الباب السابع
الأشجار
Trees

الرسم المترابط الذي لايحتوي دورات بسيطة يسمى شجرة. استخدمت الأشجار منذ عام 1857 ، عندما استخدمها آرثر كيلي Arthur Cayley لعد أنواع معينة من المركبات الكيميائية. منذ ذلك الوقت، تم توظيف الأشجار لحل المسائل في نطاق واسع من المعارف.

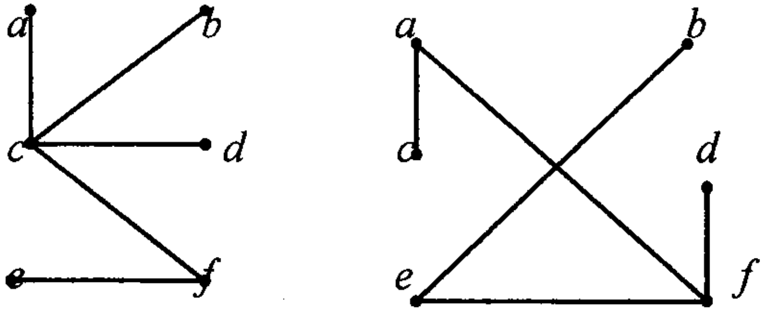
عمليا، الأشجار تكون مفيدة في علوم الحاسب، حيث تستخدم على نطاق واسع في الخوارزميات. على سبيل المثال، الأشجار تستخدم لإنشاء خوارزمية فعالة لوضع مفردة في قائمة.

٧-١ المدخل إلى الأشجار Introduction to Trees

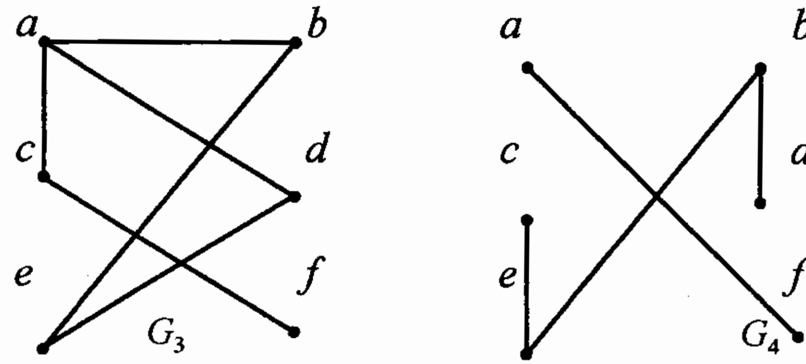
في هذا الفصل سوف نركز على أنواع خاصة من الرسومات تسمى الأشجار، استخدم هذا الاسم لأن مثل هذه الرسومات تشبه الأشجار. على سبيل المثال، أشجار العائلات هي رسومات تمثل مخططات الأنساب.

تعريف ٧-١-١. الشجرة tree هي رسم غير موجه مترابط ليس به أي دورة بسيطة.

مثال ٧-١-٢. أي من الرسومات الموضحة في شكل ٧-١-١ يكون شجرة ؟



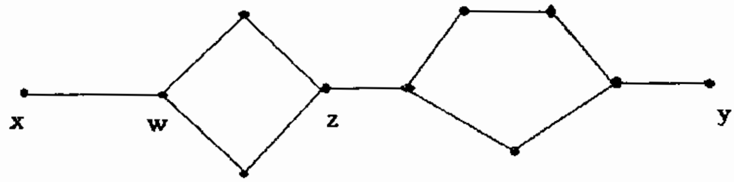
G_2 $\qquad$ G_1



شكل ٧-١-١

الحل: G_1 و G_2 شجرتان، لأن كل منهما رسم مترابط ليس به دورة بسيطة. G_3 ليس شجرة لأن e, b, a, d, e دورة بسيطة في هذا الرسم. أخيرا، G_4 ليس شجرة لأنه رسم غير مترابط.

نفرض رأسين في شجرة. كم مسار بسيط مختلف يمكن إيجادها بين الرأسين؟ للإجابة على هذا السؤال، نفرض أنه لدينا مسارين مختلفين من الرأس x إلى الرأس y. المساران يبدءان من نفس الرأس x وقد يشتركا في بعض الحواف كما في شكل ٧-١-٢



شكل ٧-١-٢

نفرض أن w هي أخر رأس بعد x قبل أن يفترق المساران. المساران لابد أن يجتمعا مرة أخرى عند y، ولكن قد يجتمعا مرة أخرى قبل y. نفرض أن z هي أول رأس مشترك بعد w. إذن يوجد مساران من w إلى z يشتركا فقط في z و w. بأخذ أحد المسارين من z إلى w والآخر من w إلى z ، وهذا يعطينا دورة بسيطة. لذلك الرسم لايكون شجرة. ومن ثم إذا كان الرسم شجرة فإنه لايحتوي مسارين مختلفين بين رأسين x و y. من ذلك يمكننا صياغة النظرية التالية:

نظرية ٧-١-٣. يوجد على وجه التحديد مسار واحد بين كل رأسين في شجرة.

البرهان: من تعريف الشجرة، يوجد مسار بين كل رأسين. ومن المناقشة السابقة يوجد على الأكثر مسار واحد بين كل رأسين. لذلك يوجد على وجه التحديد مسار واحد بين كل رأسين.

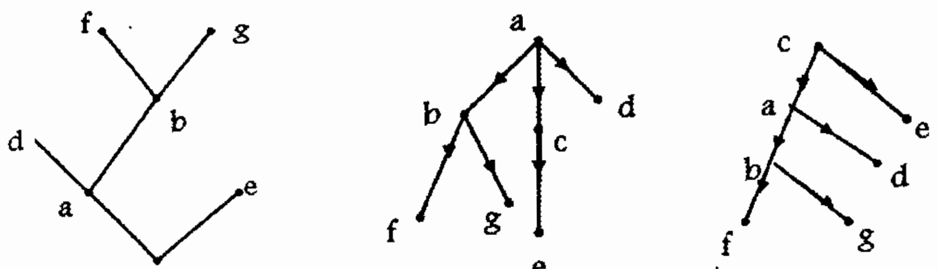
الشجرة المتجذرة

في العديد من تطبيقات الأشجار رأس معين في الشجرة يعين **جذر** root . بمجرد تحديد الجذر، يمكننا تعيين اتجاه لكل حافة تالية. حيث أنه يوجد مسار وحيد من الجذر إلى كل رأس في الرسم، فإننا نوجه كل حافة بعدا عن الجذر. لذلك الشجرة مع جذرها تنتج رسم موجه يسمى شجرة متجذرة.

تعريف ٧-١-٤. الشجرة المتجذرة rooted tree هي شجرة تم تعيين أحد رؤوسها كجذر وكل حافة تتوجه بعدا عن الجذر.

يمكننا تغيير الشجرة غير المتجذرة إلى شجرة متجذرة باختيار أي رأس ليكون جذر. لاحظ أن الاختيارات المختلفة للجذر تعطي أشجار متجذرة مختلفة. على سبيل المثال، شكل ٧-١-٣ يظهر الأشجار المتجذرة التي تكونت باختيار a ليكون جذر و c ليكون جذر، على الترتيب في الشجرة T.

T الجذر a الجذر c

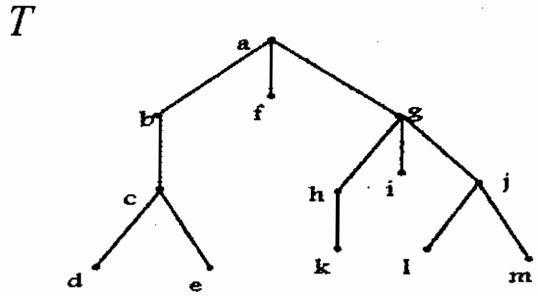


مصطلحات الأشجار يرجع أصلها إلى النبات و [illegible] T شجرة متجذرة. إذا كان v رأس في T غير الجذر، **والد** v parent هو الرأس الوحيد u بحيث يوجد حافة موجهة من u إلى v. عندما يكون u والد v، v يسمى **ابن** u child. الرؤوس التي لها نفس الوالد تسمى **أشقاء** siblings. **أسلاف** the ancestors الرأس غير الجذر هي الرؤوس في المسار من الجذر إلى هذا الرأس بدون الرأس نفسه والجذر من الأسلاف.

أحفاد الرأس v the descendants هي تلك الرؤوس التي لها v سلف. الرأس في شجرة يسمى **ورقة** leaf إذا كان ليس له أبناء. الرؤوس التي لها أبناء تسمى **رؤوس داخلية** internal vertices. الجذر يكون رأس داخلي إلا إذا كان هو الرأس الوحيد في الرسم، فإنه في هذه الحالة يكون ورقة.

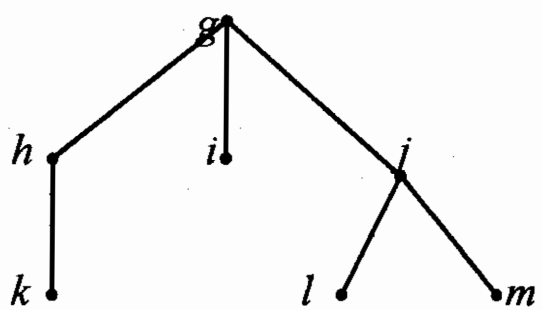
إذا كان a رأس في شجرة، **الشجرة الجزئية** subtree والتي جذرها a هي رسم جزئي يتكون من a وكل أحفاده وكل الحواف التابعة لهذه الأحفاد.

