

الباب الرابع

مبادئ حساب التغيرات

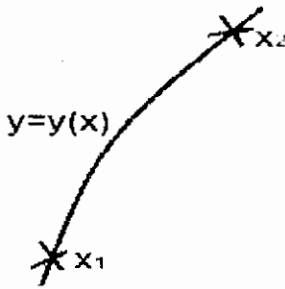
(Calculus of Variation)

[١] المسألة الأساسية في حساب التغيرات :

[Variational Problem - مسألة التغيرات]

إذا كان لدينا الدالة (Function) : $F = F[x, y, y']$ حيث $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ وكان لدينا الدالية (Functional) : $U[F(x, y, y')]$ في الدالة F والتي هي عبارة عن التكامل المحدود للدالة F أى :

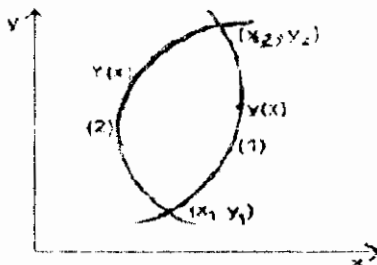
$$U[F(x, y, y')] = I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$



فإن مسألة إيجاد المنحنى $y = y(x)$ التوصل بين النقطتين x_1 و x_2 بحيث يكون للدالية (أو لتكامل) I نهاية قصوى (سواء كانت صغرى أم عظمى)، تعرف بالمسألة الرئيسية في حساب التغيرات أو مسألة التغيرات.

ويعرف المنحنى الذى يحقق هذا الشرط (أى الذى يعطى للتكامل المذكور قيمة أو نهاية قصوى بمنحنى النهاية القصوى (Extremum curve).

ملحوظة : الدالة $y = y(x)$ أى دالة فى المتغير x (تعتمد على المتغير x) ، بينما الدالية $U = U[y(x)]$ هى دالية فى الدالة $y(x)$ أى تعتمد على الدالة $y(x)$.



تعريف التغيرات أو التغير (Variation)

إذا كان لدينا منحنيان متجاوران لهما نفس نقطتي البداية والنهاية فإن الزيادة (increment) فى الدالة $y(x)$ للدالية $U[y(x)]$ تعرف بتعلقة :

$$\delta y = Y(x) - y(x) \quad (1)$$

وتسمى δy عادة بالتغير (أو التغيرات) فى y .

حساب التغير في y (δy) :

نفرض أن معادلة المنحنى $Y(x)$ المجاور للمنحنى $y(x)$ ويمر بنقطتي البداية والنهاية له هي :

$$Y(x) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (2)$$

حيث ϵ بارامتر اختياري (صغير للغاية) $\eta(x)$ دالة اختيارية في x .

وشروط مرور المنحنى (2) بالنقطة (x_1, y_1) , (x_2, y_2) هو انطباق (أو تطابق) المنحنين عندهما :

$$\eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0$$

التغير في y : من (1), (2)

$$\delta y = Y(x) - y(x)$$

$$= y(x) + \epsilon \eta(x) - y(x) = \epsilon \eta(x)$$

$$\therefore \boxed{\delta y = \epsilon \eta} \quad (3)$$

أيضا : التغير في مشتقة y (أي y')

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \boxed{\delta y' = \epsilon \eta'} \quad (4)$$

التغير في الدالة F : [أي δF]

تعتبر الدالة :

$$F = F(x, y, y')$$

وهي الدالة الأساسية في حساب التغيرات .

$$F = F(x, y, y')$$

عند المنحنى (1) $[y(x)]$:

عند المنحنى (2) $[Y(x)]$:

$$F = F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta')$$

يعرف التغيرات أو التغير في الدالة F أي δF بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'} \quad (5)$$

$$F = F(x, y, y') \quad \text{حيث}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}, \quad \text{وإذا كانت :}$$

$$\therefore \boxed{\delta F = F_y \delta y + F_{y'} \delta y'} \quad (6)$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت أن :

$$\delta(Dy) = D(\delta y) \quad (1)$$

حيث $D = \frac{d}{dx}$ المشتقة التفاضلية .

معنى العلاقة (1) : تغير المشتقة = مشتقة التغير (أو التغير)

أو أن : التغير δ يتبادل مع المشتقة D .

الحل : حيث أن :

$$\delta y = \epsilon \eta, \quad \delta y' = \epsilon \eta'$$

$$\therefore \delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (1)$$

$$\delta y' = \epsilon \eta' = \epsilon \frac{d\eta}{dx} = \frac{d(\epsilon \eta)}{dx} = \frac{d(\delta y)}{dx} \quad (2)$$

بمساواة (1), (2) :

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(\delta y)}{dx}$$

$$\therefore \delta(Dy) = D(\delta y)$$

$$\left| D = \frac{d}{dx} \right.$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : يمكن كتابة العلاقة السابقة بالصورة :

$$\delta(y') = (\delta y)'$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\delta(y'') = (\delta y)''$$

وبوجه عام فإن :

$$\delta[y^{(n)}] = [\delta y]^{(n)}$$

حيث (n) تدل على المشتقة النونية .

مثال (2) : من تعريف التغير في y ، أثبت العلاقة

$$\delta[y^{(n)}] = [\delta y]^{(n)}$$

[التغير في المشتقة = المشتقة النونية للتغير]

الحل : من التعريف

$$\delta y = \epsilon \eta$$

$$\delta y' = \epsilon \eta' , \delta y'' = \epsilon \eta'' , \dots , \delta y^{(n)} = \epsilon \eta^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \delta[y^{(n)}] &= \delta \left[\frac{d^n y}{dx^n} \right] = \epsilon \eta^{(n)} = \epsilon \frac{d^n \eta}{dx^n} \\ &= \frac{d^n (\epsilon \eta)}{dx^n} = \frac{d^n (\delta y)}{dx^n} = [\delta y]^{(n)} \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : أثبت أن التغير δ له نفس خصائص المشتقة $D = \frac{d}{dx}$ بمعنى أن :

$$(i) \delta(F^n) = nF^{n-1}\delta F$$

$$(ii) \delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2$$

$$(iii) \delta(F_1 F_2) = F_1 \delta F_2 + F_2 \delta F_1$$

$$(iv) \delta \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2}$$

الإثبات : أولا : من تعريف التغير في الدالة F :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

وبتطبيقه على F^n

$$\begin{aligned} \delta(F^n) &= \frac{\partial(F^n)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} (F^n) \delta y' \\ &= \left(nF^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y + \left(nF^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y' \end{aligned}$$

$$= nF^{n-1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right]$$

$$= nF^{n-1} \delta F$$

وهو المطلوب .

ثانياً : بتطبيق تعريف δF على $\delta(F_1 + F_2)$

$$\delta(F_1 + F_2) = \frac{\partial}{\partial y} (F_1 + F_2) \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} (F_1 + F_2) \delta y'$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y'} + \frac{\partial F_2}{\partial y'} \right) \delta y'$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_1}{\partial y'} \delta y' \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_2}{\partial y'} \delta y' \right)$$

$$= \delta F_1 + \delta F_2$$

وهو المطلوب ثانياً .

ثالثاً : يترك حلها للطالب ، رابعاً : يترك حلها للطالب .

والنتيجة : هي أن التغير δ له نفس خواص المشتقة $D = \frac{d}{dx}$.

وهو المطلوب .

مثال (4) : أثبت أن مؤثر التغير (δ) يتبادل مع مؤثر التكامل $(\int)$

الحل : نستخدم قاعدتين مهمين في حل المثال :

(1) إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'$$

(2) إذا كانت x, t متغيران مستقلان فإن

$$\frac{\partial}{\partial x} [\int F dt] = \int \frac{\partial F}{\partial x} dt$$

[قاعدة التفاضل تحت علامة التكامل]

المطلوب : إثبات أن :

$$\delta \int (F dx) = \int \delta F dx$$

الإثبات : من القاعدة (1) حيث أن :

$$\delta[\int F dx] = \frac{\partial}{\partial y}[\int F dx] \delta y + \frac{\partial}{\partial y'}[\int F dx] \delta y' \quad (1)$$

ومن القاعدة (2) وتطبيقها على العلاقة (1) :

$$\begin{aligned} \delta[\int F dx] &= \left[\int \frac{\partial F}{\partial y} dx \right] \delta y + \left[\int \frac{\partial F}{\partial y'} dx \right] \delta y' \\ &= \int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \\ &= \int \delta F dx \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (5) : إذا كان التكامل الدالى

$$I = \int_a^b F(x, y, y') \eta(x) dx = 0$$

حيث $\eta(x)$ دالة اختيارية فإن :

$$F(x, y, y') = 0$$

الحل : نفرض عكس المطلوب أى نفرض أن :

$$F(x, y, y') \neq 0$$

وهذا يعنى أن $F > 0$ أو $F < 0$ وبوضع

$$h = F(x, y, y') \eta(x)$$

$$I = \int_a^b h dx$$

وحيث أن η دالة اختيارية فيمكن اختيارها بحيث تكون :

$$F > 0 \quad \text{عندما} \quad \eta = +$$

$$F < 0 \quad \text{عندما} \quad \eta = -$$

وفى كلتا الحالتين فإن :

$$h = F \eta > 0$$

$$I = \int_a^b h dx > 0 \rightarrow I \neq 0$$

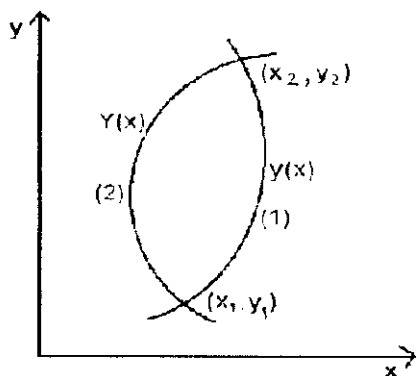
وهذا يتناقض مع الفرض أن $I = 0$ (المعطى فى رأس المسألة) وهذا يعنى أن : $F = 0$ وهو المطلوب .

مثال (٦) : أثبت أن الشرط الضرورى لى يكون للتكامل الدالى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

نهاية قصوى (صغرى أو عظمى) هو أن يكون :

$$\delta I = 0$$



الحل :

نعتبر أن المنحنى $y' = y'(x)$ هو منحنى

النهاية القصوى أى المنحنى الذى يعطى

التكامل $I = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ قيمة نهاية قصوى .

نأخذ منحنى مجاور (2) يصل بين النقطتين

(x_1, y_1) ، (x_2, y_2) المنحني يمر

(1) بهما . ولتكن معادلته

$$Y(y) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (2)$$

وحيث أن :

$$\eta(x_1) = 0, \quad \eta(x_2) = 0$$

$$\delta y = \epsilon \eta \quad \text{وأن :}$$

$$\therefore \delta y(x_1) = 0, \quad \delta y(x_2) = 0 \quad (3)$$

التكامل الدالى (1) على طول المنحنى المجاور $Y(x)$:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta') dx = I(\epsilon) \quad (4)$$

$$\therefore I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \epsilon) dx \quad (5)$$

شرط أن يكون لهذا التكامل نهاية قصوى (عظمى أو صغرى) هو :

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (6)$$

ومن قاعدة لينتزر للتكامل تحت علامة التفاضل

$$\frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \int F dx = \int \frac{\partial F}{\partial \epsilon} dx$$

وحيث أن :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy'$$

$$\delta F \equiv dF$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y} \epsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \epsilon \eta'$$

$$\delta y \equiv dy = \epsilon \eta$$

$$\delta y' \equiv dy' = \epsilon \eta'$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \quad (8)$$

بالتعويض من (8) في (7) :

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx$$

وبتطبيق الشرط (6) [شرط النهايات القصوى] :

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dx = 0$$

بضرب الطرفين في ϵ :

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \epsilon \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \epsilon \eta' \right] dx = 0$$

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0$$

$$\int \delta F dx = 0$$

ومن المثال (4) :

$$\therefore \delta \int F dx = 0$$

$$\therefore \delta I = 0$$

أى أن الشرط الضروري لكي يكون للتكامل الدالى I نهاية قصوى هو أن يكون :

$$\boxed{\delta I = 0}$$

وهو المطلوب .

[2] المعادلة الأساسية في حساب التغيرات (معادلة أويلر – لاجرانج)

سوف نثبت أن الشرط الضروري لوجود قيمة نهاية قصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

هو أن يحقق المنحنى $y(x)$ [منحنى النهاية القصوى] المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

وتعرف هذه المعادلة بالمعادلة الأساسية في حساب التغيرات أو معادلة أويلر – لاجرانج .

الإثبات : من مثال (6) نجد أن :

التكامل الدالى

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

يكون له نهاية قصوى على المنحنى $y = y(x)$ الواصل بين x_1, x_2 إذا كان :

$$\delta I = 0 \rightarrow \delta \int F(x, y, y') dx = 0$$

ومن المثال (4) :

$$\therefore \int \delta F(x, y, y') dx = 0 \quad (2)$$

ومن تعريف التغير (أو التغيرات) فى F :

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0 \quad (3)$$

وبإجراء عملية التكامل بالتجزئ على الحد الثانى :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx$$

$$\delta y' = (\delta y)'$$

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y) \quad \left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad v = \delta y \\ \delta(y)|_{x_1} = 0, \delta(y)|_{x_2} = 0 \end{array} \right. \\
&= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta(y) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y d \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \\
&= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y d \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \\
&= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y dx \quad (4)
\end{aligned}$$

بالتعويض في (3) :

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx \right] + \left[- \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \right] = 0 \\
&\therefore \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0
\end{aligned}$$

بضرب الطرفين في (-) :-

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \right] \delta y dx = 0$$

وحيث أن δy دالة اختيارية فمن المثال (5) نحصل على :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \quad (5)$$

وهي معادلو أولر - لاجرانج المطلوبة .

المعادلة (5) هي المعادلة التفاضلية التي يحققها المنحنى $y = y(x)$ بحيث يكون للتكامل

الدالي $I = \int F dx$ قيمة نهاية قصوى (extremum value) على هذا المنحنى والذي يعرف

بمنحنى النهاية القصوى (extremum value)

∴ المعادلة (5) هي معادلة منحنيات النهاية القصوى (extremum curve) .

