

الباب الثالث

الدوال الخاصة المتعامدة

(Orthogonal Special Functions)

مقدمة :

تشكل الدوال الخاصة حلولاً لمعادلات تفاضلية ذات صور معينة تظهر كثيراً في المسائل التطبيقية ، وتتميز تلك الدوال بخواص محددة ، وهي غالباً ماتكون على صورة كثيرات حدود (polynomials) ، ولها ما يسمى بالدوال المولدة (generating functions) والتي يستفاد منها كثيراً في الحصول على خواص الدوال الأصلية .
كما أن لها صيغ تكرارية (recurrence relations) محددة ، ولها أيضاً خصائص تعامدية (orthogonal prop.) وخصائص عيارية (normalization prop.) تعطى بعلاقات معينة .
ومن هذه الدوال سوف ندرس الدوال الآتية :

(1) دوال لجندر (Legendre Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة لجندر التفاضلية ، وصورتها :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

وهي نوعان : النوع الأول $P_n(x)$ والثاني $Q_n(x)$

(2) دوال لجندر المرافقة (Associated Legendre Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة لجندر التفاضلية المرافقة وصورتها :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

وهي نوعان : النوع الأول $P_n^m(x)$ ، النوع الثاني $Q_n^m(x)$.

(3) دوال بيسيل (Bessel Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة بيسيل التفاضلية وصورتها :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \text{أو :}$$

وهي نوعان : النوع الأول $J_n(x)$ ، النوع الثاني $Y_n(x)$.

(4) دوال بسيل المعدلة (Modified Bessel Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة بسيل التفاضلية المعدلة وصورتها :

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad \text{أو :}$$

وهي نوعان : النوع الأول $I_n(x)$ ، النوع الثاني $K_n(x)$.

(5) دوال هيرميت (Hermite Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة تفاضلية تسمى معادلة هيرميت التفاضلية وصورتها :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ويرمز لها بالرمز $H_n(x)$

(6) دوال لاجير (Laguerre Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة لاجير التفاضلية وصورتها :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

ويرمز لها بالرمز $L_n(x)$

(7) دوال لاجير المرافقة (Associated Laguerre Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة لاجير التفاضلية المرافقة وصورتها :

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

ويرمز لها بالرمز $L_n^m(x)$

(8) دوال جاوس (Gauss Functions) أو الدوال فوق الهندسية

(Hypergeometric Functions) :

وتمثل حلولاً لمعادلة جاوس التفاضلية أو المعادلة فوق الهندسية وصورتها :

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}y' - \alpha\beta y = 0$$

حيث α, β, γ بارامترات .

ويرمز لها بالرمز $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

وسنقوم بدراسة تلك الدوال ، من ناحية تعريفها وخواصها وأمثلة تطبيقية عليها ، فيما يلي :

تعطى معادلة لجندر التفاضلية بالصورة الآتية :-

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

حيث $n = 0, 1, 2$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

والحل العام لها يعطى بالصورة الآتية :

$$y = AP_n + BQ_n(x)$$

$P_n(x)$ تسمى دالة لجندر من النوع الثاني $Q_n(x)$ تسمى دالة لجندر من النوع الأول
Legendre polynomial of first kind Legendre function of 2nd kind

الصورة العامة لكثيرات حدود لجندر :

تعرف كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ بالصورة الآتية :-

$$P_n(x) = \frac{1.3.5...(2n-3)(2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right] \quad (1)$$

كما تعرف دالة لجندر من النوع الثاني $Q_n(x)$ بالصورة الآتية :-

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1.3.5...(2n+1)} \left[x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \dots \right] \quad (2)$$

ويمكن الحصول على تلك الصور بايجاد الحل العام لمعادلة لجندر التفاضلية في صورة متسلسلة باستخدام ما يعرف بطريقة فوربينوس وذلك بان نفرض الحل في صورة المتسلسلة

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k-r}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \sum (k - r) a_r x^{k-r-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \sum (k - r)(k - r - 1) a_r x^{k-r-2}$$

وبالتعويض في معادلة لجندر التفاضلية وإجراء سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على العلاقتين (1) ، (2) . وبذلك يمكن كتابة الحل العام لمعادلة لجندر التفاضلية بالصورة الآتية :-

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان تتحدد قيمهما من الشروط الحدية المعطاه مع معادلة لجندر التفاضلية.

ملحوظة : إن كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ هي التي تظهر غالباً في التطبيقات الفيزيائية ، بينما من النادر ظهور دالة لجندر من النوع الثاني $Q_n(x)$ في تلك التطبيقات ، ولذلك سنركز هنا على خواص كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ علماً بأن خواص دالة لجندر من النوع الثاني $Q_n(x)$ تتفق في أغلب الأحيان مع خواص $P_n(x)$.

أمثلة محلولة

مثال (1) :

(أ) أوجد قيم $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ وذلك باستخدام علاقة وتعريف كثيرة الحدود $P_n(x)$.

(ب) أثبت أن : $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ وذلك باستخدام نفس العلاقة المذكورة .

الحل :

من تعريف كثيرة حدود لجندر :-

$$P_n(x) = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right]$$

وبكتابة :-

$$a_0 = \frac{1.3.5....(2n-1)}{n!} = \frac{(2n)!}{(2.4.6...2n)n!}$$

حيث : $(2n)! = (2n).(2n-1).....5.4.3.2.1$

ولكن : $2^n n! = 2^n [n.(n-1).....3.2.1] = 2.4.6.....2n$

$$\therefore a_0 = \frac{(2n)!}{2^n n! n!}$$

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n! n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right] \quad (I)$$

بوضع $n = 0, 1, 2, 3$ في (I) نحصل على :-

$$P_0(x) = 1$$

$$0! = 1, \quad x^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{2!}{2 \cdot 1! 1!} [x] = x$$

$$P_2(x) = \frac{4!}{2^2 2! 2!} \left[x^2 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 2} \left[\frac{3x^2 - 1}{3} \right] = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{6!}{2^3 \cdot 3! 3!} \left[x^3 - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 5} x \right] = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

وهو المطلوب أولا .

ملحوظة : يلاحظ أن الدوال $P_0(x), P_2(x), P_4(x)$ هي دوال زوجية بينما

$P_1(x), P_3(x), P_5(x), \dots$ هي دوال فردية .

ثانيا : باستبدال x بـ $-x$ في (I) نحصل على :-

$$\begin{aligned} P_n(-x) &= \frac{(2n)!}{2^n n! n!} \left[(-x)^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} (-x)^{n-2} + \dots \right] \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n! n!} \left[(-1)^n x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(-1)^n}{(-1)^2} x^{n-2} + \dots \right] \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \dots \right] = (-1)^n P_n(x) \end{aligned}$$

وهو المطلوب ثانيا .

مثال (2) : صيغة رودريج للدالة $P_n(x)$ (Rodrigue's formula) :

أثبت أنه يمكن التعبير عن كثيرة حدود لجندر $P_n(x)$ بالصيغة الآتية والتي تسمى صيغة

رودريج

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n \quad (1)$$

حيث $n = 0, 1, 2, \dots$

أو بصورة أخرى : أثبت أن الدالة المعطاه بالصيغة (1) تحقق معادلة لجندر التفاضلية

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

حيث : $y'' = p_n''(x)$ ، $y' = p_n'(x)$ ، $y = p_n(x)$

ملحوظة : قبل حل هذا المثال نذكر النظرية التالية التي سوف نستخدمها في الحل :

نظرية ليبنتز : لتفاضل حاصل ضرب دالتين n من المرات وصورتها :

$$\begin{aligned} [uv]^{(n)} &= uv^{(n)} + {}^n c_1 u^{(1)} v^{(n-1)} + {}^n c_2 u^{(2)} v^{(n-2)} + \dots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} {}^n c_r u^{(r)} v^{(n-r)} \end{aligned}$$

حيث :

$${}^n c_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}^n c_1 = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$${}^n c_2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

حل المثال : من تعريف صيغة رودريج :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n (x^2 - 1)^n \quad (1)$$

بوضع $(x^2 - 1)^n = z$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n z = \frac{1}{2^n n!} z^n$$

وحيث أن :

$$z = (x^2 - 1)^n \quad (2)$$

فتفاضل (2) بالنسبة إلى x نحصل على :

$$z' = n(x^2 - 1)^{n-1} \cdot (2x)$$

وبضرب الطرفين في $(x^2 - 1)$

$$\therefore (x^2 - 1)z' = n.(x^2 - 1)^n .(2x) = 2nxz \quad (3)$$

وبتفاضل (3) مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل على :-

$$(x^2 - 1)z'' + 2xz' = 2n[xz' + z] = 2nxz' + 2nz$$

$$(x^2 - 1)z'' - 2x(n-1)z' - 2nz = 0 \quad (4)$$

أيضاً بتفاضل العلاقة (4) عدد n من المرات باستخدام نظرية ليبنتز .

$$\therefore \left[(x^2 - 1)z^{(n+2)} + n.(2x)z^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2}(2)z^{(n)} \right] \\ - 2(n-1)[xz^{(n+1)} + n(1)z^{(n)}] - 2nz^{(n)} = 0$$

$$\therefore (x^2 - 1)z^{(n+2)} + 2xz^{(n+1)} - n(n-1)z^{(n)} = 0$$

وباعتبار أن :

$$D^2 z^{(n)} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^n z}{dx^n} \right) = z^{(n+2)} \quad , \quad Dz^{(n)} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n z}{dx^n} \right) = z^{(n+1)}$$

$$\therefore [(x^2 - 1)D^2 + 2xD - n(n-1)]z^{(n)} = 0$$

$$\therefore [(x^2 - 1)D^2 + 2xD - n(n-1)].(2^n n! P_n(x)) = 0$$

وبالقسمة على $2^n n!$ نحصل على :-

$$\therefore [(x^2 - 1)D^2 + 2xD - n(n-1)]P_n(x) = 0$$

$$\therefore (x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n-1)P_n(x) = 0$$

وهي معادلة لجندر التفاضلية .

ومن هذا يتضح أن $P_n(x)$ المعطاه بصيغة رودرج تحقق معادلة لجندر التفاضلية .

الدالة المولدة (Generating Function) لدالة لجندر $P_n(x)$

تسمى الدالة :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n \quad (1)$$

بالدالة المولدة لكثيرة الحدود $P_n(x)$

ومنها يتضح أن $P_n(x)$ هي معامل h^n في مفكوك

$$(1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

الإثبات : قبل الإثبات نذكر العلاقتين الهامتين الآتيتين للتذكرة :

(1) نظرية ذات الحدين :

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

(2) نظرية لابينتز :

$$(u + v)^n = u^n + {}^n c_1 u^{n-1} v + {}^n c_2 u^{n-2} v^2 + \dots + {}^n c_n v^n$$

حيث :-

$${}^n c_1 = n, \quad {}^n c_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \dots, \quad {}^n c_n = 1$$

نعود إلى الإثبات : باستخدام نظرية ذات الحدين :

$$\begin{aligned} (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}} &= [1 - h(2x - h)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}h(2x - h) + \frac{1.3}{2.4}h^2(2x - h)^2 \\ &\quad + \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3(2x - h)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n}h^n(2x - h)^n + \dots \end{aligned}$$

ولإيجاد معامل h^n فى مفكوك $(1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$:

ندرس الحد النونى فى هذا المفكوك :-

$$= \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} h^n (2x - h)^n \quad \left| \quad \alpha = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right.$$

$$= ah^n \left[(2x)^n + {}^n c_1 (2x)^{n-1} (-h) + {}^n c_2 (2x)^{n-2} (-h)^2 + \dots \right]$$

$$= ah^n \left[(2x)^n - {}^n c_1 (2x)^{n-1} h + {}^n c_2 (2x)^{n-2} h^2 + \dots \right]$$

$$= \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} h^n [\dots]$$

$$= h^n \left[\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} (2x)^n - \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6 \dots (2n-2)} {}^{n-1}c_1 (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{1.3.5 \dots (2n-5)}{2.4.6 \dots (2n-4)} {}^{n-2}c_2 (2x)^{n-4} + \dots \right]$$

ولكن :

$${}^{n-1}c_1 = (n-1) \quad , \quad {}^{n-2}c_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

ويصبح الحد النوني مساويا

$$= h^n \left[\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} (2x)^n - \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6 \dots (2n-2)} (n-1)(2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{1.3.5 \dots (2n-5)}{2.4.6 \dots (2n-4)} \frac{(n-2)(n-3)}{2} (2x)^{n-4} + \dots \right]$$

وبعد الاختصار ، واعتبار أن :-

$$2.4.6 \dots 2n = 2^n n!$$

نحصل على معامل h^n فى مفكوك $(1-2xh+h^2)^{\frac{1}{2}}$ بالصورة :-

$$\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} + \dots \right]$$

والذى هو $P_n(x)$ أى كثيرة حدود لجندر .

وهو المطلوب .

أمثلة على الدالة المولدة :-

مثال (1) : باستخدام تعريف الدالة المولدة لكثيرة حدود لجندر ، اثبت أن : $P_n(1) = 1$

الحل : حيث أن $P_n(x)$ هى معامل h^n فى مفكوك $(1-2xh+h^2)^{\frac{1}{2}}$ فبأخذ $x = 1$

∴ $P_n(1)$ تكون هى معامل h^n فى مفكوك $(1-2h+h^2)^{\frac{1}{2}}$ أى فى مفكوك

$(1-h)^{-1}$ أى فى مفكوك $(1+h+h^2+\dots+h^n+\dots)$ أى يساوى الواحد ، وبذلك

فإن :

$$P_n(1) = 1$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود لجندر أثبت أن :-

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1.3.5.(2n-1)}{4.6...(2n)} \left[\cos n\theta + \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\theta \right. \\ \left. + \frac{1.3.n.(n-1)}{2!(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right]$$

الحل :

نضع $x = \cos\theta$ فى الدالة المولدة فنحصل على .

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\theta) = \left\{ 1 - 2(\cos\theta)h + h^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ = \left\{ 1 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})h + e^{i\theta}e^{-i\theta}h^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ = \left\{ (1 - he^{i\theta})(1 - he^{-i\theta}) \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ = (1 - he^{i\theta})^{-\frac{1}{2}} (1 - he^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}} \\ = \left[1 + \frac{1}{2}he^{i\theta} + \frac{1.3}{2.4}h^2e^{2i\theta} + \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3e^{3i\theta} + \dots + \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}h^n e^{in\theta} \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{2}he^{-i\theta} + \frac{1.3}{2.4}h^2e^{-2i\theta} + \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3e^{-3i\theta} + \dots + \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}h^n e^{-in\theta} \right]$$

بمساواة معاملات h^n فى كلا الطرفين نحصل على :-

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) + \\ + \frac{1}{2} \frac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n-2)} \left\{ e^{i(n-2)\theta} + e^{-i(n-2)\theta} \right\} + \\ + \frac{1.2}{2.4} \frac{1.3.5...(2n-5)}{2.4.6...(2n-4)} \left\{ e^{i(n-4)\theta} + e^{-i(n-4)\theta} \right\} + \dots$$

$$= 2 \cdot \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \left[\cos n\theta + \frac{1}{2} \frac{2n}{2n-1} \cos(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right] \\ = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{4 \dots 2n} \left[\cos n\theta + \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\theta + \right. \\ \left. + \frac{1.3}{2!} \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right]$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : صورة لابلاس التكاملية (Integral Laplace form) لكثيرة حدود لاجندر :

باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجندر $P_n(x)$ ، ونتيجة التكامل

$$P_n(x) \text{ تعطى بالصورة التكاملية الآتية التي } \left[\int_0^\pi \frac{d\phi}{a \pm b \cos \phi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right]$$

تسمى صورة لابلاس لكثيرة حدود لاجندر.

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n d\phi$$

الحل :

الدالة المولدة هي :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$$

فيوضع

$$a = 1 - xh , \quad b = h\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (1 - xh)^2 - h^2(x^2 - 1)$$

$$= (1 - 2xh + x^2 h^2) - (h^2 x^2 - h^2) = (1 - 2xh + h^2)$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - 2xh + h^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$$

ولكن :

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{a \pm b \cos \phi}$$

$$\therefore \frac{\pi}{\sqrt{1 - 2x + h^2}} = \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{(1 - xh) \pm h\sqrt{x^2 - 1} \cos \phi}$$

$$\begin{aligned} \therefore (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[1 - h \left\{ x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right\} \right]^{-1} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^n \left\{ x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right\}^n \right] d\phi \end{aligned}$$

حيث h صغيرة صغراً كافياً ، وحيث أن

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\therefore \left[1 - h \left\{ x \pm \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right\} \right]^{-1} = \sum h^n \left\{ x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right\}^n$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h^n \left\{ x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right\}^n \right] d\phi$$

وبمساواة معاملات h^n في الطرفين نحصل على :-

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n d\phi$$

والذى يسمى بتكامل لابلاس (Laplace's Integral) ويمكن كتابته أيضاً بالصورة الآتية ،
وذلك بعد وضع

$$x^2 - 1 = -\sin^2 \theta \leftarrow x^2 = \cos^2 \theta \leftarrow x = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore P_n(\cos \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \theta \mp \sqrt{-\sin^2 \theta} \cos \phi \right]^n d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \theta \mp i \sin \theta \cos \phi \right]^n d\phi \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

تعامد (Orthogonality) و عيارية (Normalization) كثيرات حدود لجندر -

(1) التعامد (Orthogonality) :

يمكن إثبات أن أى كثيرتى حدود مختلفتين من كثيرات حدود لجندر يكونان متعامدان فى الفترة $-1 < x < 1$ وذلك طبقا للعلاقة :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad , \quad (m \neq n) \quad (1)$$

وتحدد هذه العلاقة مايسمى بتعامد كثيرات حدود لجندر .

