعكاس ثم القص ويمكن ملاحظة الفرق من شكل (٣)، (٤).



الانعكاس بالمستقيم $L : y = x$ — القص باتجاه محور x بعامل $k = 3$ — الشكل الأصلي

شكل (٣)



القص باتجاه محور x بعامل $k = 3$ — الانعكاس بالمستقيم $L : y = x$

شكل (٤)

نظرية (٨.٥): إذا كان $T:R^2 \to R^2$ عملية ضـــرب بمصفوفـــة قابلـــة للانعكاس A. عندئذ تأثير T هندسياً هو نفس تأثير متتالية من القصـــات والتمددات والتقلصات والانعكاسات.

البرهان:

لما كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس ويمكن تحويلها إلى مصفوفة محايدة بمتتابعة منتهية من العمليات الصفية الأولية. لذلك توجد مصفوفات أولية

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

بحيث أن

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$$

وبعمليات عكسية نجد أن :

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I$$

أي أن

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$$

إن هذه العلاقة تعطي A بدلالة مصفوفات أولية لأن معكوس مصفوفـــة أولية هو مصفوفة أولية أيضاً.

ولما كانت عمليات الضرب بمصفوفة أولية هو واحد أو أكثر من بعـــض التحويلات الهندسية

كالتمدد باتجاه محور x الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

والتمدد باتجاه محور y الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

والانعكاس بالمحور y الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

والانعكاس بالمحور x الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

والانعكاس بالمحور $y = x$ الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

والقص باتجاه المحور x الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

والقص باتجاه المحور y الذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

عندئذ تأثير T هو من بعض هذه التأثيرات الهندسية المتتالية. وبهذا يتم البرهان.

مثال (١٥): اكتب المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ بدلالة مصفوفات أولية ثم صف هندسياً تأثير الضرب بالمصفوفة A بدلالة قصات وتمددات وانعكاسات.

الحل: يمكن تحويل المصفوفة A إلى المصفوفة المحايدة كالآتي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3r_1 + r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2 + r_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن العمليات الصفية المتتالية يمكن إنجازها بالضرب من اليسار بالمصفوفات

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن هذه المصفوفات متولدة من إجراء تحويلات A ذاتها على المصفوفة المحايدة I_2 عندئذ يكون

$$A = E_1^{-1}\,E_2^{-1}\,E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نجد أن تأثير المصفوفة A يكافئ العمليات المتتالية الآتية

١ــ القص باتجاه محور x بعامل 2.

٢ــ التمدد باتجاه محور y بعامل 2.

٣ــ الانعكاس بواسطة محور x.

٤ــ القص باتجاه محور y بعامل 3.

مثال (١٦): أوجد صورة الخط المستقيم $L:\ y = -4x + 3$ تحت تأثير التحويل الخطي الذي مصفوفته $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

الحل: معكوس المصفوفة A هو $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

فإذا كانت $P'(x', y')$ نقطة صورة المستقيم، يجب أن يحقق

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

لذلك

$$x=-2x'+3y'$$
$$y=-3x'+4y'$$

ثم نعوض بمعادلة المستقيم المعطاة $y=-4x+3$ ينتج

$$-3x'+4y'=-4(-2x'+3y')+3$$
$$11x'-16y'+3=0$$

وبذلك فإن صورة المستقيم $y=-4x+3$ بواسطة التحويل A هي

$$L':y'=\frac{11}{16}x'+\frac{3}{16}.$$

واضح أن صورة الخط المستقيم L هو خط مستقيم 'L حيث ميل الخط L موجب بينما ميل الخط 'L سالب.

مثال (١٧): أوجد صورة المربع الذي رؤوسه (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) بالتحويل الخطي $T:R^2\to R^2$ حيث $X\to AX$، $A=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

الحل: صورة النقطة الأولى $P_1(0,0)$ تعطى من :

$$A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

لذلك فإن الصورة هي $P_1'(0,0)$ أي نقطة الأصل ثابتة fixed point بالنسبة لهذا التحويل.