مثال ٧-١-٥. في الشجرة المتجذرة المبينة في شكل ٧-١-٤، أوجد والد c ، أولاد g، أشقاء h، كل أسلاف e، كل أحفاد b، كل الرؤوس الداخلية و كل الأوراق. ما هي الشجرة الجزئية المتجذرة عند g؟



شكل ٧-١-٤

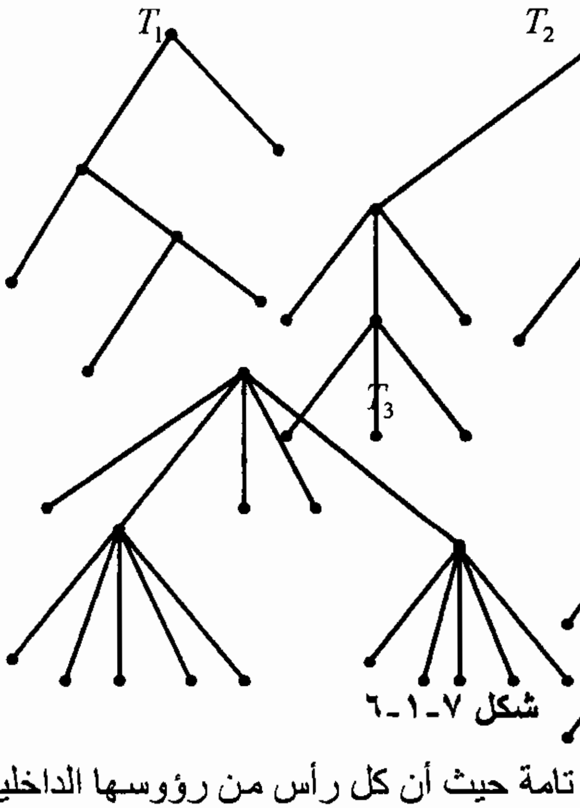
الحل: والد c هو b. أبناء g هم h، i و j. أشقاء h هم i و j. أسلاف e هم c، b و a. أحفاد b هم c، d و e. الرؤوس الداخلية هي a، b، c، g، h و j. الأوراق هي d، e، f، i، k، l و m. الشجرة الجزئية المتجذرة عند g هي المبينة في شكل ٧-١-٥.



شكل ٧-١-٥

تعريف ٧-١-٦. الشجرة المتجذرة تسمى **شجرة نونية** n-ary tree إذا كان كل رأس داخلي ليس له أكثر من n من الأبناء. الشجرة تسمى نونية تامة full n-ary tree إذا كان كل رأس داخلي له تحديدا n من الأبناء. عندما $n = 2$ الشجرة النونية تسمى **شجرة ثنائية** binary tree.

مثال ٧-١-٧. هل الأشجار في شكل ٧-١-٦ تكون أشجار نونية تامة لعدد صحيح موجب n ؟



شكل ٧-١-٦

الحل: T_1 تكون شجرة ثنائية تامة حيث أن كل رأس من رؤوسها الداخلية له إبنان. T_2 تكون شجرة ثلاثية تامة حيث أن كلا من رؤوسها الداخلية له ثلاثة أبناء. في T_3 كل رأس داخلي له خمسة أبناء، لذلك T_3 تكون شجرة خماسية تامة. T_4 تكون شجرة ثلاثية ولكنها ليست نونية تامة لأي n حيث أن بعض الرؤوس الداخلية له إبنان والآخرون كل له ثلاثة أبناء.

خواص الأشجار Properties of Trees

غالبا نحتاج إلى نتائج تتعلق بعدد الحواف والرؤوس لمختلف الأنواع من الأشجار.

نظرية ٧-١-٨. الشجرة التي بها n رأس يكون لها $n-1$ حافة.

البرهان: سوف نستخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات النظرية. لاحظ أنه لكل شجرة هنا يمكننا اختيار جذر واعتبارها شجرة متجذرة.

خطوة الأساس: عندما $n=1$، الشجرة التي لها رأس واحدة يكون ليس لها حواف. وينتج أن النظرية تكون صحيحة عندما $n=1$.

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج ينص على أن كل شجرة لها k رأس يكون لها $k-1$ حافة، حيث k عدد صحيح موجب. نفرض أن شجرة لها $k+1$ رأس وأن v ورقة في T، وأن w هو والد v. بإزالة الرأس v والحافة التي تربط w إلى v نحصل على شجرة جزئية T' لها k رأس، حيث أن الرسم الناتج لا يزال مترابطا وليس به دورة بسيطة. من فرض الاستنتاج، T' يكون لها $k-1$ حافة. من ذلك ينتج أن T لها k حافة لأنها تزيد في عدد الحواف بمقدار 1 عن T'، الحافة التي تربط v و w. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

نظرية ٧-١-٩. الشجرة النونية التامة تحتوي $m=ni+1$ رأس، حيث i هو عدد الرؤوس الداخلية.

البرهان: كل رأس ماعدا الجذر، يكون ابن لرأس داخلي. حيث أن i هو عدد الرؤوس الداخلية وكل رأس داخلي له n ابن، يوجد ni رأس في الشجرة بخلاف الجذر. لذلك، عدد الرؤوس في الشجرة يساوي $m=ni+1$.

نظرية ٧-١-١٠. الشجرة النونية التامة والتي لها

(أ) m رأس يكون عدد الرؤوس الداخلية لها هو $i=\dfrac{m-1}{n}$ وعدد الأوراق لها هو $\ell=\dfrac{(n-1)m+1}{n}$.

(ب) i رأس داخلـــي يكـــون لهـــا عـــدد $m = ni + 1$ رأس وعـــدد $\ell = (n-1)i + 1$ ورقة.

(ج) ℓ ورقـة يكـون لهـا عـدد $m = \dfrac{n\ell - 1}{n-1}$ رأس وعـدد $i = \dfrac{\ell - 1}{n-1}$ رأس داخلي.

البرهان: نفرض m تمثل عدد الرؤوس، i عدد الرؤوس الداخلية و ℓ عدد الأوراق. الأجـزاء الثلاثـة للنظريـة يمكـن إثباتهـا جميعـا باسـتخدام المتطابقـة المعطـاة فـي نظريـة ٧-١-٩ ،وهـي $m = ni + 1$، بالإضـافة إلـى المتطابقـة $m = \ell + i$، والتـي هـي صـحيحة لأن كـل رأس إمـا يكـون ورقـة أو رأس داخلي. هنا سوف نبرهن (أ).

بالحل بالنسبة إلى i في $m = ni + 1$ نحصل على $i = \dfrac{m-1}{n}$. بالتعويض عن i هذه في المعادلة $m = \ell + i$ نحصل على

$$\ell = m - i = m - \frac{m-1}{n} = \frac{(n-1)m + 1}{n}$$

المثال التالي يوضح كيف يمكن استخدام نظرية ٧-١-١٠.

مثـال ٧-١-١١. نفرض أن شخصا ما بدأ سلسلة رسائل. كل شخص يستلم رسالة يطلب منه إرسالها إلى أربعة أشخاص آخرين. بعض النـاس فعل ذلك، والـبعض الآخـر لـم يرسـل أي رسـالة. كـم شـخص رأى الرسـالة، بمـا فـيهم الـشخص الأول، إذا كـان أي شـخص لـم يـستلم أكثـر مـن رسـالة وإذا كانـت السلسلة انتهت عندما كـان هنـاك 100 شخص قد قرءوا الرسـالة ولـم يقومـوا بإرسالها؟ كم شخص أرسلوا الرسالة؟

الحل: السلسلة يمكن أن تمثل بشجرة رباعيـة تامـة. الرؤوس الداخليـة تنـاظر الأشخاص الذين أرسلوا الرسالة، والأوراق تناظر الأشخاص الذين لم يرسلوا الرسالة. إذن عدد الأوراق في الشجرة المجتذرة هو $\ell = 100$. لذلك الجزء

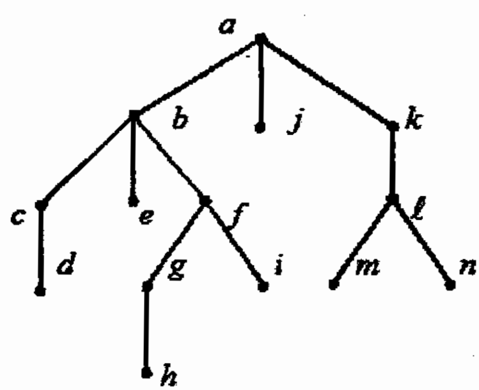
(ج) من نظرية ٧-١-١٠ يبين أن عدد الأشخاص الذين رأوا الرسالة هو

$$m = \frac{4.100-1}{4-1} = 133 .$$

أيضا عدد الرؤوس الداخلية يكون $133-100=33$، لذلك 33 شخص أرسلوا الرسالة.

مستوى level الرأس v في الشجرة المتجذرة هو طول المسار الوحيد من الجذر إلى هذا الرأس. مستوى الجذر يساوي صفر. **ارتفاع the height** الشجرة المتجذرة هو أكبر مستوى للرؤوس. بتعبير آخر، ارتفاع الشجرة المتجذرة هو طول أطول مسار من الجذر إلى أي رأس.

