

الباب الأول

متسلسلات القوى

(Power Series)

قبل البدء في هذا الباب يجب التنويه إلى اعتماده على الباب الخاص بالمتسلسلات والمذكور في الجزء الثاني من هذا الكتاب .

[1] تعريف متسلسلة القوى واختبار تقاربهما : تعرف متسلسلة القوى (Power Series) بأنها كثيرة حدود (Polynomial) أو متسلسلة لانهائية لقوى أحد المتغيرات () ، وصورتها

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (1)$$

حيث $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ هي ثوابت تسمى المعاملات (Coefficients) .
وهناك صورة أخرى لمتسلسلة القوى حول $x = a$ وهي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots + c_n (x - a)^n + \dots \quad (2)$$

حيث a يسمى مركز المتسلسلة (Center)

المتسلسلة (1) هي حالة خاصة من (2) بأخذ $a = 0$.

ملحوظة : بوضع قيمة ما للمتغير x نحصل على متسلسلة عددية يمكن اختبار تقاربها أو تباعدها مع ملاحظة أن هناك قيما للمتغير x (موجبه أو سالبه) تجعل المتسلسلة تقاربية وقيما أخرى تجعل المتسلسلة تباعديه .

نظرية التقارب (Convergence Theorem) لمتسلسلات القوى :

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة للقيم $x = c \neq 0$ فإنها تكون متقاربة

تقارباً مطلقاً لكل قيم x حيث $|x| < |c|$ ، وإذا كانت المتسلسلة متباعدة للقيم $x = c$ فإنها تكون متباعدة لكل قيم x حيث $|x| > |c|$.

نصف قطر التقارب (Radius of Convergence) لمتسلسلة قوى :

لبحث تقارب المتسلسلة $\sum c_n (x - a)^n$ يوجد لدينا 3 احتمالات :-

(1) يوجد عدد موجب R بحيث أن المتسلسلة تكون متقاربة تقارباً مطلقاً إذا كان $|x - a| < R$ ، وتكون متباعدة إذا كان $|x - a| > R$ ، وتكون المتسلسلة متقاربة أو غير متقاربة عند نقطتي النهاية $x = a + R$ ، $x = a - R$.

ويعرف العدد R بنصف قطر التقارب (Radius of Convergence) للمتسلسلة .

(2) عندما $R = 0$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة عند $x = a$ فقط ومتباعدة فيما دون ذلك

(3) عندما $R = \infty$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة تقارباً مطلقاً لكل قيم x .

ملحوظة : تسمى قيم x التي تجعل المتسلسلة متقاربة بفترة التقارب

(Interval of Convergence)

كيف نختبر تقارب متسلسلات القوى

(How to test a power series for convergence)

(1) نستخدم اختبار النسبة (أو اختبار الجذر النوني) لإيجاد الفترة التي تكون فيها المتسلسلة

متقاربة تقارباً مطلقاً ، وهي عادة تكون الفترة المفتوحة $|x - a| < R$ أى

$$a - R < x < a + R$$

(2) إذا كانت فترة التقارب المطلق فترة محدودة ، نستخدم اختبار المقارنة أو التكامل أو

اختبار المتسلسلة المتناوبة [اختبارات التقارب والتباعد عند نقطتي النهاية].

(3) إذا كانت فترة التقارب المطلق هي $a - R < x < a + R$ فإن المتسلسلة تتباعد عندما

$|x - a| > R$ (وليست متقاربة تقارباً شرطياً) ، لأن الحد النوني لا يصل إلى الصفر لقيم

x المذكورة .

[2] متسلسلة القوى الهندسية (Geometric Power Series) :

لدينا صورتان لمتسلسلات القوى هما :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots + c_n (x - a)^n + \dots \quad (2)$$

ونأخذ متسلسلة القوى الهندسية هاتان الصورتان أيضاً

[1] فبأخذ كل المعاملات = 1 فى (1) نحصل على الصورة الآتية لمتسلسلة القوى الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

وهذه متسلسلة هندسية حدها الأول = 1 ونسبتها $r = x$ وتتقارب إلى $\frac{1}{1-x}$ حيث $|x| < 1$ ويمكن كتابة هذه الحقيقة بالصورة .

