حلول التمارين

حلول تمارين الباب الأول

تمارين ١ـ١

١- (أ)، (ج)، (ز) تقرير صادق. (ب)، (د) تقرير كاذب. (هـ)، (و) ليست تقرير.

٢- (أ) ليس اليوم الأربعاء. (ب) $2+1\neq3$. (ج) الصيف في أسيوط ليس حار أو ليس مشمس.

٣- (أ) نفي p. (ب) p أو q. (ج) p و q. (د) p إذًا وفقط إذا كان q. (هـ) إذا كان p فإن q. (و) إذا كان ليس p فإنه يكون ليس q.

٤- (أ) $r\wedge \sim q$. (ب) $p\wedge q\wedge r$. (ج) $r\rightarrow p$. (د) $r\wedge p\rightarrow q$.

٥- (أ) كاذب. (ب) صادق. (ج) صادق. (د) صادق. (هـ) صادق. (و) صادق.

٦- (أ) صادق. (ب) كاذب. (ج) كاذب. (د) كاذب. (هـ) صادق.

٨- كون جدول الصدق للتقارير المركبة التالية

(ج)

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$(p\vee\sim q)\rightarrow q$
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

(ح)

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

٩-

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
1	0	1
0	1	0

١٠- (ب)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

١١-(أ)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

١٢- (أ)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \wedge (p \vee q)$	$[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1

١٣- (أ) إذا كـان $\sim p\wedge(p\vee q)$ صـادق فـإن $\sim p$ يكـون صـادق و $p\vee q$ يكون صادق وهذا يعني أن p يكون كاذب وبالتالي يجب أن يكون q صادق وبالتالي التقرير $[\sim p\wedge(p\vee q)]\rightarrow q$ يكون صادق. إذا كـان $\sim p\wedge(p\vee q)$ كـاذب فـإن التقرير $[\sim p\wedge(p\vee q)]\rightarrow q$ يكون صادق لأي قيمة صدق لـ q. أي أن التقرير $[\sim p\wedge(p\vee q)]\rightarrow q$ يكون صادق في كل الحالات وبالتالي يكون قانون.

١٤- (أ) التقرير $p\rightarrow q$ يكون كاذب إذا وفقط إذا كان p صادق و q كاذب إذا وفقط إذا كان $\sim p$ كاذب و $\sim q$ صادق إذا وفقط إذا كان $\sim q\rightarrow\sim p$ كاذب.

ويمكن إثبات التكافؤ أيضا باستخدام جدول الصدق

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\rightarrow q$	$\sim q\rightarrow\sim p$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

(ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\leftrightarrow\sim q$	$\sim p\leftrightarrow q$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

(د)

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \vee (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

١٥-

p	q	r	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim p \vee r$	$q \vee r$	α	β
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1

حيث $\alpha = (p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$

و $\beta = (p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \to (q \vee r)$

واضح من الجدول أن $\beta=(p\vee q)\wedge(\sim p\vee r)\rightarrow(q\vee r)$ يكون قانون.

١٨-

p	q	r	s	$p\rightarrow r$	$q\rightarrow s$	α	$p\rightarrow q$	$r\rightarrow s$	β
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

حيث $\alpha=(p\rightarrow r)\rightarrow(q\rightarrow s)$ و $\beta=(p\rightarrow q)\rightarrow(r\rightarrow s)$

واضح من الجدول أن $(p\rightarrow q)\rightarrow(r\rightarrow s)$ و $(p\rightarrow r)\rightarrow(q\rightarrow s)$ غير متكافئان.

١٩- (أ) $\sim p\wedge q$. (ب) $\sim p\vee(\sim q\wedge(\sim r\vee F)$.

(ج) $(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee T)$.

٢٠- (أ) $\sim p\vee q\vee r$. (ب) $(\sim p\vee\sim q\vee\sim r)\wedge\sim s$.

(ج) $(\sim p \wedge T) \vee (\sim q \wedge F)$.

حلول تمارين ١-٢

١- (أ) مربع أي عد حقيقي لا يساوي 1 . كاذب.

(ب) مربع أي عدد صحيح يكون موجب. كاذب.

(ج) يوجد عدد حقيقي مكعبة يساوي -1. صادق.

(د) يوجد عدد صحيح بحيث إذا جمعنا عليه 1 يكون الناتج أكبر من العدد نفسه. صادق.