(2) العيارية (Normalization) :

إذا كانت $m = n$ فإنه يمكن إثبات أن :

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (2)$$

وتحدد هذه العلاقة مايسمى بعيارية كثيرات حدود لجندر

بوجه عام : فإن العلاقتين (1), (2) يمكن جمعهما فى العلاقة :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad , \quad (3)$$

حيث δ_{mn} هى دلتا كرونكر (Kronecker delta)

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

تحدد العلاقة (3) عيارية وتعامد الدالة $P_n(x)$ (orthonormalization)

مثال (1) : أثبت العلاقة :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

الحل :

حيث أن $P_m(x), P_n(x)$ تحقق معادلة لجندر التفاضلية فإن :-

$$(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0 \quad (1)$$

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \quad (2)$$

بضرب (1) فى P_n ، (2) فى P_m وال طرح نحصل على :-

$$(1-x^2)[P_n P_m'' - P_m P_n''] - 2x [P_n P_m' - P_m P_n'] \\ = [n(n+1) - m(m+1)] P_m P_n$$

$$\therefore (1-x^2) \frac{d}{dx} [P_n P_m' - P_m P_n'] - 2x [P_n P_m' - P_m P_n'] \\ = [n(n+1) - m(m+1)] P_m P_n$$

حيث

$$\frac{d}{dx} [P_n P_m' - P_m P_n'] = P_n P_m'' + P_m' P_n' - P_m P_n'' - P_n' P_m' = P_n P_m'' - P_m P_n''$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) [P_n P_m' - P_m P_n'] \right\} = [n(n+1) - m(m+1)] P_m P_n$$

وباجراء التكامل بالنسبة إلى x للطرفين في الفترة من -1 إلى 1 نحصل على :

$$\therefore (1-x^2) [P_n P_m' - P_m P_n'] \Big|_{-1}^1 = [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_m P_n dx$$

ولكن

$$P_n(1) = P_m(1) = 1 \quad , \quad P_n(-1) = P_m(-1) = -1$$

$$\therefore 0 = [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_m P_n dx$$

وحيث أن $m \neq n$ فإن : $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$ ، وهو المطلوب .

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad \text{مثال (2) : اثبت العلاقة}$$

الحل : نستخدم الدالة المولدة في اثبات هذه العلاقة كالتالى :-

حيث أن

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) h^m$$

بضرب العلاقتين نحصل على نحصل على :-

$$\therefore \frac{1}{1-2hx+h^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx \right] h^{m+n} \quad (1)$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى x على الطرفين من -1 إلى 1

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2hx+h^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)h^{m+n}$$

ولكن

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2hx+h^2} &= -\frac{1}{2h} \int_{-1}^1 \frac{-2h}{1-2hx+h^2} dx \\ &= -\frac{1}{2h} \ln(1-2hx+h^2) \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2h} [\ln(1-h) - \ln(1+h)] \\ &= \frac{1}{h} \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} h^{2n} \end{aligned} \quad (2)$$

وذلك حيث أن :-

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right) &= \frac{1}{h} [\ln(1+h) - \ln(1-h)] \\ &= \frac{1}{h} \left[\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots \right) - \left(-h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[2h + \frac{2h^3}{3} + \frac{2h^5}{5} + \dots + \frac{2h^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots \right] \\ &= 2 \left[1 + \frac{h^2}{3} + \frac{h^4}{5} + \dots + \frac{h^{2n}}{2n+1} + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{h^{2n}}{2n+1} \end{aligned}$$

بالتعويض من (2) في (1) ووضع $m = n$ نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} h^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right] h^{2n} \quad (3)$$

وبمساواة معاملات h^{2n} في الطرفين نجد أن :

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}}$$

مثال (3) : بين أن :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 2 \quad , \quad n = 0$$

الحل :

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad \text{مع ملاحظة أن } P_0(x) = 1, P_1(x) = x \text{ نجد من العلاقة}$$

عندما $n = 0$ فإن :

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2(0)+1} = 2$$

ومن العلاقة :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{حيث } n \neq m \text{ فعندما } n = 1, 2, \dots \text{ فإن}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 P_0(x) P_n(x) dx = \int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0$$

وهو المطلوب .

مسائل :

(1) بين أن :

$$(i) \int_{-1}^1 x P_n(x) dx = 0 \quad , \quad n = 0, 2, 3, \dots$$

$$(ii) \int_{-1}^1 x P_n(x) dx = \frac{2}{3} \quad , \quad n = 1$$

(2) أوجد :

$$\int_{-1}^1 x P_6(x) dx \quad , \quad \int_{-1}^1 P_3(x) P_7(x) dx$$

العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر (Recurrence Relations) :

هناك عدد من العلاقات التي تربط بين كثيرات حدود لجندر وتفاضلاتها لأدلة مختلفة
($n, n-1, n+1, \dots$) ومن أشهر تلك العلاقات التكرارية وأهمها :-

$$(1) (2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

$$(2) P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x)$$

$$(3) (x^2 - 1)P'_n(x) = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]$$

$$(4) xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$$

وسنقوم فيما يلي بآثبات هذه العلاقات الأربعة :-

إثبات العلاقة التكرارية (1) :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = u \quad , \quad \text{باستخدام الدالة المولدة : مثلاً}$$

$$\therefore u \cdot \sqrt{1 - 2xh + h^2} = 1 \quad \therefore u^2 \cdot (1 - 2xh + h^2) = 1$$

بالتفاضل بالنسبة إلى h نحصل على :

$$u^2 \cdot (-2x + 2h) + (1 - 2xh + h^2) \cdot 2u \frac{du}{dh} = 0$$

وبقسمة الطرفين على $2u$ نحصل على :-

$$\therefore \frac{du}{dh} (1 - 2xh + h^2) + u(h - x) = 0 \quad (1)$$

ولكن :

$$\therefore \frac{du}{dh} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} \leftarrow u = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} \cdot (1 - 2xh + h^2) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n (h - x) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)h^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n+1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)h^n = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

بمساواة معامل h^n في الطرفين نجد أن :-

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n - 1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) = 0$$

$$\therefore (n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

$$\therefore \boxed{(2n+1)(x)P_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)} \quad (I)$$

وهو المطلوب .

ملاحظات :

ملحوظة (1) : العلاقة (I) يمكن وضعها ايضا بالصورة الآتية

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}(x)P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

ملحوظة (2) : بوضع $(n-1)$ بدلا من (n) فى تلك العلاقة نحصل على

$$P_{(n-1)+1}(x) = \frac{2(n-1)+1}{(n-1)+1}xP_{(n-1)}(x) - \frac{(n-1)}{(n-1)+1}P_{(n-1)-1}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}xP_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(x)$$

وهى صورة أخرى لعلاقة التكرارية (I) .

ملحوظة (3) : يمكن استخدام العلاقة التكرارية (I) مثلا فى إيجاد $P_2(x)$, $P_3(x)$ إذا

$$\text{علم أن } P_0(x) = 1 , P_1(x) = x$$

الحل :

قبوضع $n=1$ فى الصورة الآتية للعلاقة (I)

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

نحصل على :

$$P_2(x) = \frac{3}{2}xP_1(x) - \frac{1}{2}P_0(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

وبوضع $n=2$ فى نفس الصورة السابقة نحصل على :

$$\begin{aligned} \therefore P_3(x) &= \frac{5}{3}xP_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x) \\ &= \frac{5}{3}x \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) - \frac{2}{3}x \\ &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \end{array} \right.$$

إثبات العلاقة التكرارية (2) : باستخدام الدالة المولدة أيضاً حيث أن :

$$(1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$h \cdot (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) h^n$$

وبضرب الطرفين في $(1 - 2xh + h^2)$

$$\therefore (1 - 2xh + h^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) h^n = h \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n \quad (1)$$

بمقارنة معامل h^{n+1} في الطرفين نجد أن :

$$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = P_n(x) \quad (2)$$

ومن العلاقة التكرارية (I) :

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى x وضرب الناتج في 2 نحصل على :

$$2[(2n + 1)\{xP'_n + P_n\} - (n + 1)P'_{n+1} - nP'_{n-1}] = 0 \quad (3)$$

وبضرب العلاقة (2) في $(2n + 1)$

$$\therefore (2n + 1)[P'_{n+1} - 2xP'_n + P'_{n-1} - P_n] = 0 \quad (4)$$

بجمع (3) ، (4) نحصل على :

$$(2n + 1)P_n(x) - [2(n + 1) - (2n + 1)]P'_{n+1} + [-2n + (2n + 1)]P'_{n-1} = 0$$

$$\therefore \boxed{(2n + 1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)} \quad (II)$$

وهو المطلوب .

إثبات العلاقة التكرارية (3) :

يمكن إثبات هذه العلاقة باستخدام تكامل لابلاس في الصورة :

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n d\phi$$

$$xP_n = \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n d\phi \quad (1)$$

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^{n-1} d\phi \quad (2)$$

من (1), (2) بالطرح نجد أن :-

$$\begin{aligned} xP_n(x) - P_{n-1}(x) &= \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n d\phi \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^{n-1} d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^{n-1} \left[x \left\{ x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right\} - 1 \right] d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^{n-1} \left[(x^2 - 1) + x \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right] d\phi \\ &= \frac{(x^2 - 1)}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^{n-1} \left[1 + \frac{x \cos \phi}{\sqrt{x^2 - 1}} \right] d\phi \\ &= \frac{(x^2 - 1)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} \frac{\left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n}{n} d\phi \\ &= \frac{(x^2 - 1)}{n} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \phi \right]^n d\phi \right] \\ &= \frac{(x^2 - 1)}{n} \frac{d}{dx} [P_n(x)] = \frac{(x^2 - 1)}{n} P_n'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{(x^2 - 1)P_n'(x) = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]}$$

وهي العلاقة التكرارية (3) المطلوبة .

اثبات العلاقة التكرارية (4) :

لإثبات العلاقة (4) وصورتها :

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$$

نستخدم معادلة لجندر التفاضلية بالصورة :

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

$$\therefore (x^2 - 1)\frac{d^2P_n}{dx^2} + 2x\frac{dP_n}{dx} - n(n+1)P_n = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[(x^2 - 1)\frac{dP_n}{dx} \right] = n(n+1)P_n$$

ومن العلاقة التكرارية (3) فإن :

$$(x^2 - 1)P_n' = n[xP_n - P_{n-1}]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} [n\{xP_n - P_{n-1}\}] = n(n+1)P_n$$

$$\therefore x\frac{dP_n}{dx} + P_n - \frac{dP_{n-1}}{dx} = (n+1)P_n$$

$$\therefore xP_n' + P_n - P_{n-1}' = (n+1)P_n$$

$$\therefore \boxed{xP_n' - P_{n-1}' = nP_n}$$

وهي العلاقة (4) المطلوبة ..

متسلسلة لجندر Legendre series : حيث أن حدوديات لجندر $P_0(x), P_1(x), \dots$ تكون متعامدة في الفترة $x \in [-1, 1]$ فإنه يمكن وضع مفكوك الدالة $f(x)$ على هيئة متسلسلة لانهاية لهذه الحدوديات بالعلاقة :

$$f(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x) \quad (1)$$

وتعرف بمتسلسلة لجندر ، والمعاملات c_n يمكن تعيينها بالطرق العادية ، فبضرب طرفي المعادلة (1) في $P_m(x)$ والتكامل من $x = -1$ إلى $x = 1$ نحصل على :

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx$$

ونلاحظ أن تكامل الطرق الأيمن = صفر عندما $n \neq m$ وفي حالة $n = m$ فإن

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = c_m \int_{-1}^1 P_m^2(x)dx = c_m \frac{2}{2m+1}$$

$$\therefore c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx \quad (2)$$

مثال (1) : اكتب مفكوك الدالة $f(x) = x^2$ فى متسلسلة على الصورة $\sum c_n P_n(x)$ حيث $P_n(x)$ كثيرة حدود لجندر .

الحل :

حيث أنه يمكن كتابة أى دالة كثيرة حدود من الدرجة m بدلالة متسلسلة كثيرة الحدود لجندر " على النحو :

$$f(x) = \sum_{n=0}^m c_n P_n(x)$$

حيث

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

وحيث أن $f(x) = x^2$ كثيرة حدود من درجة 2 أى أن $n = 2$

$$\therefore x^2 = \sum_{n=0}^2 c_n P_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) \quad (1)$$

حيث

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx$$

وحيث أن : $P_0(x) = 1$ ، $P_1(x) = x$ ، $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$$\therefore c_0 = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{1}{3}$$

$$c_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \left(2 + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 (3x^2 - 1) dx \\ &= \frac{5}{4} \left[3 \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

بالتعويض فى معادلة (1) نحصل على :

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

$$\therefore F(x) = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

وهو المطلوب

مثال (2): عبر عن الدالة كثيرة الحدود التالية:

$$F(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

بدلالة كثيرات حدود لجندر.

الحل: نعلم من الخصائص الأساسية لكثيرة حدود لجندر من النوع الأول $P_n(x)$ أن:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

وسوف نستخدم تلك الخصائص في كتابة حدود الدالة $F(x)$ وعلى ذلك يمكن كتابة الحد x^3

من الدالة $F(x)$ بالطريقة التالية

$$\therefore P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$\therefore 5x^3 = 2P_3(x) + 3x$$

سنعوض عن x بقيمتها $P_1(x)$

$$\therefore 5x^3 = 2P_3(x) + 3P_1(x)$$

$$\therefore x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) \quad (1)$$

$$\therefore P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore 3x^2 = 2P_2(x) + 1 = 2P_2(x) + P_0(x)$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x) \quad (2)$$

$$\therefore x = P_1(x) \quad (3)$$

$$\therefore 1 = P_0(x) \quad (4)$$

من المعادلات (1), (2), (3), (4) يمكن كتابة $F(x)$ على النحو الآتي :

$$F(x) = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{3}P_0(x) + 3P_1(x) + P_0(x)$$

$$= \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{18}{5}P_1(x) + \frac{5}{3}P_0(x)$$

مثال (3) : اوجد مفكوك الدالة $f(x)$ على هيئة متسلسلة لمجموعة حدود ليجندر حيث :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

الحل : باستخدام علاقة c_m (بأخذ $m = n$)

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^0 -P_n(x) dx + \int_0^1 P_n(x) dx \right]$$

وبملاحظة أن $P_n(x)$ تكون داله زوجيه عندما $n = 0, 2, 4, \dots$ وتكون دالة فردية عندما

$$\int_0^1 P_n(x) dx = \int_{-1}^0 P_n(x) dx \quad \text{لذلك فعندما تكون } n \text{ عددا زوجيا فإن } n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\int_0^1 P_n(x) dx = -\int_{-1}^0 P_n(x) dx \quad \text{وعندما تكون } n \text{ عددا زوجيا فإن}$$

وحيث أن $c_n = 0$ عندما تكون n عدد زوجي فبالاختصار على قيم c_n عندما يكون n فردي فإن :

$$c_1 = (2n+1) \int_0^1 P_n(x) dx, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad \text{ونجد أن :}$$

$$c_n = \frac{3}{2}, c_3 = -\frac{7}{8}, c_5 = \frac{11}{16}, \dots$$

وعليه فإن :

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{(-7)}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) + \dots$$

مسألة (1) : أوجد مفكوك ليجندر للدالة $f(x)$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

مسألة (2) : عبر عن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , -1 < x < 0 \end{cases}$$

على شكل متسلسلة لجندر .

حل المسألة (2) : بما أن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ حيث :

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx$$

$$\therefore c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(x) dx , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore c_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 dx = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (3x^2 - 1) dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_0^1 P_3(x) dx = \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = -\frac{7}{16}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \dots$$

وهو المطلوب .

مقدمة :

تسمى المعادلة التفاضلية التي صورتها :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (1)$$

بمعادلة لجندر التفاضلية المرافقة .

إذا كانت $m = 0$ فإن المعادلة (1) تؤول إلى معادلة لجندر التي درسناها سابقا .

تسمى حلول المعادلة (1) بدوال لجندر المرافقة ، فإذا كانت n, m أعداد صحيحة موجبة فإن

الحل العام للمعادلة (1) يمكن كتابته بالصورة :

$$y = AP_n^m(x) + BQ_n^m(x)$$

<p>$P_n^m(x)$ تسمى دوال لجندر المرافقة من النوع الاول من الرتبة m والدرجة n</p>	<p>$Q_n^m(x)$ تسمى دوال لجندر المرافقة من النوع الثاني من الرتبة m والدرجة n</p>
--	---

وتعرف تلك الدوال بدلالة دوال لجندر المعتادة كالآتي :-

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x)$$

ونلاحظ أنه إذا كانت $m > n$ فإن $P_n^m(x) = 0$

الحل العام لمعادلة لجندر التفاضلية المرافقة :

لايجاد الحل العام للمعادلة (1) في صورة متسلسلة نضع :-

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} u + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \frac{du}{dx} - mu \left[(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} - (m-2)x^2(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \right] + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^2u}{dx^2}$$

وتحول المعادلة (1) إلى الصورة الآتية :

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{du}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0$$

ولأيجاد حل هذه المعادلة نضعها أولاً بالصورة الآتية ، وذلك بوضع $u = y$

$$\therefore (1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dy}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]y = 0 \quad (2)$$

وذلك حتى تأخذ صورة معادلة لجندر المرافقة المعروفة ، وهى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

فى y ، وحلها هو y .

نفرض الحل فى صورة متسلسلة كالاتى :-

$$y = \sum a_k x^k$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum k a_k x^{k-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum k(k-1) a_k x^{k-2}$$

وبالتعويض فى (2) وبعد اجراء سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على

الحلين الآتيين للمعادلة (1) فى صورة متسلسلة :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[x - \frac{(n-m)(n+m+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-m)(n-m-2)(n+m+1)(n+m+3)}{4!} x^4 + \dots \right]$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[x - \frac{(n-m-1)(n+m+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-m-1)(n-m-3)(n+m+2)(n+m+4)}{5!} x^5 + \dots \right]$$

حيث تعرف $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ بدالتى لجندر المرافقتين من الرتبة m والدرجة n .

$$y = \frac{2^n n!(n-m)!}{(2n)!} P_n^m(x)$$

إذا كانت n, m كلاهما عدد صحيح فإن :

عندما $m=0$: فإن y تصبح مكافئة لـ $P_n(x)$ وبذلك فإن : $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ تحقق المعادلة

(2) ، ويكون حل المعادلة (1) هو :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

وهي العلاقة التي تربط كثيرات حدود لجندر المرافقة $P_n^m(x)$ بكثيرات حدود لجندر $P_n(x)$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : بين أنه إذا كانت m عدد صحيح موجب وكانت u_n هي أي حل لمعادلة لجندر

التفاضلية ، فإن $\frac{d^m u_n}{dx^m}$ تمثل حلا لمعادلة لجندر التفاضلية المرافقة ، أكتب الحل العام لتلك

المعادلة .