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$

[2] باخذ $a = 2, c_0 = 1, c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{4}, \dots, c_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ فى (2) نحصل على الصورة الآتية لمتسلسلة القوى الهندسية :

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n (x-2)^n + \dots$$

وهى متسلسلة هندسية حدها الأول = 1 ونسبتها $r = \frac{x-2}{2}$ وتتقارب إلى $\left(\frac{2}{x}\right)$ حيث

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{1-r} = \text{المجموع}, \quad 0 < x < 4, \quad \left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$\therefore \frac{2}{x} = 1 - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \dots, \quad 0 < x < 4$$

Ex:- For what values of x do the following power series converge (تتقارب)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n = 1 + x + (2!)x^2 + (3!)x^3 + \dots$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n x^n = \frac{1}{2}x + x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 x^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^4 x^4 + \dots$$

الحل :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$: لاجاد قيمة x التى تجعل هذه المتسلسلة تقاربية نستخدم اختبار

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} \leftarrow a_n = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ النسبة وذلك بفرض أن}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n}{n+1} (-1)x \rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x| = |x| \end{aligned}$$

وتكون المتسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً عندما $|x| < 1$ أى عندما $-1 < x < 1$ ويكون $R = 1$ وتكون المتسلسلة متباعدة عندما $|x| > 1$ [لأن الحد النونى لا يتقارب إلى الصفر].

ملحوظة :

(1) عندما $x = 1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية المتناوبة وصورتها:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

وهى تقاربية .

(2) عندما $x = -1$ نحصل على المتسلسلة التوافقية بحدود سالبه وصورتها:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

وهى تباعدية .

الخلاصة : المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ هى تقاربية لقيم x حيث : $-1 < x \leq 1$ وتباعدية فيما عدا ذلك .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$: نستخدم أيضا اختبار النسبة : بفرض أن $a_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ وتكون :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n-1}{2n+1} x^2 \leftarrow a_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} x^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} x^2 = x^2$$

وهذه المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً عندما $x^2 < 1$ ، وتتباعد عندما $x^2 > 1$ [لأن الحد النوني لا يتقارب إلى الصفر] .

وعند $x = 1$: تصبح المتسلسلة بالصورة $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ والتي تتقارب باستخدام نظرية المتسلسلات المتناوبة .

وعند $x = -1$: تصبح المتسلسلة بالصورة $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ والتي تتقارب أيضاً باستخدام شروط تقارب المتسلسلات المتناوبة .

الخلاصة : المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ تكون متقاربة لقيم x حيث $-1 \leq x \leq 1$ ومتباعدة فيما عدا ذلك .

(3) ، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: نستخدم اختبار النسبة : وذلك بفرض أن :

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leftarrow a_n = \frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 \quad (x \text{ لكل قيم})$$

أى أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة تقارباً مطلقاً لكل قيم x [النهاية = صفر] .

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$: نستخدم اختبار النسبة : وذلك بفرض أن :

$$a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1} \leftarrow a_n = (n!)x^n$$

$$\therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1)|x| \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty$$

(وذلك لكل قيم x ماعدا $x = 0$)

أى أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)x^n$ متباعدة لكل قيم x ماعدا عند $x = 0$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n x^n \quad \text{نستخدم اختبار الجذر النوني : وذلك بأخذ :}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2} \right)^n x^n} \rightarrow a_n = \left(\frac{n}{2} \right)^n x^n$$

$$= \left[\left(\frac{n}{2} \right)^n x^n \right]^{1/n} = \frac{n}{2} x \rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} |nx|$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |nx| = \infty \quad (\text{لكل قيم } x \text{ ماعدا } x = 0)$$

أى أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n x^n$ متباعدة لكل قيم x ماعدا عند $x = 0$.

