

(Partial Derivatives)

[1] الدوال ذات المتغيرات المتعددة :

Function of Several Variables :

فى هذا الباب سوف ندرس الدوال ذات الاكثر من متغير مثب :

$$(1) \text{ دالة فى متغيرين } z = f(x, y) = x^2 + y^2 \leftarrow (x, y)$$

$$(2) \text{ دالة فى 3 متغيرات } w = f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3xz^2 \leftarrow (x, y, z)$$

مثال : أوجد قيمة الدوال الآتية :

$$(i) f(x, y) = x^2 + 3y^3 \text{ at the point } (-3, 1)$$

$$(ii) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ at the point } (3, 0, 4)$$

الحل :

$$(i) f(-3, 1) = (-3)^2 + 3(1)^3 = 9 + 3 = 12$$

$$(ii) f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

النطاق (أو مجال التعريف) والمدى (Domains and Ranges)

يعرف نطاق (أو مجال تعريف) الدالة $z = f(x, y)$ بأنه مجموعة النقاط فى المستوى والتي تكون عندها الدالة معرفة أى تأخذ قيمة حقيقية .

وكذلك بالنسبة للدالة $w = f(x, y, z)$ (ذات الثلاثة متغيرات) .

أما المدى فيعرف بأنه الفترة التي تأخذ فيها الدالة أصغر وأكبر قيمة لها .

ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال (1) : أوجد النطاق (المجال) والمدى للدوال الآتية :

$$(1) z = \sqrt{y - x^2} :$$

الدالة المعطاه تكون معرفة عندما يكون المقدار تحت الجذر موجب أى عندما :

$y - x^2 \geq 0$ أى $y \geq x^2$ وهو نطاق أو مجال تعريف الدالة z ، أما المدى فهو الفترة نصف المفتوحة $[0, \infty)$ وهى القيم التى تأخذها y بدءا من أقل قيمة وهى الصفر وصولا إلى المالانهاية .

$$(2) z = \sin xy :$$

الدالة المعطاه معرفة على كل المستوى (x, y) وهو نطاقها أو مجال تعريفها أما المدى فينحصر ما بين $-1, 1$ أى أنه يشكل الفترة المغلقة $[-1, 1]$.

$$(3) w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} :$$

الدالة المعطاه معرفة على كل الفراغ (x, y, z) وهو نطاقها أو مجال تعريفها أما المدى فهو الفترة نصف المفتوحة $[0, \infty)$ وذلك حيث أن : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$

$$(4) w = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} :$$

الدالة المعطاه معرفة على كل الفراغ فيما عدا عندما $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ولذلك فإن نطاقها أو مجال تعريفها هو $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ بينما مداها هو الفترة المفتوحة $(0, \infty)$ وذلك حيث أن : $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ [ولا تساوى صفر] .

$$(5) w = xy \ln z :$$

وهذه الدالة تكون معرفة فقط إذا كانت $z > 0$ [حيث أن $\ln 0 = -\infty$] ولذلك فإن نطاق أو مجال تعريفها هو نصف الفضاء أو الفراغ $z > 0$ أما مداها فتمثله الفترة المفتوحة $(-\infty, \infty)$ **مثال (2) :** أوجد النطاق (المجال) والمدى للدوال الآتية :-

$$1-f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

الحل :

الدالة f تكون معرفة إذا كان : $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ أى إذا كان : $-x^2 - y^2 \geq -4$ أى $x^2 + y^2 \leq 4$ وهذه المتباينة تمثل مجموعة النقاط التى تقع داخل وعلى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 ، فهى بذلك نطاق أو مجال تعريف الدالة f .

ولإيجاد المدى : أصغر قيمة للمقدار $(4 - x^2 - y^2)$ هي الصفر حيث أن $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ ، أما أكبر قيمة للمقدار فهي عندما يكون $x = y = 0$ أي أن أكبر قيمة هي : $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4} = 2$. $\therefore$ مدى الدالة هو الفترة المغلقة $[0, 2]$.

$$2- f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}} :$$

الحل :

الدالة f تكون معرفة إذا كان $1 - x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} \geq 0$ أى إذا كان $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1$ وتمثل هذه المتباينة جميع النقاط التى تقع داخل وعلى المنحنى $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ والمعروف بمجسم القطع الناقص (Ellipsoid) .

ولإيجاد المدى : أصغر قيمة للمقدار $\left(1 - x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}\right)$ هي الصفر حيث أن

$$1 - x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} \geq 0 \text{ ، أما أكبر قيمة للمقدار فهي عندما يكون } x = y = z = 0$$

أن أكبر قيمة هي : $1 - 0 - 0 - 0 = 1$ ويكون مدى الدالة هو الفترة المغلقة $[0, 1]$.

$$3- w = \ln(x + 2y + z - 3) :$$

الحل :

تكون الدالة w معرفة عندما $x + 2y + z - 3 > 0$ [ولا تساوى صفر] .

أى عندما $x + 2y + z > 3$ والمعادلة $x + 2y + z = 3$ هي معادلة مستوى ، وعلى ذلك فإن نطاق الدالة w يشكل النصف العلوى من الفراغ ولا يحتوى على المستوى ، ويكون مدى w هو مجموعة الأعداد الحقيقية R أو الفترة المفتوحة $(-\infty, \infty)$ وذلك لأن الدالة المعطاة هي كثيرة حدود .

مثال (3) : أوجد النطاق (المجال) - domain - للدوال لآتية :-

$$(i) z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$(ii) z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

$$(i) z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

الدالة يكون لها قيمة حقيقية إذا كان $4-x^2-y^2 > 0$ [ولا تساوى صفراً لأن الدالة في تلك الحالة تكون غير معرفة] ، أى إذا كان : $-4 < -x^2-y^2$ أى إذا كان : $x^2+y^2 < 4$ ، وتمثل هذه المتباينة جميع النقاط التى تقع داخل الدائرة (وليس عليها) التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 .

$$(ii) z = \ln(x^2+y^2-4)$$

الدالة يكون لها قيمة حقيقية إذا كان $x^2+y^2-4 > 0$ [ولا تساوى صفراً لأن الدالة في تلك الحالة تكون غير معرفة حيث أن $\ln 0 = -\infty$] وبذلك فإن : $x^2+y^2 > 4$ ، وتمثل هذه المتباينة جميع النقاط خارج الدائرة (وليس عليها) التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 . وهو المطلوب .

منحنى التساوى وسطوح التساوى للدوال ذات الأكثر من متغير :

(1) منحنى التساوى للدالة $z = f(x, y)$ (Level curve) :

يعرف منحنى التساوى للدالة $z = f(x, y)$ بأنه مجموعة النقاط (x, y) فى المستوى والتى عندها : $z = f(x, y) = c$ ، حيث c ثابت .

(2) سطح التساوى للدالة $w = f(x, y, z)$ (Level surface) :

يعرف سطح التساوى للدالة $w = f(x, y, z)$ بأنه مجموعة النقاط (x, y, z) فى الفراغ والتى عندها : $w = f(x, y, z) = c$ ، حيث c ثابت .

مسائل محلولة Solved Problems

Problem (1) : Find the level curve of the function $z = x^2 + y^2$

Sol.

يشكل منحنى التساوى لهذه الدالة مجموعة الدوائر : $x^2 + y^2 = c$ والتي مركزها نقطة الأصل $(0, 0)$ والواقعة في المستويات $z = c$ التي توازي المستوى xy . وتأخذ c قيما مختلفة :

فعندما $c = 1$ مثلا : يكون منحنى التساوى هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ وهى دائرة موجودة فى المستوى $z = 1$ وبالتالى فهى دائرة فى الفراغ مركزها $(0, 0, 1)$

Problem (2) : Find the equation for the level curve of the function $f(x, y) = 2x - y + 4$ at the point $(1, 1)$.

Sol. $f(x, y) = 2x - y + 4$

وعند النقطة $(1, 1)$ يكون منحنى التساوى z فى المستوى (xy) هو :

$$z = 2(1) - (1) + 4 = 5$$

وبالتعويض فى الدالة $f(x, y)$ بالقيمة $z = 5$ نحصل على معادلة منحنى التساوى حيث :

$$5 = 2x - y + 4 \quad \leftarrow \quad y = 2x - 1 \quad \text{وهو خط مستقيم .}$$

Problem (3): Find the equation for the level curve of the function $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ that passes through the point $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Sol.

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 \quad (1)$$

وعند النقطة $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ يكون منحنى التساوى z فى المستوى هو :

$$z = 16 - (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = 16 - 8 - 2 = 16 - 10 = 6$$

وبالتعويض فى الدالة $f(x, y)$ بالقيمة $z = 6$ نحصل على :

$$6 = 16 - x^2 - y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 10 \quad (2)$$

وهو منحنى التساوى للدالة المعطاة .