(هـ) مربع أي عدد صحيح يكون عدد صحيح. صادق.

٢- $P(0)$ ، $P(4)$ كل منهما صادق. $P(6)$ كاذب.

٣- (أ) يوجد طالب يقضي أكثر من خمس ساعات في كل أيام الأسبوع في الفصل.

(ب) كل الطلاب يقضون أكثر من خمس ساعات في كل أيام الأسبوع في الفصل.

(ج) يوجد طالب لا يقضي أكثر من خمس ساعات في كل أيام الأسبوع في الفصل.

(د) لا يوجد طالب يقضي أكثر من خمس ساعات في كل أيام الأسبوع في الفصل.

أو كل الطلاب لا يقضون أكثر من خمس ساعات في كل أيام الأسبوع في الفصل.

٤- (أ) كل ممثل كوميدي يكون مرح. (ب) كل واحد من الناس يكون ممثل كوميدي ومرح.

(ج) يوجد إنسان إذا كان ممثل كوميدي فإنه يكون مرح.

(د) يوجد إنسان ممثل كوميدي ومرح.

٥- (أ)، (ب)، (د)، (و) صادق . (ج)، (هـ)، (ز) كاذب.

٦- (أ) $p(1)\vee P(2)\vee p(3)\vee p(4)\vee p(5)$.

(ب) $p(1)\wedge P(2)\wedge p(3)\wedge p(4)\wedge p(5)$.

(ج) $\sim p(1)\wedge\sim P(2)\wedge\sim p(3)\wedge\sim p(4)\wedge\sim p(5)$.

(هـ) $\forall x\,\big((x\neq 3)\to P(x)\big)\vee\exists x\,\sim P(x)$.

$$(p(1)\wedge P(2)\wedge p(4)\wedge p(5))$$
$$\vee\sim p(1)\vee\sim P(2)\vee\sim p(3)\vee\sim p(4)\vee\sim p(5)$$

٧- (أ) نفرض $E(x)$ تعني أن x يمكن أن يتحدث الانجليزية .

أولا: $\exists xE(x)$. ثانيا: $\exists x\,(C(x)\wedge E(x))$.

(ب) نفرض $L(x)$ تعني أن x ودود.

أولا: $\forall xL(x)$. ثانيا: $\forall x\,(C(x)\to L(x))$.

(ج) نفرض أن $A(x)$ تعني أن x ولد في أسيوط .

أولا: $\exists x\sim A(x)$. ثانيا: $\exists x\,(C(x)\wedge\sim A(x))$.

(د) نفرض أن $T(x)$ تعني أن x ظهر في برنامج تلفزيوني.

أولا: $\exists xT(x)$. ثانيا: $\exists x\,(C(x)\wedge T(x))$.

(هـ) نفرض أن $L(x)$ تعني أن x درس مقرر البرمجة المنطقية.

أولا: $\forall x\sim L(x)$. ثانيا: $\forall x\,(C(x)\to\sim L(x))$.

٨- باعتبار أن النطاق يتكون من كل الناس، نفرض $T(x)$ تعني أن x صادق و $F(x)$ تعني أن x صديقك.

(أ) $\forall x\sim T(x)$. (ب) $\sim\forall xT(x)=\exists x\sim T(x)$.

(ج) $\forall x\,(F(x)\to T(x))$. (د) $\exists x\,(F(x)\wedge T(x))$.

(هـ) $\forall x\,(F(x)\wedge T(x))$.

(و) $\exists x\sim F(x)\vee\exists x\sim T(x)$.

أو $\sim \forall x F(x) \vee \exists x \sim T(x)$.

٩- نفرض أن $T(x)$ تعني أن x قانون و $C(x)$ تعني أن x تناقض.

(أ) $\exists x T(x)$. (ب) $\forall x (C(x) \to T(\sim x))$.

(ج) $\exists x \exists y (\sim T(x) \wedge \sim C(x) \wedge \sim T(y) \wedge \sim C(y) \wedge T(x \vee y))$

(د) $\forall x \forall y ((T(x) \wedge T(y) \to T(x \wedge y))$.

١٠- (أ) نفرض أن النطاق هو مجموعة كل الكلاب، $O(x)$ تعني أن x مسن و $C(x)$ تعني أن x يمكن أن يتعلم الصيد.