ملحوظة : بوضع

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = F_{y'}$$

فتصبح المعادلة (5) بالصورة :

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y = 0$$

$$\boxed{(F_{y'})' - F_y = 0} \quad (6)$$

أمثلة محلولة :

مثال (1) : إذا كانت $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$ فثبت أن معادلة أولر - لاجرانج يمكن كتابتها

بالصورة :

$$\boxed{(F - y' \cdot F_{y'})' - F_x = 0}$$

الحل : من قواعد التفاضل الجزئي :

إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy'$$

بالقسمة على dx :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y', \frac{dy'}{dx} = y'' \end{aligned} \right. \quad (1)$$

أيضاً :

$$\frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = y' \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \quad (2)$$

من (1), (2) بالطرح نحصل على :

$$\frac{d}{dx} \left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = y' \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] = 0 \quad \text{[من معادلة أولر - لاجرانج]}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\therefore (F - y' F_{y'})' - F_x = 0 \quad (3)$$

حيث

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$$

المعادلة (3) هي المعادلة المطلوبة [صورة أخرى لمعادلة أويلر - لاجرانج]

مثال (2) : باستخدام الصورة (مثال رقم (1))

$$(F - y' F_{y'})' - F_x = 0 \quad (1)$$

لمعادلة أويلر - لاجرانج ، أثبت أن التكامل الأول لهذه المعادلة في الحالة الخاصة عندما لا تعتمد الدالة F على المتغير x صراحة يكون بالصورة :

$$F - y' F_{y'} = c$$

حيث c ثابت

الحل : في الحالة الخاصة عندما لا تعتمد الدالة F صراحة على المتغير x فإن :

$$F_x = 0 \leftarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

وتصبح المعادلة (1) :

$$(F - y' F_{y'})' = 0$$

$$\frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0$$

وبالتكامل :

$$(F - y' F_{y'}) = \text{const.} = c$$

$$\therefore F - y' F_{y'} = c \quad (2)$$

المعادلة (2) تمثل التكامل الأول لمعادلة أويلر - لاجرانج في الحالة الخاصة عندما F لا تعتمد صراحة على x أي عندما $F = F(y, y')$ وتطبق في حل المسائل التي لا تظهر x فيها في الدالة F صراحة أي التي تكون فيها

$$F = F(y, y')$$

[3] إيجاد منحنيات النهاية القصوى للتكاملات الدالية :

مثال (1) : طبق معادلة أويلر - لاجرانج للحصول على منحنيات النهاية القصوى التى تعطى للتكامل الدالى الآتى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 - y'^2) dx$$

قيمة نهاية قصوى .

الحل : نكتب التكامل I بالصورة :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y') dx \quad (1)$$

حيث :

$$F(y, y') = y^2 - y'^2 \quad (2)$$

نلاحظ أن F لا تعتمد صراحة على x (أى لا تظهر فيها x بصورة صريحة) .

نستخدم الصورة الخاصة لمعادلة أويلر - لاجرانج وهى :

$$F - y' F_{y'} = c \quad (3)$$

من (2) :

$$F = y^2 - y'^2$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y' \quad (4)$$

بالتعويض فى (3) :

$$(y^2 - y'^2) - y'(-2y') = c$$

$$\therefore y^2 - y'^2 + 2y'^2 = c$$

$$y^2 + y'^2 = c = a^2, \quad \text{مثلا}$$

$$\therefore y'^2 = a^2 - y^2 \rightarrow y' = \sqrt{a^2 - y^2} = \frac{dy}{dx}$$

بفضل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx$$

$$\sin^{-1} \frac{y}{a} = x + b ,$$

حيث b ثابت التكامل

$$\therefore \frac{y}{a} = \sin(x + b) \rightarrow \boxed{y = a \sin(x + b)}$$

وهي معادلة منحنى النهاية القصوى الذى يحقق شرط أن التكامل I له نهاية قصوى .

ملحوظة :

(1) الثابتان a, b فى معادلة المنحنى يمكن إيجادهما من الشروط التى تعطى فى رأس المسألة

(2) فى المثال (1) لم تعطى أى شروط فتترك معادلة المنحنى كما حصلنا عليها .

مثال (2) : أوجد معادلة المنحنى الذى يصل بين النقطتين a, b ويجعل للتكامل الدالى

$$I = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

نهاية قصوى .

الحل : نكتب I بالصورة :

$$I = \int_a^b F(y, y') dx \quad (1)$$

حيث :

$$F(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2} \quad (2)$$

نلاحظ أن F لا تعتمد على x صراحة فنستخدم الصورة الخاصة لمعادلة أولر - لاجرانج :

$$F - y F_{y'} = c \quad (3)$$

من (2)

$$\begin{aligned} F_{y'} &= \frac{\partial F}{\partial y'} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + y'^2}} \cdot (2y') \\ &= \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

بالتعويض من (4), (2) فى (3)

$$y \sqrt{1 + y'^2} - y' \left(\frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = c$$

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\therefore \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

بتربيع الطرفين نحصل على : $\frac{y^2}{1+y'^2} = c^2$

$$\therefore y^2 = c^2(1+y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

$$c^2 y'^2 = y^2 - c^2 \rightarrow y'^2 = \frac{y^2 - c^2}{c^2}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{c} \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل : $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \int dx$

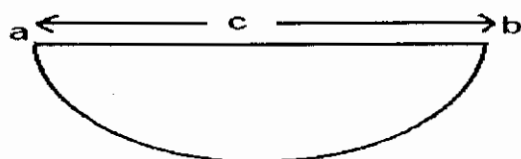
$$\therefore \cosh^{-1} \frac{y}{c} = \frac{x}{c} + b = \frac{x + bc}{c} = \frac{x + d}{c}$$

$$\frac{y}{c} = \cosh \frac{x + d}{c}$$

$$| bc = d$$

$$\therefore y = c \cosh \frac{x + d}{c} \quad (5)$$

وهي معادلة المنحنى المطلوب (منحنى النهاية القصوى) يعرف هذا المنحنى بمنحنى السلسلة أو الكتينة (catenary) وهو عبارة عن سلسلة معلقة من النقطتين a, b الواقعتين في نفس المستوى الأفقى والمسافة بينهما c :



مثال (٣) : أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_c^b (y^2 + y'^2 + 2y \sin x) dx$$

الحل : نكتب I بالصورة :

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1)$$

حيث

$$F(x, y, y') = y^2 + y'^2 + 2y \sin x \quad (2)$$

في هذه الحالة نطبق معادلة أولر - لاگرانج في صورتها الأصلية :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \quad (3)$$

فمن (2) :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2 \sin x$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

بالتعويض في (3) :

$$(2y + 2 \sin x) - (2y')' = 0$$

$$\therefore y + \sin x - y'' = 0$$

$$\therefore y'' - y = \sin x \quad (4)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ، الحل العام لها يأخذ الصورة الآتية [سوف نحصل عليه بالتفصيل بعد قليل] .

$$y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \quad (5)$$

ملحوظة : الحل (5) يجب أن يحقق المعادلة (4) حتى يكون حلاً لها ، ولانبات ذلك :

من (5) :

$$y' = Ae^x - Be^{-x} - \frac{1}{2} \cos x$$

$$y'' = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$$

$$\therefore y'' - y = \left(Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2} \sin x \right) - \left(Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x = \sin x$$

وهي المعادلة رقم (4)

∴ الحل (5) يحقق المعادلة التفاضلية (4) فهو بذلك يكون حلاً لها .

إيجاد الحل (5) :

من المعادلات التفاضلية فإن حل المعادلة (4) يتكون من جزئين [أنظر الملحق (1) ، (2) في نهاية الكتاب] .

$$(1) \text{ الحل المتمم } y_c \text{ للمعادلة المتجانسة } y'' - y = 0$$

$$(2) \text{ الحل الخاص } y_p \text{ للمعادلة غير المتجانسة } y'' - y = \sin x$$

$$\therefore y = y_c + y_p \quad (6)$$

$$y'' - y = 0 \quad \text{إيجاد } y_c : \text{ المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة}$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{هي :}$$

$$\therefore \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \begin{cases} \lambda_1 = +1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

ويأخذُ الحل الصورة العامة :

$$y_c = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^x + Be^{-x} \quad (7)$$

إيجاد y_p : يوجد لدينا أكثر من طريقة لإيجاد y_p وسوف نقتصر هنا على طريقة استخدام

خواص المؤثر D كالآتي :

$$\left. \begin{aligned} y'' - y &= \sin x \\ (D^2 - 1)y &= \sin x \\ \therefore y_p &= \frac{1}{D^2 - 1}(\sin x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y'' &= D^2 y \\ D &= \frac{d}{dx} \\ D^2 &= \frac{d^2}{dx^2} \end{aligned}$$

وباستخدام العلاقة الآتية للمؤثر العكسي $\left(\frac{1}{D^2 + m^2} \right)$ [أنظر ملحق (2) في آخر الكتاب]

$$y_p = \frac{1}{D^2 + m^2}(\sin ax) = \begin{cases} \frac{1}{m^2 - a^2} \sin ax & (a \neq m) \\ \frac{-x}{2a} \cos ax & (a = m) \end{cases}$$

فى المسألة :

$$m^2 = -1, \quad a = 1$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{-1 - (1)} \sin x = -\frac{1}{2} \sin x \quad (8)$$

بالتعويض من (8) , (7) فى (6) نحصل على الحل المطلوب .

$$y = y_c + y_p = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

وهى المعادلة رقم (5) . [الحل المطلوب]

مثال (4) : أوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين a, b والذى يجعل للتكامل الدالى :

$$I = \int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

نهاية قصوى

الحل : نكتب I بالصورة :

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (1)$$

حيث :

$$F(y, y', x) = y^2 + y'^2 + 2ye^x \quad (2)$$

نستخدم معادلة أولير - لاجرانج فى صورتها الأصلية (العامة) :

$$F_y - (F_{y'})' = 0$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2e^x \quad \text{ومن (2) نحصل على :}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

$$(2y + 2e^x) - (2y')' = 0 \quad \text{بالتعويض فى (3) :}$$

$$\therefore y + e^x - y'' = 0$$

$$y'' - y = e^x \quad (4)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة ، حلها العام هو :

$$y = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \quad (5)$$

ملحوظة : الحل (5) يجب أن يحقق المعادلة (4) حتى يكون حلاً لها ، ولإثبات ذلك :
من (5) :

$$y' = Ae^x - Be^{-x} + \frac{1}{2}(xe^x + e^x)$$

$$y'' = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}(xe^x + 2e^x)$$

$$\therefore y'' - y = \left(Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x + e^x \right) - \left(Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \right) = e^x$$

$\therefore$ الحل (5) يحقق المعادلة (4) فهو بذلك يكون حلاً لها

إيجاد الحل (5) :

هذا الحل عبارة عن مجموع جزئين .

$$(1) \text{ الحل المتمم } y_c \text{ للمعادلة المتجانسة } y'' - y = 0$$

$$(2) \text{ الحل الخاص } y_p \text{ للمعادلة غير المتجانسة } y'' - y = e^x$$

$$\therefore y = y_c + y_p \quad (6)$$

$$y'' - y = 0 \quad \text{لإيجاد } y_c : \text{المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة}$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{هى :}$$

$$\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = +1 \\ \searrow \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

ويأخذ الحل الصورة العامة :

$$y_c = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^x + Be^{-x} \quad (7)$$

إيجاد y_p : توجد أكثر من طريقة وسوف نقتصر هنا على طريقة استخدام خواص المؤثر D كالآتي :

$$y'' - y = e^x \rightarrow (D^2 - 1)y = e^x$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 - 1}(e^x) = \frac{1}{(D - 1)(D + 1)}(e^x)$$

$$= \frac{1}{D - 1} \left[\frac{1}{D + 1}(e^x) \right]$$

وباستخدام العلاقة الآتية للمؤثر العكسي $\left(\frac{1}{D \pm m}\right)$ [أنظر الملحق (2) فى نهاية الكتاب]

$$\frac{1}{D \pm m}[\phi(x)] = e^{\mp mx} \int e^{\pm mx} \phi(x) dx$$

$$\therefore \frac{1}{D+1}(e^x) = e^{-x} \int e^x e^x dx$$

$$= e^{-x} \int e^{2x} dx$$

$$= e^{-x} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right] = \frac{1}{2} e^x$$

$$m = 1$$

$$\phi(x) = e^x$$

$$y_p = \frac{1}{D-1} \left[\frac{1}{2} e^x \right] = \frac{1}{2} e^x \int e^{-x} e^x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x \int dx = \frac{1}{2} x e^x \quad (8)$$

بالتعويض من (8), (7) فى (6) :

$$y = y_c + y_p = A e^x + e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

وهى العلاقة رقم (5) [الحل المطلوب] .