Problem (4): Find the equation of the level surface for the function

$$f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z \text{ through the point } (3, -1, 1)$$

Sol.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z \quad (1)$$

وعند النقطة $(3, -1, 1)$ يكون سطح التساوى w فى الفراغ هو :

$$w = \sqrt{3 + 1} - \ln 1 = \sqrt{4} = 2$$

وبالتعويض فى الدالة $f(x, y, z)$ بالقيمة $w = 2$ نحصل على :

$$2 = \sqrt{x - y} - \ln z \quad \therefore \sqrt{x - y} = 2 + \ln z \quad (2)$$

وهى معادلة سطح التساوى للدالة المعطاة .

(1) النهايات Limits :-

تنطبق قواعد النهايات للدوال أحادية القيمة على الدوال متعددة القيم ، قمثلاً :-

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y)g(x,y)] = [\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)][\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)]$$

وهكذا

مثال : أوجد النهايات الآتية :-

$$(1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3} = \frac{(0) - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + (5)(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$(2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

فى هذه المسألة نقوم بالتعويض المباشر فنجد النهاية = $\frac{0}{0}$ فنلجأ إلى ضرب البسط والمقام فى

المرافق $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ فنحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2 + \cos 0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi,0,3)} ze^{-2y} \cos 2x = (3)(e^0)(\cos 2\pi) = (3)(1)(1) = 3$$

$$(6) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,\ln 2)} e^{x-y} = e^{0-\ln 2} = e^{-\ln 2} = e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(7) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (e^y) \left(\frac{\sin x}{x} \right) = (e^0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = (1)(1) = 1$$

$$(8) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{(x - y)^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} (x - y) \\ = (1 - 1) = 0$$

$$(9) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x + y) \\ = (1 + 1) = 2$$

$$(10) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq 2}} \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq 2}} \frac{y + 4}{x(x - 1)(y + 4)} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-4)} \frac{1}{x(x - 1)} = \frac{1}{2(2 - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$(11) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x + y \neq 4}} \frac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x + y \neq 4}} \frac{(\sqrt{x + y} - 2)(\sqrt{x + y} + 2)}{\sqrt{x + y} - 2} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (\sqrt{x + y} + 2) = (\sqrt{2 + 2} + 2) = 2 + 2 = 4$$

$$(12) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (4,3) \\ x - y \neq 1}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y + 1}}{x - y - 1} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (4,3) \\ x - y \neq 1}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y + 1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y + 1})(\sqrt{x} + \sqrt{y + 1})} \\ = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (4,3) \\ x - y \neq 1}} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3 + 1}} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

(2) الاتصال Continuity

أى دالة $f(x, y)$ تكون متصلة عند النقطة (x_0, y_0) إذا كان :

$$(i) \text{ نكون معرفة عند } (x_0, y_0)$$

$$(ii) \text{ النهاية } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ تكون موجودة}$$

$$(iii) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

وينطبق ذلك على الدوال ذات المتغيرات الثلاثة $f(x, y, z)$ أيضاً .

أمثلة محلولة Solved Examples

Ex(1): At what points (x, y) in the plane, the following functions are continuous .

$$(i) f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$$

$$(ii) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 3x + 2} ,$$

Sol. (i) $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy}$

هذه الدالة تكون متصلة عند كل النقاط (x, y) ماعدا عندما $x = 0$ أو $y = 0$ فالدالة تكون غير معرفة .

$$(ii) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - 3x + 2}$$

تكون متصلة عند كل النقاط (x, y) بحيث أن : $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ أي $(x-2)(x-1) \neq 0$ أي $x \neq 2, x \neq 1$ ، أي أن الدالة تكون متصلة عند كل النقاط ماعدا عند $x = 1$ و $x = 2$.

Ex(2): At what points (x, y, z) in space, the following functions are continuous.

$$(i) f(x, y, z) = xy \sin \frac{1}{z}$$

$$(ii) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + z^2 - 1} ,$$

Sol.

$$(i) f(x, y, z) = xy \sin \frac{1}{z}$$

تكون متصلة عند كل (x, y, z) بحيث أن $z \neq 0$ حيث تكون الدالة معرفة .

$$(ii) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + z^2 - 1}$$

تكون متصلة عند كل (x, y, z) بحيث أن $x^2 + z^2 - 1 \neq 0$ أى $x^2 + z^2 \neq 1$

أى أن الدالة تكون متصلة عند كل نقاط الفراغ ما عدا عندما $x^2 + z^2 = 1$ وهو المطلوب .

Ex(3): Discuss the continuity of the function $f(x, y)$ at the point $(2, 3)$, where

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x + y) & (x, y) \neq (2, 3) \\ 8 & (x, y) = (2, 3) \end{cases}$$

Sol.

(i) $f(2, 3) = 8 \rightarrow$ the function is defined at $(2, 3)$

$$(ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} xy(x + y) = (2)(3)[2 + 3] = (6)[5] = 30$$

$$\therefore \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} f(x, y) \neq f(2, 3)$$

$\therefore$ الدالة تكون غير متصلة عند النقطة $(2, 3)$.

ملحوظة: يمكن إعادة تعريف الدالة $f(x, y)$ بحيث تصبح متصلة عند النقطة $(2, 3)$ بحيث تأخذ الدالة الصورة الآتية:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x + y) & (x, y) \neq (2, 3) \\ 30 & (x, y) = (2, 3) \end{cases}$$

وبالتالى نحصل على : $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} f(x, y) = f(2, 3)$ أى أن الدالة بصورتها هذه تكون

متصلة عند $(2, 3)$.

Ex(4): Discuss the continuity of the function $f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{x + y}$ at the

point $(0, 0)$.

Sol.

$$(i) f(0, 0) = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{كمية غير معينة}$$

$\therefore$ الدالة غير معرفة عند النقطة $(0, 0)$ وبالتالي فهي غير متصلة عند النقطة $(0, 0)$.

$$(ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

∴ النهاية موجودة ، ولكن : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$

أى الدالة غير متصلة عند النقطة $(0, 0)$.

ملحوظة : يمكن إعادة تعريف الدالة $f(x,y)$ بحيث تصبح متصلة عند النقطة $(0, 0)$ بحيث تكون صورتها

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

وبالتالى نحصل على : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ أى أن الدالة بصورتها هذه تكون متصلة عند $(0, 0)$.

مسائل محلولة Solved Problem

Problem (1): Prove that the function $f(x,y) = \frac{x^3y^2 - 4xy^3}{x + 6xy^3}$ is

continuous at the point $(4, 1)$.

Sol.

الدالة المعطاة هى دالة كسرية ، ولكى نثبت أنها متصلة عند $(4, 1)$ نحسب النهاية عند تلك النقطة فإذا أعطت قيمة حقيقية فأنها تكون متصلة عند تلك النقطة

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,1)} \frac{x^3y^2 - 4xy^3}{x + 6xy^3} = \frac{(4)^3(1)^2 - 4(4)(1)}{(4) + 6(4)(1)^3} = \frac{64 - 16}{4 + 24} = \frac{48}{28} = \frac{12}{7}$$

وبالتالى فإن الدالة تكون متصلة عند النقطة $(4, 1)$ ، وهو المطلوب .

Problem (2): Find the values of x, y at which the function

$$f(x,y) = \frac{x^3 + 7xy^5 - 8y^6}{x^2 - y^2} \text{ is continuous .}$$

Sol.

حيث أن $f(x, y)$ دالة كسرية فلكي تكون متصلة يجب أن المقام لا يساوي صفرا [حتى تكون معرفة] ، أي أن $x^2 - y^2 \neq 0$ أي أن $y^2 \neq x$ أي أن $y \neq \pm\sqrt{x}$ ، وهذا يعنى أن الدالة $f(x, y)$ تكون متصلة عند كل النقاط فى الفراغ ماعدا عند $y = \pm\sqrt{x}$ وهو المطلوب.

Problem (3): discuss the continuity of the function :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y & , (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & , (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

Sol.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = (1)^2 + 2(2) = 5 \neq f(1, 2) \quad | \quad f(1, 2) = 0$$

وبالتالى فإن الدالة غير متصلة عند النقطة $(1, 2)$ وتمثل تلك النقطة نقطة عدم

اتصال للدالة .

وبلاحظ أنه يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تساوى قيمة النهاية حتى تصبح الدالة متصلة وصورتها حينئذ تكون :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y & , (x, y) \neq (1, 2) \\ 5 & , (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

$$f = f(x, y, z)$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \left. \frac{df}{dx} \right _{y, z \text{ const.}}$ المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x	$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \left. \frac{df}{dy} \right _{x, z \text{ const.}}$ المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y	$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \left. \frac{df}{dz} \right _{x, y \text{ const.}}$ المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z
---	---	---

مسائل محلولة Solved Problem

Ex(1): Find the values of $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ at the point (4, -5) if

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

Sol.