الحل : إذا كانت u_n تمثل حلا لمعادلة لجندر التفاضلية فإن :

$$(1-x^2)u_n'' - 2xu_n' + n(n+1)u_n = 0$$

بتفاضل هذه المعادلة m من المرات ، وكتابة $v_n^m = \frac{d^m u_n}{dx^m}$ فإن :-

$$(1-x^2) \frac{d^2(v_n^m)}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{d(v_n^m)}{dx} + [n(n+1) - m(m+1)]v_n^m = 0$$

وبوضع $v_n^m = (1-x^2)^p y$ في تلك المعادلة فإنها تصبح :

$$(1-x^2)^2 y'' - [2(m+1)x(1-x^2) + 4Px(1-x^2)]y' + \{4(m+1)Px^2 + (4P^2 - 2P)x^2 - 2P + [n(n+1) - m(m+1)](1-x^2)\}y = 0$$

وإذا اخترنا $P = -\frac{m}{2}$ فإن هذه المعادلة تصبح بعد القسمة على $(1-x^2)$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right]y = 0$$

وهي معادلة لجندر التفاضلية المرافقة .

وحيث أن $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} v_n^m$ فإن $v_n^m = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} y$ وحل للمعادلة (1) .

ويكون حل معادلة لجندر المرافقة هو :

$$y = c_1 P_n^m(x) + c_2 Q_n^m(x)$$

حيث :

$$P_n^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m}$$

$$Q_n^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n}{dx^m}$$

وذلك لأن u_n هو حل معادلة لجندر كما هو معطى ، فتكون $u_n = P_n$ وأيضاً فإن $u_n = Q_n$

مثال (2) : أوجد قيم دوال لجندر المرافقة الآتية :-

$$P_1^1(x), P_2^1(x), P_2^2(x), P_3^2(x), P_2^3(x)$$

الحل : من العلاقة

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

$$(1) P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d(x)}{dx} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_1(x) = x \quad \text{حيث}$$

$$(2) P_2^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_2(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2-1}{2} \right) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_2(x) = \left(\frac{3x^2-1}{2} \right) \quad \text{حيث}$$

$$(3) P_2^2(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_2(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{3x^2-1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (5x^2-1)$$

$$(4) P_3^2(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_3(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{5x^3 - 3x}{2} \right)$$

$$= 15x - 15x^3 = 15x(1-x^2),$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} \quad \text{حيث}$$

$$(5) P_2^3(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^3}{dx^3} P_2(x) = 0$$

مثال (3): تحقق من أن $P_3^2(x)$ المحسوبة في مثال (2) تكون حلا لمعادلة لجندر المرافقة

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

عندما $n=3, m=2$

الحل: من مثال (2) فإن:

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = y$$

$$\therefore y' = 15 - 45x^2, \quad y'' = 90x$$

فبالتعويض في معادلة لجندر المرافقة المذكورة ، نجد أن الطرف الأيسر يساوى :

$$= (1-x^2)(90x) - 2x(15-45x^2) + \left[12 - \frac{4}{1-x^2} \right] (15x - 15x^2)$$

$$= (1-x^2)(90x) - (30x - 90x^3) + \frac{12(1-x^2) - 4}{1-x^2} \cdot 15x \cdot (1-x^2)$$

$$= -90x + 90x^3 - 30x + 90x^3 + 8.15x - 12.15x^3$$

$$= 180x^3 - 120x + 120x - 180x^3 = 0 = \text{الطرف الأيمن}$$

وعلى ذلك فإن $P_3^2(x)$ تكون حلا لمعادلة لجندر المرافقة .

العلاقة بين معادلة لجندر المرافقة ومعادلة لابلاس :

بكتابة معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية الكروية بالصورة :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1)$$

وبالضرب في r^2 :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2)$$

بوضع $u = R\Theta\Phi$ حيث $R = R(r)$, $\Theta = \Theta(\theta)$, $\Phi = \Phi(\phi)$

$$\therefore \Theta \Phi \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{R\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

وبالقسمة على $R\Theta\Phi$ نحصل على :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$$

وحيث أن الطرف الأيسر يعتمد فقط على r والأيمن يعتمد فقط على θ, ϕ فإن كل طرف يجب

أن يساوى ثابتاً وليكن $(-\lambda^2)$

$$\therefore \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\lambda^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \lambda^2 \quad (4)$$

المعادلة (3) تسمى معادلة R ولحلها نكتبها بالصورة :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\lambda^2 R$$

$$\therefore r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (5)$$

الحل العام للمعاملة (5) يمكن كتابته بالصورة :

$$R = r^{-\frac{1}{2}} \left[Ar \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{4}} + Br - \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{4}} \right] = Ar \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{4}} + Br \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{4}} \quad (6)$$

وبوضع

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{4}} = n \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = -(n+1) \quad (8)$$

$$\therefore R = Ar^n + Br^{-(n+1)} = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \quad (9)$$

وبضرب (7) في (8) نحصل على :

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\right) \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\right) = -n(n+1)$$

$$\therefore \lambda^2 = -n(n+1) \quad (10)$$

ونعود إلى المعادلة (4) : فبضربها في $\sin^2 \theta$ والتعويض عن $\lambda^2 = -n(n+1)$

$$\therefore \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - n(n+1) \sin^2 \theta$$

الطرف الأيسر يعتمد على ϕ فقط والأيسر على θ فقط فيجب أن يساوي كل طرف مقدار ثابت ، وليكن $(-m^2)$ ، ونحصل على المعادلتين :

$$\therefore \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (11)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) [n(n+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (12)$$

المعادلة (11) تسمى معادلة Φ ، والمعادلة (12) تسمى معادلة Θ .
يلاحظ أن المعادلة (12) معادلة Θ يمكن إثبات أنها تكافئ معادلة لجندر المرافقة وذلك كالآتي :

بوضع $z = \cos \theta$ فإن :

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dz} \frac{dz}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d\Theta}{dz}$$

$$\therefore \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{dz} = (z^2 - 1) \frac{d\Theta}{dz}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - z^2 \quad \text{حيث :}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right] = \frac{d}{d\theta} \left[(z^2 - 1) \frac{d\Theta}{dz} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dz} \left[(z^2 - 1) \frac{d\Theta}{dz} \right] \frac{dz}{d\theta} \\
&= \frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] \sin \theta
\end{aligned}$$

بالتعويض في (12) نحصل على :-

$$\sin^2 \theta \frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] + [n(n+1)\sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0$$

بالقسمة على $\sin^2 \theta$ والتي تساوى $(1 - z^2)$

$$\therefore \frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] \Theta = 0$$

$$\therefore (1 - z^2) \frac{d^2 \Theta}{dz^2} - 2z \frac{d\Theta}{dz} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] \Theta = 0 \quad (13)$$

وبوضع $z = x$ ، $\Theta = y$ نحصل على :

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0$$

$$\therefore (1 - x^2) y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0 \quad (14)$$

وهي معادلة لجندر المرافقة ، وحلها العام هو :

$$y = \Theta = cP_n^m(z) + DQ_n^m(z) \quad , \quad \text{حيث } z = \cos \theta$$

$$P_n^m(z) = P_n^m(\cos \theta) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)$$

$$Q_n^m(z) = Q_n^m(\cos \theta) = (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z)$$

هي دوال لجندر المرافقة من النوع الأول والثاني على التوالي .

وهذا يعنى أن معادلة لجندر المرافقة يمكن الحصول عليها من الجزء المعتمد θ من معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية ، أو أن هذا الجزء (الجزء المعتمد على θ من معادلة لابلاس) يكافئ معادلة لجندر المرافقة .

ملحوظة : في حالة $m = 0$ فإن الحل $u(r, \theta, \phi)$ لا يكون معتمدا على ϕ ويعطى في هذه الحالة بدلالة دوال لجندر العادية .

وبصورة أخرى : فإن حل معادلة لابلاس الغير معتمدة على ϕ في الاحداثيات القطبية الكروية يؤدي إلى معادلة لجندر العادية .

الإثبات : في هذه الحالة تكون الدالة $u = R(r) \Theta(\theta)$ وتؤول معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ في الاحداثيات القطبية (r, θ) [في بعدين] إلى :-

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1)$$

ويؤدي حلها إلى المعادلتين :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0. \quad [R \text{ معادلة}] \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \lambda^2 \sin \theta \cdot \Theta = 0. \quad [\Theta \text{ معادلة}] \quad (3)$$

وحل المعادلة (2) (معادلة R) هو : $R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}$

حيث : $\lambda^2 = -n(n+1)$

وتصبح المعادلة (3) (معادلة Θ) بالصورة الآتية بعد وضع $z = \cos \theta$ ، $\lambda^2 = -n(n+1)$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] \sin \theta = -n(n+1) \sin \theta \Theta$$

والقسمة على $\sin \theta$ نحصل على :-

$$\frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right] + n(n+1)\Theta = 0$$

$$(1-z^2) \frac{d^2 \Theta}{dz^2} - 2z \frac{d\Theta}{dz} + n(n+1)\Theta = 0 \quad (5)$$

وبوضع $\Theta = y$ ، $z = x$ نحصل على :

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

وهي معادلة لجندر العادية ، وحلها العام هو :

$$y = FP_n(x) + GQ_n(x)$$

الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر المرافقة :

يمكن اشتقاق الدالة المولدة لكثيرات حدود لجندر المرافقة من الدالة المرافقة لكثيرات حدود لجندر $P_n(x)$ وذلك فى الصورة :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{m+1}^m(x) h^k = \frac{2m!(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^m m!(1-2hx+h^2)^{m+1}}$$

العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر المرافقة :

يمكن اشتقاق العديد من العلاقات التكرارية للدوال $P_n^m(x)$ ، ومن تلك العلاقات نذكر :

(1) العلاقة الأولى :

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-2}^{m+1}(x)$$

الإثبات : من العلاقة التكرارية الآتية للدوال $P_n(x)$:

$$(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$$

$$\therefore (2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx} P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{n-1}(x)$$

بالتفاضل m من المرات بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\therefore (2n+1) \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{n+1}(x) - \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_{n-1}(x)$$

بالضرب فى $(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ واعتبار أن :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_n^m(x) = P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-2}^{m+1}(x) \quad (1)$$

أيضا وبفس الطريقة يمكن اثبات العلاقات الثلاث الآتية :

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x) \quad (2)$$

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} P_n^m(x) = [m(m-1) - n(n+1)]P_n^{m-1}(x) \quad (3)$$

$$2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P_n^m(x) = P_n^{m+1}(x) - (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) \quad (4)$$

تعاملد وعلارفة ءوال لءنءر المرارفة :

مءل كءبراء ءءوء لءنءر $P_n(x)$ فإن ءوال لءنءر المرارفة $P_n^m(x)$ ءكون مءعامءة فف الفءرة $-1 < x < 1$ بالصورة الآءفة :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = 0 \quad , \quad (n \neq \ell) \quad (1)$$

وءءء هءة العلاءة ءعامل ءوال لءنءر المرارفة .

وإءا كاءء $n = \ell$:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (2)$$

وءءء هءة العلاءة عفارفة ءوال لءنءر المرارفة .

وبوءه عام فأن :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n\ell} \quad (3)$$

أمءلة مءلولة

مءال (1) : ءءقق من العلاءة (1) بالنسبة للءوال $P_2^1(x)$, $P_3^1(x)$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{الءل : ءفء أن :}$$

$$\begin{aligned} P_3^1(x) &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_3(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{5x^2-3x}{2} \right) \\ &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{15x^2-3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 P_2^1(x) P_3^1(x) dx = \int_{-1}^1 3x(1-x^2) \left(\frac{15x^2-3}{2} \right) dx = 0$$

(ءكامل ءالة فرءفة من -1 إلى +1 يساوى صفرأ)

مءال (2) : ءءقق من العلاءة (2) بالنسبة للءالة $P_2^1(x)$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{الءل : ءفء أن :}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 [P_2^1(x)]^2 dx = 9 \int_{-1}^1 x^2(1-x^2) dx = 9 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{12}{5}$$

وطبقاً للعلاقة (2) فإن النتيجة المطلوبة تكون :

$$\frac{2}{2(2)+1} \frac{(2+1)!}{(2-1)!} = \frac{2 \cdot 3!}{5 \cdot 1!} = \frac{12}{5}$$

وهو المطلوب .

التوافقيات الكرية Spherical Harmonics :

بوضع $x = \cos \theta$ في العلاقة (3) السابقة نحصل على :

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) P_\ell^m(\cos \theta) \cdot \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n\ell}$$

والآن : نعرف الدالة :

$$\tilde{P}_\ell^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) ; \quad (-1 \leq m \leq 1)$$

والتي تخضع للخاصية العيارية التعامدية الآتية :-

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_\ell^m(x) \tilde{P}_{\ell'}^m(x) dx = \delta_{\ell\ell'}$$

أيضاً : بإدخال الدالة :

$$\Phi_m(\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

والتي تخضع أيضاً للخاصية العيارية التعامدية الآتية :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\phi) \Phi_{m'}(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\phi} e^{im'\phi} d\phi = \delta_{mm'}$$

تعرف التوافقيات الكرية (Spherical Harmonics) بأنها حاصل ضرب الدالتين

$\tilde{P}_\ell^m, \Phi_m(\phi)$ ويرمز لها وكالتالى :

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \tilde{P}_\ell^m(\cos \theta) \Phi(\phi)$$

$$= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (I)$$

وهي تمثل دوال متعامدة أيضاً ، وتخضع للخاصية العيارية التعامدية الآتية :

$$(Y_{\ell}^m, Y_{\ell}^m) = \delta_{\ell\ell} \delta_{mm}$$

ويمكن إثبات العلاقة الآتية :-

$$Y_{\ell}^{-m} = (-1)^m Y_{\ell}^m$$

وهي علاقة هامة تفيد في حل كثير من المسائل التطبيقية وباستخدام العلاقة (I) يمكن حساب عدد من التوافقيات الكرية مثل :

$$(1) Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$(2) Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$(3) Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$(4) Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$(5) Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$(6) Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

ثالثاً دوال بيسيل Bessel's Functions

معادلة بيسيل التفاضلية (Bessel's Differential Equations)

تنشأ دوال بيسل كحلول للمعادلة :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad n \geq 0$$

التي تسمى معادلة بيسيل التفاضلية

ويعطى الحل العام لهذه المعادلة بالصورة :

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x)$$

حيث يسمى الحل $J_n(x)$ الذي له نهايو محدودة عند $x \rightarrow 0$ بدالة بيسيل من النوع الأول والرتبة n .

كما يسمى الحل $Y_n(x)$ الذي ليس له نهاية محدودة (أو أنه غير محدود) عنده $x \rightarrow 0$ بدالة بيسيل من النوع الثاني ذات الرتبة n ، أو دالة نيومان (Neumann function).

ويمكن حل معادلة بيسيل التفاضلية في صورة متسلسلة باستخدام طريقة فروبينوس المشهورة في المعادلات التفاضلية وذلك بكتابتها في الصورة :

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (1)$$

ولحل هذه المعادلة في صورة متسلسلة :

نفرض أن :

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r) x^{k+r-1}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

وبعد سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على الحل y والذي يتكون من حلين:

الحل الأول : يرمز له بالرمز $J_n(x)$ ويسمى دالة بيسيل من النوع الأول ومن الرتبة n

(Bessel function of the first kind and order n)

وصورتها :

$$\begin{aligned} \therefore J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} - \dots \right] \\ &= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^{2r} r!(n+1)(n+2)\dots(n+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \frac{1}{r! \Gamma(n+r+1)} \end{aligned} \quad (2)$$

حيث :

$$\Gamma(n+r+1) = (n+r)! = (n+r)(n+r-1)\dots(n+2)(n+1)$$

ملاحظة : عندما $n=0$ فإن $\Gamma(1)=1$ وتؤول العلاقة (2) إلى :

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (3)$$

وتسمى الدالة $J_0(x)$ دالة بيسل من الرتبة الصفرية وهي تمثل حلاً لمعادلة بيسل في حالة $n=0$ والتي صورتها :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

والتي تسمى معادلة بيسل الصفرية (Zeroth Bessel equation)

الحل الثاني : ويرمز له بالرمز $J_{-n}(x)$ وصورته :

$$\begin{aligned} \therefore J_{-n}(x) &= \frac{x^{-n}}{2^{-n} \Gamma(-n+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(-2n+2)(-2n+4)} \right. \\ &\quad \left. - \dots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{2.4\dots 2r.(-2n+2)\dots(-2n+2r)} + \dots \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \frac{1}{r! \Gamma(-n+r+1)} \end{aligned} \quad (4)$$

وهذا الحل يزول إلى الصفر عندما $-n+r+1=0$ أى عندما $r=n-1$ وذلك لأن $\Gamma(0) = \infty$

ويلاحظ أن : إذا كانت $n=0$ فإن المتسلسلتين J_n, J_{-n} تتطابقان .

وإذا كانت $n=1,2,\dots$ فإن المتسلسلة $J_{-n}(x)$ لا تتواجد ، بمعنى أن :

المتسلسلة أو الحل $J_{-n}(x)$ يتواجد فقط لقيم n غير الصحيحة أى عندما $n \neq 0,1,2,\dots$

وإذا كانت n تمثل عدداً صحيحاً فإنه يمكن إثبات العلاقة الآتية :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

التي تعنى أن J_n, J_{-n} غير مستقلتين خطياً (أى تربطهما علاقة خطية).

الملخص: (1) فى حالة n تمثل عدداً صحيحاً أى $n = 0, 1, 2, \dots$ فإن J_n, J_{-n} تكونان

مرتبطتين خطياً (لأن بينهما علاقة خطية).

(2) فى حالة n لا تمثل عدداً صحيحاً أى $n \neq 0, 1, 2, \dots$ فإن J_n, J_{-n} تكونان مستقلتين خطياً

(أى ليس بينهما علاقة خطية) بمعنى أن الدالتين J_n, J_{-n} تكونان متواجبتان .