مثال ٧-١-١٢. أوجد مستوى كل رأس في الشجرة المتجذرة المبينة في شكل ٧-١-٧ ما هو ارتفاع هذه الشجرة؟



شكل ٧-١-٧

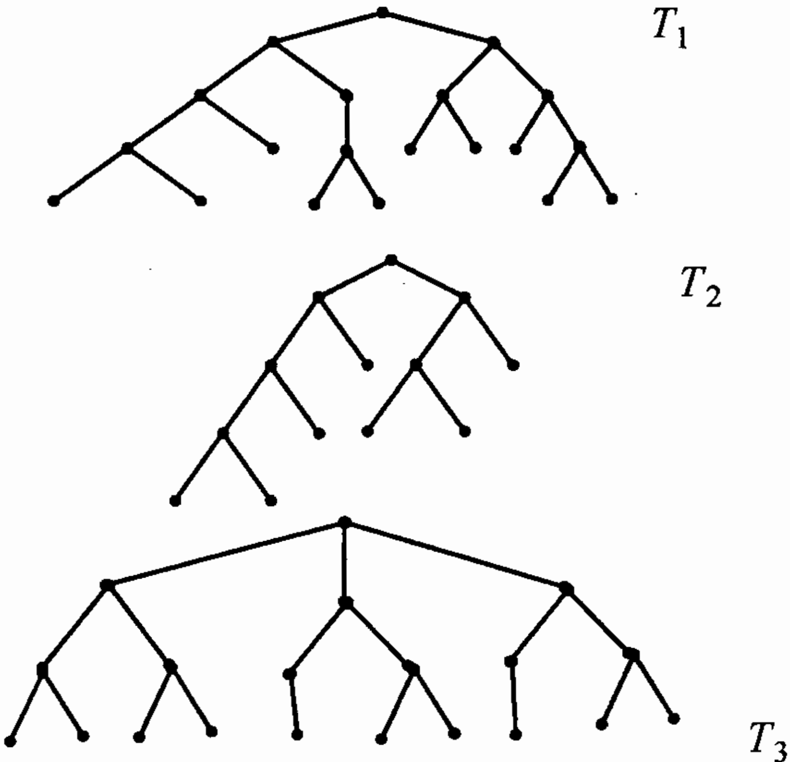
الحل: مستويات الرؤوس مبينة في الجدول التالي:

الرأس	a	b, j, k	c, e, f, ℓ	d, g, i, m, n	h
المستوى	0	1	2	3	4

حيث أن أعلى مستوى للرؤوس هو 4 فإن ارتفاع الشجرة يساوي 4.

الشجرة المتجذرة النونية التامة التي ارتفاعها h تسمى **متوازنة** balanced إذا كانت كل الأوراق في مستوى h أو $h-1$.

مثال ٧-١-١٣. أي من الأشجار المتجذرة المبينة في شكل ٧-١-٨ تكون متوازنة ؟



شكل ٧-١-٨

الحل: T_1 متوازنة لأن كل أوراقها من مستويات 3 و 4 . T_2 ليست متوازنة حيث أن لها أوراق عند مستويات 2، 3 و 4. أخيرا T_3 متوازنة حيث أن كل أوراقها عند مستوى 3.

نظرية ٧-١-١٤. يوجد على الأكثر n^h ورقة في شجرة نونية من إرتفاع h.

البرهان: البرهان يكون بالاستنتاج الرياضي على الارتفاع. أولا نعتبر شجرة نونية من ارتفاع 1. هذه الشجرة تتكون من الجذر وأبناء لايزيدون عن n كل منهم يكون ورقة. لذلك لايوجد أكثر من $n^1 = n$ ورقة في الشجرة النونية من ارتفاع 1. وهذا يكمل خطوة الأساس في البرهان بالاستنتناج.

الآن نفرض أن النتيجة صحيحة لكل شجرة نونية من إرتفاع أقل من h، وهذا هو فرض الاستنتاج. نفرض T شجرة نونية إرتفاعها h . أوراق T هي أوراق الأشجار الجزئية التي نحصل عليها من الشجرة T بحذف كل الحواف من الجذر إلى كل الرؤوس التي في مستوى 1.

كل من هذه الأشجار الجزئية إرتفاعها أقل من أو يساوي $h-1$. لذلك من فرض الاستنتاج كل من هذه الأشجار الجزئية تحتوي على الأكثر n^{h-1} ورقة. ولأنه يوجد على الأكثر n من مثل هذه الأشجار الجزئية، فإن عدد الأوراق في الشجرة المتجذرة يكون على الأكثر $n \cdot n^{h-1} = n^h$.

نتيجة ٧-١-١٥ . إذا كانت الشجرة النونية من إرتفاع h لها l ورقة فإن $h \geq \lceil \log_n l \rceil$. إذا كانت الشجرة النونية تامة ومتوازنة فإن $h = \lceil \log_n l \rceil$.

البرهان: نعلم أن $l \leq n^h$، من نظرية ٧-١-١٤. بأخذ اللوغاريتمات نحصل على $\log_n l \leq h$. ولأن h عدد صحيح، فإن $h \geq \lceil \log_n l \rceil$. الآن نفرض أن الشجرة متوازنة. إذن كل ورقة تكون عند مستوى h أو $h-1$ ولأن الارتفاع h، يوجد على الأقل ورقة واحدة عند المستوى h. من ذلك ينتج أنه يوجد أكثر من n^{h-1} ورقة. ولأن $l \leq n^h$، نحصل على $n^{h-1} < l \leq n^h$. بأخذ اللوغاريتمات للأساس n نحصل على المتباينة $h-1 < \log_n l \leq h$. لذلك $h = \lceil \log_n l \rceil$.

نظرية ٧-١-١٦ . في كل شجرة يوجد على الأقل رأس من درجة 1.

البرهان: نفرض T شجرة. نبدأ بأي رأس v_1. إذاكانت $\deg(v_1) \neq 1$، نتحرك على أي حافة مرتبطة بالرأس v_1 إلى الرأس v_2 المجاورة لها. إذاكانت $\deg(v_2) \neq 1$ نتحرك إلى v_3 عبر حافة مختلفة. نستمر في هذه العملية لنكون مسار $v_1, v_2, v_3, \ldots$. أي من الرؤوس v_i لايتكرر في هذا المسار، حيث أنه في هذه الحالة يكون لدينا دورة وهذا غير ممكن في الشجرة. حيث أن عدد الرؤوس في الرسم يكون منتهي، فإن هذا المسار لابد أن ينتهي

عند رأس معينة. هذه الرأس التي ينتهي عندها المسار تكون من درجة 1، حيث أن المسار يدخل إلى هذه الرأس ولايغادرها.

نتيجة ٧ـ١ـ١٧. إذا كانت T شجرة غير تافهة، فإن T تحتوي على الأقل رأسين من درجة 1.

البرهان: نفرض n هو عدد الرؤوس و E هي مجموعة الحواف في T. إذن $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) = 2|E| = 2(n-1) = 2n-2$.

إذا كان توجد رأس واحدة فقط من درجة 1، فإن

$\deg(v_i) \geq 2$ لقيم $i = 2,3,\ldots,n$ ويكون

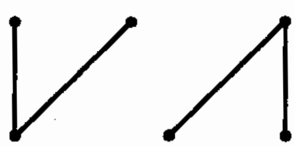
$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) = 1 + \sum_{i=2}^{n}\deg(v_i) \geq 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

ولكن هذا يعني أن $2n - 2 \geq 2n - 1$ أو $-2 \geq -1$ ، تناقض.

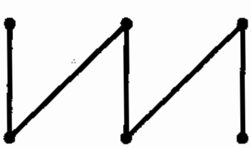
تمارين ٧ـ١

١ـ أي من الرسومات التالية يكون شجرة

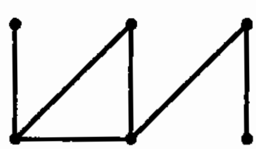
(أ)



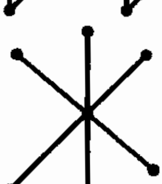
(ب)



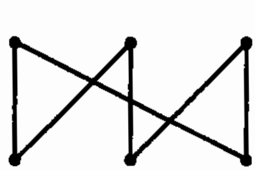
(ج)



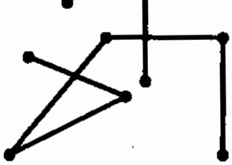
(د)



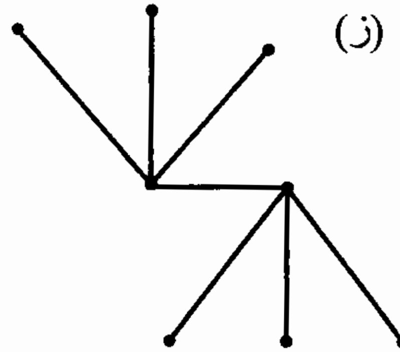
(هـ)



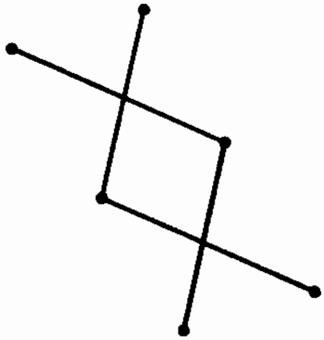
(و)



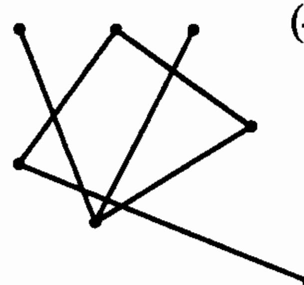
(ز)