مسألة :

أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \cosh x) dx$$

حل المسألة :

الحل العام للمعادلة

$$y'' + y = \cosh x \quad (1)$$

عبارة عن مجموع حلين :

$$(i) \text{ الحل المتمم } y_c [\text{ حل المعادلة المتجانسة } y'' + y = 0]$$

$$(ii) \text{ الحل الخاص } y_p [\text{ حل المعادلة غير المتجانسة } y'' + y = \cosh x]$$

أولاً : إيجاد } y_c :

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = +i \\ \searrow \lambda_2 = -i \end{matrix}$$

ويأخذ الحل أحد صورتين :

$$y_c = ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x} = ae^{ix} + be^{-ix} \quad (2)$$

$$y_c = A \cos x + B \sin x \quad (2)'$$

ثانياً : إيجاد y_p :

حل المعادلة غير المتجانسة $y'' + y = \cosh x$

بالطريقة المعتادة : إن الحل المناسب للمعادلة (1) يمكن كتابته بالصورة :

$$y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (3)$$

لإيجاد c_1, c_2 : بتفاضل (3) مرتين :

$$y_p' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \quad (4)$$

$$y_p'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (5)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{بالتعويض في (1) واعتبار أن :}$$

$$(c_1 e^x + c_2 e^{-x}) + (c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\therefore 2c_1 e^x + 2c_2 e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

بمقارنة المعاملات :

$$2c_1 = \frac{1}{2}$$

↓

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{4}}$$

$$2c_2 = \frac{1}{2}$$

↓

$$\boxed{c_2 = \frac{1}{4}}$$

بالتعويض في (3) نحصل على :

$$y_p = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right] = \frac{1}{2} \cosh x$$

ويصبح الحل النهائي :

$$y = y_c + y_p = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} \cosh x$$

وهذا الحل يجب أن يحقق المعادلة الأصلية (1) ولأثبت ذلك :

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} \cosh x$$

$$y' = -A \sin x + B \cos x + \frac{1}{2} \sinh x$$

$$y'' = -A \cos x - B \sin x + \frac{1}{2} \cosh x$$

$$y'' + y = \left(-A \cos x - B \sin x + \frac{1}{2} \cosh x \right)$$

$$+ \left(A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} \cosh x \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{2} \cosh x = \cosh x$$

حل آخر لإيجاد y_p : باستخدام خواص المؤثر D :

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 1} [\cosh x] = \frac{1}{2} \frac{1}{D^2 + 1} (e^x + e^{-x}) \quad (4)$$

نستخدم النظرية الآتية [أنظر الملحق (2) آخر الكتاب] :

$$\frac{1}{F(D)} [e^{ax}] = \frac{1}{F(a)} [e^{ax}]$$

$$\frac{1}{D^2 + 1} [e^x] = \frac{1}{(1)^2 + 1} [e^x] = \frac{1}{2} e^x$$

$$\frac{1}{D^2+1}[e^{-x}] = \frac{1}{(-1)^2+1}[e^{-x}] = \frac{1}{2}e^{-x}$$

وتصبح المعادلة (4) :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right] = \frac{1}{2} \cosh x \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

تطبيق الشروط الحدية : لإيجاد ثوابت التكامل في معادلة المنحنى :

مثال (1) : أثبت أن المنحنى الذى يصل بين النقطتين $a(0,0)$, $b\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ والذى يجعل

$$\text{التكامل : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx \text{ نهاية قصوى هو المنحنى } y = \sin x .$$

الحل : سيق حل هذا المثال وكانت النتيجة هي

$$y = a \sin(x + b) \quad (1)$$

وهنا توجد شروط حديه تستخدم لإيجاد الثابتين a, b .

$$y(0) = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{هذه الشروط هي :}$$

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطتين $a(0,0)$, $b\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ فهما تحققان معادلته ، فبالتعويض

فى (1) نجد أن :

$$0 = a \sin b \quad (2)$$

$$1 = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) \quad (2)$$

من (2) : حيث أن

$$\begin{aligned} \sin b = 0 & \leftarrow a \neq 0 \\ \therefore & \boxed{b = 0} \end{aligned}$$

بالتعويض عن b في (3) : $1 = a \sin \frac{\pi}{2} = a$ ومنها :

$$\therefore \boxed{a = 0}$$

وتصبح معادلة المنحنى (المعادلة (1)) بالصورة :

$$y = \sin x$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالي

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 + y'^2 + 2y \sin x) dx$$

في وجود الشرطين الحديين :

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

الحل : سبق حل هذا المثال وكانت النتيجة :

$$y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2} \sin x \quad (1)$$

ومن الشروط الحدية المعطاه نجد أن المنحنى يمر بالنقطتين

$$a = (0, 0), \quad b = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

هاتين النقطتين يجب أن تحقق معادلة المنحنى فبالتعويض في (1) نحصل على :

$$0 = A + B - \frac{1}{2} \sin 0 = A + B \rightarrow A + B = 0 \quad (2)$$

$$0 = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \quad (3)$$

من (2) بضرب الطرفين في $e^{\frac{\pi}{2}}$

$$\therefore Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (4)$$

من (4), (3) بالطرح :

$$Be^{\frac{\pi}{2}} - Ae^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$B \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \rightarrow B \left(2 \sinh \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore B = -\frac{1}{4 \sinh \frac{\pi}{2}}$$

$$\left| \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right.$$

ومن (2) نجد أن :

$$A = -B = \frac{1}{4 \sinh \frac{\pi}{2}}$$

وتصبح معادلة المنحنى (المعادلة 1) بعد التعويض عن A, B بالصورة الآتية :

$$y = \frac{1}{4 \sinh \frac{\pi}{2}} (e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh x}{\sinh \frac{\pi}{2}} - \sin x \right]$$

وهي معادلة المنحنى المطلوبة .

مثال (3) : أوجد معادلة المنحنى الواصل بين النقطتين $a(0,0), b(1,e)$ والذي يجعل التكامل :

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

نهاية قصوى :

الحل : هذا المثال سبق حله أيضاً ، والنتيجة هي :

$$y = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \quad (1)$$

ومن رأس المثال نجد أن المنحنى يخضع للشروط الحدية :

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e$$

المنحنى يمر بالنقطتين $a(0,0), b(1,e)$ فهما تحققان معادلته ، فبالتعويض في (1) :

$$0 = A + B \quad (2)$$

$$e = Ae + Be^{-1} + \frac{1}{2}e \quad (3)$$

بحل (3), (2) توجد A, B كالآتى :
من (3) نجد أن :

$$\frac{1}{2}e = Ae + Be^{-1} \quad (4)$$

ومن (4) بالضرب فى e^{-1} نحصل على :

$$\frac{1}{2} = A + Be^{-2} \quad (5)$$

ومن (5), (2) بالطرح نجد أن :

$$-\frac{1}{2} = B(1 - e^{-2})$$

$$\therefore B = -\frac{1}{2(1 - e^{-2})} = -\frac{e^2}{2(e^2 - 1)} \quad (6)$$

[بضرب البسط والمقام فى e^2]

ومن (2) :

$$\therefore A = -B = \frac{e^2}{2(e^2 - 1)} \quad (7)$$

بالتعويض من (7), (6) فى معادلة المنحنى (1) نحصل على :

$$y = \frac{e^2}{2(e^2 - 1)}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x$$

ولكن :

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\therefore y = \frac{e^2}{e^2 - 1} \sinh x + \frac{1}{2}xe^x$$

وهى المعادلة المطلوبة .

مثال (4) : أوجد المنحنى الواصل بين النقطتين :

$a(0,0)$, $b(1,1)$ والذى يجعل التكامل :

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$$

$$y = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh x \quad \text{نهاية قصوى بالصورة :}$$

الحل :

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx = \int_0^1 F(y, y') dx$$

حيث :

$$F(y, y') = y^2 + y'^2 \quad (1)$$

هنا F لا تعتمد صراحة على x فنستخدم الصورة الخاصة لمعادلة أولر - لاجرانج :

$$F - y F_{y'} = c \quad (2)$$

فمن (1) نجد أن :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad (3)$$

بالتعويض من (3) , (1) في (2) نحصل على :

$$y^2 + y'^2 - y'(2y') = c$$

$$\therefore y'^2 - y^2 = -c = a^2, \quad \text{مثلا}$$

$$\therefore y'^2 = a^2 + y^2 \rightarrow y' = \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{dy}{dx} \quad (4)$$

وهو التكامل الأول لمعادلة أولر - لاجرانج .

ولإيجاد التكامل الثاني :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \int dx \quad \text{من (4) بفص المتغيرات والتكامل نحصل على :}$$

$$\therefore \sinh^{-1} \frac{y}{a} = x + b$$

حيث b ثابت التكامل

$$\therefore \frac{y}{a} = \sinh(x + b) \rightarrow y = a \sinh(x + b) \quad (5)$$

وهي معادلة منحنى النهاية القصوى بدلالة الثابتين a, b

ولإيجاد الثابتان a, b : نستخدم الشروط الحدية المعطاه فى المثال

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

وبالتعويض بهذين الشرطين فى (5) :

$$0 = a \sinh b \rightarrow \sinh b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$1 = a \sinh(1 + b) = a \sinh(1)$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{1}{\sinh(1)}}$$

ولكن :

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\sinh(1) = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$$

$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$\therefore a = \frac{2e}{e^2 - 1} \quad (7)$$

وبالتعويض عن a, b فى معادلة المنحنى (المعادلة 5) نحصل على :

$$y = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh x$$

وهى المعادلة المطلوبة .

مثال (5) : أوجد المنحنى الواصل بين النقطتين $a(1,1), b\left(2, \frac{1}{2}\right)$ والذي يجعل التكامل :

$$I = \int_1^2 x^2 y'^2 dx$$

نهاية قصوى ، وذلك بالصورة : $y = \frac{1}{x}$

الحل :

$$I = \int_1^2 x^2 y'^2 dx = \int_1^2 F(x, y, y') dx$$

حيث :

$$F(x, y, y') = x^2 y'^2 \quad (1)$$

في هذه الحالة ، لكي يكون التكامل I نهاية قصوى نطبق معادلة أولر - لاجرانج في صورتها العامة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \quad (2)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{فمن (1) نجد أن :}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$$

$$-(2x^2 y')' = 0 \quad \text{بالتعويض في (2) :}$$

$$\frac{d}{dx}[2x^2 y'] = 0 \rightarrow 2x^2 y' = \text{const.} = A$$

$$\therefore y' = \frac{A}{2x^2} = \frac{dy}{dx} \quad , \quad \text{وهو التكامل الأول}$$

$$\int dy = \int \frac{A}{2x^2} dx \quad \text{وباجراء التكامل مرة ثانية نحصل على :}$$

$$\therefore \boxed{y = -\frac{A}{2x} + B} \quad (3)$$

وهي معادلة المنحنى المطلوب ، حيث A, B ثابتان .

ولإيجاد الثابتان A, B :

من الشروط الحدية للمسألة :

$$y(1) = 1, \quad y(2) = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض في (3) :

$$1 = -\frac{A}{2} + B \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{A}{4} + B \quad (5)$$

من (4), (5) بالطرح نحصل على :

$$\frac{1}{2} = -\frac{A}{4} \quad \therefore 1 = -\frac{A}{2} \rightarrow A = -2$$

وبالتعويض عن A في (4) نجد أن :

$$1 = 1 + B \rightarrow B = 1 - 1 = 0$$

وتصبح معادلة المنحنى بالصورة :

$$y = \frac{1}{x} + 0 \rightarrow y = \frac{1}{x}$$

وهو المطلوب .

إيجاد القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I :

في الأمثلة السابقة أوجدنا معادلة المنحنى الذي يجعل التكامل I نهاية قصوى ، وفي الأمثلة التالية سوف نوجد القيمة العددية لتلك النهاية القصوى .

مثال (1) : إذا كان المنحنى $y = \sin x$ هو منحنى النهاية القصوى للتكامل :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx$$

تحت الشروط الحديه $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ، فاوجد القيمة العددية للنهاية القصوى

للتكامل I .

الحل : حيث أن :

$$y = \sin x$$

[سبق حل هذا المثال بالتفصيل]

$$\therefore y' = \cos x$$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} [\sin \pi - \sin 0] = 0$$

وهي القيمة العددية للتكامل I .

مثال (2) : إذا كان المنحنى $y = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh x$ هو منحنى النهاية القصوى للتكامل

$$\therefore I = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$$

تحت الشروط الحديه :

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

$$\frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$$

فأثبت أن القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I هي :

الحل : من معادلة المنحنى :

$$y = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh x$$

[سبق حل هذا المثال بالتفصيل]

$$y' = \frac{2e}{e^2 - 1} \cosh x$$

$$\therefore I = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx = \frac{4e^2}{(e^2 - 1)^2} \int_0^1 (\sinh^2 x + \cosh^2 x) dx$$

$$= \frac{4e^2}{(e^2 - 1)^2} \int_0^1 \cosh 2x dx$$

$$= \frac{4e^2}{(e^2 - 1)^2} \left[\frac{\sinh 2x}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{2e^2}{(e^2 - 1)^2} [\sinh 2 - \sinh 0]$$

$$= \frac{2e^2}{(e^2 - 1)^2} \sinh 2$$

$$\left| \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right.$$

$$= \frac{2e^2}{(e^2 - 1)^2} \cdot \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2})$$

$$= \frac{e^4 - 1}{(e^2 - 1)^2} = \frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)}{(e^2 - 1)^2} = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : إذا كان المنحنى $y = \frac{1}{x}$ هو منحنى النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_1^2 x^2 y'^2 dx$$

تحت الشروط الحدية $y(1) = 1$, $y(2) = \frac{1}{2}$ فاوجد القيمة العددية للتكامل I .

الحل : حيث أن $y = \frac{1}{x}$ [سبق حل هذا المثال بالتفصيل] .

$$\therefore y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore I = \int_1^2 x^2 y'^2 dx = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right)^2 dx$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right)_1^2 = -\left[\frac{1}{2} - 1 \right] = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} ,$$

وهو المطلوب .

مثال (4) : عين منحنىات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

فى وجود الشروط الحدية $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ ، ثم أوجد قيمة النهاية القصوى لهذا التكامل.

الحل :

$$I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx = \int_0^1 F(x, y, y') dx$$

حيث :

$$F(x, y, y') = y'^2 + 12xy \quad (1)$$

وهنا نستخدم معادلة أولير – لاجرانج فى صورتها العامة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \quad (2)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 12x \quad , \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \quad \text{فمن (1) نجد أن :}$$

بالتعويض فى (2) :

$$12x - (2y')' = 0$$

$$\therefore 12x = 2y'' \rightarrow y'' = 6x \quad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية بسيطة نحلها بإيجاد التكامل مرتين :

$$y' = 6 \frac{x^2}{2} + a = 3x^2 + a \quad (4)$$

$$y = 3 \frac{x^3}{3} + ax + b = x^3 + ax + b \quad (5)$$

حيث a, b ثابتا التكامل .

المعادلة (5) هى معادلة المنحنى المطلوب (منحنى النهاية القصوى) ولكن بدلالة الثابتين a, b ، ولايجادهما نطبق الشروط الحدية كالآتى :

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + 0 + b \rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$y(1) = 1 \rightarrow 1 = 1 + a + 0 = 1 + a \rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\boxed{y = x^3}$$

وتصبح معادلة المنحنى بالصورة :

ولايجاد القيمة العددية للنهاية القصوى للتكامل I :

$$y = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$$

$$\therefore I = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

$$= \int_0^1 (9x^4 + 12x^4) dx = \int_0^1 (21x^4) dx$$

$$= 21 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 21 \left[\frac{1}{5} - 0 \right] = \frac{21}{5}$$

وهو المطلوب .

[4] حالات خاصة من معادلة أويلر - لاجرانج :

الحالة الأولى : الدالة F لا تحتوي على y صراحة أي أن $F = F(x, y')$:

مثال : (أ) إذا كانت الدالة F لا تحتوي على y صراحة ، بين أن منحنيات النهاية القصوى

للتكامل الدالي $I = \int_a^b F dx$ هي حلول للمعادلة التفاضلية $F_{y'} = c$ ، حيث c ثابت .