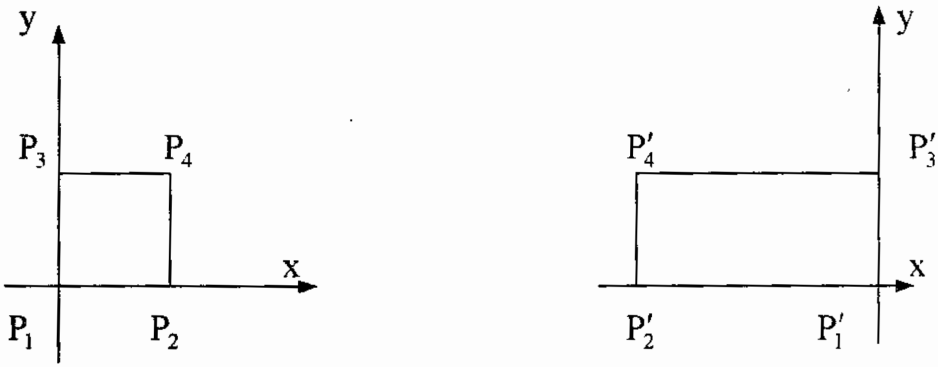
ثم صورة $P_2(1,0)$ هي

$$A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$$

لذلك فإن الصورة $P_2'(-3,0)$

وهكذا بالنسبة لبقية الرؤوس تكون صورها

$P_3'(0,1) \quad , P_4'(-3,1)$



شكل (٥)

أي أن صورة المربع في الربع الأول من المستوى هو مستطيل في الربع الثاني من المستوى بحيث عرض المستطيل يساوي طول ضلع المربع.

مثال (١٨): أوجد مصفوفة التحويل $T: R^2 \to R^2$ التي تحول النقطة $P(x,y,z)$ إلى

(أ) معكوسها بالنسبة للمستوى xy

(ب) " " " x z

(جـ) " " " y z

الحل:

(أ) لما كان $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ فإن مصفوفة التحويل هي

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

وهكذا بالنسبة لـ (ب)
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

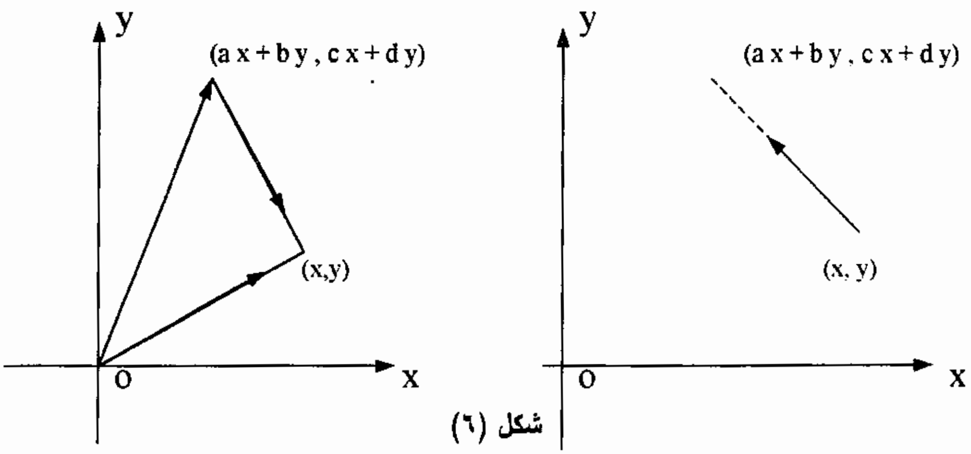
وبالنسبة لـ (جـ)
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال (١٩): أعط تأويل هندسي للتحويلات الخطية في المستوى.