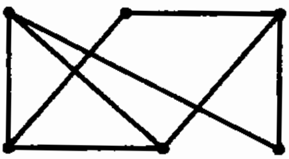
(ح)



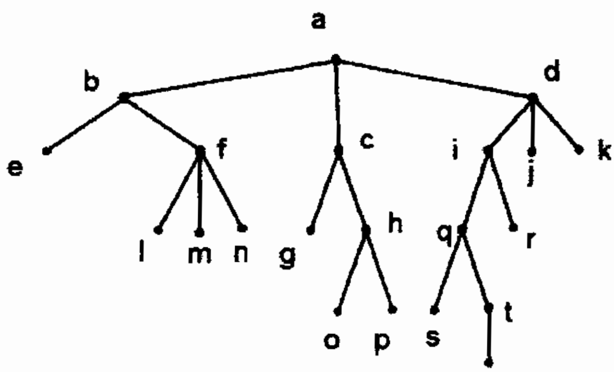
(ط)



(ي)



٢- أجب عن الأسئلة حول الشجرة المتجذرة الموضحة



(ا) أي الرؤوس يكون الجذر ؟ (ب) ما هي الرؤوس الداخلية ؟

(ج) ما هي الرؤوس التي تكون أوراق ؟

(د) ما هي الرؤوس أبناء j ؟

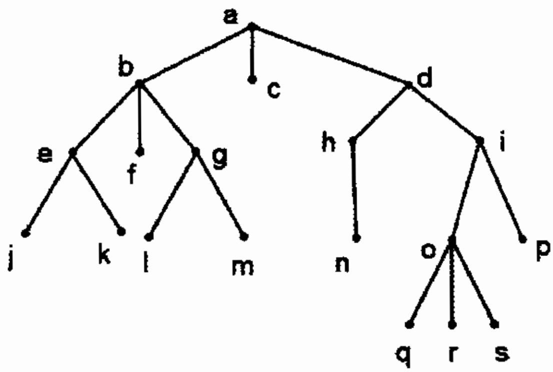
(هـ) ما هو الرأس والد h ؟

(و) ما هي الرؤوس أشقاء o ؟

(ز) ما هي الرؤوس أسلاف m ؟

(ح) ما هي الرؤوس أحفاد b ؟

٣- أجب عن الأسئلة الواردة في تمرين 2 للشجرة المتجذرة الموضحة



٤- هل الشجرة المتجذرة في تمرين 2 شجرة نونية تامة لبعض n عدد صحيح موجب ؟

٥- هل الشجرة المتجذرة في تمرين 3 شجرة نونية تامة لبعض n عدد صحيح موجب ؟

٦- ارسم شجرة جزئية من الشجرة في تمرين 2 بحيث تكون متجذرة عند
(أ) a.   (ب) c.   (ج) e.

٧- ارسم شجرة جزئية من الشجرة في تمرين 3 بحيث تكون متجذرة عند
(أ) a.   (ب) c.   (ج) e.

٨- سلسلة رسائل بدأت عندما أرسل شخص رسالة إلى خمسة أشخاص آخرين. كل شخص من الذين استلموا الرسالة إما أرسلها إلى خمسة آخرين ممن لم يسبق لهم استلامها أو لم يرسلها إلى أي أحد. نفرض أن 10 000 شخص قاموا بإرسال الرسالة قبل أن تتوقف السلسلة وأن أي أحد لم يرسل أكثر من رسالة. كم عدد الأشخاص الذين استقبلوا الرسالة، وكم عدد الذين لم يرسلوها ؟

٩- كون شجرة ثنائية تامة من ارتفاع 4 وشجرة ثلاثية تامة من ارتفاع 3.

١٠- كم عدد الرؤوس وكم عدد الأوراق في شجرة نونية تامة ارتفاعها h؟

١١- أرسم (إن أمكن) شجرة نونية تامة إرتفاعها 3 وبها 84 ورقة أو بين أن هذه الشجرة غير موجودة.

٧-٢ اجتياز الشجرة Tree Traversal

الأشجار المتجذرة المرتبة غالبا تستخدم لتخزين المعلومات ونحتاج إلى منهج لزيارة كل رأس في شجرة متجذرة مرتبة لمعالجة البيانات. عملية لعبور كل الرؤوس في شجرة متجذرة مرتبة تعتمد على ترتيب الأبناء.

نظام العنوان العام

سوف نصف طريقة للترتيب الكلي لرؤوس شجرة متجذرة مرتبة. لإنتاج هذا الترتيب، يجب أن نرقم كل الرؤوس. سوف نفعل ذلك بالتتابع.

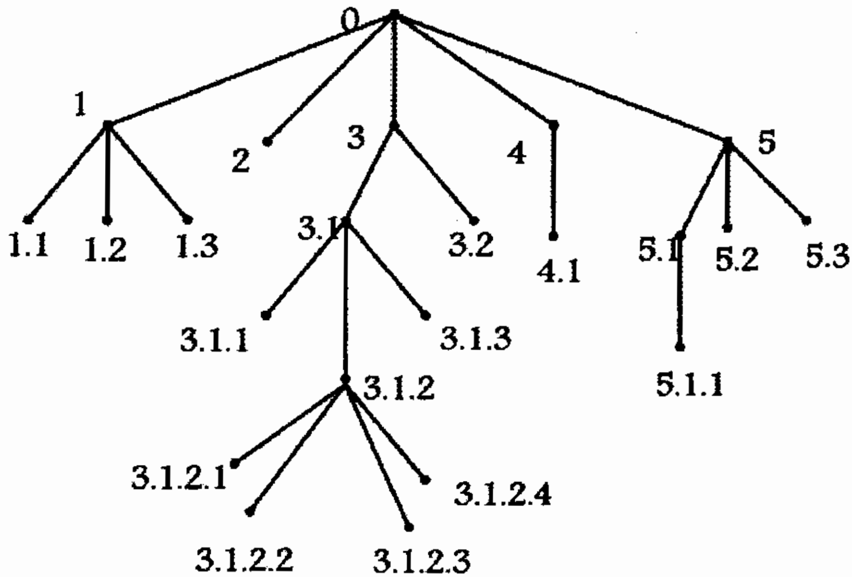
١- نرقم الجذر بالعدد الصحيح 0 . ومن ثم نرقم ابناءه والذين عددهم k (في المستوى 1) من اليسار إلى اليمين بالأرقام $1,2,\ldots,k$.

٢- لكل رأس v عند المستوى n ترقيمه A ، نرقم أبنائه والذين عددهم k_v، كماهم وضعوا من اليسار إلى اليمين كمايلي $A.1, A.2, \ldots, A.k$.

هذا الترقيم يسمى **نظام العنوان العام** universal address system للشجرة المتجذرة المرتبة.

مثال ٧-٢-١. نظهر هنا الترقيم لنظام العنوان العام تبعا للرؤوس في الشجرة المتجذرة المرتبة المبينة في شكل ٦-٢-١ الترتيب المعجمي للترقيم يكون

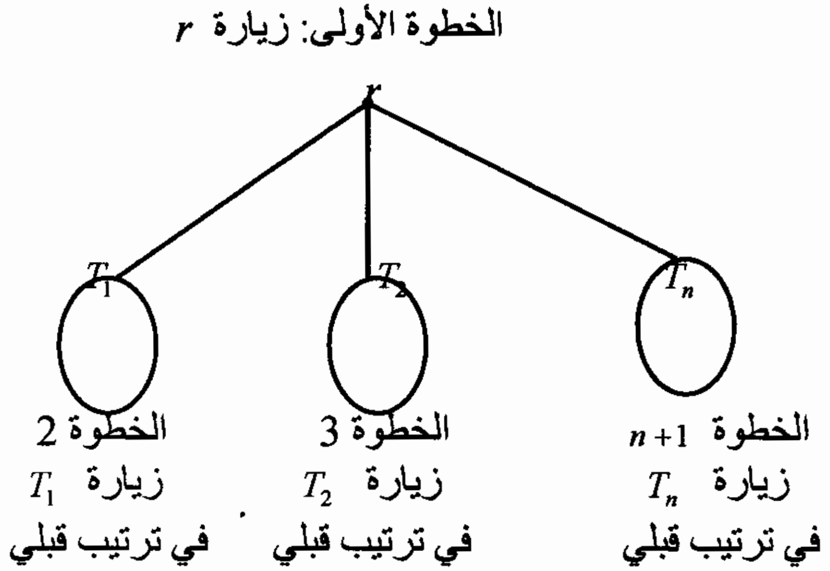
$$0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.3 < 2 < 3 < 3.1 < 3.1.1 < 3.1.2$$
$$< 3.1.2.1 < 3.1.2.2 < 3.1.2.3 < 3.1.2.4 < 3.1.3$$
$$< 3.2 < 4 < 4.1 < 5 < 5.1 < 5.1.1 < 5.2 < 5.3$$



شكل ٧-٢-١

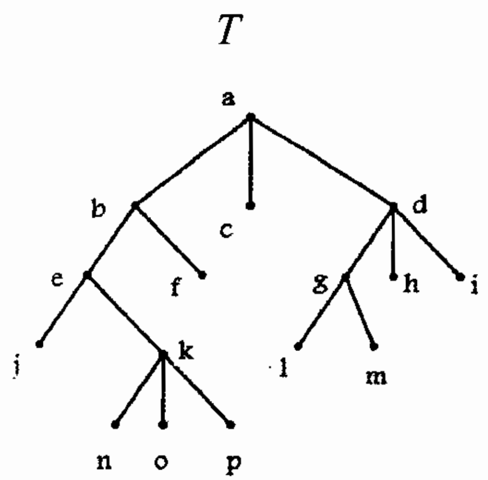
اجتياز الشجرة

تعريف ٧-٢-٢. نفرض T شجرة متجذرة مرتبة لها الجذر r. إذا كانت T تحتوي r فقط فإن r تكون هي **الاجتياز القبلي** لـ T preorder traversal. وإلا نفرض أن $T_1, T_2, \ldots, T_n$ هي الأشجار الجزئية عند r من اليسار إلى اليمين في T. الاجتياز القبلي يبدأ بزيارة r. بعد ذلك يستمر في زيارة T_1 في اجتياز قبلي، ومن ثم T_2 في اجتياز قبلي، وهكذا حتى T_n في اجتياز قبلي. شكل ٧-٢-٢ يشير إلى الاجتياز القبلي كيف ينفذ.