إذن $\exists x (O(x) \wedge C(x))$. نفي العبارة هو

$\sim \exists x (O(x) \wedge C(x)) = \forall x (\sim O(x) \vee \sim C(X))$.

هذه تعني أن "جميع الكلاب تكون غير مسنة أو لا يمكن أن تتعلم الصيد"

(ج) نفرض أن النطاق هو مجموعة كل الطيور و $F(x)$ تعني أن x يمكن أن يطير. العبارة تكون $\forall x F(x)$. نفي العبارة هو

$\sim \forall x F(x) = \exists x \sim F(x)$. وهذه تعني "يوجد طائر لا يمكن أن يطير".

حلول تمارين ١-٣

١- (أ) لكل عدد حقيقي يوجد عدد حقيقي أكبر منه.

(ب) حاصل ضرب عددين حقيقين غير سالبين يكون عدد حقيقي غير سالب.

(ج) حاصل ضرب أي عددين حقيقيين يكون عدد حقيقي.

(د) يوجد عدد حقيقي حاصل ضربه مع أي عدد حقيقي يساوي نفس العدد، أي يوجد محايد ضربي للأعداد الحقيقية.

(هـ) ناتج طرح عدد حقيقي سالب من عدد حقيقي غير سالب يكون عدد حقيقي موجب.

(و) لأي عددين حقيقيين يوجد عدد حقيقي إذا جمع على أحدهما يعطي الآخر، أي أن الفرق بين عددين حقيقيين يكون عدد حقيقي.

(ز) يوجد عدد حقيقي إذا جمعناه على أي عدد حقيقي يعطي نفس العدد، أي يوجد محايد جمعي للأعداد الحقيقية.

(ح) يوجد عددين حقيقيين غير موجبين والفرق بينهما موجب.

(ط) حاصل ضرب أي عددين حقيقيين سالبين يكون عدد حقيقي موجب.

٢- (أ) يوجد في فصلك طالب أرسل رسالة بريد إليكتروني إلى طالب آخر.

(ب) يوجد في فصلك طالب أرسل رسالة بريد إليكتروني إلى كل الطلاب.

(ج) يوجد في فصلك طالب كل الطلاب أرسلوا إليه رسالة بريد إليكتروني.

(د) يوجد في فصلك طالب كل الطلاب أرسلوا إليه رسالة بريد إليكتروني.

(هـ) يوجد في فصلك طالب أرسل رسالة بريد إليكتروني إلى كل الطلاب.

(و) كل الطلاب في فصلك أرسلوا رسائل بريد إليكتروني إلى كل الطلاب.

٣- (أ) ، (ج)، (ز)، (ح)، (ط)، (ك) كاذب .

(ب)، (د)، (هـ)، (و) صادق.

٤- (أ)، (ج)، (د)، (و)، (ط) صادق.

(ب)، (هـ)، (ز)، (ي) كاذب.

٥- (أ) $\sim \forall x\ \forall y\ \forall z\ T(x, y, z) = \exists x\ \exists y\ \exists z\ \sim T(x, y, z)$.

(ب) $\sim(\forall x\ \exists y\ P(x,y) \vee \forall x\ \exists y Q(x,y)) =$
$\exists x\ \forall y \sim P(x,y) \wedge \exists x\ \forall y \sim Q(x,y)$

(ج) $\sim(\forall x\ \exists y \left(P(x,y) \wedge \exists z\ R(x,y,z)\right)) =$
$\exists x\ \forall y \left(\sim P(x,y) \vee \forall z \sim R(x,y,z)\right)$

(د) $\sim(\forall x\ \exists y\ \left(P(x,y) \to Q(x,y)\right)) =$
$\exists x\ \forall y\ \left(P(x,y) \wedge \sim Q(x,y)\right)$

٦- (أ)، (ب)، (ج)، (د)، (هـ)، (ز) صادق. (ح) كاذب .