[3] تفاضل وتكامل متسلسلات القوى حداً حداً :

Term-by-Term Differentiation and Integration of Power Series

من الممكن تفاضل أو تكامل متسلسلات القوى حداً حداً (Term-by-term) خلال فترة تقاربها ويكون لدينا النظريتان الآتيتان :-

(1) نظرية التفاضل حداً حداً : (Term-by-term Different. Theorem)

إذا كانت $\sum c_n (x-a)^n$ تقاربية فى الفترة $a-R < x < a+R$ حيث $R > 0$

فيمكن كتابة الدالة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ التى لها مشتقات داخل فترة التقارب ، ونحصل

على تلك المشتقات بتفاضل التسلسلة الأصلية حداً حداً

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2}, \dots$$

وكل من هذه المتسلسلات المشتقة تكون متقاربة عند كل نقاط فترة التقارب للمتسلسلة الأصلية

Ex: Applying term-by-term differentiation to find series for $f'(x)$ and $f''(x)$ if:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$$

Sol:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1$$

ملحوظة: لا يصلح التفاضل حداً حداً لكل المتسلسلات ، فمثلاً المتسلسلة المثلثية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

إذا فاضلناها حداً حداً نحصل على المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos(nx)}{n^2}$$

قوى موجبه صحيحة لـ x .

(2) نظرية التكامل حداً حداً (Term-by-term integration theorem):

$$\text{لتكن } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ متقاربة في المنطقة } a-R < x < a+R \text{ لكل } R > 0,$$

$$\text{فإن } \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \text{ تكون متقاربة في تلك المنطقة ويكون تكامل } f(x) \text{ بالصورة:}$$

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{لكل } a-R < x < a+R$$

Ex(1): A series for $\tan^{-1} x$, $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Identify the function: } f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, -1 \leq x \leq 1$$

Sol:

$$\text{بتفاضل } f(x) \text{ حداً حداً نحصل على: } f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots, -1 < x < 1$$

وهي متسلسلة هندسية حدها الأول $= 1$ ونسبتها $= -x^2$ فيكون مجموعها

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2} \rightarrow \int f'(x) dx = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x + C$$

ويلاحظ أن $f(x)$ تساوى صفر عندما $x = 0$ ولذلك فإن $C = 0$ وبذلك نحصل على :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \tan^{-1} x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Ex(2): A series for $\ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$

Identify the function : $f(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \frac{1}{1+t}, \quad -1 < t < 1$

Sol:

هذه المتسلسلة تقاربية على الفترة المفتوحة $-1 < t < 1$ وباجراء التكامل حداً حداً من $x = 0$ إلى $x = 1$ نحصل على :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t) \Big|_0^x = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x [1 - t + t^2 - t^3 + \dots] = \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \right]_0^x$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, -1 < x < 1$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1$$

ويلاحظ أن هذه المتسلسلة تتقارب عند $x = 1$ إلى العدد $\ln 2$.

[4] ضرب متسلسلات القوى Multiplication of power series

يمكن ضرب متسلسلات القوى ذات التقارب المطلق باستخدام النظرية الآتية :

إذا كانت $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ متسلسلتان متقاربتان تقارباً مطلقاً

للقيم $|x| < R$ ، وكانت :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

تمثل كثيرة حدود (polynomial) فإن : المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لحاصل

الضرب $A(x)B(x)$ لكل $|x| < R$.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{رياضياً:}$$

Ex: Multiply the geometric series

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$, for $|x| < 1$, by itself to get a convergent power series for $\frac{1}{(1-x)^2}$, for $|x| < 1$

Solution:

المطلوب درج المتسلسلة الهندسية المعطاه في نفسها لتعطي المتسلسلة $\frac{1}{(1-x)^2}$ المتقاربة للقيم $|x| < 1$ ، ومن أجل ذلك نفرض أن:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0 \quad (n+1 \text{ حداً})$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1} = n+1,$$

حيث $1 + 1 + \dots + 1$ عبارة عن $(n+1)$ من الواحد.

وباستخدام نظرية ضرب المتسلسلات نحصل على:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots \end{aligned}$$

وهي متسلسلة $\frac{1}{(1-x)^2}$ ، وهي متقاربة تقارباً مطلقاً للقيم $|x| < 1$.