(ب) أثبت أن منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالي $I = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$ هي مجموعة

دوائر نصف قطرها ثابت .

الحل :

الجزء (أ) : في هذه الحالة فإن : $F = F(x, y')$ ويكون : $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ وتصبح

معادلة أويلر - لاجرانج بالصورة : $(F_{y'})' = 0$ ومنها : $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$ وبالتكامل نحصل

على : $F_{y'} = c$

وهي معادلة تفاضلية لا تحتوي على y ، وتعطى منحنيات النهاية القصوى في هذه الحالة ، ويمكن حلها بالطرق العادية للمعادلات التفاضلية .

الجزء (ب) : $I = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx = \int F(x, y') dx$

حيث :

$$F(x, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} \quad (1)$$

الدالة F لا تعتمد على y صراحة ، وتصبح معادلة أويلر - لاجرانج بالصورة $(F_{y'})' = 0$

ومنها : $F_{y'} = c$

ومن (1) :

$$\begin{aligned} F_{y'} &= \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} \cdot (2y') \\ &= \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = c \end{aligned}$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية :

توجد أكثر من طريقة ، وسوف نستخدم هنا طريقة التعويض :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad \leftarrow \quad y' = \tan \theta \quad \text{بوضع :}$$

$$\therefore dy = \tan \theta dx \quad (2)$$

ولكن :

$$c = \frac{y'}{x \sqrt{1+y'^2}} = \frac{\tan \theta}{x \sqrt{1+\tan^2 \theta}} = \frac{\tan \theta}{x \sec \theta}$$

$$\therefore x = \frac{\tan \theta}{c \sec \theta} = \frac{\sin \theta}{c}$$

$$\text{وبأخذ : } \frac{1}{c} = a \quad \text{نجد أن :}$$

$$x = a \sin \theta \quad (3)$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

من (3) بتفاضل الطرفين :

وبالتعويض في (2) :

$$dy = \tan \theta (a \cos \theta d\theta)$$

$$= a \sin \theta d\theta$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\therefore y = -a \cos \theta + b \quad (4)$$

المعادلتان (4) , (3) هما المعادلتان البارامتريتان لمنحنيات النهاية القصوى المطلوبة .

من (3) بالتربيع :

$$x^2 = a^2 \sin^2 \theta \quad (5)$$

$$y - b = -a \cos \theta \quad \text{ومن (4) :}$$

وبالتربيع :

$$(y - b)^2 = a^2 \cos^2 \theta \quad (6)$$

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad \text{بجمع (5) , (6) :}$$

وهي معادلة مجموعة دوائر مركزها $(0, b)$ ونصف قطرها a ثابت .

وهو المطلوب .

الحالة الثانية: الدالة F دالة في y' فقط أى أن $F = F(y')$:

مثال: (أ) إذا كانت الدالة F فى التكامل الدالى $I = \int_a^b F dx$ هى دالة فى y' فقط فاثبت

أن منحنيات النهاية القصوى هى خطوط مستقيمة .

(ب) أوجد القيمة القصوى لطول المنحنى $y = y(x)$ الواصل بين النقطتين $a(0,0)$, $b(2,4)$ والمعروف بواسطة العلاقة:

$$\ell[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

الحل:

الجزء (أ): فى هذه الحالة: $F = F(y')$ وبالتالي فإن: $F_y = 0$ وتصبح معادلة أولر-

لاجرانج بالصورة $(F_{y'})' = 0$

$$\therefore \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 \rightarrow \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\therefore F_{yy'} y'' = 0 \quad \left| \quad F_{yy'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \right.$$

ومن ذلك يتضح أن: $y'' = 0$ أو $F_{yy'} = 0$ ولكن

$$\therefore y'' = 0 \quad \leftarrow \quad F_{yy'} \neq 0$$

$$\therefore \frac{dy'}{dx} = 0 \rightarrow y' = B \rightarrow \frac{dy}{dx} = B$$

$$\therefore dy = B dx \rightarrow y = Bx + A \quad (1)$$

وهى معادلة مجموعة خطوط مستقيمة بدلالة الثابتين A, B

الجزء (ب):

$$\ell[y(x)] = I = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^b F(y') dx$$

$$\therefore F(y') = \sqrt{1 + y'^2} \quad (2)$$

من (2) يتضح أن الدالة F تعتمد على y' فقط وبالتالي فإن منحنيات النهاية القصوى تكون

مجموعة الخطوط المستقيمة $y = A + Bx$ [المعادلة (1)]

ولأيجاد A, B :

حيث أن المنحنى يمر بالنقطتين $(0, 0)$, $(2, 4)$

$$\therefore 0 = A + 0 \rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$4 = A + 2B = 0 + 2B \rightarrow \boxed{B = 2}$$

$$y = 2x$$

وتصبح معادلة المنحنى:

وهو منحنى النهاية القصوى ، ولأيجاد القيمة العددية لهذه النهاية القصوى (أى طول المنحنى):

$$y = 2x \rightarrow y' = 2$$

$$\therefore \ell[y(x)] = \int_0^2 \sqrt{1+4} dx = \int_0^2 \sqrt{5} dx$$

$$= \sqrt{5}[x]_0^2 = 2\sqrt{5}$$

وهو المطلوب .

الحالة الثالثة: الدالة F لا تعتمد على x صراحة أى أن: $F = F(y, y')$

مثال: (أ) إذا كانت الدالة F لا تعتمد صراحة على x فثبت أن معادلة أويلر – لاجرانج

يمكن كتابتها بالصورة:

$$F - y' F_{y'} = c$$

(ب) أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_a^b \frac{1+y'^2}{y'^2} dx$$

الحل:

الجزء (أ): نبدأ الحل من معادلة أويلر – لاجرانج:

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \quad (1)$$

ولكن:

$$(F_{y'})' = \frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{d}{dx} F_{y'}(y, y')$$

$$= \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

$$= F_{yy} y' + F_{yy'} y'' \quad (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) نجد أن :

$$F_y - F_{yy} y' - F_{yy'} y'' = 0 \quad (3)$$

وحيث أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [F - y' F_{y'}] &= \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} (y' F_{y'}) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \right) - \left(y' \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + y'' F_{y'} \right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \right) - y' \left(\frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \right) - y'' F_{y'} \\ &= (F_y y' + F_{y'} y'') - y' (F_{yy} y' + F_{yy'} y'') - y'' F_{y'} \\ &= y' (F_y - y' F_{yy} - y'' F_{yy'}) = y' (0) = 0, \end{aligned} \quad \text{من (3)}$$

وبالتكامل نحصل على :

$$F - y' F_{y'} = c \quad (4)$$

حيث c ثابت التكامل ، وهو المطلوب الأول .

الجزء (ب) :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2} dx = \int_a^b F(y, y') dx \\ F(y, y') &= \frac{1+y^2}{y'^2} \end{aligned} \quad (5)$$

وهنا الدالة F لا تعتمد على x صراحة ، فنستخدم العلاقة رقم (4) [الحالة الخاصة من

معادلة أولير - لاجرانج]

فمن (5) نجد أن :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = (1+y^2) \cdot (-2y'^{-3}) = \frac{-2(1+y^2)}{y'^3}$$

بالتعويض في (4) نحصل على :

$$\frac{1+y^2}{y'^2} - y' \left[\frac{-2(1+y^2)}{y'^3} \right] = c$$

$$\therefore \frac{1+y^2}{y'^2} + 2 \frac{(1+y^2)}{y'^2} = c \rightarrow \frac{3(1+y^2)}{y'^2} = c$$

$$1+y^2 = \frac{c}{3} y'^2 = a^2 y'^2 \rightarrow y^2 = a^2 y'^2 - 1$$

$$\left| \frac{c}{3} = a^2 \right.$$

$$\therefore a^2 y'^2 = y^2 + 1 \rightarrow y'^2 = \frac{y^2 + 1}{a^2}$$

$$\therefore y' = \frac{1}{a} \sqrt{y^2 + 1} = \frac{dy}{dx}$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية :

توجد أكثر من طريقه ، وسوف نستخدم هنا طريقه الحل البارامترى وذلك بكتابة :

$$y = \sinh \theta \quad (6)$$

$$y^2 = \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta - 1 = a^2 y'^2 - 1$$

$$\therefore \cosh^2 \theta = a^2 y'^2 \rightarrow \cosh \theta = a y' \quad (7)$$

ومن (6)' نجد أن :

$$dy = \cosh \theta d\theta$$

ومن (7) أيضاً نجد أن :

$$dy = \frac{1}{a} \cosh \theta d\theta \quad \leftarrow \quad y' = \frac{1}{a} \cosh \theta$$

$$\therefore \cosh \theta d\theta = \frac{1}{a} \cosh \theta dx \rightarrow dx = a d\theta$$

وبالتكامل نحصل على :

$$x = a \theta + b \quad (8)$$

المعادلتان (8) ، (6) هما المعادلتان البارامتريتان لمنحنيات النهاية القصوى ، ولايجاد المعادلة الكرتيزية :

نحذف البارامتر θ بين المعادلتين (8) ، (6) كالاتى :

من (8) :

$$\theta = \frac{x - b}{a}$$

وبالتعويض في (6) نحصل على :

$$y = \sinh \frac{x-b}{a}$$

وهو المطلوب .

الحالة الرابعة : معادلة أولر - لاجرانج للدوال الخطية :

إذا كانت الدالة $F(x, y, y')$ دالة خطية في المتغير y' فإنها تكتب بالصورة :

$$F(x, y, y') = P(x, y) + y' Q(x, y) \quad (1)$$

حيث P, Q دالتان في x, y فقط .

المطلوب : إثبات أن معادلة أولر - لاجرانج للدالة الخطية (1) تكون بالصورة :

$$P_y - Q_x = 0$$

حيث :

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

الإثبات : نعتبر التكامل :

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

حيث F دالة خطية في y' (المعادلة (1)) فإذا كان التكامل I نهاية قصوى ، فيجب تطبيق معادلة أولر - لاجرانج بالصورة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0$$

ولكن : من (1) :

$$F = P + y' Q$$

$$\therefore F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (2)$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = Q$$

$$\therefore (F_{y'})' = \frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{dQ}{dx} \quad (3)$$

وتصبح معادلة أولر - لاجرانج :

$$\frac{\partial P}{\partial y} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (4)$$

وحيث أن : $Q = Q(x, y)$

$$\therefore dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy$$

$$\therefore \frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (4) :

$$\frac{\partial P}{\partial y} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + y' \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\therefore P_y - Q_x = 0$$

وهي صورة معادلة أولر – لاجرانج للدالة الخطية :

$$F = P + y' Q$$

وهو المطلوب .

[5] المسائل ذات القيم المثلى : Optimal Problems

في المسائل ذات التطبيقات العملية ، عادة ما يكون المطلوب هو : إيجاد قيم النهاية الصغرى ، لأنها الأكثر ملائمة للواقع العملي بسبب قيمتها المحدودة . وأشهر تلك المسائل 3 مسائل تعرف بالمسائل ذات القيم المثلى ، وهي :

(1) مسألة أقصر مسافة : وفيها نوجد أقصر مسافة (أو بعد) بين نقطتين .

(2) مسألة أقل مساحة : وفيها نوجد أقل مساحة لسطح ينتج عن دوران منحنى .

(3) مسألة أقصر زمن : وفيها نوجد أقل زمن يتحرك فيه جسيم على منحنى معين ولمسافة معينة . وتعرف المسألة الأخيرة بمسألة برنولى أو مسألة البراخيستوكرون (Brachistocron)

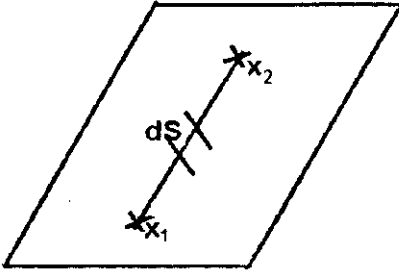
[كلمة يونانية معناها : براخيستوس = أقصر ، كرونوس = زمن]

المسألة الأولى: مسألة أقصر بعد

أثبت أن أقصر مسافة بين نقطتين في المستوى تمثل بخط مستقيم

الحل :

عصر الطول في المستوى (xy)



$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \sqrt{1 + y'^2} dx \end{aligned} \quad (1)$$

ويكون الطول الكلى لأى منحنى يصل بين النقطتين x_1, x_2 هو :

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (2)$$

حيث :

$$F = \sqrt{1 + y'^2} \quad (3)$$

شرط أن تكون ℓ أقل ما يمكن (أقصر مسافة) هو أن يكون التكامل الدالى فى (2) نهاية صغرى ، وذلك يأتى بتطبيق معادلة أولير - لاجرانج على الدالة F .

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \quad (4)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{ومن (3):}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2\sqrt{1 + y'^2}} (2y') = \frac{y'}{2\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$(F_{y'})' = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 : (4) \text{ بالتعويض فى}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = 0$$

وبإجراء التكامل نحصل على :

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \quad (5)$$

حيث c ثابت التكامل .

المعادلة (5) تمثل التكامل الأول لمعادلة أويلر - لاجرانج

ولابجاء التكامل الثانى : بتربيع طرفى (5) نجد أن :

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = c^2 \rightarrow y'^2 = c^2(1+y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

$$\therefore y'^2(1-c^2) = c^2 \rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{1-c^2}$$

$$\therefore y' = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \text{const.} = a = \frac{dy}{dx} \therefore dy = a dx$$

$$\therefore \int dy = a \int dx \rightarrow y = ax + b \quad (6)$$

حيث b ثابت التكامل .

المعادلة (6) هى معادلة المنحنى المطلوب ، وهى معادلة خط مستقيم وهذا يعنى أن أقصر

بعد بين النقطتين فى المستوى هو خط مستقيم .

وهو المطلوب .