لايجاد $\frac{\partial f}{\partial x}$: نفاضل بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتة

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) \\ &= 2x + (3)(1)y + 0 - 0 = 2x + 3y \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(4, -5)} = 2(4) + 3(-5) = 8 - 15 = -7$$

لايجاد $\frac{\partial f}{\partial y}$: نفاضل بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتة

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) \\ &= 0 + (3)(x)(1) + 1 - 0 = 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(4,-5)} = 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$$

وهو المطلوب .

Ex(2): if $f(x, y) = y \sin xy$, find $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Sol.

نفاضل بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتة

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [y \sin xy] = y \frac{\partial}{\partial y} (\sin xy) + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y} (y) \\ &= y [\cos xy \cdot \frac{\partial}{\partial y} (xy)] + (\sin xy)(1) \\ &= y [x \cos xy] + \sin(xy) = xy \cos xy + \sin xy \end{aligned}$$

Ex(3): Find f_x and f_y if $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$

Sol.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial x} (2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x} (y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad f_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) = \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial y} (2y) - 2y \frac{\partial}{\partial y} (y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2} \end{aligned}$$

Ex(4): Implicit partial differentiation (التفاضل الجزئي الضمني)

Find $\frac{\partial z}{\partial y}$ from the equation: $yz - \ln z = x + y$

Sol.

نفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتة ، z متغير (تعتمد على x).

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(\ln z) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(y)$$

$$\therefore y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 = 1$$

$$\therefore \left(y - \frac{1}{z}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - \frac{1}{z}} = \frac{z}{yz - 1}$$

وهو المطلوب .

Ex(5): Find $\frac{\partial f}{\partial z}$ for the function $f(x, y, z) = x \sin(y + 3z)$

Sol.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [x \sin(y + 3z)] = x \frac{\partial}{\partial z} [\sin(y + 3z)] \\ &= x [\cos(y + 3z) \frac{\partial}{\partial z} (y + 3z)] = x \cos(y + 3z) [3] = 3x \cos(y + 3z) \end{aligned}$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية Second-order Partial derivatives:

إذا كان لدينا الدالة $f = f(x, y)$ فإن المشتقات الجزئية الثانية هي :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_x = f_{yx} \quad [x \text{ ثم بالنسبة إلى } y]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_y = f_{xy} \quad [y \text{ ثم بالنسبة إلى } x]$$

نظرية كليروت Clairaut's Theorem :

إذا كانت الدالة $f(x, y)$ متصلة هي ومشتقاتها الجزئية فإن :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}} \rightarrow \boxed{f_{yx} = f_{xy}}$$

وتعرف بنظرية كليروت .

Ex: If $f(x, y) = x \cos y + ye^x$

find: $f_{xx}, f_{yy}, f_{yx}, f_{xy}$ and verify Clairaut's Theorem

Sol.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y + ye^x) = \cos y + ye^x \quad (1)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \cos y + ye^x) = -x \sin y + e^x \quad (2)$$

$$\therefore f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x}[\cos y + ye^x] = ye^x \quad (3)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_y) = \frac{\partial}{\partial y}[-x \sin y + e^x] = -x \cos y \quad (4)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y + ye^x) = -\sin y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (5)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x \sin y + e^x) = -\sin y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \leftarrow f_{xy} = f_{yx} \quad \leftarrow (5), (6) \text{ من}$$

وهي نظرية كليروت .

المشتقات من رتب أعلى : Higher order derivatives

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_{yy}) = (f_{yy})_x = f_{yyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(f_{yyx}) = (f_{yyx})_x = f_{yyxx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f_{yy}) = (f_{yy})_{xx} = f_{yyxx}$$

Ex(1): If $f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$, calculate the fourth order partial derivative f_{xyyz}

Sol.

المطلوب المشتقة الرابعة f_{yxyz} : نفاضل أولاً بالنسبة إلى y ثم إلى x ثم إلى y ثم إلى z

$$f = 1 - 2xy^2z + x^2y \rightarrow f_y = -4xyz + x^2 \rightarrow f_{yx} = -4yz + 2x \rightarrow$$

$$f_{yxy} = -4z \rightarrow f_{yxyz} = -4$$

Ex(2): If $f(x, y, z) = xy^3 - zx^5 + x^2yz$, prove that :

$$f_{xyz} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{yzx} = f_{zyx} = 2x$$

Sol. $\rightarrow f = xy^3 - zx^5 + x^2yz$

$$f_x = y^3 - 5zx^4 + 2xyz \rightarrow f_{xy} = 3y^2 + 2xz \rightarrow f_{xyz} = 2x \quad (1)$$

$$f_x = y^3 - 5zx^4 + 2xyz \rightarrow f_{xz} = -5x^4 + 2xy \rightarrow f_{xzy} = 2x \quad (2)$$

$$f_y = 3xy^2 + x^2z \rightarrow f_{yx} = 3y^2 + 2xz \rightarrow f_{yxz} = 2x \quad (3)$$

$$f_y = 3xy^2 + x^2z \rightarrow f_{yz} = x^2 \rightarrow f_{yzx} = 2x \quad (4)$$

$$f_z = -x^5 + x^2y \rightarrow f_{zx} = -5x^4 + 2xy \rightarrow f_{zxy} = 2x \quad (5)$$

$$f_z = -x^5 + x^2y \rightarrow f_{zy} = x^2 \rightarrow f_{zyx} = 2x \quad (6)$$

[3] قاعدة السلسلة The chain rule

نظرية :

$$x = x(t), y = y(t)$$

[1] إذا كانت $w = f(x, y)$ حيث :

$$\therefore \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

[2] إذا كانت $w = f(x, y, z)$ حيث :

$$\therefore \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2)$$

Ex(1): If $w = xy$, apply the chain rule to find $\frac{dw}{dt}$ along the path :

$$x = \cos t, y = \sin t$$

Sol. $w = xy = f(x, y)$

$$\therefore \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

$$w = f = xy \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

$$x = \cos t \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t \rightarrow \frac{dy}{dt} = \cos t$$

بالتعويض فى (1) نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t \end{aligned}$$

$$[\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t : \text{حيث}]$$

وهو المطلوب .

Ex(2): Find $\frac{dw}{dt}$ for the curve $w = xy + z$

where : $x = \cos t$, $y = \sin t$,

Sol. $w = xy + z = f(x, y, z)$

$$\therefore \frac{dw}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\ &= 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 1 + \cos 2t \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

الدوال المترابكة (المركبة) composite function

نظرية :

[1] إذا كانت $w = f(x, y)$ حيث $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$

فإن التفاضل الجزئي للدالة w بالنسبة إلى r, s يعطى بالعلاقين :-

$$(i) \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad [\text{التفاضل بالنسبة إلى } r \text{ مع ثبوت } s]$$

$$(ii) \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad [\text{التفاضل بالنسبة إلى } s \text{ مع ثبوت } r]$$

[2] إذا كانت $w = f(x, y, z)$ حيث $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$, $z = z(r, s)$

فإن التفاضل الجزئي للدالة w بالنسبة إلى r, s هو :-

$$(i) \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$(ii) \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

Ex(1): If $w = x^2 + y^2$, $x = r - s$, $y = r + s$

find $\frac{\partial w}{\partial r}$ and $\frac{\partial w}{\partial s}$ in terms of r and s

Sol.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (2x)(1) + (2y)(1) = 2x + 2y \\ &= 2(r - s) + 2(r + s) = 4r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (2x)(-1) + (2y)(1) = 2y - 2x \\ &= 2(r + s) - 2(r - s) = 4s \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

Ex(2): Express $\frac{\partial w}{\partial r}$ and $\frac{\partial w}{\partial s}$ in terms of r and s , if:

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{s}, \quad y = r^2 + \ln s, \quad z = 2r$$

Sol. $w = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = (1) \left(\frac{1}{s} \right) + (2)(2r) + (2z)(2)$$

$$= \frac{1}{s} + 4r + 4z = \frac{1}{s} + 4r + 4(2r) = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = (1) \left(\frac{-r}{s^2} \right) + (2) \left(\frac{1}{s} \right) + (2z)(0)$$

$$= -\frac{r}{s^2} + \frac{2}{s} = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : إذا كانت f دالة في x فقط أى إذا كانت $w = f(x)$ وكانت $x = x(r, s)$ فيكون لدينا العلاقتين :-

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx} \frac{\partial x}{\partial r} , \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx} \frac{\partial x}{\partial s}$$

حيث w دالة في x فيكون تفاضلها تفاضلاً كلياً ، بينما x تعتمد على r, s فيكون تفاضلها تفاضلاً جزئياً .