ملحوظة: كما ورد في مثال تفاضل المتسلسلات حداً حداً، نحصل على نفس النتيجة، حيث:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

[5] متسلسلات تيلور وماكلورين Taylor and Maclaurin Series

إذا كانت f دالة ذات مشتقات من كل الرتب خلال فترة تحتوي على a كنقطة داخلية ، فإن متسلسلة تيلور حول النقطة $x = a$ تكتب بالصورة :-

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

وهي متسلسلة لها المعاملات :-

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

وكحالة خاصة : عندما $a = 0$ فإن المتسلسلة تأخذ صورة أبسط هي :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

وتسمى بمتسلسلة ماكلورين [وهي حالة خاصة من متسلسلة تيلور] .

كثيرة حدود تيلور Taylor's Polynomial :

من المعروف أن أي متسلسلة $\{a_n\} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ تولد

(generates) كثيرة حدود حدودها هي :

$$P_0(x) = a_0, \quad P_1(x) = a_0 + a_1x, \quad P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \dots$$

وتسمى $P_0(x)$ كثيرة الحدود من الرتبة صفر ، $P_1(x)$ كثيرة الحدود من الرتبة 1 ، ... ،

$P_n(x)$ كثيرة الحدود من الرتبة n .

وبالنسبة لمتسلسلة تيلور :

فإن كثيرة حدود تيلور من الرتبة n والمتولدة بواسطة الدالة f عند $x = a$ هي :

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

وذلك لقيم $k = 1, 2, \dots, N$ ، حيث العدد الصحيح n يتراوح من 0 مرأ خلال N .

كثيرة حدودو تيلور من الرتبة (1) : $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

كثيرة حدودو تيلور من الرتبة (k) :

$$P_k(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Ex(1): Find the Taylor series generated by $f(x) = \frac{1}{x}$ at $a = 2$, where

does the series converges to $\frac{1}{x}$.

Sol:

لإيجاد متسلسلة تيلور للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند النقطة $a = 2$ من المهم إيجاد المشتقات $f'(2), f''(2), \dots$ حيث :

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f'(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x) = 2!x^{-3} = \frac{2!}{x^3} \rightarrow f''(2) = \frac{2!}{(2)^3} \rightarrow \frac{f''(2)}{2!} = \frac{1}{2^3}$$

$$f'''(x) = -3!x^{-4} = -\frac{3!}{x^4} \rightarrow f'''(2) = -\frac{3!}{(2)^4} \rightarrow \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} = -\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$\therefore f^{(n)}(2) = -\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = -\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

وتصبح متسلسلة تيلور بالصورة :

$$\begin{aligned} f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots \\ = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

وهي متسلسلة هندسية حدها الأول $\frac{1}{2}$ ونسبتها $r = -\frac{x-2}{2}$ وهي تتقارب تقارباً مطلقاً عند

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x} \quad 0 < x < 4 \text{ أى فى الفترة } |x-2| < 2 \text{ ومجموعها هو :}$$

أى أن متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $a=2$ تتقارب إلى $\frac{1}{x}$ فى الفترة $0 < x < 4$ ، وهو المطلوب .

Ex(2): Taylor series and polynomial for e^x :

متسلسلة وكثيرة حدود (أى مفكوك) تيلور للدالة e^x :

Find Taylor series and polynomial by $f(x) = e^x$ at $x = 0$.

Sol: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$, ...

وعند $x = 0$:

$$\therefore f(0) = e^0 = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1, \dots$$

وتصبح متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة f عند $x = 0$ هي :

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

وهي أيضاً متسلسلة ماكلورين للدالة e^x :

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

أما كثيرة حدود تيلور من الرتبة n عند $x = 0$ (وهي أيضاً كثيرة حدود ماكلورين) فهي :

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Ex(3): Taylor series and polynomial for $\cos x$:

متسلسلة وكثيرة حدود تيلور للدالة $\cos x$

Find the Taylor series and polynomial generated by $f(x) = \cos x$ at $x = 0$.