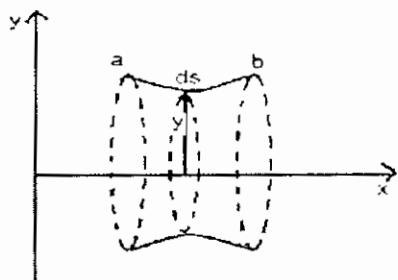
المسألة الثانية : مسألة أقل مساحة :

إذا دار منحنى يصل بين نقطتين حول أحد المحورين x أو y فإن المنحنى الذى يجعل المساحة

الناتجة عن الدوران أقل مساحة ممكنة هو منحنى السلسلة (الكثينة) ومعادلته هى :

$$y = a \cosh \frac{x+b}{a} \quad (i) \text{ إذا كان الدوران حول محور } x :$$

$$x = a \cosh \frac{y+b}{a} \quad (ii) \text{ إذا كان الدوران حول محور } y :$$



انحل :

أولا : إذا كان الدوران حول محور x :

المساحة الناتجة عن دوران العنصر ds من المنحنى حول محور x هى :

$$dA = (2\pi y) \cdot (ds)$$

المساحة = السمك $\times$ المحيط

المساحة الكلية (مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى حول محور x):

$$\begin{aligned}
 A &= \int dA = \int 2\pi y \, ds \\
 &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} \, dx \\
 &= 2\pi \int_a^b F \, dx \rightarrow F = y \sqrt{1+y'^2}
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l} ds = \sqrt{1+y'^2} \, dx \\ \text{عنصر الطول} \end{array} \right.
 \quad (1)$$

ولكى تكون المساحة A أقل ما يمكن ، يجب تطبيق معادلة أولر - لاگرانج على الدالة F ، حيث التكامل فى A نهاية صغرى .

ومن (1) نجد أن F لا تعتمد صراحة على x فنطبق عليها الحالة الخاصة من معادلة أولر - لاگرانج وصورتها :

$$F_y - y' F_{y'} = c \quad (2)$$

ومن (1) :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = y \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} (2y') = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض فى (2) :

$$y \sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$\therefore \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \rightarrow \frac{y^2}{1+y'^2} = c^2$$

$$y^2 = c^2(1+y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

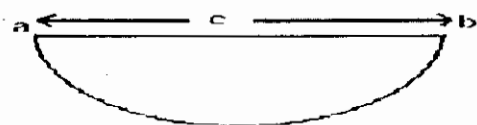
$$y'^2 = \frac{y^2 - c^2}{c^2} \rightarrow y' = \frac{1}{c} \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{x}$$

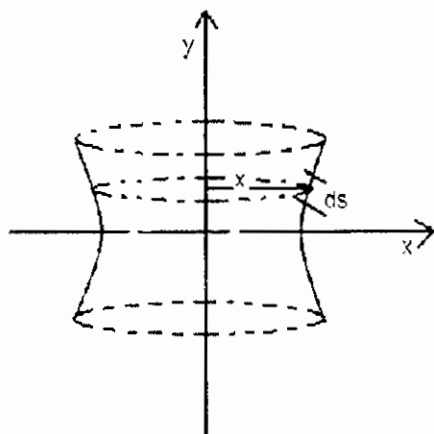
$$\therefore \cosh^{-1} \frac{y}{c} = \frac{x}{c} + d = \frac{x+cd}{c} = \frac{x+b}{c}, \quad b = cd$$

$$\therefore \frac{y}{c} = \cosh\left(\frac{x+b}{c}\right) \rightarrow y = c \cosh \frac{x+b}{c}$$



وهي معادلة المنحنى المطلوب .
وهو منحنى السلسلة (الكثينة)

∴ منحنى السلسلة هو المنحنى الذى يعطى أقل مساحة عند دورانه حول محور x .



ثانياً : إذا كان الدوران حول محور y :

المساحة الناتجة عن دوران العنصر ds حول محور y هي :

$$dA = (2\pi x) \cdot (ds) = 2\pi x \sqrt{1+y'^2} dx$$

المساحة الكلية :

$$A = 2\pi \int x \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int F dx$$

$$F = x \sqrt{1+y'^2}$$

ولكى تكون المساحة A أقل ما يمكن نطبق معادلة أويلر - لاگرانج وحيث أن :

$F = x \sqrt{1+y'^2}$ أى أنها تعتمد على x, y, y' فنستخدم معادلة أويلر - لاگرانج فى

صورتها العامة :

$$F_y - (F_{y'})' = 0 \quad (1)$$

حيث :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض فى (1) :

$$\therefore (F_{y'})' = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \quad (2)$$

وهو التكامل الأول للمعادلة (1) .

ولإيجاد التكامل الثانى : من (2) بالتربيع :

$$\therefore \frac{x^2 y'^2}{1+y'^2} = c^2$$

$$\therefore x^2 y'^2 = c^2 (1+y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

$$\therefore y'^2 (x^2 - c^2) = c^2 \rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{x^2 - c^2}$$

$$\therefore y' = \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} = \frac{dy}{dx}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int dy = c \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - c^2}}$$

$$\therefore y + b = c \cosh^{-1} \frac{x}{c} \rightarrow \cosh^{-1} \frac{x}{c} = \frac{y + b}{c}, \quad \text{حيث } b \text{ ثابت التكامل}$$

$$\therefore \frac{x}{c} = \cosh \frac{y + b}{c} \rightarrow x = c \cosh \frac{y + b}{c}$$

وهى معادلة المنحنى المطلوب (وهو منحنى السلسلة) .

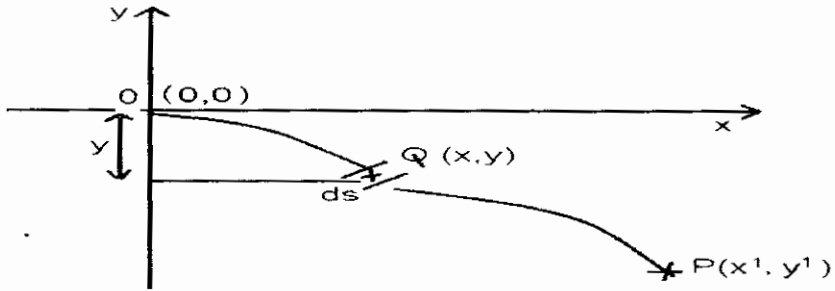
المسألة الثالثة : مسألة أقل زمن (البراخيستوكرون)

ينزل جسيم (من السكون) تحت تأثير الجاذبية على منحنى يصل بين نقطتين ثابتتين فى المستوى .

المطلوب : استخدام معادلة أولر – لاجرانج لإيجاد شكل المنحنى بحيث يكون الزمن اللازم لهبوط الجسيم هو أقل زمن ممكن .

الحل :

المنحنى يصل بين النقطتين $0, p$ الثابتتين



الزمن اللازم لكي يقطع الجسم المسافة ds على المنحنى

$$dt = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{ds}{v} \quad (1)$$

حيث : ds عنصر الطول ويعطى بالعلاقة :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2)$$

ولإيجاد v (السرعة عند O) :

نستخدم قانون حفظ الطاقة في الديناميكا .

$$(الطاقة الكلية)_0 = (الطاقة الكلية)_Q$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(طاقة الحركة + طاقة الجهد)_0 = (طاقة الحركة + طاقة الجهد)_Q$$

$$0 + 0 = (-mgy) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mgy \rightarrow v^2 = 2gy \rightarrow v = \sqrt{2gy} \quad (3)$$

بالتعويض من (3) , (2) في (1) :

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

ويكون الزمن الكلى للوصول من 0 إلى P هو :

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^T \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int F dx$$

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} \quad (4)$$

لكي يكون الزمن T أقل ما يمكن (نهاية صغرى) يجب أن تحقق الدالة F معادلة أولر-لاجرانج .

وحيث أن F لا تعتمد على x صراحة فنطبق الحالة الخاصة وصورتها :

$$F - y' F_{y'} = c \quad (5)$$

ومن (4) :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض في (5) نحصل :

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c$$

$$\therefore \frac{(1+y'^2) - y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c \rightarrow \sqrt{y(1+y'^2)} = \frac{1}{c} = \sqrt{d} = \text{const.} \quad (\text{ثابت})$$

$$\therefore y(1+y'^2) = d \rightarrow 1+y'^2 = \frac{d}{y} \rightarrow y'^2 = \frac{d}{y} - 1 = \frac{d-y}{y}$$

$$\therefore y' = \sqrt{\frac{d-y}{y}} = \frac{dy}{dx} \rightarrow \int dx = \int \sqrt{\frac{y}{d-y}} dy \quad (6)$$

ولإيجاد التكامل في (6) : نستخدم التعويض الآتي (إزالة الجذر) :

$$y = d \sin^2 \theta$$

$$dy = 2d \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int \sqrt{\frac{y}{d-y}} dy &= \int \sqrt{\frac{d \sin^2 \theta}{d(1-\sin^2 \theta)}} (2d \sin \theta \cos \theta d\theta) \\
&= \int \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} (2d \sin \theta \cos \theta d\theta) \\
&= \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (2d \sin \theta \cos \theta d\theta) \\
&= 2d \int \sin^2 \theta d\theta \\
&= 2d \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
&= d \int (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
&= d \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] + \alpha \\
&= \frac{d}{2} [2\theta - \sin 2\theta] + \alpha
\end{aligned}$$

وتصبح (6) بالصورة :

$$x = \frac{d}{2} [2\theta - \sin 2\theta] + \alpha$$

ولإيجاد α : في البداية :

$$x = 0, \quad \theta = 0 \rightarrow \therefore \alpha = 0$$

$$\therefore x = \frac{d}{2} [2\theta - \sin 2\theta]$$

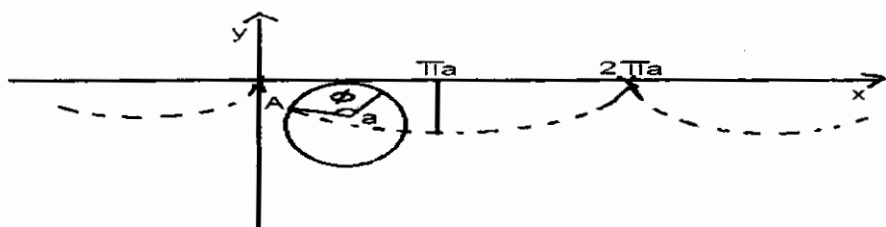
وبكتابة : $\frac{d}{2} = a$ ، $2\theta = \phi$ نحصل على :

$$\therefore x = a(\phi - \sin \phi) \quad (7)$$

أيضاً : حيث أن

$$\begin{aligned}
y &= d \sin^2 \theta = d \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \\
&= \frac{d}{2} (1 - \cos 2\theta) = a(1 - \cos \phi) \quad (8)
\end{aligned}$$

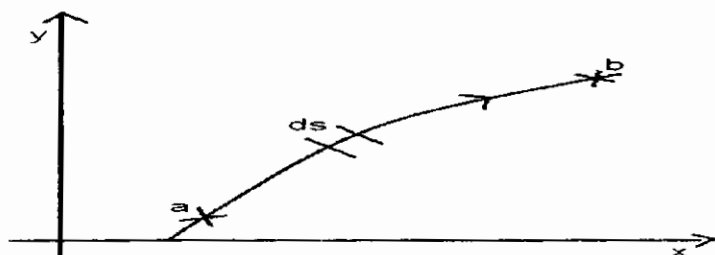
المعادلتان (8) ، (7) هما المعادلتان البارامترتان للمسار (المنحنى الذى يجعل الزمن T أقل ما يمكن) ، ويعرف هذا المنحنى بمنحنى السيكلويد (الدويرى) ، وهو مسار نقطة ثابتة A على محيط دائرة تتحرك على محور x .



(٦) [تطبيق حساب التغيرات فى علم الضوء : (مبدأ فيرمات)

ينص مبدأ فيرمات فى علم الضوء على الآتى :

" ينتقل شعاع الضوء فى وسط ما بين نقطتين فى المستوى بحيث يكون زمن انتقاله أقل زمن ممكن " .



نفرض أن شعاع الضوء ينتقل فى وسط معين بين النقطتين a, b فى المستوى (xy) بسرعة v ، حيث : $v = v(x, y)$ بوجه عام .
زمن انتقال شعاع الضوء من a إلى b هو :

$$T = \int_a^b \frac{ds}{v}$$

حيث المسافة ds هى عنصر الطول فى المستوى (xy)

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx = \int_a^b F(z, y, y') dx \quad (1)$$

حيث :

$$F(z, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} \quad (2)$$

وطبقاً لقاعدة فيرمات : فإن الزمن T يكون أقل ما يمكن ، أى أن التكامل فى (1) يكون نهاية صغرى ، وشرط ذلك فى حساب التغيرات أن الدالة F التى نكاملها يجب أن تحقق معادلة أولر – لاجرانج وصورتها :

$$(F_{y'})' - F_y = 0$$

ونكمل الحل كما سبق فى الأمثلة المختلفة التالية .

أمثلة محلولة على مبدأ فيرمات :

مثال (1) : باعتبار أن زمن انتقال شعاع الضوء بين نقطتين فى المستوى (xy) هو :

$$T = \int F dx \quad \text{حيث} \quad F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)} \quad , \quad \text{وبتطبيق مبدأ فيرمات فى علم الضوء ، أثبت}$$

أن: مسار حركة شعاع الضوء يعطى بالمعادلة التفاضلية الآتية :

$$vy'' + (1+y'^2)^2 v_y - y'(1+y'^2)v_x = 0$$

حيث :

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

الحل : حيث أن :

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} \quad (1)$$

شرط أن يكون الزمن T أقل ما يمكن هو أن الدالة $F(x, y, y')$ تحقق معادلة أولر – لاجرانج

$$(F_{y'})' - F_y = 0 \quad (2)$$

فمن (1) نجد أن :

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2} \left(-\frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} v_y \end{aligned} \quad (3)$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} \cdot 2y' \right)$$

$$= \frac{y'}{v \sqrt{1+y'^2}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (F_{y'})' &= \frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{v \sqrt{1+y'^2}} \right) \\ &= \frac{v \sqrt{1+y'^2} \cdot (y'') - y' \left[v \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} (2y'y'') + 2\sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right]}{v^2(1+y'^2)} \\ &= \frac{vy'' \left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right] - y' \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2(1+y'^2)} \\ &= \frac{vy'' \left[\frac{(1+y'^2) - y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right] - \frac{y'(1+y'^2)}{(1+y'^2)} \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2(1+y'^2)} \\ &= \frac{vy'' - y'(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5) \end{aligned}$$

بالتعويض من (5)، (3) في (2) نجد أن :

$$\frac{vy'' - y'(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} v_y = 0$$

بالضرب في $v^2(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ نحصل على :

$$vy'' - y'(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} + (1+y'^2) v_y = 0 \quad (6)$$

وهي معادلة المسار المطلوبة .