شكل ٧-٢-٢

مثال ٧-٢-٣. في أي ترتيب يتم زيارة الرؤوس في الشجرة المتجذرة المرتبة T المبينة في شكل ٧-٢-٣؟



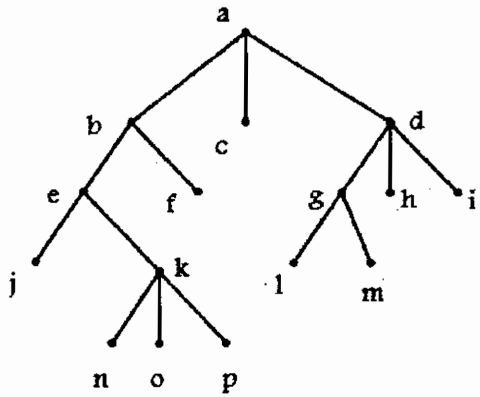
شكل ٧-٢-٣

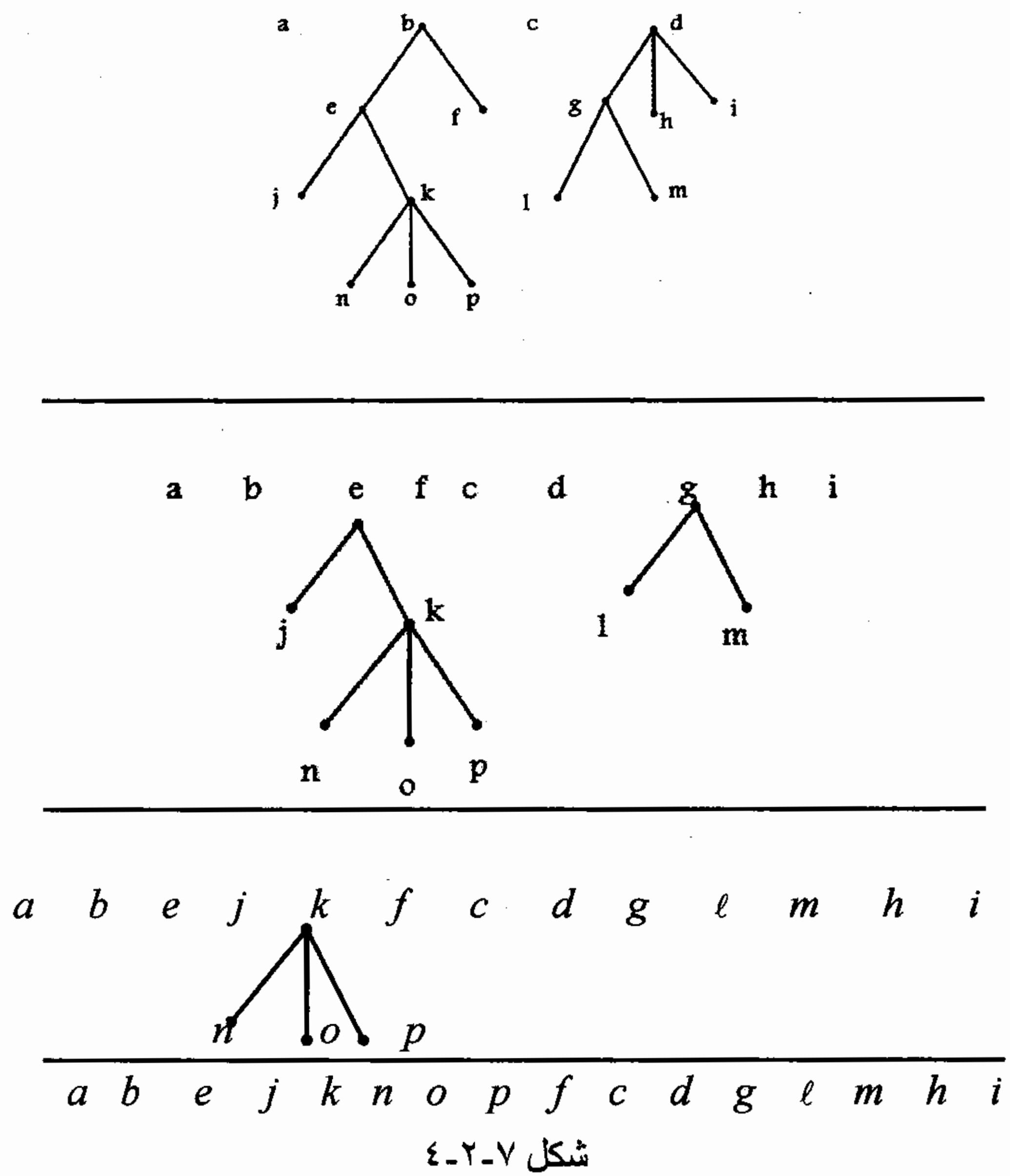
الحل: خطوات الاجتياز القبلي لـ T موضحة في شكل ٧-٢-٤ نجتاز T في ترتيب قبلي بزيارة الجذر a أولا، يليها قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية

بالجذر b ، قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر c و قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر d.

قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر b تبدأ بكتابة b، ثم الرؤوس في الشجرة الجزئية بجذر e في ترتيب قبلي ثم الشجرة الجزئية بجذر f في ترتيب قبلي. قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر d تبدأ بكتابة d، يتبعها قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر g ، يتبعها الشرة الجزئية بالجذر h ، يتبعها الشجرة الجزئية بالجذر i (وهي مجرد i).

قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر e تبدأ بكتابة e، يتبعها قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر j (والتي هي مجرد j)، تليها قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر k . قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر g هي g تليها ℓ تليها m. قائمة الترتيب القبلي للشجرة الجزئية بالجذر k هي k، n، o، p. نتيجة لذلك الاجتياز القبلي لـ T يكون a، b، e، j، k، n، o، p، f، c، d، g، ℓ ،m، h، i.



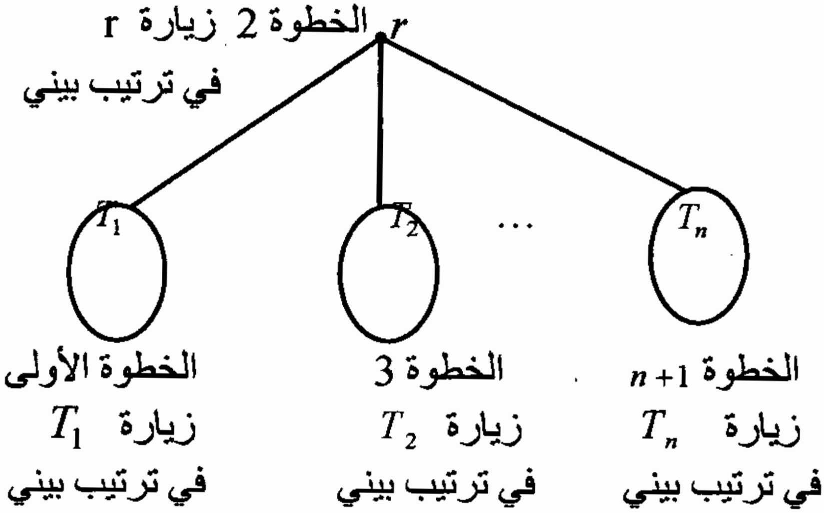


شكل ٧-٢-٤

تعريف ٧-٢-٤. نفرض T شجرة متجذرة مرتبة جذرها r. إذا كانت T تتكون فقط من r، فإن r تكون هي الاجتياز البيني inorder traversal لـ T. وإلا نفرض أن $T_1, T_2, \ldots, T_n$ هي الأشجار الجزئية عند r مرتبة من اليسار لليمين. **الاجتياز البيني** يبدأ باجتياز T_1 في ترتيب بيني ثم زيارة r.

نستمر في اجتياز T_2 في ترتيب بيني، ثم T_3 في ترتيب بيني، ... ونستمر حتي T_n في ترتيب بيني.

شكل ٧-٢-٥ يشير إلى الاجتياز البيني كيف يتم تنفيذها



شكل ٧-٢-٥

مثال ٧-٢-٥ في أي ترتيب يكون زيارة الاجتياز البيني لرؤوس الشجرة المتجذرة المرتبة T في شكل ٧-٢-٣ ؟

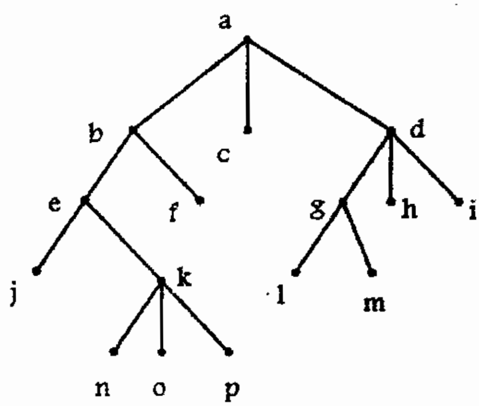
الحل: خطوات الاجتياز البيني الشجرة المتجذرة المرتبة T مبينة في شكل ٦-٢-٦ الاجتياز البيني يبدأ بالاجتياز البيني للشجرة الجزئية بالجذر b، الجذر a، قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر c ، والتي هي مجرد c، و قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر d.