Sol:

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x$$

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$$

وعند $x = 0$: فإن جيب التمام $= 1$ ، الجيب $= 0$ ، أى أن :

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

وتصبح متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة f عند $x = 0$ هي :

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$= 1 + (0)(x) - \frac{x^2}{2!} + (0)(x^3) + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

وهي أيضاً متسلسلة ماكلورين للدالة $\cos x$ ونكتب بالصورة :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

أما كثيرة حدود تيلور من الرتبة $(2n)$ فهي :

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ex(4): Taylor series and polynomial for $\ln(1+x)$:

متسلسلة وكثيرة تيلور للدالة $\ln(1+x)$:

Find the Taylor series and polynomial for the function $\ln(1+x)$ at $a = 0$

Sol:

نستخدم التكامل حداً حداً للدالة $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ، وذلك كالتالى :-

حيث أن :-

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+t) \Big|_0^x = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

أيضاً :

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x [1 - t + t^2 - t^3 + \dots] dt = \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

وهو مفكوك تيلور للدالة $\ln(1+x)$ ويخضع للشرط $|x| < 1$ أى $-1 < x < 1$ وبوضع

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{فى } x = 1 \text{ هذه المفكوك نحصل على}$$

وتكون كثيرة حدود تيلور من الرتبة n هي :

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Ex(5): Taylor series and polynomial for $\sin x$ at $x = 0$:

متسلسلة وكثيرة تيلور للدالة $\sin x$:

Find Taylor series and polynomial for $\sin x$ at $x = 0$

Sol:

$$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = 0, \quad f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x \rightarrow f^{(3)}(0) = -1$$

$$\therefore f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$$

حيث أنه عند $x = 0$: فإن جيوب التمام = 1 ، الجيوب = 0

$$\therefore f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

ونصبح متسلسلة تيلور المتولدة بالدالة $f(x)$ عند $x=0$ تشمل الحدود ذات القوى الفردية فقط وتكون صورتها هي :

$$f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

$$= 0 + (1)(x) + \frac{(0)}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

وهي أيضا متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$ وتكتب بالصورة :-

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

أما كثيرة حدود تيلور من الرتبة $(2n+1)$ فهي :

$$P_{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(6) تطبيقات على متسلسلات القوى : Applications of Power Series

تطبيق [1] متسلسلة ذات الحدين (The Binomial Series)

تعتبر متسلسلة ذات الحدين أحد تطبيقات متسلسلات القوى ، والتي تمكننا من إيجاد مفكوك الكميات المكونة من حدين ومرفوعة إلى أى أس ، وهي عبارة عن متسلسلة تيلور المتولدة

بالدالة $f(x) = (1+x)^m$ حيث m ثابت ، وصورتها

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (1)$$

وهذه المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا حيث $|x| < 1$ بمعنى أن القيمة العددية للمقدار x تكون أقل

من الواحد ، وهو شرط تقارب هذه المتسلسلة أى شرط إيجاد مجموعها .

وبتعريف الكميات [التي تسمى معاملات ذات الحدين] :

$$\binom{m}{1} = m, \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \dots, \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} \quad (k \geq 3)$$

حيث $k! = k \times (k-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

فان (1) تأخذ الصورة الآتية :

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots + \binom{m}{k}x^k + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k}x^k \\ (2)\end{aligned}$$

حالات خاصة :

$$\binom{-1}{1} = -1, \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1, \dots \quad (1) \text{ إذا كانت } m = -1 :$$

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-1-k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k$$

وباستخدام تلك القيم لمعاملات ذات الحدين نحصل على المتسلسلة الهندسية :

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &= \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k \\ (3)\end{aligned}$$

وبوضع $(-x)$ بدلا من (x) نحصل على المتسلسلة :

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \quad (4)$$

$$(2) \text{ إذا كانت } m = \frac{1}{2} \text{ فإن}$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \binom{1/2}{2} = \frac{\binom{1}{2}\binom{-1}{2}}{2!} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{8}, \binom{1/2}{3} = \frac{\binom{1}{2}\binom{-1}{2}\binom{-3}{2}}{3!} = \frac{3}{6} = \frac{1}{16}, \dots$$