مثال (2) : باعتبار معادلة المسار لشعاع الضوء (المعادلة رقم (6)) ، وبأخذ $v = y$ أثبت

أن مسار شعاع الضوء هو عبارة عن مجموعة دوائر ذات نصف قطر ثابت .

الحل : هنا :

$$v = y$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

بالتعويض في معادلة المسار (6) نحصل على :

$$yy'' - y'(1 + y'^2).y' + (1 + y'^2)^2 = 0$$

$$\therefore yy'' - y'^2(1 + y'^2) + (1 + 2y'^2 + y'^4) = 0$$

$$\therefore yy'' + y'^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

ولإيجاد معادلة المسار المطلوبة (علاقة بين y, x) :

يجب حل المعادلة التفاضلية رقم (1) وذلك بوضع :

$$y'' = y' \frac{dy'}{dy}$$

$$\left[y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y' \frac{dy'}{dy} \right]$$

وتصبح المعادلة (1) بالصورة :

$$yy' \frac{dy'}{dy} + (y'^2 + 1) = 0$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{y' dy'}{(1 + y'^2)} = - \frac{1}{2} \int \frac{2y' dy'}{(1 + y'^2)}$$

$$\therefore \ln y = - \frac{1}{2} \ln(1 + y'^2) + c$$

$$= \ln(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$\therefore \ln \frac{y}{(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}} = c = \ln a$$

$$\therefore \frac{y}{(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}} = a \rightarrow y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = a$$

بتربيع الطرفين :

$$y^2(1+y'^2)=a^2$$

$$\therefore y^2 y'^2 = a^2 - y^2$$

$$\therefore y'^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2} \rightarrow y' = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad (2)$$

وهو التكامل الأول للمعادلة (1) .

ولإيجاد التكامل الثاني :

من (2) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على :

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2} \int (-2y dy) (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \int dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \left[\frac{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] = x + b$$

$$\therefore -(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = x + b$$

بالتربيع :

$$(a^2 - y^2) = (x + b)^2$$

$$\therefore (x + b)^2 + y^2 = a^2$$

وهي معادلة مجموعة دوائر ذات نصف قطر ثابت (a) .

وهو المطلوب .

مسألة :

باعتبار معادلة المسار لشعاع الضوء (المعادلة رقم (6) في المثال (1)) وبأخذ $v = \frac{1}{y}$ ،

أثبت أن مسار شعاع الضوء هو عبارة عن منحنيات السلسلة (الكتينة) وصورتها :

$$y = a \cosh \frac{x+b}{a}$$

حيث a, b ثابتان .

حل المسألة : بأخذ $v = \frac{1}{y}$ والتعويض في معادلة المسار نحصل على :

$$\frac{y''}{y} - y'(1+y'^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \right) + (1+y'^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) = 0$$

$$\therefore \frac{y''}{y} - y'(1+y'^2) \left(-\frac{1}{y^2} y' \right) + (1+y'^2)^2 \left(-\frac{1}{y^2} \right) = 0$$

بالضرب في y^2 :

$$yy'' + y'^2(1+y'^2) - (1+y'^2)^2 = 0$$

$$\therefore yy'' + y'^2 + y'^4 - (1 + 2y'^2 + y'^4) = 0 \rightarrow yy'' - 1 - y'^2 = 0 \quad (1)$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية : نضع

$$yy' \frac{dy'}{dy} - 1 - y'^2 = 0 \leftarrow y'' = y' \frac{dy'}{dy}$$

$$\therefore yy' \frac{dy'}{dy} = 1 + y'^2 \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{y' dy'}{1 + y'^2}$$

وباجراء التكامل نحصل على :

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(1 + y'^2) + c = \ln(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} + \ln a$$

$$\therefore \ln \frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \ln a \rightarrow \frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} = a$$

$$\therefore y = a(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y^2 = a^2(1 + y'^2) = a^2 + a^2 y'^2$$

$$\therefore a^2 y'^2 = y^2 - a^2 \rightarrow ay' = \sqrt{y^2 - a^2}$$

$$\therefore y' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\therefore \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \int dx$$

$$\therefore \cosh^{-1} \frac{y}{a} = \frac{1}{a}(x + b) \rightarrow \frac{y}{a} = \cosh \frac{x + b}{a}$$

$$\therefore y = a \cosh \frac{x + b}{a}$$

وهي معادلة منحنيات السلسلة (الكتينة) المعروفة :
وهو المطلوب .

مثال (3) : باعتبار أن زمن انتقال شعاع الضوء بين نقطتين في المستوى هو : $T = \int F dx$

حيث : $F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}$ ، v سرعة شعاع الضوء ، وبتطبيق مبدأ فيرمات ، أدرس الحالتين الخاصتين :

$$(i) \ v = y \qquad (ii) \ v = \frac{1}{y}$$

وذلك بدون استخدام المعادلة التفاضلية لمسار شعاع الضوء (المعادلة (6) - مثال (1)).

الحل :

$$\boxed{v = y} \quad \text{الحالة الأولى : عندما}$$

$$\therefore F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} = F(y, y') \quad (1)$$

أى أن F لا تعتمد صراحة على x ، فنستخدم الحالة الخاصة من معادلة أولر - لاجرانج وصورتها :

$$F - y' F_{y'} = c \quad (2)$$

ومن (1) نجد أن :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{y} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$$

وبالتعويض في (2) نحصل على :

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = c$$

بضرب الطرفين في $y\sqrt{1+y'^2}$ نحصل على :

$$(1+y'^2) - y'^2 = cy\sqrt{1+y'^2}$$

$$\therefore 1 = cy\sqrt{1+y'^2}$$

بالتربيع :

$$\therefore y^2(1+y'^2) = \frac{1}{c^2} = a^2$$

$$\therefore y^2 + y^2 y'^2 = a^2 \rightarrow y^2 y'^2 = a^2 - y^2$$

$$\therefore y'^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2} \rightarrow y' = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{dy}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل :

$$\therefore \int \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \int dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \int (-2y dy)(a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \int dx$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \left[\frac{(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] = x + b$$

$$\therefore -(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = x + b$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :

$$(a^2 - y^2) = (x + b)^2$$

$$\therefore (x + b)^2 + y^2 = a^2$$

وهي المعادلة المطلوبة (معادلة مسار شعاع الضوء في هذه الحالة) ، وواضح أنها تمثل مجموعة دوائر ذات نصف قطر a .

$$v = \frac{1}{y}$$

الحالة الثانية : عندما

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\frac{1}{y}} = y \sqrt{1 + y'^2} = F(y, y') \quad (1)$$

وهنا نستخدم أيضاً الحالة الخاصة من معادلة أويلر – لاجرانج وهي :

$$F - y' F_{y'} = c \quad (2)$$

ومن (1) :

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

وبالتعويض في (2) :

$$y \sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

وبالضرب في $\sqrt{1 + y'^2}$ نحصل على :

$$y(1 + y'^2) - yy'^2 = c \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\therefore y = c \sqrt{1 + y'^2}$$

وبالتربيع نجد أن :

$$\therefore y^2 = c^2(1 + y'^2) = c^2 + c^2 y'^2$$

$$\therefore c^2 y'^2 = y^2 - c^2$$

$$\therefore y'^2 = \frac{y^2 - c^2}{c^2} \rightarrow y' = \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - c^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \int dx$$

$$\therefore \cosh^{-1} \frac{y}{c} = \frac{1}{c} (x + b)$$

$$\therefore \frac{y}{c} = \cosh \frac{x + b}{c}$$

$$\therefore y = c \cosh \frac{x + b}{c}$$

وهي معادلة مسار شعاع الضوء في هذه الحالة ، وواضح أنها تمثل معادلة منحنيات السلسلة (الكثينة) .

[7] تعميمات معادلة أويلر – لاجرانج :

(1) حالة وجود مشتقة ثانية للدالة y :

مثال : إذا كانت الدالة F هي دالة في x, y, y', y'' أي إذا كانت

$$F = F(x, y, y', y'')$$

حيث :

$$y' = \frac{dy}{dx} , \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

فإن معادلة أويلر – لاجرانج تأخذ الصورة الآتية :

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \quad \text{أي الصورة :}$$

ملحوظة : إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن $F_y - (F_{y'})' = 0$ وهي معادلة أويلر –

لاجرانج في صورتها المعتادة وتعتبر حالة خاصة من (1) :

إثبات (1) :

نعتبر التكامل الدالي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') dx$$

شرط أن يكون لهذا التكامل نهاية قصوى هو : $\delta I = 0$

$$\therefore \delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = 0 \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = 0$$

ومن تعريف δF حيث $F = F(x, y, y', y'')$ فإن :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \quad (3)$$

بالتعويض في (2) نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' \right] dx = 0$$

وبإجراء عمليتي تكامل بالتجزئ على الحدين الثاني والثالث نحصل على :

أولاً : التكامل على الحد الثاني :

باعتبار أن :

$$\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y) , \quad \delta y|_{x_1} = \delta y|_{x_2} = 0$$

$$\therefore \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d(\delta y)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y d \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y d \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (5)$$

ثانيا : التكامل على الحد الثالث :

باعتبار أن :

$$\delta y'' = \frac{d}{dx}(\delta y') , \quad \delta y'|_{x_1} = \delta y'|_{x_2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \frac{d}{dx}(\delta y') dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} d(\delta y') \\ &= \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y' d \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y' d \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y' dx \end{aligned} \quad (6)$$

للتخلص من $\delta y'$ [تحويلها إلى δy] :

نعوض بالعلاقة $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$ في (6) فنحصل على :

$$\begin{aligned} \therefore \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \frac{d}{dx}(\delta y) dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) d(\delta y) \\ &= - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y d \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right\} \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta y d \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} \delta y \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right\} dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx \quad (7)
\end{aligned}$$

بالتعويض من (7) ، (5) فى (4) نحصل على :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right] \delta y dx = 0$$

ومن نظرية سابقة : حيث أن δy إختيارية فإن :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0$$

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0$$

وهو المطلوب .

(2) حالة وجود مشتقات أعلى من الثانية للدالة y

[معادلة أولير – بواسون]

إذا كانت الدالة F تعطى بالصورة :

$$F = F(x, y, y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)})$$

حيث $y^{(n)}$ هي المشتقة النونية للدالة y فإن شرط أن يكون للتكامل الدالى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad \text{نهاية قصوى هو أن تتحقق المعادلة الآتية :}$$

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' - (F_{y'''})''' + \dots + (-1)^n (F_{y^{(n)}})^{(n)} = 0$$

وهذه المعادلة تمثل الصورة العامة لمعادلة أولير – لاجرانج فى حالة وجود مشتقات أعلى من

الثانية للدالة y ، وتعرف بمعادلة أولير – بواسون (Euler-Poisson Equation)

حالة خاصة : إذا كانت $F = F(x, y, y')$ فإن $F_{y''}$ والمشتقات الأعلى تتلاشى ، ونحصل

على :

$$F_y - (F_{y'})' = 0$$

وهى معادلة أولير – لاجرانج .

مثال : باستخدام معادلة أويلر - بواسون ، أوجد منحنى النهاية القصوى للتكامل الدالى

$$I = \int_0^1 (1 + y''^2) dx$$

مع الشروط الحدية :

$$y(0) = 0 , y(1) = 1 , y'(0) = 1 , y'(1) = 1$$

الحل : معادلة أويلر - بواسون

$$F = F(x, y, y', y'') \leftarrow F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \quad (1)$$

$$I = \int_0^1 F dx , F = 1 + y''^2 = F(x, y'') \quad (2)$$

(لا يوجد اعتماد على y, y' فى الدالة F)

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 , F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

وتؤزل المعادلة (1) إلى :

$$(F_{y''})'' = 0 \quad (3)$$

ومن (2) نجد أن :

$$F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

$$(2y'')'' = 0 \quad \text{بالتعويض فى (3) نحصل على :}$$

$$\therefore 2y^{(4)} = 0 \rightarrow y^{(4)} = 0 \rightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad (4)$$

وهذه معادلة تفاضلية من الدرجة الرابعة يمكن حلها بالتكامل أربع مرات للحصول على y وينتج لدينا 4 ثوابت .

بالتكامل بالنسبة إلى x :

$$y^{(3)} = y''' = c_1 \quad \text{التكامل الأول :}$$

$$y^{(2)} = y'' = c_1 x + c_2 \quad \text{التكامل الثانى :}$$

$$y^{(1)} = y' = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad \text{التكامل الثالث :}$$

$$y = c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad \text{التكامل الرابع :}$$

وبكتابة الثوابت بالصورة الآتية :

$$\frac{c_1}{6} = a, \quad \frac{c_2}{2} = b, \quad c_3 = c, \quad c_4 = d$$

$$\therefore y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (5)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (4) وهى فى نفس الوقت معادلة منحنى النهاية القصوى

المطلوبة ولكن بدلالة الثوابت a, b, c, d .

ولإيجاد هذه الثوابت : نستخدم الشروط الحدية المعطاه

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = 1$$

فمن (5) بالتفاضل نحصل على :

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \quad (6)$$

بالتعويض بالشروط الحدية فى (5), (6) :

$$y(0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + 0 + 0 + d \rightarrow \boxed{d = 0} \quad (7)$$

$$y(1) = 1 \rightarrow 1 = a + b + c \quad (8)$$

$$y'(0) = 1 \rightarrow 1 = c \rightarrow \boxed{c = 1} \quad (9)$$

$$y'(1) = 1 \rightarrow 1 = 3a + 2b + 1 \rightarrow 3a + 2b = 0 \quad (10)$$

بالتعويض من (9) فى (8) :

$$1 = a + b + 1 \rightarrow a + b = 0 \quad (11)$$

$$a = -b \leftarrow \text{من (11)}$$

$$\boxed{b = 0} \leftarrow -3b + 2b = 0 \leftarrow \text{وبالتعويض فى (10)}$$

$$\therefore \boxed{a = 0} \leftarrow a = -b$$

$\therefore$ الثوابت الأربعة :

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = 0$$

وتصبح المعادلة (5) [معادلة المنحنى المطلوبة] بالصورة : $y = x$

وهى معادلة خط مستقيم . وهو المطلوب .