الحل: إذا كان $T:R^2\to R^2$ تحويلاً خطياً مصفوفته $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

فإن
$$T\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{bmatrix}$$

يمكن النظر إلى عناصر المصفوفات إما مركبات متجهات أو إحداثيات نقاط كما في الشكل الآتي :



شكل (٦)

تمارين (٥)

١ـ حدد أي من التحويلات الآتية يكون خطي

(i) $T : V_2 \to V_2 \,; T(a, b) = \left(3a - b, b^2\right)$

(ii) $T : V_3 \to V_2 \,; T(a, b, c) = (3a + 2c, b)$

(iii) $T : M_{2\times 2} \to R \,; T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(iv) $T : R_3[t] \to R_3[t];\ T\left(a + bt + 9ct^2\right) = (a - b)t^2 + 4ct - b$

٢ـ أوجد $\operatorname{Im} T$، N_T للتحويلات الخطية الآتية

(i) $T : V_3 \to V_2 \,; T(a, b, c) = (3a - 2c, b + c)$

(ii) $T : R_3[t] \to R_3[t]; T\left(a + bt + ct^2\right)$

$$= a + 2c + (b - c)t + (a + 2b)t^2$$

٣ـ إذا كان $T : V_2 \to V_2$ تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(a, b) = (4a - 2b, 3b - 6a)$$

أوجد صورة الخطوط المستقيمة الآتية بالتحويل T :

(i) $\{t(1,5) \mid t \in R\}$

(ii) $\{t(2,1) + (3,5) \mid t \in R\}$

٤ـ إذا كان $T : V_3 \to V_3$ ، $U \subset V_3$ أوجد $T(U)$ في الحالات الآتية :

(i) $T(a, b, c) = (2a ++ b, 3b, 4b - c)$;
$U = L\{(-1, 3, 5), (1,0,4\}$

(ii) $T(a, b, c) = (a + b - c, 2a - b, 0)$
$U = L\{(-1, 2, 1)\}$

٥ـ باستخدام تعريف الفراغ الصفري N_T، ابحث هل التحويلات الآتية أحادية (1-1) أم لا؟

(i) $T\left(a+bt+ct^2\right)=2a+b+(a+b+c)t^2$

(ii) $T(a, b, c) = (a + 2b + c, 3a - b + 2c)$

(iii) $T\left(a+bt+ct^2\right)=c+(a-b)t+at^2$

٦ـ أثبت أن التحويل

$T(a, b, c) = (a + 3b, b - 2, a + 6c)$

خطي وأوجد المصفوفة التي تمثله بالنسبة للأساس B_1، B_2 في الحالات الآتية :

(i) $B_1 = B_2 = \{e_i\}$

(ii) $B_1 = \{(4,1,-2),(3,-2,1),(1,1,0)\}, B_2 = \{E_i\}$

(iii) $B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(6,-2,-1)\}$
$B_2 = \{(1,0,1),(3,1,0),(8,4,2)\}$

٧ـ أوجد ST، TS عندما

(i) $T(a, b) = (2a - b, 3b)$, $S(x, y) = (y-x, 4x)$

(ii) $T(a+bt)=2a-bt^2, S\left(a+bt+ct^2\right)=c+bt^2-3at^3$

٨ـ بين أن $T^2 = I$ حيث $T^2 = TT$ عندما $T(a, b) = (a, 3a-b)$

٩ـ حدد فيما إذا كان التحويل T قابل للعكس في الحالات الآتية

(i) $T(a, b, c) = (a-2b+c, 2a+b-c, b-3a)$, $T: V_3 \to V_3$

(ii) $T(a + bt) = (2a+b, 3a+b)$, $T: R_2[t] \to V_2$

(iii) $T(a + bt) = a + 3at + bt^2$, $T: R_2[t] \to R_3[t]$

١٠ــ نفرض أن $T(a, b) = (2a - 3b, 3b - 3a)$ تحويل خطي $T: V_2 \to V_2$ ونفرض أن A مصفوفة التحويل بالنسبة للأساس القياسي (المعتاد) standard $\{e_i\}$ للفراغ V_2 وأن A^{-1} هي مصفوفة التحويل العكسي بالنسبة للأساس القياسي $\{e_i\}$. أوجد A، A^{-1} واستخدم A^{-1} لإيجاد

$T^{-1}(0,1), T^{-1}(1,3),, T^{-1}(-5,6), T^{-1}(x, y)$

١١ــ أثبت أن دوران المستوى بزاوية حادة حول نقطة الأصل في اتجاه ضد عقارب الساعة تحويل خطي وأوجد مصفوفة التحويل.