وباستخدام تلك القيم نحصل على المتسلسلة الآتية :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots = \sqrt{1+x} \quad (5)$$

وبوضع $(-x)$ بدلا من (x) نحصل على المتسلسلة :

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots = \sqrt{1-x} \quad (6)$$

ويمكن استخدام العلاقتين (5), (6) لإيجاد قيم تقريبية لكل من : $\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}$

لقيم $|x|$ الصغيرة ، فمثلا :

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad (\text{بأخذ الحدين الأول والثاني})$$

$$\approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (\text{بأخذ الحدود الثلاثة الأولى}) , \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad (\text{بأخذ الحدين الأول والثاني})$$

$$\approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (\text{بأخذ الحدود الثلاثة الأولى}) , \dots\dots\dots$$

أيضاً بأخذ x^2 مكان x في (6) نحصل على :

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} - \dots\dots$$

ولقيم $|x^2|$ الصغيرة فإن :

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

(3) مفكوك $(a+x)^m$: يمكن إيجاد مفكوك $(a+x)^m$ بالصورة :

$$(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}x + \binom{m}{2} a^{m-2}x^2 + \dots\dots\dots \quad (7)$$

ويمكن تحويل هذا المفكوك لأى قيمة للمقدار m بتحويله إلى الصورة : $a^m \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$ وذلك
بأخذ a كمشارك ، وبذلك فإن :

$$(a+x)^m = a^m \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m = a^m \left[1 + \frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{2!} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots\right] \quad (8)$$

وهى متسلسلة متقاربة حيث $|x| < |a|$.

Solved Examples :

EX(1): Find the first four terms of the binomial series for the functions:-

المطلوب إيجاد الحدود الأربعة الأولى فى متسلسلات ذات الحدين التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad (1-x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(1-x)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-2} &= 1 - 2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \\ &= 1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (1+x^3)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(x^3)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(x^3)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^9 + \dots \end{aligned}$$

$$(4) \quad (8+12x)^{2/3} = \left[8\left(1 + \frac{3}{2}x\right)\right]^{2/3} = 4\left(1 + \frac{3}{2}x\right)^{2/3}$$

$$= 4 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}x \right) + \frac{\left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{3}{2}x \right)^2 + \frac{\left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \left(\frac{2}{3} - 2 \right)}{3!} \left(\frac{3}{2}x \right)^3 + \dots \right]$$

$$= 4 \left[1 + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \dots \right]$$

Ex(2) : If x is very large, Prove that :

$$\sqrt[3]{x^3 + 6} - \sqrt[3]{x^3 + 3} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}$$

Solution:-

إذا كانت x كبيرة جداً فإن $\frac{1}{x}$ تكون صغيرة جداً ، لذلك نكتب مفكوك كل من :-

$$\sqrt[3]{x^3 + 6}, \sqrt[3]{x^3 + 3} \text{ بدلالة قوى } \frac{1}{x} \text{ كالتالى :}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 6} &= (x^3 + 6)^{\frac{1}{3}} = x \left(1 + \frac{6}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = x \left[1 + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^6} + \dots \right] \\ &= x + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^5} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 3} &= (x^3 + 3)^{\frac{1}{3}} = x \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = x \left[1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6} + \dots \right] \\ &= x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5} \end{aligned} \quad (2)$$

من (1), (2) بالطرح

$$\therefore \sqrt[3]{x^3 + 6} - \sqrt[3]{x^3 + 3} = \left(x + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^5} \right) - \left(x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5} \right) ,$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}$$

وهو المطلوب

Ex(3): Series for $\sin^{-1} X$:

Integrate the binomial series for $(1 - X^2)^{-\frac{1}{2}}$ to find a series for $\sin^{-1} X$,
where $|X| < 1$

Solution:

نعلم أن :

$$(1 - X^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} = \frac{d}{dX}(\sin^{-1} X) \quad (1)$$