ملحوظة : يختلف شكل المنحنى باختلاف الشروط الحدية المعطاه ، لأنه كلما اختلفت الشروط

الحدية اختلفت قيم الثوابت وبالتالي اختلف شكل معادلة المنحنى .

أمثلة محلولة على معادلة أويلر – بواسون :

مثال (1) : طبق معادلة أويلر – بواسون لإيجاد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (16y^2 + 2x^2y - y''^2) dx$$

الحل :

$$I = \int F dx$$

حيث :

$$F = 16y^2 + 2x^2y - y''^2 \quad (1)$$

معادلة أويلر – بواسون :

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \quad (2)$$

ومن (1) :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 32y + 2x^2$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$F_{y''} = -2y''$$

بالتعويض فى (2) نحصل على :

$$32y + 2x^2 + (-2y'')'' = 0$$

$$32y + 2x^2 - 2y^{(4)} = 0$$

$$\therefore y^{(4)} - 16y = x^2 \quad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة

الحل العام لها :

$$y = y_c + y_p \quad (4)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

الحل الخاص الحل المتمم

لايجاد y_c : هو حل المعادلة المتجانسة :

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

$$\lambda^4 - 16 = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$(\lambda^2 - 4) = 0 \quad , \quad (\lambda^2 + 4) = 0$$

↓

↓

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda^2 = -4$$

↓

↓

$$\lambda = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$+2 = \lambda_1, \quad -2 = \lambda_2 \quad +2i = \lambda_3, \quad -2i = \lambda_4$$

هنا الجذور مختلفة وبعضها تخيلي فيكون الحل هو [أنظر الملحق (1) في نهاية الكتاب] :

$$y_c = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} + C e^{\lambda_3 x} + D e^{\lambda_4 x}$$

$$= A e^{2x} + B e^{-2x} + C e^{2ix} + D e^{-2ix}$$

$$= A e^{2x} + B e^{-2x} + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \quad (5)$$

لايجاد y_p : هو حل المعادلة غير المتجانسة :

$$y^{(4)} - 16y = x^2$$

نستخدم طريقة المؤثر D كالتالى :

$$y^{(4)} - 16y = x^2 \rightarrow Dy^4 - 16y = x^2$$

$$\therefore (D^4 - 16)y = x^2$$

↓

↓

$$F(D)y = \phi(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{F(D)} \phi(x)$$

$$= \frac{1}{D^4 - 16} (x^2) = \left(\frac{1}{-16} \right) (x^2) = \frac{-x^2}{16} \quad (6)$$

ويصبح الحل المطلوب [بالتعويض من (6), (5) فى (4)]

$$y = A e^{2x} + B e^{-2x} + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{x^2}{16}$$

وهو المطلوب .

مثال (2): باستخدام معادلة أويلر – بواسون

أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالى :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin x) dx$$

الحل :

$$I = \int F dx$$

حيث :

$$F = y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin x \quad (1)$$

معادلة أويلر – بواسون

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \quad (2)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2 \sin x \quad \text{ومن (1):}$$

$$F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = -4y' \quad , \quad F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

بالتعويض فى (2) نحصل على :

$$2y - 2 \sin x - (-4y')' + (2y'')'' = 0$$

$$2y - 2 \sin x + 4y'' + 2y^{(4)} = 0$$

$$\therefore y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x \quad (3)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة حلها العام هو :

$$y = y_c + y_p \quad (4)$$

لايجاد y_c (الحل المتمم) : هو حل المعادلة المتجانسة

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{المعادلة المساعدة :}$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda^2 = -1 \quad \lambda^2 = -1 \quad \lambda_1 = +i, \lambda_2 = -i$$

$$\therefore \lambda = \pm i \quad \therefore \lambda^2 = \pm 1 \quad \lambda_1 = +i, \lambda_2 = -i$$

∴ الجذور تخيلية ومتكررة فيكون الحل [أنظر الملحق (1) نهاية الكتاب]:

$$y_c = A \sin x + Bx \sin x + C \cos x + Dx \cos x$$

(5)

لايجاد y_p (الحل الخاص): هو حل المعادلة غير المتجانسة

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = \sin x$$

نستخدم طريقة المؤثر D [أنظر الملحق (2) في نهاية الكتاب].

$$(y^4 + 2y^2 + 1)y = \sin x \rightarrow (D^4 + 2D^2 + 1)y = \sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore y_p &= \frac{1}{F(D)} \sin x = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1} \sin x \\ &= \frac{1}{(D^2 + 1)^2} \sin x \end{aligned} \quad (6)$$

وباستخدام قواعد إيجاد y_p لمثل هذه الحالة نجد أن:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 + 1} \left[\frac{1}{D^2 + 1} (\sin x) \right] \\ &= \frac{1}{D^2 + 1} \left[-\frac{x}{2} \cos x \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{D^2 + 1} (x \cos x) \end{aligned}$$

نستخدم القانون الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + 1} (x \cos x) &= \left[x \frac{1}{D^2 + 1} (\cos x) - \frac{2D}{(D^2 + 1)^2} \cos x \right] \\ \therefore y_p &= -\frac{1}{2} \left[x \left(\frac{x}{2} \sin x \right) - \frac{2}{(D^2 + 1)^2} (-\sin x) \right] \\ &= -\frac{x^2}{4} \sin x - \frac{1}{(D^2 + 1)^2} \sin x \end{aligned} \quad (7)$$

بمساواة (7), (6) نجد أن:

$$\frac{1}{(D^2 + 1)^2} \sin x = -\frac{x^2}{4} \sin x - \frac{1}{(D^2 + 1)^2} \sin x$$

$$\frac{2}{(D^2+1)^2} \sin x = -\frac{x^2}{4} \sin x$$

وبالقسمة على 2 :

$$\frac{1}{(D^2+1)^2} [\sin x] = -\frac{x^2}{8} \sin x \quad (8)$$

$$\therefore y_p = -\frac{x^2}{8} \sin x \quad (9)$$

ويصبح الحل المطلوب :

$$y = y_c + y_p = A \sin x + Bx \sin x + C \cos x + Dx \cos x - \frac{x^2}{8} \sin x$$

$$= \left(A + Bx - \frac{x^2}{8} \right) \sin x + (C + Dx) \cos x$$

وهو المطلوب .

مثال (3) : أوجد المنحنى الذى يجعل التكامل الدالى الآتى نهاية قصوى

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y'^2 + x^2) dx$$

مع الشروط الحدية :

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

الحل :

$$I = \int F dx$$

حيث :

$$F = y''^2 - y'^2 + x^2 \quad (1)$$

معادلة أولر - بواسون

$$F_y - (F_{y'})' + (F_{y''})'' = 0 \quad (2)$$

ومن (1) :

$$F_y = -2y, \quad F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = 2y''$$

بالتعويض في (2)

$$-2y - 0 + (2y'')'' = 0$$

$$-2y + 2y^{(4)} = 0 \rightarrow y^{(4)} - y = 0 \quad (3)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة ، ولإيجاد الحل العام لها :
المعادلة المساعدة :

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda^2 = -1$$

$$\lambda = \pm 1, \quad \lambda = \pm i$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = +i, \lambda_4 = -i$$

∴ الجذور مختلفة وبعضها تخيلي فيكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x} + De^{\lambda_4 x}$$

$$= Ae^x + Be^{-x} + Ce^{ix} + De^{-ix}$$

$$= Ae^x + Be^{-x} + G \sin x + H \cos x \quad (4)$$

وهي معادلة المنحنى المطلوب بدلالة الثوابت A, B, G, H

ولإيجاد هذه الثوابت : نستخدم الشروط الحدية

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

فمن (4) :

$$y' = Ae^x - Be^{-x} + G \cos x - H \sin x \quad (5)$$

نعوض بالشروط الحدية :

$$1 = A + B + H \quad (6) \quad \left| \begin{array}{l} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$0 = Ae^{\frac{\pi}{2}} + Be^{-\frac{\pi}{2}} + G \quad (7)$$

$$0 = A - B + G \quad (8)$$

$$-1 = Ae^{\frac{\pi}{2}} - Be^{-\frac{\pi}{2}} - H \quad (9)$$

وهي 4 معادلات جبرية في المجاهيل الأربعة A, B, G, H وبحل هذه المعادلات بالطرق الجبرية المعتادة نحصل على هذه المجاهيل بالصورة :

$$A = 0, \quad B = 0, \quad G = 0, \quad H = 1$$

وتصبح الصورة النهائية لمعادلة المنحنى المطلوب :

$$y = \cos x$$

مسألة : حل المعادلات الأربعة (6), (7), (8), (9) لإيجاد الثوابت A, B, G, H :

الحل : بجمع (9), (6) نحصل على :

$$0 = A(1 + e^{\frac{\pi}{2}}) + B(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) \quad (10)$$

ومن (8), (7) بالطرح نحصل على :

$$0 = A(1 - e^{\frac{\pi}{2}}) - B(1 + e^{-\frac{\pi}{2}}) \quad (11)$$

من (11), (10) بالجمع :

$$0 = 2A - 2Be^{\frac{\pi}{2}} \quad (12)$$

بالتعويض في (9), (6) :

$$1 = A + Ae^{\frac{\pi}{2}} + H$$

$$-1 = Ae^{\frac{\pi}{2}} - A - H$$

بالجمع نحصل على :

$$\boxed{A = 0} \leftarrow 0 = 2Ae^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\therefore \boxed{B = 0}$$

ومن (12) $\leftarrow$

$$\boxed{H = 1}, \quad \boxed{G = 0} \leftarrow \text{وبالتعويض عن } A, B \text{ في (8), (6)}$$

مسألة : باستخدام معادلة أولر - بواسون

أوجد منحنيات النهاية القصوى للتكامل الدالي الآتي :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + y^2 - 2yx^3) dx$$

حل المسألة :

$$I = \int F dx$$

$$F = y'''^2 + y^2 - 2yx^3 \quad (1)$$

معادلة أويلر - بواسون في هذه الحالة تأخذ الصورة :

$$F_y - (F_y)' + (F_y)'' - (F_y)''' = 0 \quad (2)$$

ومن (1) نجد أن :

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x^3, \quad F_y' = 0, \quad F_y'' = 0, \quad F_y''' = 2y'''$$

بالتعويض في (2) نحصل على :

$$2y - 2x^3 - (2y''')''' = 0$$

$$2y - 2x^3 - 2y^{(6)} = 0 \rightarrow y^{(6)} - y = -x^3 \quad (3)$$

وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة حلها العام :

$$y = y_c + y_p \quad (4)$$

لايجاد y_c : حل المعادلة المتجانسة

$$y^{(6)} - y = 0$$

المعادلة المساعدة $\lambda^6 - 1 = 0$ وهي معادلة جبرية من الدرجة السادسة (لها 6 جذور) ويمكن كتابتها بالصورة :

$$(\lambda^3 - 1)(\lambda^3 + 1) = 0$$

$$[(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)][(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)] = 0$$

$$(\lambda - 1) = 0 \rightarrow \lambda = 1, \quad (\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

$$(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\lambda^3 - 1)$$

فرق بين مكعبين

$$(\lambda^3 + 1)$$

مجموع مكعبين

وهنا الجذور مختلفة وبعضها تخيلي فيكون الحل بالصورة :

$$y_c = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} + c_4 e^{\lambda_4 x} + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x} + c_4 e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x} + \dots \\
&= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x} \left(c_3 e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}x} + c_4 e^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}x} \right) + \dots \\
&= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \dots \quad (5)
\end{aligned}$$

الإيجاد y_p : الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$y^{(6)} - y = -x^3$$

$$(D^6 - 1)y = -x^3$$

$$y^{(6)} = \frac{d^6 y}{dx^6} = D^6 y$$

$$F(D)y = \phi(x)$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \phi(x) = \frac{1}{D^6 - 1} (-x^3)$$

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \phi(x) = \frac{1}{D^6 - 1} (-x^3)$$

$$= \frac{(-x^3)}{-1} = x^3 \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) , (5) في (4) نحصل على المنحنيات المطلوبة بالصورة الآتية :

$$\begin{aligned}
y &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \\
&\quad + e^{\frac{1}{2}x} \left(C \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + D \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^3
\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة هي :

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالصورة :

$$(\lambda + 1) (\lambda - 2) (\lambda - 3) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda = -1 = \lambda_1, \lambda = 2 = \lambda_2, \lambda = 3 = \lambda_3$$

وهي جذور حقيقية ومختلفة فيكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x}$$

$$= Ae^{-x} + Be^{2x} + Ce^{3x}$$

(2) إذا كانت الجذور حقيقية وبعضها متكرر :

فإذا كان λ_1 مثلاً جذراً متكرراً فإن الحل يكون :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x} + \dots\dots\dots$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية :

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الرابعة (لها 4 جذور) ويمكن كتابتها بالصورة :

$$\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2 [(\lambda + 1) (\lambda - 2)] = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda = 0, \quad 0 \left| \lambda = -1 = \lambda_2 \right| \lambda = -1 = \lambda_2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda_1 \quad \lambda_1$$

وهنا الجذور حقيقية وبعضها متكرر فيكون الحل بالصورة :

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_2 x} + Dxe^{\lambda_2 x}$$

$$= Ae^{0x} + Bxe^{0x} + Ce^{-x} + Dxe^{-x}$$

$$= A + Bx + Ce^{-x} + Dxe^{-x}$$

(3) إذا كانت الجذور مختلفة وبعضها تخيلي :

في هذه الحالة يكون الحل بالصورة : $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + \dots$

مثال : حل المعادلة : $y'' + a^2 y = 0$

الحل : المعادلة المساعدة هي : $\lambda^2 + a^2 = 0$

$$\lambda^2 = -a^2 \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-a^2} = \pm ia$$

الجذران تخيليان ومختلفان ويكون الحل بالصورة : $\lambda_1 = +ia, \lambda_2 = -ia$

$$y = Ae^{iax} + Be^{-iax} \quad (1)$$

ويمكن كتابة (1) بدلالة $\sin, \cos$ حيث أن :

$$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax, \quad e^{-iax} = \cos ax - i \sin ax$$

وتصبح (1) بالصورة :

$$y = C \cos ax + D \sin ax \quad (2)$$

(4) الجذور تخيلية ومتكررة :

تماما مثل الحالة (2) مع ظهور تركيبه من $\sin, \cos$ [يظهر الجذور التخيلية].