التفاضل الضمني لدالة على الصورة $F(x, y) = 0$:-

نظرية : إذا كان لدينا دالة صورتها $F(x, y) = 0$ فإن :

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} , \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y} : \quad \text{حيث} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

الإثبات :- حيث أن : $w = F(x, y) = 0$ ، فبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

بالتفاضل بالنسبة إلى x :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} w = F(x, y) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}} \quad (1) \quad \left| \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y} \right.$$

Ex: If $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$, find $\frac{dy}{dx}$

Sol.

الدالة المعطاة على صورة : $F(x, y) = 0$ حيث : $F(x, y) = y^2 - x^2 - \sin xy$
بتطبيق العلاقة (1) :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y \cos xy}{2y - x \cos xy} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$$

وهو المطلوب .

تعميم للتفاضل الضمني لدالة على الصورة $F(x, y, z) = 0$:
إذا كانت $F(x, y, z)$ دالة ضمنية ، وكانت $z = z(x, y)$ فإن :
(نظرية)

$$(i) \quad z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad (ii) \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

الإثبات : حيث أن $z = z(x, y)$ فإن :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = z_x dx + z_y dy \quad (1)$$

وحيث أن : $F(x, y, z) = 0$ فإن :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \rightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad (2)$$

بالتعويض عن dz من (1) في (2) :-

$$F_x dx + F_y dy + F_z (z_x dx + z_y dy) = 0$$

$$\therefore (F_x + F_z z_x) dx + (F_y + F_z z_y) dy = 0$$

وحيث أن x, y متغيرات مستقلة فإن معاملات dx, dy كل منهما يساوى صفراً (نظرية) :

$$\therefore F_x + F_z z_x = 0 \rightarrow \boxed{z_x = -\frac{F_x}{F_z}}, \quad F_y + F_z z_y = 0 \rightarrow \boxed{z_y = -\frac{F_y}{F_z}}$$

وهو المطلوب .

Ex: If $z^3 - xz - y = 0$, prove that : $z_{xy} = -\frac{(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3} = z_{yx}$

Sol. $F(x, y, z) = z^3 - xz - y$

$$F_x = -z, \quad F_y = -1, \quad F_z = 3z^2 - x$$

$$\therefore z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\left(\frac{-z}{3z^2 - x}\right) = \frac{z}{3z^2 - x}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\left(\frac{-1}{3z^2 - x}\right) = \frac{1}{3z^2 - x}$$

$$\therefore z_{xy} = (z_x)_y = \left(\frac{z}{3z^2 - x}\right)_y = \frac{(3z^2 - x)(z_y) - z(6zz_y)}{(3z^2 - x)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{z_y(3z^2 - x - 6z^2)}{(3z^2 - x)^2} = \frac{-z_y(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{\frac{1}{3z^2 - x}(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^2} \\ &= -\frac{(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$z_{yx} = (z_y)_x = \left(\frac{1}{3z^2 - x}\right)_x = \frac{(3z^2 - x)(0) - (1)(6zz_x - 1)}{(3z^2 - x)^2}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\frac{6z^2}{3z^2 - x} - 1}{(3z^2 - x)^2} = -\frac{\frac{6z^2 - 3z^2 + x}{(3z^2 - x)}}{(3z^2 - x)^2} = \frac{-(3z^2 + x)}{(3z^2 - x)^3} \end{aligned} \quad (2)$$

من (1), (2) ينتج المطلوب .

[4] الدوال المتجانسة (Homogenous Functions)

نظرية : يقال أن الدالة $f(x, y)$ دالة متجانسة من درجة m إذا كان لأي بارامتر λ تتحقق العلاقة :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

حيث m تسمى درجة التجانس .

المعنى الهندسي للدالة المتجانسة :

بتغيير الاحداثيات (x, y) إلى $(\lambda x, \lambda y)$ فإن الدالة يمكن أن تعود إلى صورتها الأصلية مضروبة في λ^m .

بوجه عام : فإن الدالة $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ يقال أنها متجانسة من الدرجة m إذا كان لأي بارامتر λ تتحقق العلاقة :-

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ex: Prove that the function $f(x, y) = x^4 + 2xy^3 - 5y^4$ is homogeneous from the 4th order

Sol.

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^4 + 2(\lambda x)(\lambda y)^3 - 5(\lambda y)^4 \\ &= \lambda^4 x^4 + \lambda^4 (2xy^3) - \lambda^4 (5y^4) \\ &= \lambda^4 (x^4 + xy^3 - 5y^4) = \lambda^4 f(x, y) \rightarrow m = 4 \end{aligned}$$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الرابعة ، وهو المطلوب .

نظرية أويلر للدوال المتجانسة (Euler's Theorem) :-

إذا كانت $f(x, y)$ دالة متجانسة من درجة m فإن :-

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{حيث} \quad \boxed{xf_x + yf_y = mf}$$

الاثبات : حيث أن $f(x, y)$ دالة متجانسة من الدرجة n فإن :-

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad (1)$$

فبفرض أن : $u = \lambda x, v = \lambda y$ فإن : $f = f(u, v)$
ومن قاعدة السلسلة فإن :

$$f_{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda} = f_u x + f_v y = x f_u + y f_v \quad (2)$$

$$\text{حيث : } \frac{\partial u}{\partial \lambda} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial \lambda} = y$$

وبتفاضل (1) بالنسبة إلى λ نحصل على :

$$f_{\lambda} = m \lambda^{m-1} f \quad (3)$$

بمساواة (2), (3) :

$$\therefore x f_u + y f_v = m \lambda^{m-1} f \quad (4)$$

وحيث أن λ ثابت اختياري فيمكن كتابته $\lambda = 1 \leftarrow u = x, v = y$

وتصبح (4) بالصورة :

$$x f_x + y f_y = m f$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : يمكن تعميم نظرية أولير لثلاث متغيرات أو أكثر ، فتصبح صورتها :

$$x f_x + y f_y + z f_z = m f \quad , \quad \dots \dots \dots \text{وهكذا .}$$

Ex: Verify Euler's Theorem for the following functions:

$$(i) f(x, y) = \frac{x}{x+y} \quad (ii) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$(iii) f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Sol.

$$\begin{aligned} (i) f(x, y) = \frac{x}{x+y} &\rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda x}{\lambda(x+y)} \\ &= \frac{x}{x+y} = \lambda^0 f(x, y) \end{aligned}$$

حيث $\lambda^0 = 1$ ، وبذلك فإن الدالة هي دالة متجانسة من الدرجة صفر .

ومن نظرية أويلر : يجب إثبات أن : $xf_x + yf_y = 0$

$$f_x = \frac{(x+y)(1) - (x)(1)}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2} , \quad (1)$$

$$f_y = \frac{(x+y)(0) - (x)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{(x+y)^2} \quad (2)$$

من (1) بالضرب في x ومن (2) بالضرب في y والجمع نحصل على :

$$\therefore xf_x + yf_y = \frac{xy}{(x+y)^2} - \frac{yx}{(x+y)^2} = 0 \quad (\text{نظرية أويلر})$$

وهو المطلوب .

$$(ii) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda(x-y)}{\lambda(x+y)} = \lambda^0 f(x, y)$$

$$|\lambda^0 = 1$$

$\therefore$ الدالة متجانسة من الدرجة صفر ($m = 0$) ولا تثبات أنها تحقق نظرية أويلر يجب

إثبات أن : $xf_x + yf_y = 0$

$$f_x = \frac{(x+y)(1) - (x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} ,$$

(1)

$$f_y = \frac{(x+y)(-1) - (x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} \quad (2)$$

بضرب (1) في x و (2) في y والجمع نحصل على :

$$xf_x + yf_y = \frac{2xy}{(x+y)^2} - \frac{2yx}{(x+y)^2} = 0 \quad (\text{نظرية أويلر})$$

وهو المطلوب .

$$(iii) f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda y}{\lambda x} \right) = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \lambda^0 f(x, y)$$

$\therefore$ الدالة متجانسة من الدرجة صفر ($m = 0$) ولا تثبات أنها تحقق نظرية أويلر يجب

إثبات أن : $xf_x + yf_y = 0$

$$f_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} (y) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$f_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

بضرب (1) في x و (2) في y والجمع نحصل على :

$$xf_x + yf_y = \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{yx}{x^2 + y^2} = 0$$

∴ الدالة المعطاه تحقق نظرية أولير ، وهو المطلوب .

Problem : Prove that the function $f(x, y) = \frac{x - y}{(x^3 + y^3)}$, $x - y \neq 0$

verify Euler's Theorem for homogeneous functions.