فباستخدام مفكوك ذات الحدين للمقدار $(1 - X^2)^{-\frac{1}{2}}$ نحصل على :

$$\begin{aligned} (1 - X^2)^{-\frac{1}{2}} &= [1 + (-X^2)]^{-\frac{1}{2}} = (1)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(1)^{-\frac{3}{2}}(-X^2) \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1)^{-\frac{5}{2}}}{2!}(-X^2)^2 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}X^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-X^6) + \dots \\ &= 1 + \frac{X^2}{2} + \frac{1.3}{2^2 2!}X^4 + \frac{1.3.5}{2^3 3!}X^6 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n n!} X^{2n} \quad (2) \end{aligned}$$

ومن (1) ، (2) نجد أن :

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{d}{dt}(\sin^{-1} t) dt &= \int_0^X (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^X \left[1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1.3}{2^2 2!}t^4 + \frac{1.3.5}{2^3 3!}t^6 + \dots \right] dt \\ \therefore \sin^{-1} X &= \left[X + \frac{1}{2} \frac{X^3}{3} + \frac{1.3}{2^2 2!} \frac{X^5}{5} + \frac{1.3.5}{2^3 3!} \frac{X^7}{7} + \dots \right] \\ &= X + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)(2n+1)} \frac{X^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

حيث $|X| < 1$ وهو المطلوب .

تطبيق [2] حساب التكاملات غير الأولية Evaluating Nonelementary Integrals

Ex(1) : From the series of $\sin X$ find the integral of $\sin X^2$ in the form of power series.

Sol.

من متسلسلة $\sin X$:

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \dots \quad (1)$$

بوضع X^2 مكان X نحصل على :

$$\sin X^2 = X^2 - \frac{X^6}{3!} + \frac{X^{10}}{5!} - \frac{X^{14}}{7!} + \dots \quad (2)$$

بالتكامل نحصل على :

$$\int \sin X^2 dX = \frac{X^3}{3!} - \frac{X^7}{7.3!} + \frac{X^{11}}{11.5!} - \frac{X^{15}}{15.7!} + \dots + C$$

حيث C هو ثابت التكامل [تكامل غير محدود] .

Ex(2): Estimate $\int_0^1 \sin^2 X dX$ with an error of less than 0.001 .

Sol.

المطلوب حساب التكامل المحدود $\int_0^1 \sin^2 X dX$ بالتقريب مع نسبة خطأ تقل عن 0.001

فحيث أن [معادلة (2) فى مثال (1)] :

$$\sin X^2 = X^2 - \frac{X^6}{3!} + \frac{X^{10}}{5!} - \frac{X^{14}}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 \sin X^2 dX &= \left[\frac{X^3}{3} - \frac{1}{3!} \frac{X^7}{7} + \frac{1}{5!} \frac{X^{11}}{11} - \frac{1}{7!} \frac{X^{15}}{15} + \dots \right] \Bigg|_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{11.5!} - \frac{1}{15.7!} + \dots \right] \end{aligned}$$

وهي متسلسلة متناوبة ، وبالحساب نجد أن : $\frac{1}{11.5!} \approx 0.00076$ وهو أول حد بالحساب العددي تكون قيمته أقل من 0.001 وبذلك نأخذ الحدين الأول والثاني ويصبح التكامل بالتقريب المطلوب هو :

$$\int_0^1 \sin X^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7.3!} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310$$

Ex(3): Series for arctangent: $\tan^{-1} X$ and series for (π) :-

حيث أن $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} X) = \frac{1}{1+X^2} = 1 - X^2 + X^4 - X^6 + \dots$ فبالتكامل نحصل على المتسلسلة :

$$\tan^{-1} X = X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \frac{X^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (1)$$

وهي متسلسلة تقاربيه في الفترة $|X| \leq 1$.