ويصبح الحل العام فى حالة قيم n الغير صحيحة هو

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad (5)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

دالة نيومان (أو دالة بسيل من النوع الثانى) $[Y_n(x)]$:

وجدنا أن الحل العام لمعادلة بسيل التفاضلية فى حالة n عدد غير صحيح (أى عندما

$n \neq 0, 1, 2, \dots$ هو :

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

وبوضع :

$$A = C + D \frac{\cos n\pi}{\sin n\pi}$$

$$B = -\frac{D}{\sin n\pi}$$

نحصل على :

$$y = CJ_n(x) + D \left[\frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \right]$$

$$= CJ_n(x) + DY_n(x)$$

حيث :

$$\Psi_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

تسمى دالة نيومان (Neumann's Function) أو دالة بسيل من النوع الثانى من الرتبة n

حيث n عدد غير صحيح $n \neq 0, 1, 2, \dots$.

في حالة إذا كانت n عددا صحيحا ($n = 0, 1, 2, \dots$) :

$$تصبح دالة نيومان $Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$ كمية غير محددة (غير معينة)$$

على الصورة $\frac{0}{0}$ وذلك لأن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0$$

$$\therefore Y_n(x) = \frac{(-1)^n J_n(x) - (-1)^n J_n(x)}{\sin n\pi} = \frac{0}{0}$$

هذه الصورة غير المحددة (أو غير المعينة) يمكن إيجاد قيمتها باستخدام قاعدة لوبيتال . وبذلك فإنه في حالة n عدد صحيح يمكن كتابة :

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{p \rightarrow n} \left[\frac{J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial p} [J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)]}{\frac{\partial}{\partial p} [\sin p\pi]} \end{aligned}$$

والتي يمكن إثبات أنها تكتب في الصورة الآتية والتي حصل عليها العالمان نيومان وفيرر (Neumann & Weber) ، وتعرف بعلاقة نيومان - فييرر

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} \left[\gamma + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right] J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n}}{k!(n+k)!} [\Phi(k) + \Phi(n+k)] \end{aligned}$$

حيث γ يسمى ثابت أويلر (Euler constant) الذي يعرف كالتالي :

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right) = 0.57722$$

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \Phi(0) = 0$$

في حالة $n = 0$: فإنه يمكن إثبات أن دالة نيومان الصفرية تأخذ الصورة الآتية :

$$\Psi_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(r+1)} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \Phi(r) \right],$$

(أنظر مثال (6) بعد ذلك).

أمثلة محلولة:

مثال (1) : أثبت أنه في حالة n تمثل عدداً صحيحاً فإن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

الحل : حيث أن :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \frac{1}{r! \Gamma(n+r+1)}$$

فبالحل ($-n$) محل n في هذه العلاقة نجد أن :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)} \\ = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)} + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}}{r! \Gamma(-n+r+1)}$$

ولكن عندما $r = n - 1$ فإن :

$$\Gamma(-n+r+1) = \Gamma(0) = \infty$$

وبذلك فإن المجموع الأول في الطرف الأيمن يساوى صفراً .

وبوضع $r = n + k$ في المجموع الثاني نحصل على :

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)! \Gamma(k+1)} \\ = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = (-1)^n J_n(x)$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : اثبت أن المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + xy' + 4(x^4 - n^2)y = 0 \quad (1)$$

يمكن أن تتحول إلى معادلة بسيل التفاضلية باستخدام التحويلة $x^2 = t$.

الحل : بالتحويلة المعطاه تتغير المعادلة (1) حيث $y = y(x)$ إلى معادلة جديدة حيث

$$y = y(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\sqrt{t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(2\sqrt{t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(2\sqrt{t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx}$$

$$= \left(2\sqrt{t} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dy}{dt} \right) (2\sqrt{t}) = 4t \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}$$

وتأخذ المعادلة (1) الصورة الآتية :

$$t \left(4t \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right) + \sqrt{t} \left(2\sqrt{t} \frac{dy}{dt} \right) + 4(t^2 - n^2)y = 0$$

وبعد الاختصار نحصل على معادلة بسيل التفاضلية بالصورة

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0$$

وحلها يكون بالصورة :

$$y(t) = AJ_n(t) + BY_n(t)$$

وحيث أن $x^2 = t$ فإن حل المعادلة (1) يأخذ الصورة الآتية :

$$y(x) = AJ_n(x^2) + BY_n(x^2)$$

مثال (3) : بين أن المعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^4 - n^2)y = 0$$

يمكن أن تتحول إلى معادلة بسيل التفاضلية باستخدام التحويل $\lambda x = t$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda \frac{d^2y}{dt^2}$$

وتأخذ المعادلة (1) الصورة الآتية :

$$\frac{t^2}{\lambda^2} \left(\lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\lambda \frac{dy}{dt} \right) + (t^2 - n^2)y = 0$$

وبعد الاختصار نحصل على معادلة بسيل التفاضلية بالصورة :

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0$$

وحلها يكون بالصورة :

$$y(t) = AJ_n(t) + BY_n(t)$$

وحيث أن $\lambda x = t$ فيأخذ حل المعادلة (1) الصورة الآتية :

$$y(x) = AJ_n(\lambda x) + BY_n(\lambda x)$$

مثال (4) : باستخدام تعريف دالة بسيل $J_n(x)$ بالصورة :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r! \Gamma(n+r+1)} \quad (1)$$

$$(i) J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$(ii) J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{علما بان}$$

الحل : بوضع $n = \frac{1}{2}$ فى (1) نحصل على :

$$(i) J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2r}}{r! \Gamma\left(r + \frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} - \dots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{1!\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}}}{2!\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} - \dots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x}\right) \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} [\sin x] = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x = \sqrt{\frac{4}{2\pi x}} \sin x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

حيث مفكوك $\sin x$ يعطى بالصورة :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$(ii) J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2r}}{r!\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1!\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{2!\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} - \dots \\
&= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] \\
&= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x
\end{aligned}$$

حيث مفكوك $\cos x$ يعطى بالصورة :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

مثال (5) : العلاقة بين معادلة بسيل ومعادلة لابلاس

اثبت أن معادلة بسيل التفاضلية

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

يمكن الحصول عليها من معادلة لابلاس $\nabla^2 u = 0$ في الاحداثيات الاسطوانية

(r, ϕ, z)

الحل : معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية هي :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

نفرض أن الحل يعطى بالصورة :

$$u = R(r)\Phi(\phi)Z(z) = R\phi Z$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore R'\Phi Z + \frac{1}{r} R'\Phi Z + \frac{1}{r^2} RZ\Phi'' + R\Phi Z'' = 0 \quad (2)$$

بالقسمة على $R\Phi Z$ فإن (2) تصبح :-

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\therefore \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{Z''}{Z}$$

حيث أن الطرف الأيمن يعتمد على Z فقط والأيسر على r, ϕ فقط .

∴ كل طرف يجب أن يساوى ثابت ، وليكن $(-\lambda^2)$:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \quad (3)$$

$$-\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \quad \therefore Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (4)$$

لفصل المتغيرات فى (3) : بضرب الطرفين فى r^2 نحصل على :

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} \quad (5)$$

وحيث أن الطرف الأيمن يعتمد على Φ فقط والأيسر على r فقط فإن كل طرف يجب أن يساوى ثابت ، ليكن (μ^2)

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = \mu^2 \quad (6)$$

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0 \quad (7)$$

المعادلة (6) [معادلة r] هى :

$$r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0 \quad (8)$$

بوضع $y = R$ ، $x = \lambda r$ ، $\mu = n$

فان المعادلة (8) تؤول إلى :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

وهى معادلة بسيل التفاضلية .

الإثبات :

بوضع $y = R$ ، $x = \lambda r$ ، $\mu = n$ فى (8) نحصل على :

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n^2)y = 0 \quad (9)$$

ولكن

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{rt} = y' \lambda$$

$$\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dr} \right) = \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dy}{dx} \right) \cdot \lambda = \lambda^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 y''$$

بالتعويض في (9) نحصل على :-

$$\left(\frac{x}{\lambda} \right)^2 \cdot \lambda^2 y'' + \frac{x}{\lambda} (\lambda y') + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$\therefore x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (10)$$

وهذا يعنى أن الجزء r فى معادلة لابلاس فى الاحداثيات الاسطوانية يمثل معادلة بسيل التفاضلية (10).

وهو المطلوب .

مثال (6) : أثبت أن الصيغة التكاملية

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \phi) d\phi$$

تحقق معادلة بسيل الصفريّة

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

أى أن $y = J_0(x)$

الحل : حيث أن :

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \phi) d\phi \quad (1)$$

فبالتفاضل بالنسبة إلى x تحت علامة التكامل نحصل على :-

$$y' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [-\cos \phi \sin(x \cos \phi)] d\phi \quad (2)$$

$$y'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [-\cos^2 \phi \cos(x \cos \phi)] d\phi \quad (3)$$

ومن (2) باجراء التكامل بالتجزىء نحصل على :-

$$y' = -\frac{1}{\pi} [\{\sin(x \cos \phi) \cdot \sin \phi\}_0^{\pi}]$$

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{\pi} \{-x \sin \phi \cos(x \cos \phi) \cdot \sin \phi\} d\phi \\
&= -\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \cos(x \cos \phi) d\phi \\
&= -\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) \cos(x \cos \phi) d\phi \\
&= -\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \phi) d\phi + \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \phi \cos(x \cos \phi) d\phi = -xy - xy'' \\
& \hspace{15em} \text{(باستخدام (1) ، (3))}
\end{aligned}$$

$$\therefore y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

وهي معادلة بسيل الصفرية .

ومن ذلك نرى أن $y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cos \phi) d\phi$ تحقق هذه المعادلة والتي حلها هو $J_0(x)$ ،
 أى أن $y = J_0(x)$ هي حل لمعادلة بسيل التفاضلية من الرتبة صفر .

مثال (7) : أثبت أن دالة نيومان (أو دالة بسيل من النوع الثانى) ذات الرتبة الصفرية $Y_0(x)$ تأخذ الصورة الآتية :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(r+1)} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \Phi(r) \right]$$

حيث γ هو ثابت أولير $\gamma = 0.57722$ و $\Phi(r) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}$

$$\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)} = \Phi(r) - \gamma$$

الحل :

فى حالة n عدد صحيح فان تعريف دالة نيومان وصورته :

$$Y_n = \frac{J_n \cos n\pi - J_{-n}}{\sin n\pi}$$

يعطى كمية غير معرفة على الصورة $\frac{0}{0}$ ولذلك يجب استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد قيمة Y_n في هذه الحالة ، وذلك بايجاد قيمة النهاية :

$$\lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p \cos p\pi - J_{-p}}{\sin p\pi}$$

ثم إجراء التفاضل للبسط والمقام بالنسبة إلى p فتصبح تلك النهاية :

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial p} [J_p(x) \cos p\pi - J_{-n}(x)]}{\frac{\partial}{\partial p} [\sin p\pi]}$$

وبوضع $n=0$ (حالة معادلة بسيل الصفرية) فإن :

$$Y_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial J_p}{\partial p} \cos p\pi - \frac{\partial J_{-p}}{\partial p}}{\pi \cos p\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_p}{\partial p} - \frac{\partial J_{-p}}{\partial p} \right]_{p=0} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial J_p}{\partial p} \right]_{p=0} \quad (1)$$

حيث

$$\frac{\partial J_p}{\partial p} = \frac{\partial J_{-p}}{\partial(-p)} = -\frac{\partial J_{-p}}{\partial p}$$

ولإيجاد $\frac{\partial J_p}{\partial p}$: نفاضل المتسلسلة

$$J_p(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r}}{r! \Gamma(p+r+1)}$$

بالنسبة إلى p فنحصل على :

$$\frac{\partial J_p}{\partial p} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r}}{\Gamma(p+r+1)} \right\} \quad (2)$$

وبوضع $\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2r}}{\Gamma(p+r+1)} = G$ فإن :

$$\ln G = (p+2r) \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \ln \Gamma(p+r+1)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى p نحصل على :

$$\frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial p} = \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma'(p+r+1)}{\Gamma(p+r+1)}$$

وعندما $p=0$ فإن :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_{p=0} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{\Gamma(r+1)} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)} \right] \quad (3)$$

ومن (2) ، (3) نحصل على :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J_p}{\partial p} \right|_{p=0} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_{p=0} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(r+1)} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)} \right] \end{aligned}$$

ولكن :

$$\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)} = \Phi(r) - \gamma$$

حيث $\Phi(r) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r}$ و γ هو ثابت أويلر

$$\therefore \left. \frac{\partial J_p}{\partial p} \right|_{p=0} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(r+1)} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma + \Phi(r) \right]$$

وبالتعويض في (1) نحصل على دالة نيومان (أو بسيل من النوع الثاني) الصفرية بالصورة المطلوبة وهي :

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r! \Gamma(r+1)} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma + \Phi(r) \right]$$

وهو المطلوب .

العلاقات التكرارية (Recurrence Relation) لدالة بسيل من النوع الأول $J_n(x)$

باستخدام تعريف دالة بسيل $J_n(x)$ الآتى :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \quad (1)$$

يمكن استنتاج عدد من العلاقات التكرارية ، وهى :

- (i) $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$
- (ii) $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$
- (iii) $x J'_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x)$
- (iv) $x J'_n(x) = -n J_n(x) + x J_{n-1}(x)$
- (v) $J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$
- (vi) $J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$

الاثبات :

لاثبات العلاقة الأولى :

من (1) بضرب الطرفين فى x^n :

$$\therefore x^n J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n+2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)}$$

حيث :

$$\Gamma(n+r+1) = (n+r)!$$

وباجراء التفاضل بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot (2n+2r) x^{2n+2r-1}}{2^{n+2r} r! (n+r) \Gamma(n+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n+2r-1}}{2^{n+2r-1} r! \Gamma(n+r)} \end{aligned}$$

حيث

$$\Gamma(n+r+1) = (n+r)\Gamma(n+r)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] &= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{(n-1)+2r}}{2^{(n-1)+2r} r! \Gamma\{(n-1)+r+1\}} \\ &= x^n J_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (i)$$

اثبات العلاقة الثانية :

من (1) بضرب الطرفين في x^{-n} نحصل على :-

$$x^{-n} J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2^{n+2r} r! \Gamma(n+r+1)}$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة لـ x نحصل على :

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r-1}}{2^{n+2r-1} (r-1)! \Gamma(n+r+1)}$$

حيث أن الحد المناظر لـ $r=0$ يتلاشى فنتبدل $r=0$ بـ $r=1$ وبذلك تبدأ المتسلسلة بالحد $r=1$.

ثم بوضع $r-1=k$ نحصل على مجموع المتسلسلة يبدأ من $k=0$ إلى ∞

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] &= x^{-n} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{n+2r-1}}{2^{n+2r-1} (r-1)! \Gamma(n+r+1)} \\ &= x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{n+2k+1}}{2^{n+2k+1} k! \Gamma(n+k+2)} \\ &= -x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(n+1)+2k}}{2^{(n+1)+2k} k! \Gamma\{(n+1)+k+1\}} \\ &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (ii)$$

لأثبات العلاقة الثالثة :

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \quad \text{العلاقة هي :}$$

ولأثباتها :

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \text{نستخدم العلاقة التكرارية (ii) :}$$

$$\therefore x^{-n} J'_n(x) + J_n(x) \cdot \{-nx^{-n-1}\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$\therefore x^{-n} J'_n(x) = nx^{-n-1} J_n(x) - x^{-n} J_{n+1}(x)$$

وبضرب الطرفين في x^{n+1} نحصل على :

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - J_{n+1}(x) \quad (\text{iii})$$

وهي العلاقة المطلوبة .

اثبات العلاقة الرابعة :

العلاقة هي :

$$xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$$

وإثباتها نستخدم العلاقة التكرارية (i)

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\therefore x^n J'_n(x) + J_n(x) \cdot nx^{n-1} = x^n J_{n-1}(x)$$

$$\therefore x^n J'_n(x) = -nx^{n-1} J_n(x) + x^n J_{n-1}(x)$$

وبضرب الطرفين في x^{-n+1} نحصل على :

$$xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) \quad (\text{iv})$$

اثبات العلاقة الخامسة :

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad \text{العلاقة هي :}$$

ولإثباتها : يجمع العلاقتين التكراريتين (iii) , (iv)

$$\therefore 2xJ'_n(x) = x[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

وبالقسمة على $2x$ نحصل على

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad (\text{v})$$

وهي العلاقة المطلوبة .

لاثبات العلاقة السادسة :

$$J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \quad \text{العلاقة هي :}$$

ولإثباتها : من العلاقتين التكراريتين (iii) , (iv) بالطرح نحصل على :

$$0 = 2nJ_n(x) - x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

$$\therefore 2nJ_n(x) = x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

وبالقسمة على $2n$ نحصل على :

$$J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \quad (vi)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

أمثلة محلولة :

مثال (1) : إذا كان

$$xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) \quad (\text{العلاقة التكرارية الرابعة})$$

فأثبت أن :

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (\text{العلاقة التكرارية الأولى})$$

الحل :

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J'_n(x) + nx^{n-1} J_n(x)$$

$$= x^{n-1}[nJ_n(x) + xJ'_n(x)]$$

$$= x^{n-1}[nJ_n(x) + \{-nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)\}]$$

$$= x^n J_{n-1}(x)$$

مثال (2) : من تعريف دالة بسيل من النوع الأول :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} \quad (1)$$

أثبت العلاقتين التكراريتين :

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \quad (2)$$

$$xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) \quad (3)$$

(العلاقتين الثالثة والرابعة)

الحل :

إثبات الثالثة (2) :

بتفاضل (1) بالنسبة إلى x نحصل على :

$$J'_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \cdot \frac{1}{r!(n+r)!} (n+2r) \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

بضرب الطرفين في x نحصل على :

$$\begin{aligned} xJ'_n(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+2r)}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2r}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \\ &= nJ_n(x) + x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r r}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} \\ &= nJ_n(x) + x \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{(r-1)!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} \end{aligned}$$

حيث أن الحد الثاني في الطرف الأيمن يتلاشى لقيمة $r=0$ ولذا فإن حد $r=0$ يستبدل بـ $r=1$.