الدالة التوافقية : Harmonic function

نظرية : يقال أن الدالة $z = f(x, y)$ دالة توافقية (أو هارمونية) إذا حققت المعادلة

$f_{xx} + f_{yy} = 0$ والتي تعرف بمعادلة لابلاس (Laplace's Equation) وصورتها في

الاحداثيات الكرتيزية :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Ex(1): Prove that the function $z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$ is a harmonic function.

Sol.

المطلوب إثبات أن : $z_{xx} + z_{yy} = 0$ (معادلة لابلاس) حتى تكون الدالة z توافقية .

$$z_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\therefore z_{xx} = y \left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} (2x) \right] = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (2)$$

$$z_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} (x) \left(\frac{-1}{y^2}\right) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\therefore z_{yy} = -x \left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)^2} (2y) \right] = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (4)$$

من (2), (4) بالجمع نحصل على :

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (\text{معادلة لابلاس})$$

$\therefore$ الدالة $z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$ هي دالة توافقية .

Ex(2): Prove that the function $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ is a harmonic function.

Sol.

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad (1) \quad , \quad f_{yy} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = 2 \left[\frac{(x^2 + y^2)(1) - (x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 2 \left[\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] = 2 \left[\frac{(x^2 + y^2)(1) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = 2 \left[\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

من (3), (4) بالجمع :

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (\text{معادلة لابلاس}) \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

[5] التفاضلات : (Differentials) :

إذا كانت $w = f(x, y, z)$ فإن تفاضلة (differential) الدالة w تعرف بالعلاقة :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (1)$$

وهذه العلاقة تنتج من العلاقة :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

وذلك بصرب الطرفين في dt .

تمثل العلاقة (1) التغير الحادث في الدالة أي dw نتيجة التغيرات الحادثة في كل من x, y, z أي dx, dy, dz .

Ex: Find the differential of $w = e^{x^2+y^2} \sin z^2$

Sol.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} \sin z^2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} \sin z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e^{x^2+y^2} \cos z^2 \cdot (2z) = 2ze^{x^2+y^2} \cos z^2$$

بالتعويض في (1) نحصل على تفاضلة الدالة w بالصورة :

$$dw = 2e^{x^2+y^2} [x(\sin z^2)dx + (y \sin z^2)dy + (z \cos z^2)dz]$$

وهو المطلوب .

حساب التغير في دالة f في الاتجاه $\vec{u}$:

Estimating the change in f in the direction of $\vec{u}$:

يمكن كتابة تفاضلة دالة $f = f(x, y, z)$ بدلالة تدرج f (أي ∇f) كالآتي :-

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1)$$

$$(\nabla f) \cdot (d\vec{r}) = \left[\vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot [\vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2)$$

من (2) , (1) نجد أن :

$$df = (\nabla f) \cdot (d\vec{r}) = (\nabla f \cdot \vec{u}) dr$$

(3)

$$\begin{array}{l} \vec{r} \text{ متجه الوحدة في اتجاه } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \text{ حيث } \left| \begin{array}{l} d\vec{r} = \vec{u} dr \\ \vec{r} = \vec{u} r \quad r = |\vec{r}| \end{array} \right. \\ d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz \end{array}$$

Ex: Find the change in the value of $f(x, y, z) = y \sin x + 2yz$ in moving a distance of $dr = 0.1$ unit $(0, 1, 0)$ straight toward $(2, 2, -2)$.

Sol.

لإيجاد التغير في قيمة الدالة f أي df والناتج عن الحركة لمسافة $dr = 0.1$ من النقطة $(0, 1, 0)$ إلى النقطة $(2, 2, -2)$ في اتجاه $\vec{u}$.

خطوات الحل :-

وجد $\vec{u}$: (متجه الوحدة في اتجاه $\vec{r}$)

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{3} \\ &= \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \end{aligned}$$

ثم نوجد تدرج f (أو f_{grad} أو ∇f): حيث :-

$$f = y \sin x + 2yz$$

$$\therefore \nabla f = (y \cos x) \vec{i} + (\sin x + 2z) \vec{j} + 2y \vec{k}$$

$$\nabla f \Big|_{p_0(0,1,0)} = (\cos 0) \vec{i} + (\sin 0 + 0) \vec{j} + 2(1) \vec{k} = \vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\nabla f \Big|_{p_0} \cdot \vec{u} = (\vec{i} + 2\vec{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} \right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

ويكون التغير في f (أي df) نتيجة الحركة مسافة $dr = 0.1$ من $(0, 1, 0) \leftarrow (2, 2, -2)$

هو :

$$df = (\bar{\nabla} f|_{p_0} \cdot \bar{u}) dr = \left(\frac{-2}{3} \right) (0.1) = -0.067$$

Problem: Find the change in the value of $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ in moving a distance of $dr = 0.1$ unit from $p_0(3, 4, 12)$ in the direction of $\bar{r} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}$ [Answer : $df = 0.0008$].

إستخدام التفاضلة في حساب التغير الحادث في دالة :

إذا تحركنا من النقطة (x_0, y_0) إلى النقطة $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ فإن التغير الناتج في الدالة f يعرف كما سبق بتفاضلة f ويعطى بالعلاقة :-

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} dy = f_x|_{(x_0, y_0)} dx + f_y|_{(x_0, y_0)} dy \quad (1)$$

وتستخدم هذه العلاقة في حساب التغير الحادث في كميات يمكنها التغير ، كما في الأمثلة الآتية:-

Ex: A cylinder of radius 1 and height 5, if the radius and height are changing by the amounts $dr = + 0.03$, $dh = - 0.1$, estimate the resulting absolute change in the valume of cylinder.

Sol.

المطلوب حساب التغير المطلق في حجم الاسطوانة إذا تغير نصف قطرها وارتفاعها بالقيم dh ، dr .

$$V = (\pi r^2)(h) \quad \text{حجم الاسطوانة :}$$

حيث : h = الارتفاع ، مساحة القاعدة $= \pi r^2$ ، r نصف قطر الاسطوانة .

$$\therefore V = V(r, h) \rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{(r_0, h_0)} dr + \frac{\partial V}{\partial h} \Big|_{(r_0, h_0)} dh$$

$$V = \pi r^2 h \rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = V_r = 2\pi rh, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = V_h = \pi r^2$$

$$\begin{aligned} \therefore dV &= (2\pi r_0 h_0) dr + (\pi r_0^2) dh = 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) \\ &= 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi \approx 0.63 \end{aligned}$$

ملحوظة : بدلا من حساب التغير المطلق (absolute change) في قيمة الدالة f يمكن حساب ما يعرف بالتغير النسبي (relative change) أو النسبة المئوية وذلك باستخدام العلاقة :

$$\left[\frac{df}{f} \Big|_{(x_0, y_0)} \times 100 \right]$$

وفى المثال : حيث أوجدنا التغير المطلق الحادث فى حجم الاسطوانة $dV = 0.63$ نتيجة تغير الارتفاع ونصف القطر ، فمن الممكن إيجاد النسبة المئوية التى تحدد التغير النسبى فى الحجم وذلك بالعلاقة :-

$$\frac{dV}{V} \Big|_{(x_0, y_0)} \times 100 = \frac{0.2\pi}{\pi r_0^2 h_0} \times 100 = \frac{0.2\pi}{\pi(1)^2(5)} \times 100 = 0.04 \times 100 = 4\%$$

الصور (أو الأشكال) التفاضلية التامة : Exact Differential Forms

(i) الصورة الآتية : $(Mdx + Ndy + Pdz)$ تمثل صورة تفاضلية (differential form)

(ii) تكون الصورة التفاضلية تامة (exact) على النطاق D فى الفراغ إذا كانت :-

$$Mdx + Ndy + Pdz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\bar{\nabla} f) \cdot d\bar{r}$$

حيث f دالة قياسية فى D ، وشرط كون $(Mdx + Ndy + Pdz)$ صورة تامة هو :

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}$$

وهذا يكافئ قولنا أن المجال $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$ هو مجال محافظ .

أيضاً فإن التكامل للصورة التفاضلية التامة يكون :

$$\int_A^B Mdx + Ndy + Pdz = \int_A^B df = f(B) - f(A),$$

حيث f دالة قياسية .

Ex: Show that $ydx + xdy + 4dz$ is exact and evaluate the integral

$$\int_A^B (ydx + xdy + 4dz) \text{ from } A(1, 1, 1) \text{ to } B(2, 3, -1).$$

Sol.

$$ydx + xdy + 4dz = Mdx + Ndy + Pdz$$

$$\therefore M = y, \quad N = x, \quad P = 4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

∴ الصورة (ydx + xdy + 4dz) هي صورة تامة ، ولذلك فإن :

$$ydx + xdy + 4dz = df,$$

حيث f دالة قياسية .