مثال : حل المعادلة المتجانسة

$$y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة هي :

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة الرابعة (لها 4 جذور) ويمكن كتابتها بالصورة :

$$(\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda^2 = -4 \quad | \quad \lambda^2 = -4$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \quad | \quad \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\lambda = +2i, \quad +2i \quad | \quad -2i, \quad -2i$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad | \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\lambda_1 \quad \lambda_1 \quad | \quad \lambda_2 \quad \lambda_2$$

ويكون الحل بالصورة :

$$\begin{aligned} y &= A e^{\lambda_1 x} + B x e^{\lambda_1 x} + C e^{\lambda_2 x} + D x e^{\lambda_2 x} \\ &= A e^{2ix} + B x e^{2ix} + C e^{-2ix} + D x e^{-2ix} \\ &= C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 x \sin 2x + C_4 x \cos 2x \\ \therefore y &= C_1 \sin 2x + C_3 x \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_4 x \cos 2x \end{aligned}$$

ملحق (2)

حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة [باستخدام المؤثر D]

تأخذ هذه المعادلة الصورة الآتية :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \phi(x) \quad (1)$$

حيث :

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

معاملات $a_0, a_1, \dots, a_n$ (أعداد ثابتة)

إذا أخذنا $\phi(x) = 0$ نحصل على المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

وبادخال المؤثر التفاضلي D حيث :

$$D = \frac{d}{dx}, D^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2}, \dots, D^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}$$

تصبح المعادلة (1) بالصورة :

$$\begin{aligned} a_0 D^{(n)} y + a_1 D^{(n-1)} y + \dots + a_n y &= \phi(x) \\ \therefore [a_0 D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_n] y &= \phi(x) \\ \therefore F(D) y &= \phi(x) \end{aligned} \quad (2)$$

حيث :

$$F(D) = a_0 D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_n$$

المعادلة (2) تمثل الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة .

الحل العام للمعادلة (2) :

هذا الحل هو مجموع حلين :

(1) الحل المتمم y_c وهو عبارة عن حل المعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$

(2) الحل الخاص y_p للمعادلة غير المتجانسة (2) ، وبأخذ هذا الحل صورا متعددة .

∴ الحل العام يكون :

$$y = y_c + y_p \quad (3)$$

إيجاد الصور المختلفة للحل الخاص y_p :

تعتمد هذه الصور على شكل الدالة $\phi(x)$

فمن المعادلة (2) نجد أن :

$$y_p = \frac{1}{F(D)} \phi(x)$$

يسمى المؤثر $\frac{1}{F(D)}$ بالمؤثر العكسي وله عدة صور منها :

$$\frac{1}{D \pm m}, \frac{1}{(D - m)^2}, \dots, \frac{1}{D^2 + m^2}, \dots$$

حيث m عدد ثابت .

قواعد إيجاد y_p :

توجد لدينا عدة قواعد لإيجاد y_p نلخصها في الحالات الآتية :

الحالة الأولى : إذا كانت $\phi(x) = x^m$ وكانت $a_n \neq 0$ في المؤثر $F(D)$ ، فإن :

$$y_p = \frac{1}{F(D)} x^m = \frac{x^m}{a_n}$$

مثال (1) :

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 5} x = \frac{x}{5}, \quad [a_n = 5]$$

مثال (2) :

$$y_p = \frac{1}{D^6 - 5} (-x^3) = \frac{(-x^3)}{(-1)} = x^3$$

مثال (3) :

$$y_p = \frac{1}{D^5 + D^3 + 10} x^2 = \frac{x^2}{10}$$

[أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة :

$$[(D^5 + D^3 + 10)y = x^2 \rightarrow F(D)y = \phi(x)]$$

الحالة الثانية : إذا كان المؤثر العكسي له الصورة :

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{D \pm m}$$

فإن الحل الخاص y_p يأخذ الصورة الآتية :

$$y_p = \frac{1}{D \pm m} \phi(x) = e^{\mp mx} \int e^{\pm mx} \phi(x) dx \quad (3)$$

حيث $\phi(x)$ يمكن أن تأخذ الصور الآتية :

$$\phi(x) = A, e^{ax}, e^{mx}, \sin ax, \cos ax, \quad \text{حيث } a \neq m$$

مثال (1) : إذا كانت $\phi(x) = A$ حيث A ثابت

$$\therefore y_p = \frac{1}{D - m} A = e^{mx} \int e^{-mx} A dx$$

$$= A e^{mx} \left[\frac{e^{-mx}}{-m} \right] + C$$

$$= \frac{A}{-m} + C$$

مثال (2) : إذا كانت $\phi(x) = e^{ax}$ حيث $a \neq m$

$$y_p = \frac{1}{D - m} e^{ax} = e^{mx} \int e^{-mx} e^{ax} dx$$

$$= e^{mx} \int e^{(a-m)x} dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a - m} + C$$

مثال (3) : إذا كانت $\phi(x) = e^{mx}$

$$y_p = \frac{1}{D - m} e^{mx} = e^{mx} \int e^{-mx} e^{mx} dx$$

$$= e^{mx} \int dx = x e^{mx} + C$$

مثال (4) :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{(D-m)^2} e^{mx} \\
 &= \frac{1}{D-m} \left[\frac{1}{D-m} e^{mx} \right] \\
 &= \frac{1}{D-m} (x e^{mx}) \\
 &= e^{mx} \int e^{-mx} (x e^{mx}) dx \\
 &= e^{mx} \int x dx = \frac{x^2}{2} e^{mx} + c = \frac{x^2}{2!} e^{mx} + c
 \end{aligned}$$

$$\phi(x) = x e^{mx}$$

وبوجه عام فإن :

$$y_p = \frac{1}{(D-m)^n} e^{mx} = \frac{x^n}{n!} e^{mx} + c$$

فمثلا :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{(D-3)^2} e^{3x} = \frac{x^2}{2!} e^{3x} + c \\
 &= \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + c
 \end{aligned}$$

$$m = 3$$

$$n = 2$$

مثال (5) :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{(D+1)(D-2)} (3e^{-2x}) \\
 &= \frac{1}{D+1} \left[\frac{1}{D-2} (3e^{-2x}) \right] \\
 &= \frac{1}{D+1} \left[e^{2x} \int e^{-2x} (3e^{-2x}) dx \right] ,
 \end{aligned}$$

[من القانون (3)]

↓

$$= \frac{1}{D+1} \left[e^{2x} \cdot 3 \left(\frac{e^{-4x}}{-4} \right) \right] + c$$

$$= \frac{1}{D+1} \left[-\frac{3}{4} e^{-2x} \right] + c$$

$$= e^{-x} \int e^x \left(-\frac{3}{4} e^{-2x} \right) dx + c \quad \text{[من القانون (3)]}$$

$$= e^{-x} \left[-\frac{3}{4} \frac{e^{-x}}{-1} \right] + c = \frac{3}{4} e^{-2x} + c$$

مثال (6) : إذا كانت $\phi(x) = \sin ax$ ، نستخدم القانون :

$$y_p = \frac{1}{D-m} \sin ax = \frac{1}{m^2+a^2} [-a \cos ax - m \sin ax]$$

وإذا كانت $\phi(x) = \cos ax$ ، نستخدم القانون :

$$y_p = \frac{1}{D-m} \cos ax = \frac{1}{m^2+a^2} [a \sin x - m \cos ax]$$

وكامثلة على هذين القانونين :

$$(1) \quad = \frac{1}{D-3} \sin 5x = \frac{1}{9+25} [-5 \cos 5x - 3 \sin 5x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m=3 \quad a=5$$

$$= -\frac{1}{34} [5 \cos 5x + 3 \sin 5x]$$

$$(2) \quad \frac{1}{D+1} \sin x = \frac{1}{2} [-\cos x + \sin x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m=-1 \quad a=1$$

$$= \frac{1}{2} [\sin x - \cos x]$$

$$(3) \quad \frac{1}{D+4} \cos 2x = \frac{1}{16+4} [2 \sin 2x + 4 \cos 2x]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$m=-4 \quad a=2$$

$$= \frac{1}{10} [\sin 2x + 2 \cos 2x]$$

الحالة الثالثة : إذا كان المؤثر العكسي له الصورة الآتية :

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{D^2 + m^2}$$

وكانت $\phi(x) = \sin ax, \cos ax$

القاعدة هي :

$$(1) y_p = \frac{1}{D^2 + m^2} \sin ax = \begin{cases} -\frac{x}{2a} \cos ax & (a = m) \\ \frac{1}{m^2 - a^2} \sin ax & (a \neq m) \end{cases}$$

$$(2) y_p = \frac{1}{D^2 + m^2} \cos ax = \begin{cases} \frac{x}{2a} \sin ax & (a = m) \\ \frac{1}{m^2 - a^2} \cos ax & (a \neq m) \end{cases}$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + m^2} \begin{matrix} \sin ax \\ \cos ax \end{matrix} = \begin{cases} \mp \frac{x}{2a} \begin{matrix} \cos ax \\ \sin ax \end{matrix} & (a = m) \\ \frac{1}{m^2 - a^2} \begin{matrix} \sin ax \\ \cos ax \end{matrix} & (a \neq m) \end{cases}$$

مثال (1) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة $y'' + 4y = \sin x$ بدلالة

المؤثر D

الحل : نكتب المعادلة بالصورة :

$$\begin{array}{l|l} (D^2 + 4)y = \sin x & m = 2 \\ \therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \sin x & a = 1 \\ & a \neq m \end{array}$$

وبتطبيق القاعدة :

$$y_p = \frac{1}{m^2 - a^2} \sin x = \frac{1}{4 - 1} \sin x = \frac{1}{3} \sin x$$

مثال (2) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' + 4y = \cos x + \sin 2x$$

بدلالة المؤثر D .

حيث :

$$\frac{1}{D} \left(\frac{1}{x^2} \right) = D^{-1} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{D} \left(\frac{1}{x} \right) = D^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \ln x$$

مثال (2) : أوجد الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2} (x-1)e^x$$

الحل : هنا : $F(D) = (D-1)^2$ ، $[a=1]e^{ax} = e^x$ ، $\phi(x) = (x-1)$

و بتطبيق نظرية إزاحة المؤثر نحصل على :

$$\begin{aligned} y_p &= e^x \frac{1}{(D-1+1)^2} (x-1) \\ &= e^x \frac{1}{D^2} (x-1) = e^x \frac{1}{D} \left[\frac{1}{D} (x-1) \right] \\ &= e^x D^{-1} \left[\frac{x^2}{2} - x \right] = e^x \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{D}(x) = D^{-1}x = \frac{x^2}{2} \\ \frac{1}{D}(1) = D^{-1}(1) = x \end{array} \right.$$

الحالة السادسة : نظرية (3) [المؤثر العكسي مع دالة مضروبة في x]

نستخدم القانون الآتي :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{F(D)} [x \phi(x)] \\ &= x \frac{1}{F(D)} \phi(x) - \frac{F'(D)}{F^2(D)} \phi(x) \end{aligned}$$

مثال (1) : أوجد الحل الخاص :

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 1} [x \sin 2x]$$

[الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة :

$$[y'' + y = x \sin 2x]$$

الحل :

$$\phi(x) = \sin 2x \quad \text{بتطبيق القانون حيث}$$

$$y_p = x \frac{1}{D^2 + 1} \sin 2x - \frac{2D}{(D^2 + 1)^2} \sin 2x$$

$$= x \frac{1}{1-4} \sin 2x - \frac{2}{(D^2 + 1)^2} (2 \cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{3} x \sin 2x - 4 \frac{1}{D^2 + 1} \left[\frac{1}{D^2 + 1} \cos 2x \right]$$

$$= -\frac{1}{3} x \sin 2x - 4 \frac{1}{D^2 + 1} \left[\frac{1}{1-4} \cos 2x \right]$$

$$= -\frac{1}{3} x \sin 2x + \frac{4}{3} \left[\frac{1}{D^2 + 1} \cos 2x \right]$$

$$= -\frac{1}{3} x \sin 2x + \frac{4}{3} \left[\frac{1}{1-4} \cos 2x \right]$$

$$= -\frac{1}{3} x \sin 2x - \frac{4}{9} \cos 2x = -\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \cos 2x + x \sin 2x \right)$$

$$F(D) = D^2 + 1$$

$$F'(D) = 2D$$

$$F^2(D) = (D^2 + 1)^2$$

$$D(\sin 2x) = 2 \cos 2x$$

استخدمنا الحالة الثالثة

في إيجاد :

$$\frac{1}{D^2 + 1} \sin 2x ,$$

$$\frac{1}{D^2 + 1} \cos 2x , \dots$$

وهو المطلوب .

مثال (2) : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' + y = x \cos x$$

الحل : باستخدام المؤثر D :

$$(D^2 + 1)y = x \cos x$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{D^2 + 1} x \cos x \quad (1)$$

بتطبيق القانون نحصل على :

$$y_p = x \frac{1}{D^2 + 1} \cos x - \frac{2D}{(D^2 + 1)^2} \cos x$$

$$= x \left[\frac{x}{2} \sin x \right] + 2 \frac{1}{(D^2 + 1)^2} \sin x$$

$$F(D) = D^2 + 1$$

$$F'(D) = 2D$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{2} \sin x + 2 \frac{1}{D^2 + 1} \left[\frac{1}{D^2 + 1} \sin x \right] \\
 &= \frac{x^2}{2} \sin x + 2 \frac{1}{D^2 + 1} \left[-\frac{x}{2} \cos x \right] \\
 &= \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{D^2 + 1} (x \cos x) \quad (2)
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l} F^2(D) = (D^2 + 1)^2 \\ D(\cos x) = -\sin x \end{array} \right.$$

بمساواة (1) , (2) :

$$\frac{1}{D^2 + 1} x \cos x = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{D^2 + 1} x \cos x$$

$$\therefore \frac{2}{D^2 + 1} x \cos x = \frac{x^2}{2} \sin x$$

بالقسمة على 2 :

$$\therefore \frac{1}{D^2 + 1} x \cos x = \frac{x^2}{4} \sin x$$

وبالتعويض في (2) نحصل على :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{x^2}{4} \sin x \\
 &= \frac{x^2}{4} \sin x
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب .

إنتهى الكتاب بحمد الله تعالى