١٢ــ أثبت أن المؤثر التفاضلي D هو تحويل خطي في فراغ كثيرات الحدود $R_n[t]$ التي درجتها أقل من أو تساوي n ومعاملاتها حقيقية وأوجد مصفوفة التحويل بالنسبة للأساس $1, t, t^2, ..., t^n$

١٣ــ إذا كانت T تحويلة معرفة بالمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

بالنسبة للأساس $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ أوجد مصفوفة هذا التحويل بالنسبة للأساس

(i) $\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$

(ii) $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$

١٤ــ أوجد المصفوفة المعتادة لكل من المؤثرات الخطية الآتية :

$T: V_n \to V_n$

(المصفوفة المعتادة هي مصفوفة التحويل بالنسبة للأساس القياسي أو المعتاد standard basis)

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 7x_2 \\ -8x_3 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

١٥ــ أوجد المصفوفة المعتادة لكل من التحويلات الخطية التالية :

(أ) $$T: V_2 \to V_2 \ , \ T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

(ب) $$T: V_3 \to V_3 \ , T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

(جـ) $$T: V_3 \to V_5 \ , T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(د) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$, $T : V_4 \to V_4$

١٦ــ أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطي $T : R^2 \to R^2$ والذي يرسم أي متجه $v = (x, y)$ إلى :

(أ) انعكاسه بواسطة محور x

(ب) انعكاسه بواسطة المستقيم $y = x$

(جـ) انعكاسه بواسطة نقطة الأصل.

(د) مسقطه العمودي على محور x

١٧ــ في كل جزء من تمرين (١٦) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها لحساب $T(2, 1)$. تأكد من حلولك هندسياً بتخطيط المتجهين $T(2,1), (2,1)$.

١٨ــ أوجد المصفوفة للمؤثر الخطي $T : R^3 \to R^3$ الذي يرسم المتجه $v=(x, y, z)$ إلى :

(أ) انعكاسه بواسطة مستوى xy.

(ب) انعكاسه بواسطة مستوى xz.

(جـ) انعكاسه بواسطة المستوى yz.

١٩ــ في كل جزء من تمرين (١٨)، استخدم المصفوفة التـــي حصلـــت عليها لحساب $T(1, 1, 1)$. تأكد من حلولك هندسياً بتخطيط المتجــهين $T(1, 1, 1), (1, 1, 1)$.

٢٠ــ أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطي $T : R^3 \to R^3$ الذي :

(أ) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x.
(بالنظر إلى أسفل محول z الموجب في اتجاه نقطة الأصل).

(ب) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x.
(بالنظر من على محور x الموجب في اتجاه نقطة الأصل)

(جــ) يدور كل متجه 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y
(بالنظر من على محور y الموجب في اتجاه نقطة الأصل).

٢١ــ اعتبر $T : P_2 \to P_1$ هو التحويل الخطي المعرف بواسطة

$$T(a_o + a_1 x + a_2 x^2) = (a_o + a_1) - (2a_1 + 3a_2)\, x$$

أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين المعتادين للفضاءين P_1, P_2

٢٢ــ اعتبر $T : R^2 \to R^3$ معرفاً بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين $B = \{u_1, u_2\}$،
حيث $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}, v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

(ب) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها في (أ) لحساب

$$T\left(\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}\right)$$

٢٣ـ اعتبر $T:R^3\to R^3$ مؤثراً معرفاً بواسطة

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_1\\x_1-x_3\end{bmatrix}$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساس $B=\{v_1,v_2,v_3\}$، حيث

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

(ب) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها في (أ) لحساب

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\right)$$

٢٤ـ اعتبر $T:R_2[x]\to R_4[x]$ هو التحويل الخطي المعرف بواسطة

$$T(p(x))=x^2\,p(x)$$

(أ) أوجد مصفوفة T بالنسبة إلى الأساسين $B',B=\{p_1,p_2,p_3\}$، حيث $p_1=1+x^2, p_2=1+2x+3x^2, p_3=4+5x+x^2$ وحيث B' هو الأساس المعتاد للفراغ $R_4[x]$.