ولإيجاد التكامل :

$$\int_A^B (ydx + xdy + 4dz) = \int_A^B df = f(B) - f(A) = f(2,3,-1) - f(1,1,1) \quad (1)$$

ولإيجاد f :

$$ydx + xdy + 4dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad (2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad (3), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} : \text{ ومنها } f = xy + g(y, z) \quad (5) \quad \leftarrow \text{ بتكامل (2) :}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \leftarrow \quad x + \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \leftarrow \quad (3) \quad \text{ وبالمساواة مع}$$

$$g(y, z) = h(z) \rightarrow f = xy + h(z) \quad (6)$$

$$\text{من (6) } \leftarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{dh}{dz} \text{ وبمساواتهما مع (4) :}$$

$$\therefore \frac{dh}{dz} = 4 \rightarrow h(z) = 4z + c$$

وتصبح صورة الدالة f النهائية :

$$f(x, y, z) = xy + 4z + c$$

وبذلك تكون قيمة التكامل :

$$\int_A^B (ydx + xdy + 4dz) = f(2,3,-1) - f(1,1,1) = 2 + c - (5 + c) = -3$$

Problem: Show that the differential form in the integrals are exact, then evaluate the integrals:

(i) $\int_A^B (2x dx + 2y dy + 2z dz)$, $A(0,0,0)$, $B(2,3,-6)$,

(ii) $\int_A^B \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy + dz$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$

[7] تطبيقات على المشتقات الجزئية :

Linearization of a function : دالة (أو خطية) إخطاط (I)

يعرف الإخطاط (أو الخطية) (Linearization) للدالة $f(x, y)$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0)$ بأنه الدالة:-

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \right) (y - y_0) \quad (1)$$

Ex: Find the linearization $L(x, y)$ of the function :

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3 \text{ at the point } P_0(3, 2)$$

Sol.

نوجد f , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ عند النقطة P_0 فنحصل على :-

$$f = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + y$$

وعند النقطة $P_0(3, 2)$:

$$f(3, 2) = (3)^2 - (3)(2) + \frac{1}{2}(2)^2 + 3 = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} = 2(3) - (2) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} = -3 + 2 = -1$$

وتصبح الدالة $L(x, y)$ المطلوبة بالصورة :-

$$L(x, y) = (8) + (4)(x - 3) + (-1)(y - 2) = 4x - y - 2$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : قى حالة الدالة $f(x, y, z)$ فإن الدالة $L(x, y, z)$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ تأخذ الصورة :-

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{P_0} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{P_0} \right) (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \bigg|_{P_0} \right) (z - z_0) \quad (2)$$

Ex: Find the Linearization $L(x, y, z)$ of the function

$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3\sin z$ at the point $P_0(2, 1, 0)$.

Sol.

نوجد $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ عند النقطة $P_0(2, 1, 0)$ فنحصل على :-

$$f = x^2 - xy + 3\sin z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3\cos z$$

وعند النقطة $P_0(2, 1, 0)$ فإن :-

$$f(2, 1, 0) = (2)^2 - (2)(1) + 3\sin 0 = 4 - 2 + 0 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{P_0} = 2(2) - (1) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{P_0} = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \bigg|_{P_0} = 3\cos 0 = 3$$

وتصبح الدالة $L(x, y, z)$ بالصورة :-

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= (2) + (3)(x - 2) + (-2)(y - 1) + (3)(z - 0) \\ &= 2 + 3x - 6 - 2y + 2 + 3z \\ &= 3x - 2y + 3z - 2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

Standard Linear Approximation (2) التقريب الخطي القياسي

عرفنا الإخطاط (أو الخطية) لدالة $f(x, y)$ عند النقطة (x_0, y_0) بالصورة :-

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x|_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + f_y|_{(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{حيث}$$

ويعرف التقريب $f(x, y) \approx L(x, y)$ بالتقريب الخطي القياسي ~~للدالة~~ للدالة f عند النقطة (x_0, y_0) .

ولحساب الخطأ في التقريب الخط القياسي :

إذا كانت M هي الحد الأعلى (upper bound) لقيم $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{xy}|$ عند (x_0, y_0) فإن الخطأ الناتج عن إحلال $f(x, y)$ بإخطاطها $L(x, y)$ يحقق العلاقة :

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M [|x - x_0| + |y - y_0|]^2$$

Ex: Find an upper bound for the error in the approximation:

$$f(x, y) = L(x, y) \text{ [where } f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3, \text{ at } P_0(3, 2)]$$

over the rectangle: $R : |x - 3| \leq 0.1, |y - 2| \leq 0.1$

Sol.

$$f = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3 \rightarrow f_x = 2x - y, \quad f_y = -x + y$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 1 \rightarrow |f_{xx}| = |2| = 2, \quad |f_{xy}| = |-1| = 1, \quad |f_{yy}| = |1| = 1$$

أكبر قيمة من هذه القيم هي 2 ، ولذلك يمكن أخذ $M = 2$

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M [|x - x_0| + |y - y_0|]^2 \quad \text{باستخدام علاقة الخطأ :}$$

وعلى المستطيل R حيث : $|x - 3| \leq 0.1, |y - 2| \leq 0.1$

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} (2) [|x - 3| + |y - 2|]^2 = [|x - 3| + |y - 2|]^2$$

وبالتعويض عن قيمة $|x - 3|$, $|y - 2|$ نحصل على :

$$|E(x, y)| \leq [0.1 + 0.1]^2 = 0.04$$

وكنسبة مئوية : حيث أن $\leftarrow f(3, 2) = 8$ فإن الخطأ لا يزيد عن :

$$\frac{0.04}{8} \times 100 = 0.5\%$$

التعميم للدوال ذات المتغيرات الثلاثة $f(x, y, z)$:

عرفنا الإخطاط للدالة $f(x, y, z)$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ بالصورة :

$$L(x, y, z) = f|_{P_0} + f_x|_{P_0}(x - x_0) + f_y|_{P_0}(y - y_0) + f_z|_{P_0}(z - z_0)$$

وإذا كان لدينا مستطيلاً R مركزه نقطة P ، وكانت :

$$|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xy}|, |f_{xz}|, |f_{yz}|$$

فإن الخطأ $E(x, y, z) = f(x, y, z) - L(x, y, z)$ في تقريب f بواسطة L يكون محدوداً خلال R بالعلاقة :

$$|E| \leq \frac{1}{2} M [|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|]^2$$

Ex: Find the Linearization $L(x, y, z)$ of $f(x, y, z) = x^2 - xy + 3\sin z$ at the point $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$. Find an upper bound for the error incurred in replacing f by L on the rectangle

$$R : |x - 2| \leq 0.01, |y - 1| \leq 0.02, |z| \leq 0.01$$

Sol.

$$f_x = 2x - y, f_y = -x, f_z = 3\cos z, f|_{P_0} = f(2, 1, 0) = 2$$

$$f_x|_{P_0} = f_x(2, 1, 0) = 3, f_y|_{P_0} = f_y(2, 1, 0) = -2, f_z|_{P_0} = f_z(2, 1, 0) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore L(x, y, z) &= f|_{P_0} + f_x|_{P_0}(x - x_0) + f_y|_{P_0}(y - y_0) + f_z|_{P_0}(z - z_0) \\ &= 2 + 3(x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z - 0) \\ &= 3x - 2y + 3z - 2 \end{aligned}$$

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 0, f_{zz} = -3\sin z, f_{xy} = -1, f_{xz} = 0, f_{yz} = 0$$

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \quad |f_{zz}| = |-3\sin z|, \quad |f_{xy}| = |-1| = 1$$

أكبر قيمة هي قيمة : $|f_{zz}| = |-3\sin z| = |-3| = 3$ ولذلك نأخذها : $M = 3$ ويصبح الخطأ الحادث من إحلال f بـ L على R هو :

$$|E| \leq \frac{1}{2}(3)[0.01 + 0.02 + 0.01]^2 = 0.0024$$

أى أن الخطأ لا يزيد عن 0.0024 . وهو المطلوب .