والآن : بوضع $r-1=k$ حتى نحصل على المتسلسلة لمجموع من $k=0$ إلى ∞

$$\begin{aligned} \therefore xJ'_n(x) &= nJ_n(x) + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k+1}}{k!(n+1+k)!} \\ &= nJ_n(x) - x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k+1}}{k!(n+1+k)!} \\ &= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

لاشبات العلاقة (3) :

بتفاضل (1) بتلنسبة إلى x وضرب الطرفين في x نحصل على :

$$xJ'_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+2r)}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{-n+2(n+r)}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\
&= -n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!(n+r)!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot 2(n+r)}{r!(n+r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\
&= -nJ_n(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \cdot 2(n+r)}{r!(n+r)(n+r-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} \\
&= -nJ_n(x) + x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1+2r}}{r!(n-1+r)!} \\
&= -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : بين أن :

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right)$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{x} \right)$$

الحل : باستخدام العلاقة التكرارية السادسة

$$J_n(x) = \frac{x}{2n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

$$\therefore J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (1)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \quad (2)$$

بوضع $n = \frac{1}{2}$ في (1) نحصل على :

$$\therefore J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

وحيث أن :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore J_{\frac{3}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x \cos x}{x} \right) \end{aligned}$$

وبوضع $n = -\frac{1}{2}$ فى (2) نحصل على :

$$\begin{aligned} \therefore J_{-\frac{3}{2}}(x) &= -\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{1}{x} \cos x + \sin x \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{x} \right) \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (4) : أثبت أن :

$$(i) J_0'(x) = -J_1(x)$$

$$(ii) J_0''(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)]$$

الحل :

من العلاقة التكرارية الثالثة :

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

بوضع $n = 0$ نحصل على :

$$xJ_0'(x) = -xJ_1(x)$$

$$\therefore J_0'(x) = -J_1(x) \quad (1)$$

ويمكن استخدام هذه العلاقة أيضاً بالصورة

$$J_1(x) = -J_0'(x) \quad (2)$$

أيضا : بتفاضل العلاقة (1) والضرب في 2 نحصل على :

$$2J_0''(x) = -2J_1'(x) \quad (3)$$

وحيث أن :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

فيوضع $n = 1$:

$$\therefore J_1'(x) = \frac{1}{2}[J_0(x) - J_2(x)]$$

بالتعويض في (3) نحصل على :

$$2J_0''(x) = -[J_0(x) - J_2(x)]$$

$$\therefore J_0''(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)]$$

وهو المطلوب ثانيا .

مثال (5) : أثبت أن :

$$(1) \int x J_1(x) dx = -x J_0(x) + \int J_0(x) dx$$

$$(2) \int x^2 J_2(x) dx = -x^2 J_1(x) - 3x J_0(x) + 3 \int J_0(x) dx$$

الحل :

يمكن إثبات هذه العلاقات باستخدام التكامل بالتجزء والعلاقة التكرارية الثانية كالتالي :

$$\begin{aligned} (1) \int x J_1(x) dx &= -x J_0'(x) dx \\ &= -\int x d[J_0(x)] \\ &= -[x J_0(x) - \int J_0(x) dx] \\ &= -x J_0(x) + \int J_0(x) dx \end{aligned}$$

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

العلاقات التكرارية الثانية

$$x^{-n} J_{n+1} = \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n]$$

(1)

$$\begin{aligned} (2) \int x^2 J_2(x) dx &= \int x^3 [x^{-1} J_2(x)] dx \\ &= \int x^3 \left[-\frac{d}{dx} (x^{-1} J_2) \right] dx \\ &= \int x^3 d[-x^{-1} J_1] \\ &= x^3 [-x^{-1} J_1] - \int [-x^{-1} J_1] \cdot (3x^2 dx) \end{aligned}$$

$$= -x^2 J_1(x) + 3 \int x J_1(x) dx \quad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نحصل على :

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 J_2(x) dx &= -x^2 J_1(x) + 3[-x J_0(x) + \int J_0(x) dx] \\ &= -x^2 J_1(x) - 3x J_0(x) + 3 \int J_0(x) dx \end{aligned} \quad (3)$$

مسألة : أثبت أن :

$$\int x^3 J_3(x) dx = -x^3 J_2(x) - 5x^2 J_1(x) - 15x J_0(x) + 15 \int J_0(x) dx$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int x^3 J_3(x) dx &= \int x^5 [x^{-2} J_3(x) dx] \\ &= \int x^5 \left[-\frac{d}{dx} (x^{-2} J_2) \right] dx \\ &= \int x^5 d(-x^{-2} J_2) \\ &= x^5 (-x^{-2} J_2) - \int (-x^{-2} J_2) \cdot (5x^4 dx) \\ &= -x^3 J_2(x) + 5 \int x^2 J_2(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

بالتعويض من (3) [علاقة : $\int x^2 J_2(x) dx$] في (4) نحصل على :

$$\begin{aligned} \int x^3 J_3(x) dx &= -x^3 J_2(x) + 5[-x^2 J_1(x) - 3x J_0(x) + 3 \int J_0(x) dx] \\ &= -x^3 J_2(x) - 5x^2 J_1(x) - 15x J_0(x) + 15 \int J_0(x) dx \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (6) : أثبت أن :

$$J'_n(x) J_{-n}(x) - J'_{-n}(x) J_n(x) = \frac{2 \sin n \pi}{\pi x}$$

الحل :

حيث أن $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ هما حلان لمعادلة بسيل التفاضلية التي صورتها :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (1)$$

فهما يحققان هذه المعادلة

$$y''' = J''_n(x) \quad , \quad y' = J'_n(x) \quad , \quad y = J_n(x) \quad \text{فإذا كانت}$$

فبالتعويض في (1) :

$$\therefore J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0 \quad (2)$$

وبالمثل بوضع $y = J_{-n}(x)$ فإن (1) تأخذ الصورة :

$$J_{-n}''(x) + \frac{1}{x} J_{-n}'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_{-n}(x) = 0 \quad (3)$$

بضرب (2) في $J_{-n}(x)$ ، (3) في $J_n(x)$ والطرح نحصل على :

$$J_n''(x)(J_{-n}(x) - J_{-n}''(x)J_n(x) + \frac{1}{x}[J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'(x)J_n(x)]) = 0 \quad (4)$$

وبوضع

$$\begin{aligned} z &= J_n' J_{-n} - J_{-n}' J_n \\ \therefore z' &= J_n'' J_{-n} + J_n' J_{-n}' - J_{-n}'' J_n' - J_{-n}' J_n'' \\ &= J_n'' J_{-n} - J_{-n}'' J_n \end{aligned}$$

وتزول المعادلة (4) إلى :

$$\therefore z' + \frac{1}{x} z = 0 \quad \therefore \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\therefore \ln z = -\ln x + \ln c = \ln \frac{c}{x} \quad \therefore z = \frac{c}{x}$$

$$\therefore J_n' J_{-n} - J_{-n}' J_n = \frac{c}{x} \quad (5)$$

ولتحديد قيمة c : بمساواة معاملات x^{-1} (أي $\frac{1}{x}$) في الطرفين واستخدام متسلسلات مفكوك

J_n, J_{-n}, \dots وصورها :

$$J_n = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} - \dots, \quad J_n' = \frac{x^{n-1}}{2^n \Gamma(n)} - \dots$$

$$J_{-n} = \frac{x^{-n}}{2^{-n} \Gamma(-n+1)} - \dots, \quad J_{-n}' = \frac{x^{-n-1}}{2^{-n} \Gamma(-n)} - \dots$$

نحصل على :

$$\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-n+1)} - \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n)} = c$$

ولكن :

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)\Gamma(-n) &= n\Gamma(n) \cdot \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} \\ &= -\Gamma(n)\Gamma(-n+1)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-n+1)} + \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(-n+1)} = c$$

$$\therefore c = \frac{2}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} = \frac{2}{\frac{\pi}{\sin n\pi}} = \frac{2\sin n\pi}{\pi}$$

وبالتعويض في (5) نحصل على :

$$J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

وهو المطلوب .

الدالة المولدة لكثيرة الحدود $J_n(x)$:

تسمى الدالة $e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$ بالدالة المولدة لدوال بيسيل من النوع الأول حيث

تكون الرتبة عدداً صحيحاً ، وهي مفيدة جداً في الحصول على خواص تلك الدوال عندما تكون n عدداً صحيحاً ، ومن ذلك يمكن إثبات الخاصية لجميع قيم n .

الإثبات : لاثبات أن

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$$

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = e^{\frac{xh}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2h}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xh}{2}\right)^r}{r!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2h}\right)^k}{k!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xh}{2}\right)^r}{r!} \frac{\left(-\frac{x}{2h}\right)^k}{k!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{r+k} h^{r-k}}{r!k!}$$

وبوضع $r - k = n$ حيث تتغير n من $-\infty$ إلى ∞ فيصبح المجموع في الصورة :

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} h^n}{(n+k)!k!}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \right] h^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة على الدالة المولدة

مثال (1) : باستخدام الدالة المولدة ، أثبت أن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

الحل :

نفرض أن :

$$f(x, h) = e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})}$$

$$f(x, -\frac{1}{h}) = e^{\frac{x}{2}[-\frac{1}{h}+h]} = f(x, h)$$

$$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) \left(-\frac{1}{h}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

وبوضع $k = -n$ نحصل على :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(x) \left(-\frac{1}{h}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

$$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{-n}(x) h^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

بمقارنة معامل h^n في الطرفين نجد أن :

$$(-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x)$$

$$\therefore J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام الدالة المولدة ، أثبت العلاقات التكراريتين الآتيتين :

$$(i) J_n(x) = \frac{x}{2n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

$$(ii) J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(\frac{h-1}{h}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

$$\therefore e^{\frac{x}{2}\left(\frac{h-1}{h}\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = \sum n J_n(x) h^{n+1}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{h^2}\right) \sum J_n(x) h^n = \sum n J_n(x) h^{n-1}$$

$$\therefore \sum \left(\frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{h^2}\right) J_n(x) h^n = \sum n J_n(x) h^{n-1}$$

$$\sum \left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) h^n + \sum \left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) h^{n-2} = \sum n J_n(x) h^{n-1}$$

$$\therefore \sum \left(\frac{x}{2}\right) J_{n-1}(x) h^{n-1} + \sum \left(\frac{x}{2}\right) J_{n+1}(x) h^{n-1} = \sum n J_n(x) h^{n-1}$$

وبمساواة معامل h^{n-1} في الطرفين نحصل على :

$$\left(\frac{x}{2}\right)[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] = nJ_n(x)$$

$$\therefore J_n(x) = \frac{x}{2n}[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]$$

وهو المطلوب أولا :

ولابيات العلاقة الثانية :

حيث أن :

$$e^{\left(\frac{x}{2}\right)\left(h - \frac{1}{h}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

فيتفاضل طرفى هذه العلاقة بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(h - \frac{1}{h}\right)e^{\frac{x}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)} = \sum J'_n(x) h^n$$

$$\therefore \left(h - \frac{1}{h}\right) \sum J_n(x) h^n = 2 \sum J'_n(x) h^n$$

بمساواة معاملى h^n فى الطرفين نجد أن :

$$\sum J_n h^{n+1} - \sum J_n h^{n-1} = 2 \sum J'_n(x) h^n$$

$$\therefore \sum J_{n-1} h^n - \sum J_{n+1} h^n = 2 \sum J'_n(x) h^n$$

$$\therefore J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x)$$

وهو المطلوب ثانيا .

مثال (3) : باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود بسيل $J_n(x)$

أثبت أن :

$$(1) \cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\theta + 2J_4(x) \cos 4\theta + \dots$$

$$= J_0(x) + 2 \sum_{n \text{ even}}^{\infty} J_n(x) \cos n\theta$$

$$(2) \sin(x \sin \theta) = 2J_1(x) \sin \theta + 2J_3(x) \sin 3\theta + 2J_5(x) \sin 5\theta + \dots$$

$$= 2 \sum_{n \text{ odd}}^{\infty} J_n(x) \sin n\theta$$

ومن ذلك أوجد الصيغة التكاملية لدالة بسيل من النوع الأول بالصورة :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

حيث

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

الحل :

باستخدام الدالة المولدة

$$e^{\frac{x}{2}(h-\frac{1}{h})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) h^n$$

فبوضع $h = e^{i\theta}$ نحصل على :

$$e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = e^{ix \sin \theta} = \sum J_n(x) e^{in\theta}$$

$$\therefore \cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$= \sum_{-\infty}^{-1} J_n(x) [\cos n\theta + i \sin n\theta] + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x) [\cos n\theta + i \sin n\theta] + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) [\cos n\theta + i \sin n\theta]$$

$$= J_0(x) + J_{-1}(x) [\cos \theta + i \sin \theta] + J_{-2}(x) [\cos 2\theta + i \sin 2\theta] + \dots$$

$$+ J_1(x) [\cos \theta + i \sin \theta] + J_2(x) [\cos 2\theta + i \sin 2\theta] + \dots$$

$$= J_0(x) + \{ [J_{-1}(x) + J_1(x)] \cos \theta + [J_{-2}(x) + J_2(x)] \cos 2\theta + \dots \}$$

$$+ i \{ [J_1(x) - J_{-1}(x)] \sin \theta + [J_2(x) - J_{-2}(x)] \sin 2\theta + \dots \}$$

$$= J_0(x) + \{ 2J_2(x) \cos 2\theta + \dots \} + i \{ 2J_1(x) \sin \theta + 2J_3(x) \sin 3\theta + \dots \}$$

وقد استخدمنا العلاقة $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية في الطرفين نحصل على :

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\theta + 2J_4(x) \cos 4\theta + \dots$$

(1)

$$\sin(x \sin \theta) = 2J_1(x) \sin \theta + 2J_3(x) \sin 3\theta + \dots \quad (2)$$

والآن لايجاد الصيغة التكاملية لكثيرة حدود بسيل :

بضرباً (1) فى $\cos n\theta$ و (2) فى $\sin n\theta$ والتكامل من 0 إلى π واستخدام النتيجة

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{\pi}{2} & (m = n) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\int_0^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{\pi}{2} & (m = n \neq 0) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (2)$$

الحالة الأولى : إذا كانت n زوجية أو تساوى صفراً فإن :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta d\theta &= \int_0^{\pi} [J_0 + 2J_2 \cos 2\theta + \dots] \cos n\theta d\theta \\ &= 2J_n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi J_n(x) \end{aligned} \quad (m = n \text{ حيث})$$

$$\therefore J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta d\theta \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta) \sin n\theta d\theta = 0$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta) \sin n\theta d\theta \quad (4)$$

بجمع (3), (4) نحصل على :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(x \sin \theta) \cos n\theta + \sin(x \sin \theta) \sin n\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \end{aligned} \quad (I)$$

الحالة الثانية : إذا كانت n فردية فإن :

$$\int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta d\theta = \int_0^{\pi} [J_0 + 2J_2 \cos 2\theta + \dots] \cos n\theta d\theta = 0$$

(حيث $m \neq n$)

$$\therefore 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta d\theta \quad (5)$$

أيضاً :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta) \sin n\theta d\theta &= \int_0^{\pi} [2J_1 \sin \theta + \dots] \sin n\theta d\theta \\ &= 2J_n \cdot \frac{\pi}{2} = \pi J_n(x) \end{aligned}$$

(حيث $m = n \neq 0$)

$$\therefore J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \theta) \sin n\theta d\theta \quad (6)$$

بجمع (5) , (6) نحصل على :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos n\theta + \sin(x \sin \theta) \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (I) \end{aligned}$$

وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة (I) سواء كانت n زوجية أو تساوى صفر أو كانت n فردية .

صيغ التعامد والعيارية لدوال بيسيل :

إذا كانت λ, μ ثابتين مختلفين فإنه يمكن إثبات أن :

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = \frac{\mu J_n(\lambda) J_n'(\mu) - \lambda J_n(\mu) J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \quad (I)$$

حيث $\lambda \neq \mu$.

الصيغة (I) تسمى صيغة العيارية (normalization) لدالة بيسيل وإذا كانت λ, μ أى جذرين مختلفين للمعادلة :

$$R J_n(x) + S x J_n'(x) = 0$$

حيث R, S ثابتان ، فإنه يمكن إثبات العلاقة :

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0 \quad (II)$$

حيث $\mu \neq \lambda$. وتسمى الصيغة (II) بصيغة التعامد (orthogonality) لدالة بسيل .

إثبات العلاقة (I) [صيغة العيارية لدوال بسيل] :

معادلة بسيل التفاضلية يمكن كتابتها بالصورة :

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (r^2 - n^2)y = 0, \quad n \geq 0 \quad (1)$$

إذا تغيرت r إلى λx حيث λ ثابت فإن تلك المعادلة تصبح :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad (2)$$

الإثبات :

$$\therefore x = \frac{r}{\lambda} \quad \leftarrow r = \lambda x \quad \text{بوضع}$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} y'$$

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{dy'}{dr} = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d(\lambda x)} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2} y''$$

بالتعويض في (1) نحصل على :

$$\lambda^2 x^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} y'' \right) + \lambda x \cdot \left(\frac{1}{\lambda} y' \right) + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0$$

$$\therefore x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0$$

وهي المعادلة (2)

بالمثل : إذا كانت $r = \mu x$ فإن المعادلة (1) تصبح

$$x^2 y'' + xy' + (\mu^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad (3)$$

الدالة $y_1 = J_n(\lambda x)$ تحقق المعادلة (2)

الدالة $y_2 = J_n(\mu x)$ تحقق المعادلة (3)

$$\therefore x^2 y_1'' + xy_1' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y_1 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 y_2'' + xy_2' + (\mu^2 x^2 - n^2)y_2 = 0 \quad (5)$$

بضرب (4) في y_2 ، (5) في y_1 والطرح نحصل على :

$$\therefore x^2 [y_2 y_1'' - y_1 y_2''] + x [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) x^2 y_1 y_2$$

وبالقسمة على x نحصل على :

$$x \cdot \frac{d}{dx} [y_2 y_1' - y_1 y_2'] + [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) x y_1 y_2$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \{x [y_2 y_1' - y_1 y_2']\} = (\mu^2 - \lambda^2) x y_1 y_2$$

وبالتكامل نحصل على

$$x [y_2 y_1' - y_1 y_2'] = (\mu^2 - \lambda^2) \int x y_1 y_2 dx$$

وبكتابة $y_1 = J_n(\lambda x)$, $y_2 = J_n(\mu x)$ والقسمة على $(\mu^2 - \lambda^2)$ نحصل على :

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = \frac{x [\lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x) - \mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x)]}{\mu^2 - \lambda^2} \quad (6)$$

وبأخذ حدود التكامل من 0 إلى 1 نحصل على

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = \frac{[\lambda J_n(\mu) J_n'(\lambda) - \mu J_n(\lambda) J_n'(\mu)]}{\mu^2 - \lambda^2} \quad (7)$$

وهي الصيغة المطلوبة .