وبوضع $X = 1$ في (1) نحصل على العلاقة الآتية التي نعرف بعلاقة ليبنتز (Leibnitz formula)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \quad (2)$$

$$\text{حيث } \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

وبضرب العلاقة (2) في (4) نحصل على المتسلسلة الآتية للعدد π :

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} + \dots \quad (3)$$

تطبيق [3] حساب الصور غير المعينه Evaluating Indeterminate forms

في بعض الأحيان يمكن حساب الصور غير المعينة مثل $\left(\frac{0}{0}\right)$ أو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ أو $(\infty - \infty)$

وغيرها بالتعبير عن الدالة المشتملة على تلك الصور كمتسلسلة قوى (متسلسلة تيلور أو ماكلاورين) ، كما في الأمثلة الآتية :

Ex(1): Using power series to evaluate $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X - 1}$.

Sol.

بوضع $X = 1$ نجد أن النهاية للدالة $\frac{0}{0} = \frac{\ln 1}{1-1} =$ فنعبر عن $\ln X$ بمتسلسلة تيلور في قوى $(X - 1)$ بالصورة

$$\ln X = (X - 1) - \frac{1}{2}(X - 1)^2 + \dots \quad (1)$$

[نحصل على تلك العلاقة بوضع $(X - 1)$ مكان X في مفكوك $\ln(1 + X)$ الذي سبق إيجاده]
من (1) نجد أن :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln X}{X - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 - \frac{1}{2}(X - 1) + \dots \right] = 1$$

Ex(2): Using power series to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X - \tan X}{X^3}$.

Sol.

بالتعويض عن $X = 0$ نجد أن النهاية للدالة $\frac{0}{0} = \frac{\sin 0 - \tan 0}{0} =$ فنعبر عن $\sin X, \tan X$ بمتسلسلة تيلور كالتالي :

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \dots, \quad \tan X = X + \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15} + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin X - \tan X &= \left(X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \dots \right) - \left(X + \frac{X^3}{3} + \frac{2X^5}{15} + \dots \right) \\ &= -\frac{X^3}{2} - \frac{X^5}{8} - \dots = X^2 \left[-\frac{1}{2} - \frac{X^2}{8} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X - \tan X}{X^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} - \frac{X^2}{8} - \dots \right] = -\frac{1}{2}$$

Ex(3): Using power series to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin X} - \frac{1}{X} \right]$, then find an

approximation formula for $\csc X$

Sol.

بالتعويض عن $X = 0$ نجد أن النهاية للدالة $\frac{1}{\sin 0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty =$ فنعبر عن $\sin X$ بمتسلسلة تيلور ، كالتالي :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin X} - \frac{1}{X} &= \frac{X - \sin X}{X \sin X} = \frac{X - \left[X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \dots \right]}{X \cdot \left[X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \dots \right]} \\ &= \frac{X^3 \left[\frac{1}{3!} + \frac{X^2}{5!} + \dots \right]}{X^2 \left[1 - \frac{X^2}{3!} + \dots \right]} = X \frac{\frac{1}{3!} + \frac{X^2}{5!} + \dots}{1 - \frac{X^2}{3!} + \dots} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin X} - \frac{1}{X} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[X \frac{\frac{1}{3!} + \frac{X^2}{5!} + \dots}{1 - \frac{X^2}{3!} + \dots} \right] = 0 \quad (2)$$

ونلاحظ من (1) أنه : إذا كانت $|X|$ صغيرة : فإن $\frac{1}{\sin} - \frac{1}{X} \approx X \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{X}{3!} \approx \frac{X}{6}$: ومنها نجد أن : $\csc X \approx \frac{1}{X} + \frac{X}{6}$.

تذكر أن

نذكر هنا مفككات الدوال الهامة التي سبق الحصول عليها :

$$1- \sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, |X| < \infty$$

$$2- \cos X = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} + \dots, |X| < \infty$$

$$3- \tan^{-1} X = X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{2n+1} + \dots, |X| \leq 1$$

$$4- \frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots + X^n + \dots, |X| < 1$$

$$5- \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - \dots + (-X)^n + \dots, |X| < 1$$

$$6- e^x = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots, |X| < \infty$$

$$7- \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n} + \dots, -1 < X \leq 1$$