(3) علاقة مفكوك (تيلور في متغيرين Taylor's formula for two variables)

يمكن تعميم مفكوك تيلور لمتغير واحد (x) للدالة $f(x)$ حول النقطة $x = a$ وصورته :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n$$

$$0 \leq c < 1, \quad R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+cx) \quad \text{حيث}$$

للدالة $f(x, y)$ حول النقطة (a, b) وذلك في قوى $(x-a)$ ، $(y-b)$ التصاعدية وذلك في الصورة :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \frac{1}{1!}[(x-a)f_x + (y-b)f_y]_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{2!}[(x-a)^2f_{xx} + 2(x-a)(y-b)f_{xy} + (y-b)^2f_{yy}]_{(a,b)} + \dots \\ & + \frac{1}{n!}[(x-a)f_x + (y-b)f_y]^n_{(a,b)} + \dots \end{aligned}$$

حالة خاصة :

بأخذ $(a, b) = (0, 0)$ نحصل على علاقة مفكوك تيلور للدالة $f(x, y)$ عند نقطة الأصل ، وصورتها :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(0, 0) + \frac{1}{1!}[xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)] \\ & + \frac{1}{2!}[x^2f_{xx}(0, 0) + 2xyf_{xy}(0, 0) + y^2f_{yy}(0, 0)] \\ & + \frac{1}{3!}[x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} + 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}]_{(0,0)} \end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0,0) + R_n$$

$$0 < c < 1 \quad , \quad R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(cx, cy) \quad \text{حيث :}$$

ويسمى هذا المفكوك (أو هذه العلاقة) بعلاقة ماكلورين Maclaurin's formula وهي حالة خاصة من علاقة تيلور عند النقطة (0, 0) [نقطة الأصل].

(4) الخطأ التقريبي والتقريب التربيعي والتكعيبي :

Approximation error and quadratic and cubic approximation :

ملحوظة (1) : تمثل علاقة تيلور تقريب كثيرة حدود (polynomial approximation) للدالة ذات المتغيرين بحيث أن الحدود الأولى التي عددها n تعطى كثيرة الحدود بينما الحد الأخير يعطى الخطأ التقريبي (approximation error).

ملحوظة (2) : تشكل الحدود الثلاثة الأولى في علاقة تيلور إخطاط (أو خطية) الدالة (functions linearization) ولتحسين هذا الإخطاط نضيف الحدود ذات القوى الأعلى ، وبأخذ الحدود الثلاثة الأولى نحصل على مايعرف بالتقريب التربيعي (quadratic approximation) ، كما يشكل الحد التالي للحدود الثلاثة الأولى أى الحد :

$$\frac{1}{6} [x^3 f_{xxx}(0,0) + 3x^2 y f_{xxy}(0,0) + 3xy^2 f_{xyy}(0,0) + y^3 f_{yyy}(0,0)]$$

مقدار الخطأ في التقريب أى $|E(x,y)|$ ، وبإضافة هذا الخطأ إلى التقريب التربيعي نحصل على مايعرف بالتقريب التكعيبي (cubic approximation) كما يتضح من الأمثلة التالية .

Ex(1): use Taylor formula to find the expansion of the function $f(x,y) = e^{xy}$ at the point (1, 1), neglecting the terms of 3 de degree in x, y .

Sol. Taylor's formula in this case take the form:

$$f(x,y) = f(1,1) + [(x-1)f_x(1,1) + (y-1)f_y(1,1)] + \frac{1}{2} [(x-1)^2 f_{xx}(1,1) + 2(x-1)(y-1)f_{xy}(1,1) + (y-1)^2 f_{yy}(1,1)] \quad (1)$$

$$f(x,y) = e^{xy} \rightarrow f(1,1) = e \quad , \quad f_x = ye^{xy} \rightarrow f_x(1,1) = e$$

$$f_y = xe^{xy} \rightarrow f_y(1,1) = e \quad , \quad f_{xx} = y^2 e^{xy} \rightarrow f_{xx}(1,1) = e$$

$$f_{yy} = x^2 e^{xy} \rightarrow f_{yy}(1,1) = e \quad , \quad f_{xy} = xye^{xy} + e^{xy} \rightarrow f_{xy}(1,1) = 2e$$

بالتعويض في (1) :

$$\begin{aligned} \therefore e^{xy} &= e + (x-1)e + (y-1)e + (x-1)^2 \frac{e}{2} \\ &\quad + \frac{2}{2}(x-1)(y-1)(2e) + \frac{(y-1)^2}{2}e \\ &= e[1 + (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2] \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

Ex(2): Use Taylor's formula to find a quadratic approximation of the function $f(x, y) = \sin x \sin y$ at the origin. Estimate the error in the approximation if $|x| \leq 0.1$ and $|y| \leq 0.1$

Sol.

تأخذ علاقة تيلور في هذه الحالة الصورة الآتية :-

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + (xf_x + yf_y)_{(0,0)} + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy})_{(0,0)}$$

$$f(x, y) = \sin x \sin y \rightarrow f(0, 0) = \sin(0)\sin(0) = 0$$

$$f_x(0, 0) = \cos x \sin y|_{(0,0)} = 0 \quad , \quad f_y(0, 0) = \sin x \cos y|_{(0,0)} = 0 \quad ,$$

$$f_{xx}(0, 0) = -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0 \quad , \quad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y|_{(0,0)} = 1 \quad ,$$

$$f_{yy}(0, 0) = -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0$$

$$\therefore f(x, y) \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)] \approx xy$$

وهو ما يمثل التقريب التربيعي (quadratic approximation) ، ولايجاد الخطأ في التقريب نعتبر التقريب التكعيبي (cubic approximation) حيث :

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]_{(0,0)}$$

وبحساب المشتقات الثالثة للدالة $f(x, y) = \sin x \sin y$ وباعتبار أن قيمتها المطلقة لا تزيد عن 1 [تنحصر بين 0 ، 1] لاحتوائهما على حواصل ضرب $\sin$ ، $\cos$ ، وأيضا حيث أن: $|x| \leq 0.1$ ، $|y| \leq 0.1$ فإننا نحصل على أقل قيمة للخطأ بالصورة :

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{6}[(0,1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0,1)^3] = \frac{8}{6}(0.1)^3 \leq 0.00134$$

أى أن الخطأ لا يزيد عن 0.00134 إذا كانت $|x| \leq 0.1$ ، $|y| \leq 0.1$ وهو المطلوب .

Ex(3): Use Taylor's formula to find the quadratic approximation of the function $f(x, y) = e^x \sin y$ at the origin. Estimate the error in the approximation if $|x| \leq 0.1$ ، $|y| \leq 0.1$.

Sol.

$$f(x, y) = f(0,0) + (xf_x + yf_y)_{(0,0)} + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy})_{(0,0)} \quad (1)$$

$$f(x, y) = e^x \sin y \rightarrow f(0,0) = e^0 \sin 0 = 0 , f_x = e^x \sin y \rightarrow f_x(0,0) = 0$$

$$f_y = e^x \cos y \rightarrow f_y(0,0) = e^0 \cos 1 = 1 , f_{xx} = e^x \sin y \rightarrow f_{xx}(0,0) = 0$$

$$f_{xy} = e^x \cos y \rightarrow f_{xy}(0,0) = 1 , f_{yy} = -e^x \sin y \rightarrow f_{yy}(0,0) = 0$$

بالتعويض فى (1) نحصل على :-

$$f(x, y) \approx 0 + x(0) + y(1) + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)] = y + xy = y(1+x)$$

وهو ما يشكل التقريب التربيعى ، ولايجاد الخطأ :-

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]_{(0,0)} \quad (2)$$

$$f_{xxx} = e^x \sin y , f_{xxy} = e^x \cos y , f_{xyy} = -e^x \sin y , f_{yyy} = -e^x \cos y$$

وحيث أن $|x| \leq 0.1$ ، $|y| \leq 0.1$ فإن :

$$|e^x \sin y| \leq |e^{0.1} \sin(0.1)| \approx 0.11$$

$$|e^x \cos y| \leq |e^{0.1} \cos(0.1)| \approx 1.11$$

وبالتعويض في (2) نحصل على :-

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{6} [(0,1)^3 (0.11) + 3(0.1)^3 (1.11) + 3(0.1)^3 (0.11) + (0,1)^3 (1.11)] \\ \leq 0.00814$$

أى أن الخطأ لا يزيد عن 0.000814 وهو المطلوب .