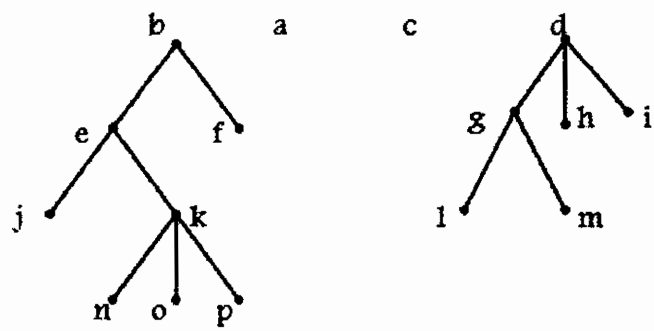
قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر b تبدأ بقائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر e، الجذر b و f قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر d تبدأ بقائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر g ، يتبعها الجذر d ، يتبعها h ، يتبعها i.

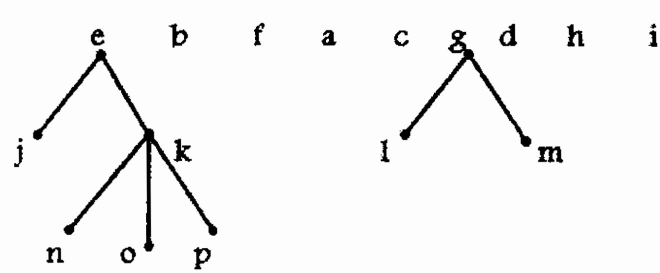
قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر e هي j، يتبعها الجذر e، يتبعها الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر k. قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر g هي ℓ، g، m. قائمة الترتيب البيني للشجرة الجزئية بالجذر k هي n، k، o، p. نتيجة لذلك قائمة الترتيب البيني للشجرة المتجذرة المرتبة هي (مرتبة من اليسار إلى اليمين)

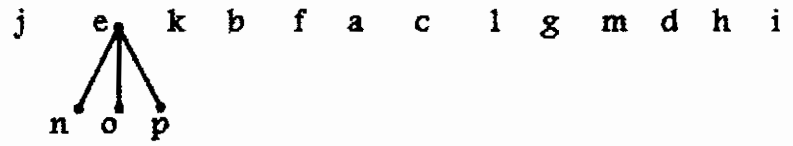
$$j, e, n, k, o, p, b, f, a, c, \ell, g, m, d, h, i.$$

T







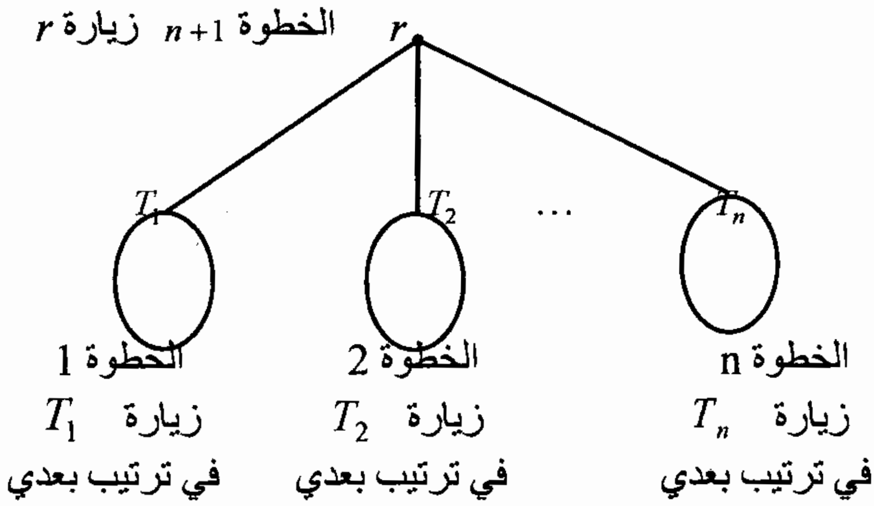


$j \quad e \quad n \quad k \quad o \quad p \quad b \quad f \quad a \quad c \quad l \quad g \quad m \quad d \quad h \quad i$

شكل ٧-٢-٦

تعريف ٧-٢-٦. نفرض T شجرة متجذرة مرتبة جذرها r. إذا كانت T تتكون فقط من r، فإن r تكون هي الاجتياز البعدي postorder traversal لـ T. وإلا نفرض أن $T_1, T_2, \ldots, T_n$ هي الأشجار الجزئية عند r مرتبة من اليسار لليمين. الاجتياز البعدي يبدأ باجتياز T_1 في ترتيب بعدي، ثم T_2 في ترتيب بعدي،...، ثم T_n في ترتيب بعدي وننتهي بزيارة r.

شكل ٧-٢-٧ يوضح كيف يتم الاجتياز في الرتيب البعدي



شكل ٧-٢-٧

مثال ٧-٢-٧. في أي ترتيب يكون اجتياز الترتيب البعدي لزيارة كل الرؤوس في الشجرة المرتبة T المبينة في شكل ٧-٢-٣؟

الحل: خطوات الاجتياز في ترتيب بعدي للشجرة المتجذرة المرتبة T مبينة في شكل ٧-٢-٨ الاجتياز البعدي يبدأ بالاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها b، الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها c، والتي هي مجرد c، الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها d، يليها الجذر a.

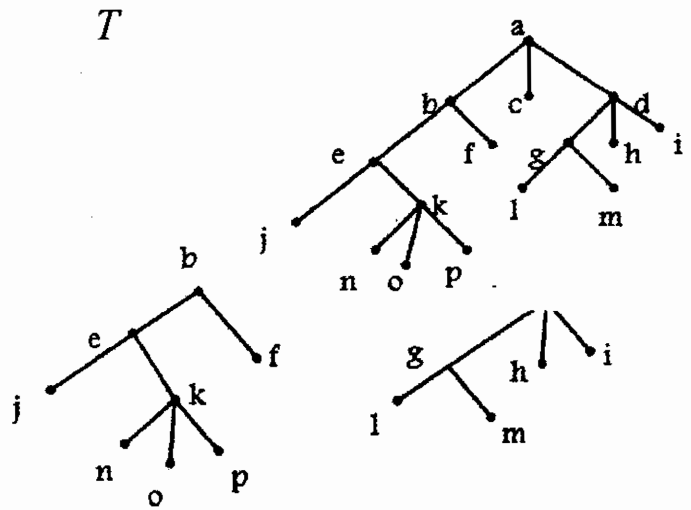
الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها b يبدأ بالاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها e ، يليها f، يليها الجذر b.

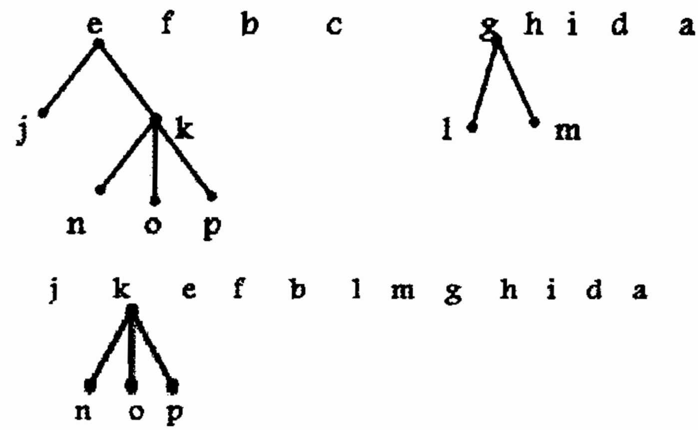
الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها d يبدأ بالاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها g ، يليها h يليها i، يليها الجذر d.

الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها e يبدأ بـ j يليها الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها k ، يليها الجذر e. الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها g هو ℓ ، m ، g. الاجتياز البعدي للشجرة الجزئية التي جذرها k هو n، o، p، k.

لذلك الاجتياز البعدي للشجرة T هو (مرتبة من اليسار إلى اليمين)

$$j, n, o, p, k, e, f, b, c, \ell, m, g, h, i, d, a$$





$n \; o \; p \; k \; e \; f \; b \; l \; m \; g \; h \; i \; d \; a$

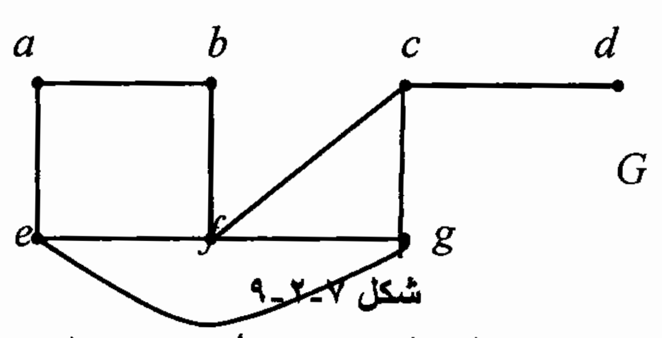
شكل ٧-٢-٨

الأشجار الممتدة Spanning Trees

تعريف ٧-٢-٨. نفرض G رسم بسيط. **الشجرة الممتدة** spanning tree لـ G هي رسم جزئي من G بحيث يكون شجرة تحتوي كل رؤوس G.