إثبات العلاقة (II) [صيغة التعامد لنوال بيسل] :

حيث أن λ, μ هما جذران للمعادلة

$$R J_n(x) + S x J_n'(x) = 0$$

فإن :

$$R J_n(\lambda) + S \lambda J_n'(\lambda) = 0 \quad (8)$$

$$R J_n(\mu) + S \mu J_n'(\mu) = 0 \quad (9)$$

$$R J_n(\lambda) = -S \lambda J_n'(\lambda) \quad \text{من (8)}$$

$$R J_n(\mu) = -S \mu J_n'(\mu) \quad \text{ومن (9)}$$

وبالضرب نحصل على :

$$-RS \lambda J_n(\mu) J_n'(\lambda) = -RS \mu J_n(\lambda) J_n'(\mu)$$

$$\therefore \lambda J_n(\mu) J_n'(\lambda) = \mu J_n(\lambda) J_n'(\mu)$$

$$\therefore \lambda J_n(\mu) J_n'(\lambda) - \mu J_n(\lambda) J_n'(\mu) = 0$$

وبالتعويض في (7) نحصل على :

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0$$

وهي العلاقة المطلوبة .

مثال : أثبت أن

$$\int_0^a J_n(\lambda r) J_n(\mu r) . r dr = 0 \quad (\text{صيغة التعامد})$$

حيث λ, μ هما جذران مختلفان للمعادلة $J_n(xa) = 0$

الحل :

حيث أن $J_n(x)$ هي حل لمعادلة بسيل التي صورتها :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1)$$

$$r = \frac{x}{\lambda} \quad \leftarrow x = \lambda r \quad \text{فبوضع}$$

$$y' = \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dr}, \quad y'' = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 y}{dr^2}$$

وتؤزل المعادلة (1) إلى :

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{\lambda r} \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 r^2}\right) y = 0$$

$$\therefore r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n^2) y = 0 \quad (2)$$

وبوضع $x = \mu r$ نحصل على المعادلة :

$$\therefore r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (\mu^2 r^2 - n^2) y = 0 \quad (3)$$

$$y = J_n(\mu r) = J_\mu \quad \text{في (3)} \quad , \quad y = J_n(\lambda r) = J_\lambda \quad \text{في (2)}$$

$$\therefore r^2 \frac{d^2 J_\lambda}{dr^2} + r \frac{dJ_\lambda}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n^2) J_\lambda = 0 \quad (4)$$

$$r^2 \frac{d^2 J_\mu}{dr^2} + r \frac{dJ_\mu}{dr} + (\mu^2 r^2 - n^2) J_\mu = 0 \quad (5)$$

بضرب (4) في $\left(\frac{1}{r}J_\mu\right)$ و (5) في $\left(\frac{1}{r}J_\lambda\right)$ والطرح نحصل على :

$$\therefore [rJ_\mu J_\lambda'' - rJ_\lambda J_\mu''] + [J_\mu J_\lambda' - J_\lambda J_\mu'] + (\lambda^2 - \mu^2)rJ_\lambda J_\mu = 0$$

$$\frac{d}{dr} \{r[J_\mu J_\lambda' - J_\lambda J_\mu']\} + (\lambda^2 - \mu^2)rJ_\lambda J_\mu = 0$$

بالتكامل بالنسبة إلى r من 0 إلى a نحصل على :

$$\{r[J_\mu J_\lambda' - J_\lambda J_\mu']\} \Big|_0^a + \int_0^a (\lambda^2 - \mu^2)rJ_\lambda J_\mu dr = 0$$

ولكن :

$$J_\lambda \Big|_a = J_n(\lambda a) = 0, \quad J_\mu \Big|_a = J_n(\mu a) = 0, \quad \dots$$

$$\therefore (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^a rJ_\lambda J_\mu dr = 0$$

$$\therefore \int_0^a rJ_\lambda J_\mu dr = 0, \quad (\lambda^2 - \mu^2) \neq 0$$

$$\therefore \int_0^a rJ_n(\lambda r)J_n(\mu r)dr = 0$$

وهو المطلوب .

رابعاً : كثيرة حدود هيرميت Hermite polynomial

معادلة هيرميت التفاضلية من الرتبة n (حيث $n = 0, 1, 2, \dots$) هي :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة يعطى بدلالة كثيرة حدود هيرميت $H_n(x)$ وتعرف بصيغة رودريج الآتية :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n (e^{-x^2})}{dx^n} = (-1)^n e^{x^2} D^n (e^{-x^2}) \quad (1)$$

ويمكن تلخيص أهم خواص كثيرة حدود هيرميت كالتالى :

(1) الدالة المولدة (Generating function)

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود هيرميت بالصورة :

$$e^{2hx - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n \quad (2)$$

وهى صيغة مفيدة فى الحصول على خواص الدالة $H_n(x)$

(2) الصيغ التكرارية (Recurrence formulas)

هناك العديد من الصيغ التكرارية التى تتحقق بواسطة كثيرة حدود هيرميت ، وأهم تلك الصيغ :

$$(1) H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

$$(2) H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

(3) الخاصية التعامدية (Orthogonal property)

يمكن إثبات الخاصية الآتية لكثيرة حدود هيرميت :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad (3)$$

حيث $m \neq n$

ومنها يتضح أن كثيرة حدود هيرميت تكون متعامدة بالنسبة للدالة e^{-x^2} التى تسمى دالة الكثافة (density function) .

(4) الخاصية العيارية (Normalization property)

فى حالة $m = n$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

وهي الخاصية العيارية لدوال هيرميت .

ويمكن جمع الخاصيتين التعمدية والعيارية في خاصية واحدة كالتالي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

حيث δ_{mn} دلتا كرونكر .

الحل العام لمعادلة هيرميت التفاضلية :

يمكن ايجاد الحل العام لمعادلة هيرميت على هيئة متسلسلة بطريقة فوربينوس .

حيث أن معادلة هيرميت التفاضلية هي :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad (1)$$

نفرض الحل في صورة متسلسلة كالاتي :

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum a_r (k+r) x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum a_r (k+r)(k+r-1) x^{k+r-2}$$

وبعد سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) نحصل على الحل الكامل لمعادلة هيرميت التفاضلية (1) بالصورة

$$y = AH_1(x) + BH_2(x)$$

حيث A, B ثابتان اختياران

$$H_1(x) = 1 - \frac{2n}{2!} x^2 + \frac{2^2 n(n-2)}{4!} x^4 - \dots$$

$$+ \frac{(-1)^r 2^r}{2r!} n(n-2)\dots(n-2r+2) x^{2r} + \dots$$

$$H_2(x) = x - \frac{2(n-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(n-1)(n-3)}{5!} x^5 - \dots$$

$$+ \frac{(-1)^r 2^r (n-1)(n-3)\dots(n-2r+1)}{(2r+1)!} x^{2r+1} + \dots$$

وهذا الحل العام يرمز له بالرمز $H_n(x)$ ويسمى بكثيرة حدود هيرميت

(Hermite polynomial)

$$\therefore H_n(x) = AH_1(x) + BH_2(x)$$

مثال (1) : باستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرميت

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

أثبت أن $H_n(x)$ تعرف بالعلاقة :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (\text{صيغة رودريج})$$

الحل :

حيث أن :

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n = f(x, h)$$

لكل قيم n الصحيحة وكل قيم x الحقيقية .

$$f(x, h) = e^{x^2-(x-h)^2} = e^{x^2} e^{-(x-h)^2}$$

$$= \frac{H_0(x)}{0!} + \frac{H_1(x)}{1!} h + \frac{H_2(x)}{2!} h^2 + \dots + \frac{H_n(x)}{n!} h^n + \dots$$

$$\left[\frac{\partial^n f(x, h)}{\partial h^n} \right]_{h=0} = \frac{H_n(x)}{n!} n! = H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial h^n} e^{-(x-h)^2} \right]_{h=0} e^{x^2} \quad (1)$$

وبوضع $x-h=p$ أى $h=x-p=0$ عندما $h=0$ فإن $x=p$.

$$\therefore \frac{\partial}{\partial h} = -\frac{\partial}{\partial p}, \dots, \frac{\partial^n}{\partial h^n} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial h^n} \left[e^{-(x-h)^2} \right] = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[e^{-p^2} \right]$$

$$\therefore \left[\frac{\partial^n}{\partial h^n} e^{-(x-h)^2} \right]_{h=0} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-x^2}) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (2)$$

من (1), (2) نحصل على :

$$H_n(x) = e^{x^2} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (I)$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : باستخدام التعريف (1) فى مثال (1) وباستخدام الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرميت e^{2hx-h^2} احسب قيم دوال هيرميت الآتية :

$$H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$$

الحل :

أولا : من التعريف (1) : بأخذ $n = 0, 1, 2, 3$ نحصل على :

n = 0 :

$$H_0(x) = e^{x^2} \cdot (-1)^0 \frac{d^0}{dx^0} (e^{-x^2}) = e^{x^2} \cdot (1) e^{-x^2} = 1$$

n = 1 :

$$H_1(x) = e^{x^2} \cdot (-1) \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) = e^{x^2} \cdot (-1)(-2x) \cdot e^{-x^2} = 2x$$

n = 2 :

$$\begin{aligned} H_2(x) &= e^{x^2} \cdot (-1)^2 \frac{d^2}{dx^2} (e^{-x^2}) = e^{x^2} \cdot (1) \frac{d}{dx} [-2xe^{-x^2}] \\ &= e^{x^2} [-2x \cdot (-2x)e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot (-2)] \\ &= e^{x^2} [4x^2 - 2] e^{-x^2} = 4x^2 - 2 \end{aligned}$$

n = 3 :

$$\begin{aligned} H_3(x) &= e^{x^2} \cdot (-1)^3 \frac{d^3}{dx^3} (e^{-x^2}) \\ &= e^{x^2} \cdot (-1) \cdot \frac{d}{dx} [(4x^2 - 2)e^{-x^2}] \\ &= e^{x^2} \cdot (-1) \cdot [(4x^2 - 2) \cdot (-2x)e^{-x^2} + e^{-x^2} \cdot (8x)] \\ &= e^{x^2} [8x^3 - 4x - 8x] e^{-x^2} = 8x^3 - 12x \end{aligned}$$

ثانيا : استخدام الدالة المولدة :

$$\begin{aligned} e^{2hx-h^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n \\ &= H_0(x) + H_1(x)h + \frac{H_2(x)}{2!} h^2 + \frac{H_3(x)}{3!} h^3 + \dots \end{aligned}$$

ولكن :

$$\begin{aligned} e^{2hx-h^2} &= 1 + (2hx - h^2) + \frac{(2hx - h^2)^2}{2!} + \frac{(2hx - h^2)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + (2x)h + (2x^2 - 1)h^2 + \left(\frac{4x^3 - 6x}{3} \right) h^3 + \dots \end{aligned}$$

بمقارنة المتسلسلتين نحصل على :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : أثبت العلاقات التكرارية الآتية لكثيرات حدود هيرميت :

$$(i) H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

$$(ii) 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$$

$$(iii) H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

الحل :

باستخدام الدالة المولدة

$$e^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n$$

أولا : بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$2he^{2hx-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

$$\therefore 2h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x) h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2H_n(x) h^{n+1}}{n!}$$

بمساواة معاملات h^n في الطرفين نحصل على :

$$\frac{H'_n(x)}{n!} = \frac{H'_n(x)}{n(n-1)!} = \frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

$$\therefore H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (i)$$

وهو المطلوب أولا .

ثانياً : بالتفاضل جزئياً بالنسبة لـ h فى كلا طرفى علاقة الدالة المولدة نحصل على :

$$2(x-h)e^{2hx-h^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \cdot nh^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} h^{n-1}$$

حيث الحد المناظر لـ $n=0$ يتلاشى فى الطرف الأيمن .

$$\therefore 2(x-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} h^{n-1}$$

$$\therefore 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} h^{n-1}$$

بمساواة معاملات h^n فى الطرفين نجد ان :

$$2x \frac{H_n(x)}{n!} - 2 \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{(n)!}$$

$$\therefore 2x \frac{H_n(x)}{n(n-1)!} - 2 \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n(n-1)!}$$

بضرب الطرفين فى $n(n-1)!$

$$\therefore 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \quad (ii)$$

وهو المطلوب ثانياً :

ثالثاً : بحذف $H_{n-1}(x)$ بين (i), (ii) نحصل على :

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad \text{من (i) :}$$

$$2xH_n(x) - H_{n+1}(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad \text{ومن (ii) :}$$

فبمساواة الطرفين :

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad (iii)$$

وهو المطلوب ثالثاً .

مثال (4) : أثبت أن $y = H_n(x)$ هى حل لمعادلة هيرميت التفاضلية .

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

وذلك باستخدام العلاقات التكرارية لكثيرة الحدود $H_n(x)$.

الحل : من العلاقة التكرارية (iii) :

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

بتفاضل كل من الطرفين بالنسبة لـ x نحصل على :

$$H''_n(x) = 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - H_{n+1}'(x) \quad (1)$$

وباستخدام العلاقة التكرارية (i) :

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

ووضع $(n+1)$ مكان n نحصل على :

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$$

وبالتعويض في (1) :

$$\therefore H''_n(x) = 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

$$\therefore H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

وهي معادلة هيرميت التفاضلية التي صورتها

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ومن ذلك نرى أن $y = H_n(x)$ هي حل لمعادلة هيرميت التفاضلية لأنها تحققها .

وهو المطلوب .

مثال (5) : أثبت الخاصية العيارية التعامدية لكثيرة حدود هيرميت بالصورة :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

حيث δ_{mn} هي دلتا كرونكر ، وتعرف بالصورة :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

الحل :

أولا : إثبات الخاصية العيارية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_n dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

باستخدام الدالة المولدة نحصل على :

$$e^{2hx - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n, \quad e^{2tx - t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} t^m$$

بضرب العلاقتين نحصل على :

$$e^{2tx - h^2 + 2x - t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_m(x)H_n(x)}{m!n!} t^m h^n$$

بضرب الطرفين في e^{-x^2} وإجراء التكامل من $-\infty$ إلى ∞ نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(x+t+h)^2 - 2th]} dx = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m h^n}{m!n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x) dx$$

الطرف الأيسر يساوي :

$$e^{-2th} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+t+h)^2} dx$$

$$= e^{2th} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{2th} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2th)^m}{m!}$$

$$du = dx \quad \leftarrow \quad u = x + t + h$$

حيث

أيضاً :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m t^m h^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m h^n}{m!n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx$$

بمساواة المعاملات في الطرفين نحصل على :

$$\sqrt{\pi} 2^m h^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx$$

وبوضع $m = n$ فإن :

$$\sqrt{\pi} 2^n h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx$$

بمقارنة معاملات h^n :

$$\therefore \sqrt{\pi} 2^n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

وهي الخاصية العيارية

ولاثبات الخاصية التعامدية :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \quad \text{حيث } m \neq n$$

حيث أن $H_m(x), H_n(x)$ تحقق معادلة هيرميت التفاضلية فإن :

$$H_m'' - 2xH_m' + 2mH_m = 0 \quad (1)$$

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \quad (2)$$

(معادلة هيرميت التفاضلية : $y'' - 2xy' + 2ny = 0$)

والآن : بكتابة :

$$y_m = e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)$$

$$y_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

حيث y_m, y_n دوال هيرميت Hermite functions ، بينما $H_m(x), H_n(x)$ كثيرات

حدود هيرميت Hermite polynomials

$$\therefore H_m = y_m e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore H_m' = y_m' e^{\frac{x^2}{2}} + xy_m e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$H_m'' = y_m'' e^{\frac{x^2}{2}} + 2xy_m' e^{\frac{x^2}{2}} + y_m(1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$$

بالتعويض في (1) والاختصار نحصل على :

$$y_m'' + (2m+1-x^2)y_m = 0 \quad (3)$$

$$H_n = y_n e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{أيضا فإن :}$$

$$\therefore H_n' = y_n' e^{\frac{x^2}{2}} + xy_n e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore H_n'' = y_n'' e^{\frac{x^2}{2}} + 2xy_n' e^{\frac{x^2}{2}} + y_n(1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}$$

بالتعويض في (2) والاختصار نحصل على :

$$y_n'' + (2n+1-x^2)y_n = 0 \quad (4)$$

بضرب (3) في y_n و (4) في y_m والطرح نحصل على :

$$y_n y_m'' - y_m y_n'' = 2(m - n) y_m y_n$$

$$\therefore \frac{d}{dx} [y_n y_m' - y_m y_n'] = 2(m - n) y_m y_n$$

بالتكامل من $-\infty$ إلى $+\infty$ واعتبار أن $y_n(x) = y_m(x) \rightarrow 0$ عندما $|x| \rightarrow \infty$ لكل قيم m, n الصحيحة فإن :

$$y_n y_m' - y_m y_n' \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2(m - n) \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n dx$$

$$\therefore 0 = 2(m - n) \int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n dx = 0 \quad \text{وفى حالة } m \neq n \text{ فإن :}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = 0$$

وهى الخاصية التعامدية .