Problems

Use Taylor's formula for the following function at the origin, to find the quadratic and cubic approximation of (f) near the origin

$$(1) f(x, y) = xe^y, \quad (2) f(x, y) = \sin x \cos y, \quad (3) f(x, y) = \sin(x^2 y^2)$$

$$(4) f(x, y) = e^x \ln(1+y) \quad , \quad (5) f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$$

Solutions:

Problem(1) :

$$f(x, y) = xe^y \rightarrow f_y = e^y, f_{yy} = xe^y, f_{xx} = 0, f_{xy} = e^y, f_{yy} = xe^y$$

The quadratic approximation:

$$f(x, y) \approx f(0,0) + xf_x(0,0) + yf_y(0,0) \\ + \frac{1}{2}[x^2 f_{xx}(0,0) + 2xyf_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0)] \\ = 0 + x(1) + y(0) + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)] = x + xy = (1+y)$$

The cubic approximation:

$$f_{xxx} = 0, \quad f_{xxy} = 0, \quad f_{xyy} = e^y, \quad f_{yyy} = xe^y$$

$$\therefore f(x, y) \approx \text{quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx}(0,0) + 3x^2 y f_{xxy}(0,0) \\ + 3xy^2 f_{xyy}(0,0) + y^3 f_{yyy}(0,0)]$$

$$= (x + xy) + \frac{1}{6}[x^3(0) + 3x^2y(0) + 3xy^2(1) + y^3(0)] = x + xy + \frac{1}{2}xy^2$$

Problem(2): $f(x, y) = \sin x \cos y \rightarrow f_x = \cos x \cos y, f_y = -\sin x \sin y,$

$$f_{xx} = -\sin x \cos y, f_{xy} = -\cos x \sin y, f_{yy} = -\sin x \cos y$$

The quadratic approximation:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2}[x^2f_{xx}(0, 0) + 2xyf_{xy}(0, 0) + y^2f_{yy}(0, 0)] \\ &= 0 + x(1) + y(0) + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(0) + y^2(0)] = x \end{aligned}$$

The cubic approximation:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= -\cos x \cos y, f_{xxy} = \sin x \sin y, f_{xyy} = -\cos x \cos y, f_{yyy} = \sin x \sin y \\ \therefore f(x, y) &\approx \text{quadratic} + \frac{1}{6}[x^3f_{xxx}(0, 0) + 3x^2yf_{xxy}(0, 0) \\ &\quad + 3xy^2f_{xyy}(0, 0) + y^3f_{yyy}(0, 0)] \\ &= x + \frac{1}{6}[x^3(-1) + 3x^2y(0) + 3xy^2(-1) + y^3(0)] = x - \frac{1}{6}(x^3 + 3xy^2) \end{aligned}$$

Problem(3): $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \rightarrow f_x = 2x \cos(x^2 + y^2),$

$$f_y = 2y \cos(x^2 + y^2), f_{xx} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2),$$

$$f_{xy} = -4xy \sin(x^2 + y^2), f_{yy} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2)$$

The quadratic approximation:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{2}[x^2f_{xx}(0, 0) + 2xyf_{xy}(0, 0) + y^2f_{yy}(0, 0)] \\ &= 0 + x(0) + y(0) + \frac{1}{2}[x^2(2) + 2xy(0) + y^2(2)] = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

The cubic approximation:

$$f_{xxx} = -12x \sin(x^2 + y^2) - 8x^3 \cos(x^2 + y^2),$$

$$f_{xxy} = -4y \sin(x^2 + y^2) - 8x^3y \cos(x^2 + y^2),$$

$$f_{xyy} = -4x \sin(x^2 + y^2) - 8xy^2 \cos(x^2 + y^2),$$

$$f_{yyy} = -12y \sin(x^2 + y^2) - 8y^3 \cos(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x, y) &= \text{quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]|_{(0,0)} \\ &= x^2 + y^2 + \frac{1}{6}[x^3(0) + 3x^2 y(0) + 3xy^2(0) + y^3(0)] = x^2 + y^2\end{aligned}$$

Problem(4): $f(x, y) = e^x \ln(1+y) \rightarrow f_x = e^x \ln(1+y), f_y = \frac{e^x}{1+y},$

$$f_{xx} = e^x \ln(1+y), f_{xy} = \frac{e^x}{1+y}, f_{yy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2},$$

The quadratic approximation:

$$\begin{aligned}f(x, y) &\approx f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0) + \frac{1}{2}[x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}]|_{(0,0)} \\ &\approx 0 + x(0) + y(1) + \frac{1}{2}[x^2(0) + 2xy(1) + y^2(-1)] = y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)\end{aligned}$$

The cubic approximation:

$$\begin{aligned}f_{xxx} &= e^x \ln(1+y), f_{xxy} = \frac{e^x}{1+y}, f_{xyy} = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, f_{yyy} = \frac{2e^x}{(1+y)^3} \\ \therefore f(x, y) &= \text{quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]|_{(0,0)} \\ &= y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}[x^3(0) + 3x^2 y(1) + 3xy^2(-1) + y^3(0)] \\ &= y + \frac{1}{2}y(2x - y) + \frac{1}{6}[3x^2 y - 3xy^2 + 2y^3]\end{aligned}$$

Problem(5): $f(x, x) = \frac{1}{1-x-y}, f_x = \frac{1}{(1-x-y)^2} = f_y,$

$$f_{xx} = \frac{2}{(1-x-y)^3} = f_{xy} = f_{yy}$$

The quadratic approximation:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) + \frac{1}{2}[x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}]|_{(0,0)} \\ &= 1 + x(1) + y(1) + \frac{1}{2}[x^2(2) + 2xy(2) + y^2(2)] \\ &= 1 + (x + y) + (x^2 + 2xy + y^2) = 1 + (x + y) + (x + y)^2 \end{aligned}$$

The cubic approximation:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= \frac{6}{(1-x-y)^4} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} \\ f(x, y) &= \text{quadratic} + \frac{1}{6}[x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}]|_{(0,0)} \\ &= 1 + (x + y) + (x + y)^2 + \frac{1}{6}[x^3(6) + 2x^2 y(6) + 3xy^2(6) + y^3(6)] \\ &= 1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3) \\ &= 1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

(5) جاكوبي التحويل (أو الجاكوبيان - Jacobian) من نظام للاحداثيات إلى نظام آخر :-

إذا كانت مجموعة الاحداثيات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تعتمد على عدد n من المتغيرات

$u_1, u_2, \dots, u_n$ فإن محدد جاكوبي (أو جاكوبيان التحويل) يكتب بالصورة

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

في بعدين : إذا كانت $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$\therefore J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

في ثلاثة أبعاد : $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$:

$$\therefore J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

من خواص الجاكوبيان :

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \quad (1)$$

(2) إذا كانت (x,y,z) دوال في (u,v,w) وكانت (u,v,w) دوال في (r,s,t)

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)} \quad \text{فإن :}$$

(3) إذا تغيرت الاحداثيات الكرتيزية إلى احداثيات عامه (u,v,w) بمعنى أن :-

$$x = x(u,v,w) \quad , \quad y = y(u,v,w) \quad , \quad z = z(u,v,w)$$

فإن جاكوبي التحويل يكون بالصورة :

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

في بعدين : إذا كان $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ فإن :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Ex(1): If $u = x - y, v = 2x + y$ find x, y in terms of u, v , then find the value of Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ from the system (x, y) to the system (u, v)

Sol. $x - y = u$, $2x + y = v$

$$x = \frac{1}{3}(u + v) \leftarrow 3x = u + v \quad \text{بالجمع}$$

$$y = \frac{1}{3}(v - 2u) \leftarrow 2y = v - u - \frac{1}{3}(u + v) \leftarrow 2y = v - u - x \quad \text{وبالطرح}$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

Ex(2): For polar coordinates (r, θ) , and if $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, find the Jacobian of transformation from (x, y) and (r, θ) .

Sol.

$$J(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

Ex(3): For cylindrical coordinates (ρ, ϕ, z) , find the transformation from Cartesian (x, y, z) space to the cylindrical (ρ, ϕ, z) space

Sol.

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

[معادلات التحويل من (x, y, z) إلى (ρ, ϕ, z)]

$$J(\rho, \phi, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho$$

Ex(4): For spherical coordinates (ρ, θ, ϕ) , find the transformation from the Cartesian (x, y, z) space to the spherical (r, θ, ϕ) space.

Sol.

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

[معادلات التحويل من (x, y, z) إلى (r, θ, ϕ)]

$$J(r, \theta, \phi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin \theta$$

Problems:

(1) Find the Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ for the transformations:

(i) $x = u \cos v, \quad y = u \sin v$

(ii) $x = u \sin v, \quad y = u \cos v$

Solution:

(i) $x = u \cos v, \quad y = u \sin v$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$$

(ii) $x = u \sin v, \quad y = u \cos v$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -u \sin^2 v - u \cos^2 v = -u$$

(2) Find the area of an ellipse using the transformation $x = au$, $y = bv$, by evaluation the transformed integral over the disk $G : u^2 + v^2 \leq 1$ in the uv - plane.

Solution: $x = au$, $y = bv$

جاكوبيان التحويل من المستوى (xy) إلى المستوى (uv) :

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

وهذا التحويل يحول القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ في المستوى xy إلى القرص

$G (u^2 + v^2 \leq 1)$ والذي مساحته $\pi = \pi(1)^2$ ، وتصبح المساحة المطلوبة باستخدام هذا التحويل :

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dx dy = \iint_G J(u,v) du dv = \iint_G (ab) du dv = (ab) \left[\iint_G du dv \right] \\ &= (ab) [\pi] = ab\pi , \end{aligned}$$

وهي مساحة القطع الناقص .