الرسم البسيط الذي له شجرة ممتدة يجب أن يكون مترابط حيث يوجد مسار في الشجرة الممتدة بين أي رأسين. العكس أيضا صحيح، أي أن، كل رسم بسيط مترابط له شجرة ممتدة.

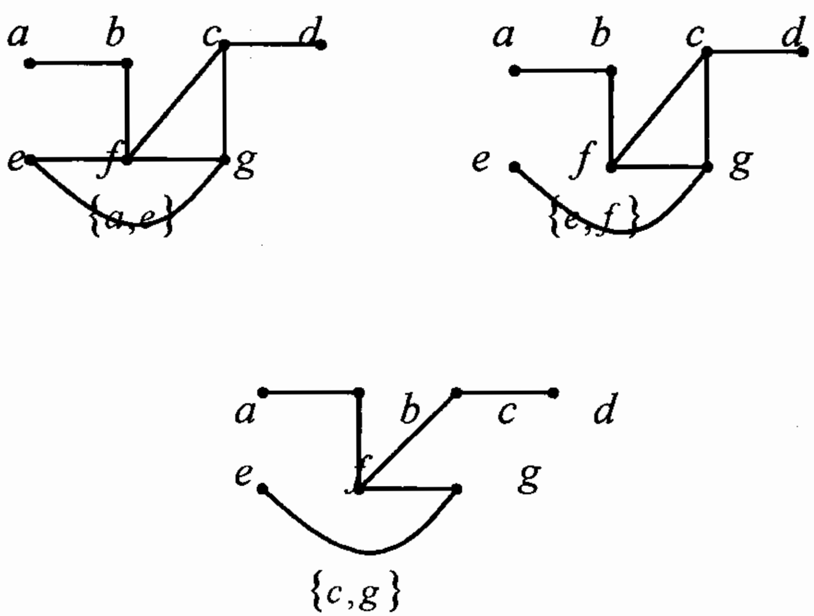
مثال ٧-٢-٩. أوجد الشجرة الممتدة للرسم البسيط G المبين في شكل ٧-٢-٩.



شكل ٧-٢-٩

الحل: الرسم G مترابط، ولكنه ليس شجرة لأنه يحتوي على دورات بسيطة. بإزالة الحافة $\{a,e\}$. هذا يحذف دورة بسيطة، والرسم الجزئي الناتج لا

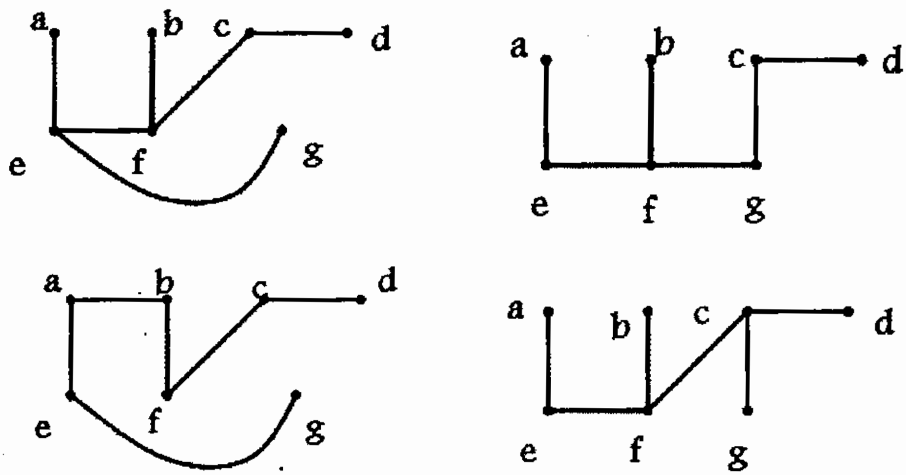
يزال مترابط ويحتوي كل رؤوس G. أيضا بإزالة الحافة $\{e, f\}$ تحذف الدورة البسيط الثانية. أخيرا بإزالة الحافة $\{c, g\}$ نحذف الدورة البسيطة الثالثة لنحصل على رسم بسيط ليس به دورات بسيطة. هذا الرسم الجزئي يكون شجرة ممتدة، حيث أنها شجرة وتحتوي كل رؤوس G. متتابعة حذف الحواف لانتاج شجرة ممتدة موضحة في شكل ٧-٢-١٠.



الحواف المزالة

شكل ٧-٢-١٠

الشجرة الموضحة في شكل ٧-٢-١٠ ليست هي الشجرة الممتدة الوحيدة للرسم G. على سبيل المثال، كل من الأشجار المعطاة في شكل ٧-٢-١١ تكون شجرة ممتدة للرسم G.



شكل ٧-٢-١١

نظريــة ٧-٢-١٠. الرسم غير الموجه G يكون مترابط إذا وفقط إذا كان يحتوي شجرة ممتدة.

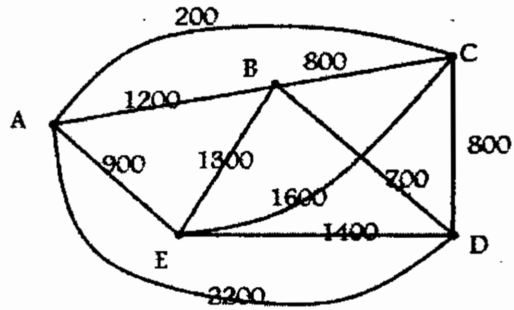
البرهان: إذا كان G يحتوي شجرة ممتدة T فإنه يوجد مسار بين أي رأسين من رؤوس G عبر الشجرة T. لذلك G يكون رسم مترابط.

من جهة أخرى، سوف نبرهن أن الرسم المترابط G يحتوي شجرة ممتدة باستخدام الاستنتاج الرياضي على k، عدد الدورات في G. إذا كان $k = 0$ ، فإن G يكون مترابط بدون دورات وبالتالي يكون شجرة. نفرض أن كل الرسومات المترابطة التي تحتوي عدد من الدورات أقل من k يكون لها أشجار ممتدة، وهو فرض الاستنتاج. نفرض أن رسم مترابط به k دورة. بإزالة حافة e من إحدى الدورات نحصل على رسم $G - e$ مترابط وله شجرة ممتدة وذلك من فرض الاستنتاج لأن $G - e$ به دورات عددها اقل من k. ولكن ، حيث أن $G - e$ يحتوي كل رؤوس G فإن الشجرة الممتدة في $G - e$ تكون أيضا شجرة ممتدة في G.

الشجرة الممتدة الصغرى Minimum Spanning Trees

تخطط شركة لبناء شبكة اتصالات تربط مراكز الحاسب الخمسة التابعة لها. أي زوج من هذه المراكز يمكن أن يربط بخط هاتف مستأجر. ما هي الروابط التي يتم عملها لكي يكون هناك مسار بين أي مركزين من مراكز

الحاسب الخمسة بحيث تكون التكلفة الكلية للشبكة أقل ما يمكن؟ يمكننا نمذجة هذه المسألة باستخدام الرسم الموزون المبين في شكل ٧-٢-١٢.



شكل ٧-٢-١٢

حيث الرؤوس تمثل مراكز الحاسب، الحواف تمثل خطوط الهاتف الممكن تأجيرها والأوزان على الحواف هي معدلات الإيجار الشهري للخطوط الممثلة بالحواف. يمكننا حل هذه المسألة بإيجاد شجرة ممتدة بحيث مجموع أوزان حواف الشجرة تكون أقل ما يمكن. مثل هذه الشجرة الممتدة تسمى الشجرة الممتدة الصغرى.

تعريف ٧-٢-١١. الشجرة الممتدة الصغرى minimum spanning tree في الرسم الموزون هي شجرة ممتدة لها أقل مجموع ممكن لأوزان حوافها.

هنا نقدم خوارزمية لإنشاء شجرة ممتدة صغرى تسمى خوارزمية برايم Prim's algorithm. لتنفيذ خوارزمية برايم، نبدأ باختيار حافة لها أقل وزن ونضعها في الشجرة الممتدة. على التوالي، نضيف إلى الشجرة الحواف من أصغر الأوزان والتي تتبع للرأس الموجود بالفعل في الشجرة ولا يكون دورة بسيطة مع الحواف الموجودة بالفعل في الشجرة. نتوقف عندما يكون قد تم إضافة $n-1$ حافة.

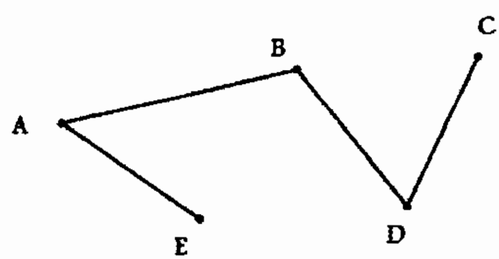
مثال ٧-٢-١٢. استخدم خوارزمية برايم لتصميم شبكة اتصالات ذات أقل تكلفة تربط كل مراكز الحاسب الممثلة بالرسم المعطى في شكل ٧-٢-١٢.