مثال (6) : أثبت العلاقات الآتية :

$$(i) \frac{d^m}{dx^m} [H_n(x)] = \frac{2^m n!}{(n - m)!} H_{n-m}(x) , \quad n > m$$

$$(ii) H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} [2^{n-1} n! \delta_{m, n-1} + 2^n (n + 1)! \delta_{n+1, m}]$$

$$\delta_{n+1, m} = \delta_{n, m-1} \quad \text{حيث :}$$

الحل :

إثبات (i) : من العلاقة التكرارية :

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x) \quad (1)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} [H_n(x)] = 2n H_{n-1}(x)$$

$$\therefore \frac{d^2}{dx^2} [H_n(x)] = 2n \frac{d}{dx} [H_{n-1}(x)] = 2n H_{n-1}'(x)$$

$$\begin{aligned}
&= 2n[2(n-1)H_{n-2}(x)] \\
&= 2^2 n \cdot (n-1)H_{n-2}(x) \quad (1)
\end{aligned}$$

(حيث استخدمنا العلاقة التكرارية (1) ووضعنا $(n-1)$ بدلا من n) بالمثل يمكن إثبات أن:

$$\frac{d^3}{dx^3}[H_n(x)] = 2^3 \cdot n(n-1)(n-2)H_{n-3}(x) \quad (2)$$

وهكذا حتى نصل إلى التفاضل m فنحصل على :

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m}[H_n(x)] &= 2^m \cdot n(n-1)\dots(n-m+1)H_{n-m}(x) \\
&= 2^m \frac{n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x), \quad n > m
\end{aligned}$$

إثبات (ii) : باستخدام الدالة المولدة :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} h^n &= e^{2hx-h^2} = e^{2hx} e^{-h^2} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n h^n}{n!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^{2n}}{n!} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} h^2
\end{aligned}$$

بمساواة معامل $\frac{h^n}{n!}$ في كلا الطرفين نحصل على :

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

وهي صورة مفيدة لكثيرة لحدود هيرميت $H_n(x)$.

وباستبدال x بـ $-x$ في هذه الصورة نحصل على :

$$\begin{aligned}
H_n(-x) &= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n! (-2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k (-1)^{n-2k} n! (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}$$

$$= (-1)^n H_n(x)$$

وهو المطلوب ثانيا .

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

إثبات العلاقة (iii) :

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d}{dx} [H_n(x) H_m(x)] dx$$

(باجراء التكامل بالتجزىء)

$$\therefore I = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H'_n H_m + H_n H'_m] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [2n H_{n-1} H_m + 2m H_n H_{m-1}] dx$$

(باستخدام العلاقة التكرارية : $H'_n = 2n H_{n-1}$)

$$\therefore I = n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1} H_m dx + m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_{m-1} dx$$

$$= n \sqrt{\pi} 2^{n-1} (n-1)! \delta_{m,n-1} + m \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m-1}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \right)$$

(باستخدام العلاقة العيارية التعامدية :

ولما كانت $\delta_{n,m-1} = \delta_{n+1,m}$ فإن :

$$\therefore I = \sqrt{\pi} [2^{n-1} n! \delta_{m,n-1} + 2^n (n+1)! \delta_{n+1,m}]$$

وهو المطلوب ثالثا .

مثال (7) : اثبت أن المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (\lambda - x^2) \psi = 0$$

تؤول إلى معادلة هيرميت التفاضلية عند استخدام التعويض التالي :

$$\psi = y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

الحل :

$$\psi = e^{-\frac{x^2}{2}} y$$

حيث أن :

$$\therefore \frac{d\psi}{dx} = e^{-\frac{x^2}{2}} y' - y x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore \frac{d^2\psi}{dx^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} y'' - y x e^{-\frac{x^2}{2}} - \left[y x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) + e^{-\frac{x^2}{2}} (y + x y') \right]$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} [y'' - y x + y x^2 - y - y x]$$

بالتعويض بهذه المعادلة فى المعادلة التفاضلية الاصلية مع استخدام التعويض

$$\psi = y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ نحصل على}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} [y'' - 2y x + y x^2 - y] + (\lambda - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0$$

بحذف $e^{-\frac{x^2}{2}}$ من المعادلة الصفرية السابقة نحصل على

$$y'' - 2y x + y x^2 - y + (\lambda - x^2)y = 0$$

والتي تؤول إلى :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y - y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + (\lambda - 1)y = 0$$

وبوضع $2n = \lambda - 1$ ، فإن هذه المعادلة تؤول إلى معادلة هيرميت بالصورة :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

وهو المطلوب .

خامسا : كثيرة حدود لاجير (Laguerre polynomial)

تسمى المعادلة التفاضلية التي صورتها :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

حيث $n = 0, 1, 2, \dots$

بمعادلة لاجير التفاضلية (Laguerre Equation).

ويعطى الحل العام لتلك المعادلة بدلالة كثيرة حدود تسمى كثيرة حدود لاجير (Laguerre polynomial) من الرتبة n ، وتعرف بالعلاقة :

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = e^x D^n (x^n e^{-x})$$

وتعرف تلك الصيغة بصيغة رودريج لكثيرة حدود لاجير .

أهم خواص كثيرة حدود لاجير :

(1) الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجير :

$$\frac{e^{-\frac{xh}{1-h}}}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

تكتب بالصورة

(2) العلاقات التكرارية :

ومن اهم تلك العلاقات :

$$(i) L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

$$(ii) L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$(iii) xL'_n(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

$$(iv) xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

العلاقة الأخيرة هي صورة معادلة لاجير التفاضلية بوضع $y = L_n(x)$.

(3) الخاصية التعامدية العيارية (Orthonormalization propert.)

وصورتها :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (n!)^2 \delta_{mn}$$

$$\delta_{mi} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

حيث :

الحل العام لمعادلة لاجير التفاضلية :

يمكن ايجاد الحل العام لمعادلة لاجير التفاضلية

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad (1)$$

في صورة متسلسلة باستخدام طريقة فوربينوس .

حيث نفرض أن الحل في صورة متسلسلة بالصورة الآتية :

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r)x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}$$

وبعد سلسلة من الحسابات المطولة (تعطى كمسألة) وفي حالة n عدد صحيح موجب ، فإن حل

معادلة لاجير التفاضلية يسمى كثيرة حدود لاجير من الرتبة n ويرمز له بالرمز $L_n(x)$

وصورته :

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^2 - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right]$$

ويكون حل معادلة لاجير التفاضلية في تلك الحالة هو :

$$y = AL_n(x)$$

حيث A ثابت اختياري .

أمثلة محلولة :

مثال (1) : باستخدام صورة كثيرة حدود لاجير

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^2 - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right]$$

أوجد قيم $L_n(x)$ حيث $n = 0, 1, 2, 3$ وكذلك قيمة $L_n(0)$ أي :

$$L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_n(0)$$

الحل :

$$L_0(x) = (-1)^0 [x^0] = 1$$

$$L_1(x) = (-1) \left[x - \frac{1^2}{1!} x^0 \right] = (-1)[x - 1] = 1 - x$$

$$L_2(x) = (-1)^2 \left[x^2 - \frac{2^2}{1!} x + \frac{2^2 \cdot 1^2}{2!} x^0 \right] = [x^2 - 4x + 2]$$

$$L_3(x) = (-1)^3 \left[x^3 - \frac{3^2}{1!} x^2 + \frac{3^2 \cdot 2^2}{2!} x + \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{3!} x^0 \right]$$

$$= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$$

$$L_n(0) = (-1)^n [0 + (-1)^n n!] = n!$$

مثال (2): أثبت أن الصورة التفاضلية لكثيرة حدود لاجير تعطى بصورة رودريج الآتية :
حيث n عدد صحيح موجب ، x عدد حقيقي موجب

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

ومن ذلك أحسب كثيرات الحدود :

$$L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$$

الحل: باستخدام صورة الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجير نجد أن :

$$\therefore (1-h)^{-1} e^{(1-\frac{1}{1-h})x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

$$\therefore (1-h)^{-1} e^x e^{-\frac{x}{1-h}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n \quad (1)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى h وذلك عدد n من المرات باستخدام نظرية ليبنتز نحصل على :

$$e^x \frac{d^n}{dh^n} \left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}} \right] = L_n(x) + L_{n+1}(x) \cdot h + L_{n+2}(x) \cdot h^2 + \dots \quad (2)$$

حيث أن كل الحدود حتى الحد المشتمل على h^{n-1} تتلاشى عندما نفاضل n من المرات .
والآن :

$$\frac{d}{dh} \left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}} \right] = \frac{1-x-h}{(1-h)^3} e^{-\frac{x}{1-h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} \left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}} \right] = (1-x)e^{-x} = \frac{d}{dx} (xe^{-x})$$

وبالمثل فإن :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d^2}{dh^2} \left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}} \right] = \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{-x})$$

وبوجه عام فإن :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d^n}{dh^n} \left[(1-h)^{-1} e^{-\frac{x}{1-h}} \right] = \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

وبالتالى فعندما $h \rightarrow 0$ فإن (2) تعطى :

$$e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = L_n(x)$$

وهو المطلوب .

ولإيجاد كثيرات الحدود المطلوبة :

$$L_0(x) = e^x (x^0 e^{-x}) = 1$$

$$L_1(x) = e^x \frac{d}{dx} (x e^{-x}) = 1 - x$$

$$L_2(x) = e^x \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{-x}) = 2 - 4x + x^2$$

$$L_3(x) = e^x \frac{d^3}{dx^3} (x^3 e^{-x}) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

مثال (3) : أكتب كثيرة الحدود التالية :

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 5$$

بدلالة كثيرات حدود لاجير .

الحل : حيث أن :

$$\therefore L_0 = 1, L_1(x) = 1 - x, L_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$\therefore x^2 = L_2 + 4x - 2$$

(1)

$$\therefore 3x^2 = 3L_2 + 12x - 6$$

$$\therefore L_1(x) = 1 - x \quad \therefore x = 1 - L_1, \quad (2)$$

وتصبح معادلة (1) :

$$3x^2 = 3L_2 + 12(1 - L_1) - 6$$

العدد 6 يمكن كتابته $6L_0$ ، العدد $12L_0 = 12$ ، فنحصل على :

$$3x^2 = 3L_2 + 12 - 12L_1 - 6 = 3L_2 - 12L_1 + 6$$

$$3x^2 = 3L_2 - 12L_1 + 6L_0 \quad (3)$$

وايضاً الحد $4x$ الموجود في $f(x)$ يمكن كتابته على الشكل الآتى :

$$4x = 4(1 - L_1) = 4 - 4L_1$$

وبكتابة العدد 4 بالصورة $4L_0$:

$$\therefore 4x = 4L_0 - 4L_1 \quad (4)$$

أيضاً : العدد 5 في $f(x)$ يمكن كتابته بالصورة $5L_0$ وهكذا يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل الآتى :

$$f(x) = (3L_2 - 12L_1 + 6L_0) + (4L_0 - 4L_1) + (5L_0)$$

$$= 3L_2 - 16L_1 + 15L_0$$

مثال (4) : أثبت أن كثيرة حدود لاجير $L_n(x)$ تكون متعامدة في الفترة $(0, \infty)$ بالنسبة إلى الدالة e^{-x} والتي تسمى دالة الوزن أو الكثافة (Weight function).

الحل :

من معادلة لاجير التفاضلية ، حيث أن كثيرتى حدود لاجير L_m, L_n تحققان هذه المعادلة

فإن :

$$xL_m'' + (1 - x)L_m' + mL_m = 0 \quad (1)$$

$$xL_n'' + (1 - x)L_n' + nL_n = 0 \quad (2)$$

بضرب (1) في L_n ، (2) في L_m والطرح نجد أن :

$$x(L_nL_m'' - L_mL_n'') + (1 - x)[L_nL_m' - L_mL_n'] = (n - m)L_mL_n$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[L_nL_m'' - L_mL_n''] + \frac{1-x}{x}[L_nL_m' - L_mL_n'] = \frac{n-m}{x}L_mL_n$$

بالضرب في عامل التكامل :

$$e^{\int \frac{(1-x)}{x} dx} = e^{\ln x - x} = x e^{-x}$$

فإن العلاقة السابقة تصبح :

$$\frac{d}{dx} \{x e^{-x} [L_n L'_m - L_m L'_n]\} = (n - m) e^{-x} L_m L_n$$

وبالتكامل من 0 إلى ∞ نحصل على :

$$(n - m) \int_0^{\infty} e^{-x} L_m L_n dx = x e^{-x} [L_n L'_m - L_m L'_n] \Big|_0^{\infty} = 0$$

ولذلك فإذا كانت $m \neq n$ فإن :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = 0$$

وهي العلاقة التعامدية لكثيرات حدود لاجير .

مثال (5) : أثبت أن كثيرات حدود لاجير تخضع للخاصية العيارية الآتية :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = (n!)^2$$

الحل :

حيث أن :

$$L_n(x) = (-1)^n \left[x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \dots + (-1)^n n! \right]$$

فإن الحد ذو الرتبة n في $L_n(x)$ هو $(-1)^n x^n$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-x} x^n L_n(x) dx$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-x} x^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx$$

$$= (-1)^n \int_0^{\infty} x^n \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx$$

وبالتكامل بالتجزئ n من المرات ، نحصل على :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = (-1)^{2n} n! \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = (n!)^2$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : استخدمنا في الحل العلاقة :

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n-1) = n!$$

مثال (6) : أثبت العلاقات التكراريتين الآتيتين لكثيرات حدود لاجير :

$$(i) L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

$$(ii) L'_n(x) = n[L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)]$$

وذلك باستخدام الدالة المولدة بالصورة :

$$e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

ومن ذلك أثبت أن كثيرة حدود لاجير $L_n(x)$ تحقق المعادلة

$$xL_n''(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

(معادلة لاجير التفاضلية)

الحل :

الجزء (i) : باستخدام الدالة المولدة بالصورة :

$$e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n \quad (1)$$

فبتفاضل الطرفين بالنسبة إلى h نحصل على :

$$-\frac{x}{(1-h)^2} e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{(n-1)!} h^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

وباستخدام (1) نحصل على :

$$-\frac{x}{(1-h)^2} (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x) h^n}{n!} = (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x) h^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

وبضرب الطرفين في $[-(1-h)]$ نحصل على :

$$\therefore x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n = -(1-h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x) h^{n-1}}{(n-1)!} + (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n$$

$$\begin{aligned}
&= -(1-2h+h)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)h^{n-1}}{(n-1)!} + (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n \\
&= -\sum \frac{L_n(x)h^{n-1}}{(n-1)!} + 2\sum \frac{L_n(x)h^n}{(n-1)!} - \sum \frac{L_n(x)h^{n+1}}{(n-1)!} \\
&\quad + \sum \frac{L_n(x)h^n}{n!} - \sum \frac{L_n(x)h^{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

بمساواة معامل h^n في الطرفين نجد أن :

$$\frac{xL_n(x)}{n!} = -\frac{L_{n+1}(x)}{n!} + 2\frac{L_n(x)}{(n-1)!} - \frac{L_{n-1}(x)}{(n-2)!} + \frac{L_n(x)}{n!} - \frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

وبالضرب في $n!$ والاختصار نحصل على :

$$L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2L_{n-1}(x) \quad (I)$$

الجزء (ii) : بتفاضل الدالة المولدة بالنسبة إلى x نحصل على :

$$-\left(\frac{h}{1-h}\right)e^{-\frac{xh}{1-h}} = (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n(x)}{n!} h^n$$

[باستخدام (1)]

$$\therefore -\left(\frac{h}{1-h}\right)(1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n = (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n(x)}{n!} h^n$$

$$\therefore h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} h^n + (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L'_n(x)}{n!} h^n = 0$$

بمساواة معامل h^n بالصفر نحصل على :

$$\frac{L'_n(x)}{n!} - \frac{L'_{n-1}(x)}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0$$

$$\therefore L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

$$\therefore L'_n(x) = n[L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)] \quad (II)$$

ولاثبات أن $L_n(x)$ تحقق معادلة لاجير التفاضلية :

بكتابة (I) بالصورة :

$$L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على :

$$L'_{n+1}(x) + (x-2n-1)L'_n(x) + L_n(x) + n^2L'_{n-1}(x) = 0$$

وبالتفاضل مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل على :

$$L''_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L''_n(x) + 2L'_n(x) + n^2L''_{n-1}(x) = 0$$

وبوضع $n + 1$ بدلا من n نحصل على :

$$\therefore L''_{n+2}(x) + (x - 2n - 3)L''_{n+1}(x) + (n + 1)^2L''_n(x) + 2L'_{n+1}(x) = 0 \quad (2)$$

وباستخدام (II) نحصل على :

$$L'_n(x) = n[L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)]$$

وباحلال $n + 1$ محل n :

$$L'_{n+1}(x) = (n + 1)[L'_n(x) - L_n(x)] \quad (3)$$

وبالتفاضل :

$$\therefore L''_{n+1}(x) = (n + 1)[L''_n(x) - L'_n(x)] \quad (4)$$

وباحلال $n + 1$ محل n ثانية :

$$\therefore L''_{n+2}(x) = (n + 2)[L''_{n+1}(x) - L'_{n+1}(x)] \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (2) نحصل على :

$$(n + 2)[L''_{n+1}(x) - L'_{n+1}(x)] + (x - 2n - 3)L''_{n+1}(x) + (n + 1)^2L''_n(x) + 2L'_{n+1}(x) = 0$$

$$\therefore (x - n - 1)L''_{n+1}(x) - nL'_{n+1}(x) + (n + 1)^2L''_n(x) = 0$$

وبحذف $L''_{n+1}(x)$, $L'_{n+1}(x)$ باستخدام (4), (3) نحصل على

$$(x - n - 1)(n + 1)[L''_n(x) - L'_n(x)] - n(n + 1)[L'_n(x) - L_n(x)] + (n + 1)^2L''_n(x) = 0$$

وبالقسمة على $(n + 1)$:

$$\therefore (x - n - 1)[L''_n(x) - L'_n(x)] - n[L'_n(x) - L_n(x)] + (n + 1)L''_n(x) = 0$$

$$\therefore xL''_n(x) + (1 - x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0$$

وبوضع $y = L_n(x)$ ، نحصل على معادلة لاجير بالصورة :

$$\therefore xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

أى أن $L_n(x)$ تمثل حلا لمعادلة لاجير التفاضلية ، وهو المطلوب .