(ب) استخدم المصفوفة التي حصلت عليها في (أ) لحساب
$T\left(-3+5x-2x^2\right)$

٢٥ـ اعتبر $v_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}1&3\\-2&5\end{bmatrix}$ مصفوفة المؤثر $T:R^2\to R^2$ بالنسبة إلى الأساس $B=\{v_1,v_2\}$

(أ) أوجد $[T(v_1)]_B, [T(v_2)]_B$

(ب) أوجد $T(v_1), T(v_2)$

(جـ) أوجد $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$

٢٦ـ اعتبر $A=\begin{bmatrix}3&-2&1&0\\1&6&2&1\\-3&0&7&1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة التحويل $T:R^4\to R^3$ بالنسبة إلى الأساسين $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$، $B'=\{w_1,w_2,w_3\}$، حيث

$$v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\4\\-1\\2\end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix}6\\9\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$w_1=\begin{bmatrix}0\\8\\8\end{bmatrix}, w_2=\begin{bmatrix}-7\\8\\1\end{bmatrix}, w_3=\begin{bmatrix}-6\\9\\1\end{bmatrix}$$

(أ) أوجد $[T(v_1)]_B, [T(v_1)]_B, [T(v_3)]_B, [T(v_4)]_B$

(ب) أوجد $T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)$

(جـ) أوجد $T\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix}$

٢٧ـ اعتبر $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 0 & 5\\6 & -2 & 4\end{bmatrix}$ هي مصفوفة المؤثر

$T:R_2[x]\to R_2[x]$ بالنسبة إلى الأساس $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ حيث

$v_1=3x+3x^2\ ,\ v_2=-1+3x+2x^2\ ,\ v_3=3+7x+2x^2$

(أ) أوجد $[T(v_3)]_B,[T(v_2)]_B,[T(v_1)]_B$

(ب) أوجد $T(v_3),T(v_1),T(v_2)$

(جـ) أوجد $T(1+x^2)$

٢٨ـ اعتبر $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ أساساً لفراغ خطي V. أوجد مصفوفة للمؤثر الخطي $T:V\to V$ بالنسبة للأساس B المعرف بواسطة $T(v_3)=v_4,T(v_2)=v_3,T(v_1)=v_2,T(v_4)=v_1$.

٢٩ـ اعتبر $D:R_2[x]\to R_2[x]$ بالنسبة للأساس $B=\{p_1,p_2,p_3\}$

(أ) $p_1=1,p_2=x,p_3=x^2$

(ب) $p_1=2,p_2=2-3x,p_3=2-3x+8x^2$

(جـ) استخدم مصفوفة الجزء (أ) لحساب $D(6-6x+24x^2)$

(د) كرر المطلوب في الجزء (جـ) باستخدام مصفوفة الجزء (ب).

٣٠ــ في كل جزء $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ هو أساس فضاء جزئي V من الفضاء الخطي للدوال ذات القيم الحقيقية المعرفة على المستقيم الحقيقي.

أوجد مصفوفة المؤثر الخطي $D : V \to V$ بالنسبة إلى B

(أ) $f_1 = 1, f_2 = \sin x , f_3 = \cos x$

(ب) $f_1 = 1 , f_2 = e^x , f_3 = e^{2x}$

(جـ) $f_1 = e^{2x} , f_2 = x\,e^{2x} , f_3 = x^2\, e^{2x}$