الحل: لحل هذه المسألة نوجد الشجرة الممتدة الصغرى للرسم المعطى في شكل ٧-٢-١٢. خوارزمية برايم تنفذ عن طريق اختيار حافة ابتدائية من أقل

وزن وبالتتابع نضيف الحواف من أصغر أوزان التي تتبع الرأس الموجود في الشجرة بحيث لا تكون دورات بسيطة.

الاختيار	الحافة	التكلفة
1	$\{B,D\}$	700
2	$\{D,C\}$	800
3	$\{B,A\}$	1200
4	$\{A,E\}$	900
	المجموع	3600

الشجرة الممتدة الصغرى مبينة في شكل ٧-٢-١٣

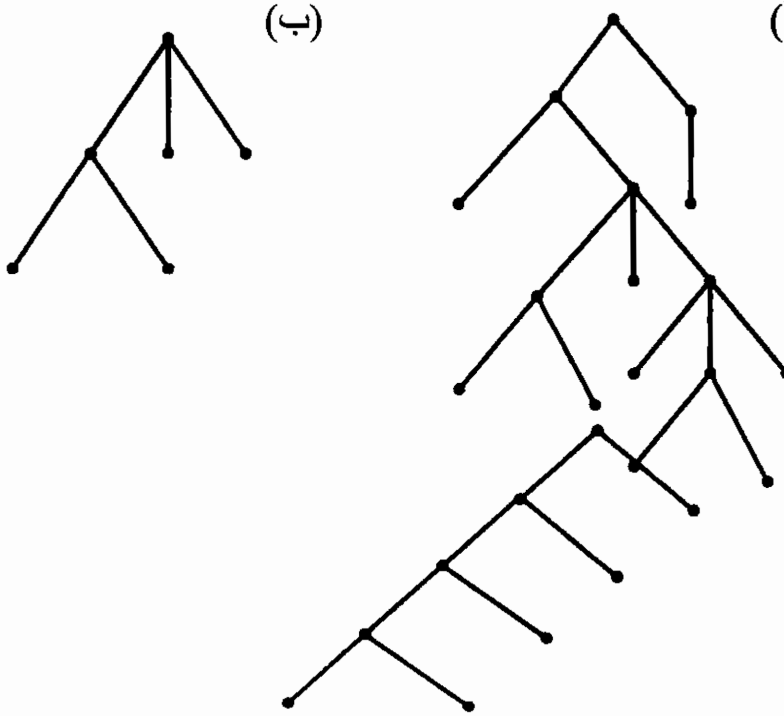


شكل ٧-٢-١٣

تمارين ٧-٢

١- فيما يلي، كون نظام العنوان العام للشجرة المتجذرة المرتبة المعطاة. ومن ثم استخدم هذا في ترتيب رؤوسها مستخدما ترتيب المعجم لترتيب ترقيمها.

(أ) (ب)



(ج)

٢- نفرض أن عنوان الرأس v في الشجرة المتجذرة المرتبة T و 3.4.5.2.4.

(أ) عند أي مستوى تكون v؟

(ب) ما هو عنوان والد v ؟

(ج) ما هو أقل عدد ممكن لأشقاء v ؟

(د) ما هو أقل عدد صحيح موجب للرؤوس في T إذا كان v له هذا العنوان ؟

(هـ) أوجد العناوين الأخرى التي يجب أن تكون.

٣- هل يمكن للأوراق في شجرة متجذرة مرتبة أن يكون لها القائمة من العناوين العامة ؟ إذا كانت كذلك، كون مثل هذه الشجرة المتجذرة المرتبة.(الترتيب المعطى من اليسار إلى اليمين)

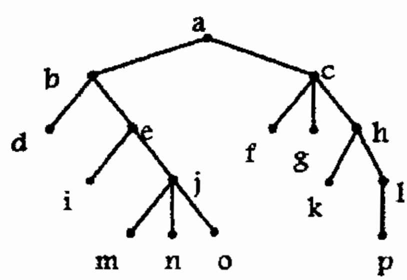
(أ) 1.1.1, 1.1.2 , 1.2 , 2.1.1.1 , 2.1.2 , 2.1.3 , 2.2 , 3.1.1, 3.1.2.1 , 3.1.2.2 , 3.2.

(ب) 1.1 , 1.2.1 , 1.2.2 , 1.2.3 , 2.1 , 2.2.1 , 2.3.1 , 2.3.2 , 2.4.2.1 , 2.4.2.2 , 3.1 , 3.2.1 , 3.2.2.

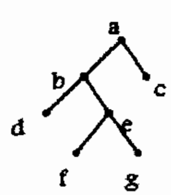
(ج) 1.1 , 1.2.1 , 1.2.2 , 1.2.2.1 , 1.3 , 1.4 , 2 , 3.1 , 3.2 , 4.1.1.1

٤- فيما يلي حدد الترتيب في الاجتياز القبلي لزيارة كل الرؤوس في الشجرة المتجذرة المعطاة

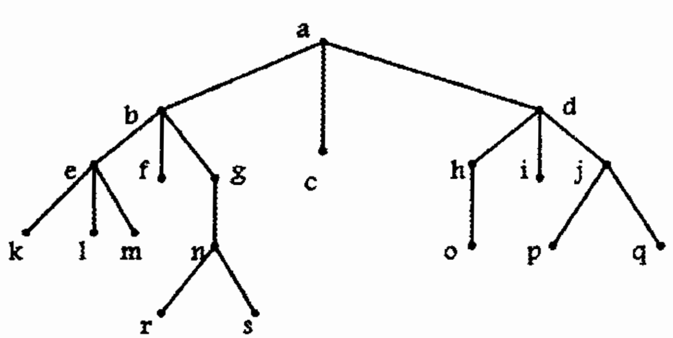
(أ)



(ب)



(ج)



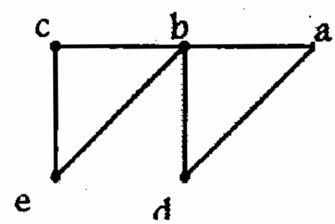
٥- حدد الترتيب في الاجتياز البيني لزيارة كل الرؤوس في الشجرة المتجذرة المعطاة في تمرين 4.

٦- حدد الترتيب في الاجتياز البعدي لزيارة كل الرؤوس في الشجرة المتجذرة المعطاة في تمرين 4.

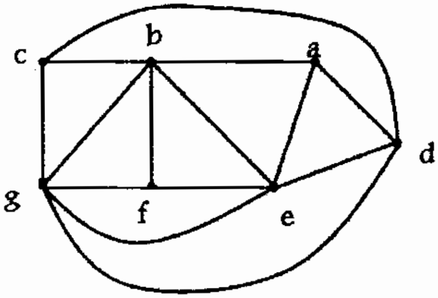
٧- كم حافة يجب إزالتها من الرسم المترابط الذي به n رأس و m حافة لكي ينتج شجرة موسعة ؟

٨- فيما يلي، أوجد الشجرة الموسعة للرسم المعطى بإزالة حواف من الدورات البسيطة

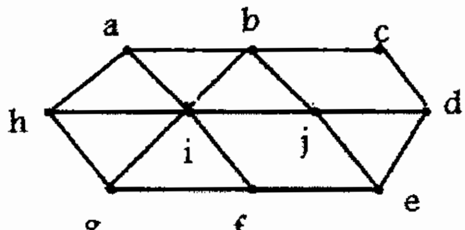
(أ)



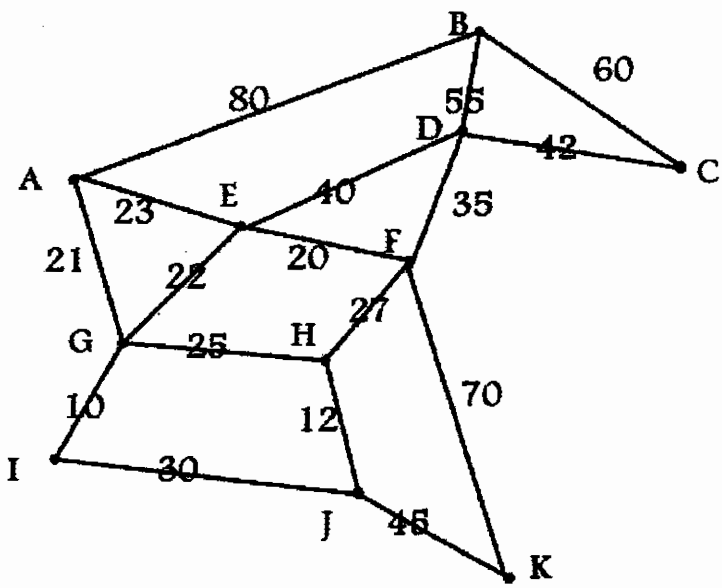
(ب)



(ج)

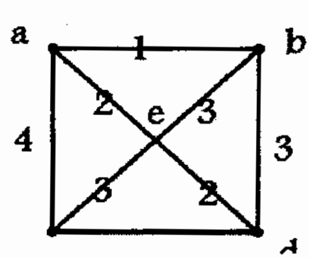


٩- الطريق الممثل بهذا الرسم كله غير ممهد. طول الطريق بين أزواج البلاد تم تمثيلها بالحواف الموزونة. ما هي الطرق التي يجب أن تمهد بحيث يكون هناك طريق ممهد بين كل أزواج البلدان وبحيث يتم تمهيد أقصر طريق ممكن ؟



١٠- فيما يلي   استخدم خوارزمية برايم لإيجاد الشجرة الممتدة الصغرى للرسم الموزون المعطى

(أ)



(ب)