سادسا : دالة لاجير المرافقة (Associated Laguerre function)

تمثل دالى لاجير المرافقة حلا لمعادلة لاجير المرافقة والتي صورتها

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

وتعرف هذه الدالة بالعلاقة :

$$L_n^m(x) = \frac{d^m L_n(x)}{dx^m}$$

وتسمى بدالة لاجير المرافقة من الدرجة $(n-m)$

$$L_n^m(x) = 0$$

وإذا كانت $m > n$ فإن :

الصيغة التعامدية لدالة لاجير المرافقة :

يمكن اثباتها بالصورة الآتية :

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_\ell^m(x) dx = 0 \quad (\text{حيث } \ell \neq n)$$

الصيغة العيارية لدالة لاجير المرافقة :

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$$

يمكن اثباتها بالصورة الآتية :

ويمكن دمج الصيغتين التعامدية والعيارية فى صورة واحدة هى :

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_\ell^m(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!} \delta_{n\ell}$$

$$\delta_{n\ell} = \begin{cases} 0 & (\ell \neq n) \\ 1 & (\ell = n) \end{cases} \quad \text{حيث :}$$

الدالة المولدة لكثيرة حدود لاجير المرافقة :

يمكن اثباتها بالصورة الآتية :

$$\frac{(-h)^m}{(1-h)^{m+1}} e^{-\frac{xh}{1-h}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(x)}{n!} h^n$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أوجد كثيرات حدود لاجير المرافقة :

$$L_2^1(x), L_2^2(x), L_3^2(x), L_3^4(x)$$

الحل :

$$L_2^1(x) = \frac{d}{dx} L_2(x) = \frac{d}{dx} (2 - 4x + x^2) = 2x - 4$$

$$L_2^2(x) = \frac{d^2}{dx^2} L_2(x) = \frac{d^2}{dx^2} (2 - 4x + x^2) = 2$$

$$L_3^2(x) = \frac{d^2}{dx^2} L_3(x) = \frac{d^2}{dx^2} (6 - 18x + 9x^2 - x^3) = 18 - 6x$$

$$L_3^4(x) = \frac{d^4}{dx^4} L_3(x) = 0$$

وبوجه عام فإن : $L_n^m(x) = 0$ إذا كانت $m > n$

مثال (2) : حقق الصيغة العيارية لدالة لاجير المرافقة للحالة حيث $m = 1, n = 2$

الحل : يجب أن نثبت أن :

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} [L_2^1(x)]^2 dx = \frac{(2!)^3}{1!} = 8$$

$$[\text{الصيغة العيارية هي : } \int_0^{\infty} x^m e^{-x} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!} \text{ ولا ثبات ذلك :}]$$

حيث أن :

$$L_2^1(x) = 2x - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\infty} x e^{-x} (2x - 4)^2 dx &= 4 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx - 16 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx + 16 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \\ &= 4\Gamma(4) - 16\Gamma(3) + 16\Gamma(2) \\ &= 4(3!) - 16(2!) + 16(1!) = 8 \end{aligned}$$

وهو ما يعنى تحقيق النتيجة .

مثال (3) : حقق الصيغة التعامدية لدالة لاجير المرافقة للحالة التى فيها :

$$m = 2, n = 2, \ell = 3$$

الحل : يجب أن نثبت أن :

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} L_2^2(x) L_3^2(x) dx = 0$$

$$\left[\int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_n^m(x) L_l^m(x) dx = 0 \right] \text{ : الصيغة التعامدية هي :}$$

ولا ثبات ذلك : حيث أن :

$$L_2^2(x) = 2, \quad L_3^2(x) = 18 - 6x$$

فان الطرف الايسر من الصيغة التعامدية يزول إلى :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \cdot (2) \cdot (18 - 6x) dx &= 36 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - 12 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx \\ &= 36 \cdot \Gamma(3) - 12 \cdot \Gamma(4) = 36 \cdot (2!) - 12 \cdot (3!) = 0 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (4) : أثبت أن دالة لاجير المرافقة $L_3^2(x)$ تحقق معادلة لاجير المرافقة

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

في الحالة الخاصة عندما $m=2, n=3$

$$\text{الحل : حيث أن } L_3^2(x) = 18 - 6x$$

فان معادلة لاجير المرافقة تزول إلى (بوضع $m=2, n=3$) :

$$xy'' + (3-x)y' + y = 0$$

وبالتعويض عن :

$$y = L_3^2(x) = 18 - 6x$$

في هذه المعادلة نحصل على :

$$x \cdot (0) + (3-x)(-6) + (18-6x) = 0$$

أى أن الطرف الأيسر يساوى الطرف الأيمن وهذا يعنى أن $L_3^2(x)$ تحقق معادلة لاجير التفاضلية المرافقة .

مثال (5) : أثبت أن معادلة لاجير التفاضلية المرافقة :

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

يمكن الحصول عليها بتفاضل معادلة لاجير :

$$xy'' + (1-x)y' + my = 0$$

عد m من المرات بالنسبة إلى x .

ثم بين أن $\frac{d^m L_n}{dx^m}$ تشكل حلا لمعادلة لاجير المرافقة .

الحل :

معادلة لاجير التفاضلية يمكن كتابتها بالصورة :

$$xy_2 + (1-x)y_1 + ny = 0$$

حيث :

$$y_1 = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y_2 = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

بالتفاضل عدد m من المرات بالنسبة إلى x باستخدام نظرية ليبنتر ، نحصل على :

$$xy_{m+2} + {}^m c_1 y_{m+1} + (1-x)y_{m+1} + {}^m c_1 y_m (-1) + ny_m = 0$$

$$\therefore xy_{m+2} + (m+1-x)y_{m+1} + (n-m)y_m = 0 \quad (1)$$

وبكتابة $y_m = D^m y = D^m L_n(x)$ ، حيث $n \geq m$

فإن المعادلة (1) يمكن كتابتها بالصورة :

$$xD^2(y_m) + (m+1-x)D(y_m) + (n-m)y_m = 0 \quad (2)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن :

$$y_m = D^m L_n(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \equiv L_n^m(x) \quad \text{مثلا}$$

هي حل المعادلة :

$$xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$$

حيث m عدد صحيح بحيث أن $n \geq m$.

كثيرة الحدود $L_n^m(x)$ هي كثيرة حدود لاجير المرافقة من الدرجة $(n-m)$.

وهو المطلوب .

مثال (6) : أثبت العلاقاتين الآتيتين لدالة لاجير المرافقة :

$$(i) \quad \frac{d}{dx} L_n^m(x) = L_n^{m+1}(x)$$

$$(ii) \quad L_n^m(x) = n[L_{n-1}^m(x) - L_{n-1}^{m-1}(x)]$$

الحل :

$$L_n^m(x) = D^m L_n(x) \quad \text{(i) حيث أن :}$$

$$\therefore D[L_n^m(x)] = D[D^m L_n(x)] = D^{m+1} L_n(x) = L_n^{m+1}(x)$$

وهو المطلوب أولا .

(ii) المطلوب اثبات أن :

$$L_n^m(x) - nL_{n-1}^m(x) + nL_{n-1}^{m-1}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} L.H.S. &= D^m [e^x D^n (x^n e^{-x})] - nD^m [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &\quad + nD^{m-1} [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &= D^{m-1} D [e^x D^n (x^n e^{-x})] - nD^{m-1} D [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &\quad + nD^{m-1} [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &= D^{m-1} [e^x D^{n+1} (x^n e^{-x}) + e^x D^n (x^n e^{-x})] \\ &\quad - nD^{m-1} [e^x D^n (x^{n-1} e^{-x}) + e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &\quad + nD^{m-1} [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &= D^{m-1} [e^x D^n (-x^n e^{-x} + nx^{n-1} e^{-x}) + e^x D^n (x^n e^{-x})] \\ &\quad - nD^{m-1} [e^x D^n (x^{n-1} e^{-x}) + e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &\quad + nD^{m-1} [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &= -D^{m-1} [e^x D^n (x^n e^{-x})] + nD^{m-1} [e^x D^n (x^{n-1} e^{-x})] \\ &\quad + D^{m-1} [e^x D^n (x^n e^{-x})] - nD^{m-1} [e^x D^n (x^{n-1} e^{-x})] \\ &\quad - nD^{m-1} [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] + nD^{m-1} [e^x D^{n-1} (x^{n-1} e^{-x})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

وهو المطلوب ثانيا .

مسألة : أثبت العلاقات الآتية لكثيرة حدود لاجير المرافقة :

$$(i) L_n^m(x) - L_{n-1}^m(x) = L_n^{m-1}(x)$$

$$(ii) \frac{d}{dx} L_n^m(x) = -L_{n-1}^{m-1}(x)$$

$$(iii) nL_n^m(x) = (2n + m - 1)L_{n-1}^m(x) - (n + m - 1)L_{n-2}^m(x)$$

مثال (7) : أثبت أن :

$$(i) L_n(2x) = n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m 2^{n-m}}{m!(n-m)!} L_{n-m}(x) \quad , \quad n > m$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x D^n (x^n e^{-x}) \quad \text{حيث :}$$

$$(ii) L_n^m(2x) = (m+n)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{k!(m+n-k)!} L_{n-k}^m(x)$$

الحل :

(i) حيث أن :

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = \frac{1}{1!}(1-x) = (1-x)$$

فبإحلال $2x$ مكان x نحصل على :

$$L_1(2x) = 1 - 2x = 2(1-x) - 1 = 2L_1(x) - 2^0 \frac{1!}{1!} L_0(x)$$

$$= 1! \sum_{m=0}^1 \frac{(-1)^m 2^{1-m}}{m!(1-m)!} L_{1-m}(x)$$

أيضاً :

$$L_2(2x) = \frac{1}{2!}(2 - 8x + 4x^2) = 1 - 4x + 2x^2$$

$$= 4 \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) - 4(1-x) + 1$$

$$= 2^2 L_2(x) - 2 \frac{2!}{1!1!} L_1(x) + \frac{2!}{0!2!} L_0(x)$$

$$= 2! \sum_{m=0}^2 \frac{(-1)^m 2^{2-m}}{m!(2-m)!} L_{2-m}(x)$$

أيضاً :

$$L_3(2x) = \frac{1}{3!}(6 - 36x + 36x^2 - 8x^3) = 1 - 6x + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3$$

$$\begin{aligned}
&= 2^3 \left(1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} \right) - 12 \left(1 - 2x + \frac{x^2}{2} \right) + 2.3(1-x) \\
&= 2^3 L_3(x) - \frac{2^2 \cdot 3!}{1!2!} L_2(x) + 2 \frac{3!}{2!1!} L_1(x) - 2^0 \frac{3!}{3!} L_0(x) \\
&= 3! \sum_{m=0}^3 \frac{(-1)^m 2^{3-m}}{m!(3-m)!} L_{3-m}(x)
\end{aligned}$$

وبالمثل فإنه يمكن إثبات أن :

$$L_4(2x) = 4! \sum_{m=0}^4 \frac{(-1)^m 2^{4-m}}{m!(4-m)!} L_{4-m}(x)$$

وبوجه عام فإن :

$$L_n(2x) = n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m 2^{n-m}}{m!(n-m)!} L_{n-m}(x)$$

(ii) لاثبات العلاقة (ii) تترك كمسألة للطلبة .

مسألة :

أثبت أن كثيرتى حدود لاجير المرافقة وهيرميت ترتبطان بالعلاقين الآتيتين :

$$(i) H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} \cdot (m!) L_m^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

$$(ii) H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} \cdot (m!) x L_m^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

تكمالات مشتمة على كثيرة حدود لاجير المرافقة :

هناك مجموعة من التكمالات المشتمة على كثيرات حدود لاجير المرافقة وتستخدم كثيرا فى الحسابات الخاصة ببعض الموضوعات فى الرياضيات التطبيقية (مثل نظرية الكم) وبعض المسائل الفيزيائية والهندسية ، ونذكر فيما يلى أهم تلك التكمالات :

$$(i) \int_0^{\infty} e^{-x} x^m [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$$

(الصيغة العيارية لكثيرة حدود لاجير المرافقة)

$$(ii) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m+1} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!} (2n-m+1)$$

$$(iii) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-1} [L_n^m(x)]^2 dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!} \left(\frac{1}{m} \right)$$

$$(iv) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m+2} [L_n^m(x)]^2 dx$$

$$= \frac{(n!)^3}{(n-m)!} [(n+1)(n+2) + 4(n+1)(n-m) + (n-m)(n-m-1)]$$

$$= \frac{(n!)^3}{(n-m)!} [6n(n-m+1) + m(m-3) + 2]$$

$$L_n^m(x) = \frac{d^m L_n(x)}{dx^m} = D^m L_n(x) = D^m [e^x D^n (x^n e^{-x})] \quad \text{حيث :}$$

هي حل معادلة لاجير التفاضلية المرافقة :

$$x \frac{d^2 L_n^m}{dx^2} + (m+1-x) \frac{dL_n^m}{dx} + (n-m)L_n^m = 0, \quad (n \geq m \quad \text{حيث})$$

تمثل تلك الدوال حلاً للمعادلة التفاضلية المعروفة باسم المعادلة فوق الهندسية وصورتها :

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

حيث α, β, γ ثوابت .

ويمكن إيجاد الحل العام لهذه المعادلة باستخدام طريقة فوريينوس ، ويكون أحد حلول تلك المعادلة بالصورة :

$$y = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots \quad (2)$$

ويرمز لهذه المتسلسلة عادة بالرمز الآتي :

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

والدليل 2 في ${}_2F_1$ معناه أن هناك ثابتان α, β في البسط والدليل 1 أن هناك ثابتاً واحداً في المقام . وتعرف ${}_2F_1$ بالدالة فوق الهندسية أو دالة جاوس .

حالة خاصة : إذا كان $\alpha = 1, \beta = \gamma$ فإن المتسلسلة (2) تزول إلى

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

وهي المتسلسلة الهندسية اللانهائية .

ومن أجل ذلك سميت (2) بالدالة فوق الهندسية حيث أنها تعتبر تعميماً للمتسلسلة الهندسية العادية .

ملحوظة : إذا أدخلنا الرمزين الآتيين :

$$(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1), \dots$$

فإنه يمكن التعبير عن الدالة فوق الهندسية بالصورة :

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} x^n$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت أن :

$${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

الحل : بالتعويض عن $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2, x = -x$ في (2) نحصل على :

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(1, 1; 2; -x) &= 1 + \frac{1.1}{1!2}(-x) + \frac{1.2.1.2}{2!2.3}x^2 + \dots \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots
\end{aligned} \tag{1}$$

ولكن : مفكوك $\ln(1+x)$ يعطى بالعلاقة [أنظر الباب الأول]:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\
\therefore \frac{1}{x} \ln(1+x) &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots
\end{aligned} \tag{2}$$

من (1), (2) نجد أن :

$${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

وهو المطلوب . ويمكن كتابته بالصورة :

$$\ln(1+x) = x {}_2F_1(1, 1; 2; -x)$$

مثال (2) : أثبت أن :

$$(1-x)^n = {}_2F_1(-n, 1; 1; x)$$

الحل : بكتابة مفكوك $(1-x)^n$ بالصورة :

$$\begin{aligned}
(1-x)^n &= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \dots \\
&= 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n+1)}{2!}x^2 + \dots
\end{aligned} \tag{1}$$

$${}_2F_1(-n, 1; 1; x) = 1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n+1)}{2!}x^2 + \dots \tag{2}$$

[بوضع $\alpha = -n$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 1$ فى تعريف ${}_2F_1$.

من (1) ، (2) ينتج أن :

$$(1-x)^n = {}_2F_1(-n, 1; 1; x)$$

وهو المطلوب .

مسألة : أثبت أن :

$$(1+x)^n = {}_2F_1(-n, 1; 1; -x)$$

مثال (3) : أثبت أن

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(1, \beta; 1; \frac{x}{\beta}) = e^x$$

الحل : بوضع $\alpha = 1, \gamma = 1, x = \frac{x}{\beta}$ في تعريف ${}_2F_1$ نحصل على :

$$\begin{aligned} {}_2F_1 &= 1 + \frac{1 \cdot \beta}{1!1} \frac{x}{\beta} + \frac{1 \cdot 2 \beta (\beta + 1)}{2!1 \cdot 2} \frac{x^2}{\beta^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(1, \beta; 1; \frac{x}{\beta}) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (1)$$

ومن تعريف مفكوك e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (2)$$

من (1) ، (2) ينتج المطلوب .

مثال (4) : اثبت أن التكامل الناقص من النوع الأول وصورته :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad |k| < 1$$

يمكن كتابة بدلالة الدالة فوق الهندسية بالصورة :

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi \quad : \underline{\text{الحل}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2!} k^4 \sin^4 \phi + \dots \right] d\phi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2!} k^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \dots \\
&= \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1!1} k^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2!1 \cdot 2} k^4 + \dots \right] \\
&= \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)
\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مسألة : أثبت أن التكامل الناقصى من النوع الثانى وصورته :

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad |k| < 1$$

يمكن كتابته بدلالة الدالة فوق الهندسية بالصورة :

$$E(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$$

مثال (5) : أثبت أن

$$\tan^{-1} x = x {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)$$

الحل : مفكوك $\tan^{-1} x$ يعطى بالصورة :

$$\begin{aligned}
\tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\
&= x \left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \dots \right] \tag{1}
\end{aligned}$$

أيضاً فإن :

$${}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n (-x^2)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1)_0 \left(\frac{1}{2}\right)_0 (-x^2)^0}{\left(\frac{3}{2}\right)_0 0!} + \frac{(1)_1 \left(\frac{1}{2}\right)_1 (-x^2)^1}{\left(\frac{3}{2}\right)_1 1!} + \frac{(1)_2 \left(\frac{1}{2}\right)_2 (-x^2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)_2 2!} + \dots \\
&= 1 + \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} (-x^2) + \frac{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} \frac{x^4}{2!} + \dots \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots
\end{aligned}$$

$$\therefore x {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -x^2\right) = x \left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots \right] \quad (2)$$

من (1), (2) نجد أن :

$$\tan^{-1} x = x {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)$$

وهو المطلوب .

$$\sin^{-1} x = x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$$

مسألة : أثبت أن

حل المسألة : مفكوك $\sin^{-1} x$ يكتب بالصورة :

$$\sin^{-1} x = x \left[1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^2 + \frac{3}{4 \cdot 5} \frac{x^4}{2!} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 7} \frac{x^6}{3!} + \dots \right] \quad (1)$$

أيضاً فإن :

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)(1!)} x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)(2!)} (x^2)^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} x^2 + \frac{3}{4 \cdot 5 (2!)} x^4 + \frac{3 \cdot 5}{(2 \cdot 4 \cdot 7)(3!)} x^6 + \dots \quad (2)$$

من (1), (2) ينتج المطلوب .