٧- (أ) $P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge$
$P(2,3) \wedge P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)$

(ب) $P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \vee$
$P(2,3) \vee P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)$

(ج) $(P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)) \vee$
$(P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee$
$(P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3))$

(د) $(P(1,1) \wedge P(2,1) \wedge P(3,1)) \vee$
$(P(1,2) \wedge P(2,2) \wedge P(3,2)) \vee$
$(P(1,3) \wedge P(2,3) \wedge P(3,3))$

٨- (أ) $\sim \exists y \exists x P(x,y) = \forall y \forall x \sim P(x,y)$

(ب) $\sim \forall x \exists y P(x,y) = \exists x \forall y \sim P(x,y)$.

(ج) $\sim \exists y (Q(y) \wedge \forall x \sim R(x,y)) = \forall y (\sim Q(y) \vee \exists x R(x,y))$

(د) $\sim \exists y (\exists x R(x,y) \vee \forall x S(x,y)) =$

$\forall y(\forall x \sim R(x,y) \wedge \exists x \sim S(x,y))$

(هـ) $\sim \exists y(\forall x \exists z T(x,y,z) \vee \exists x \forall z U(x,y,z)) =$

$\forall y(\exists x \forall z \sim T(x,y,z) \wedge \forall x \exists z \sim U(x,y,z))$

٩- (أ) $\exists x \forall y \exists z \sim T(x,y,z)$.

(ب) $\exists x \forall y \sim P(x,y) \wedge \exists x \forall y \sim Q(x,y)$.

(ج) $\exists x \forall y(\sim P(x,y) \vee \forall z \sim R(x,y,z))$.

(د) $\exists x \forall y(P(x,y) \wedge \sim Q(x,y))$.

(هـ) $\forall z \exists y \exists x \sim T(x,y,z)$.

(و) $\forall x \forall y \sim P(x,y) \vee \exists x \exists y \sim Q(x,y)$.

(ز) $\forall x \forall y(\sim Q(x,y) \leftrightarrow \sim Q(y,x))$.

(ح) $\exists y \forall x \forall z(\sim T(x,y,z) \wedge \sim Q(x,y))$.

١٠-(أ) $\exists x \exists y \sim P(x,y)$.

(ب) $\exists y \forall x \sim P(x,y)$.

(ج) $\exists y \exists x(\sim P(x,y) \wedge \sim Q(x,y))$.

(د)$(\forall x \forall y P(x,y) \vee \exists x \exists y \sim Q(x,y))$.

(هـ)$\exists x(\forall y \exists z \sim P(x,y,z) \vee \forall z \exists y \sim P(x,y,z))$.

١١- (أ) صادق. (ب) كاذب. (ج) صادق.

١٢- (أ) صادق. (ب) صادق . (ج) كاذب.

١٣- (أ) 2، -2. (ب) $x = 100$. (ج) $8^2 = 4^3$. (د) $x = 2$، $y = 0$.

(هـ) $x = 5$. (و) $x = 3$.

حلول تمارين ١ـ٤

١ـ قانون التثبت. المحاججة صحيحة. الخلاصة تكون صادق لأن الفروض كلها صادق.

٣ـ (أ) الإضافة. (ب) التبسيط. (ج). التثبت (د)الإنكار.

٤ـ ما هي قاعدة الاستدلال تستخدم في كل من المحاججات التالية ؟
(أ)التبسيط (ب) التثبت. (ج) القياس الافتراضي.

٥ـ نفرض w "سامي يعمل ببطء" و d "سامي شخص ممل" و j "سامي سوف يحصل على وظيفة". الفروض هي w، $w \to d$ و $d \to \sim j$. باستخدام التخفيض والفرضين الأول والثاني ينتج d . باستخدام التخفيض والفرض الأخير تنتج الخلاصة الطلوبة ، $\sim j$ ، وهي "سامي لن يحصل على وظيفة".

٧ـ نفرض أن $p_1, p_2, \ldots, p_n$ جميعها صادق. نود استنتاج أن $q \to r$ يكون صادق. إذا كان q كاذب ينتج المطلوب. وإلا، إذا كانت q صادق فإنه من صحة صيغة المحاججة (كلما كانت $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ صادق فإن r يجب أن تكون صادق) نعلم أن r تكون صادق.

٩ـ لكل من المحاججات التالية وضح أي من قواعد الاستدلال تستخدم في كل خطوة.
(أ) نفرض $C(x)$ هي "x يكون في هذا الفصل"، $j(x)$ هي "x يعرف كيف يكتب برنامج الجافا" و $h(x)$ هي "x يمكن أن يحصل على وظيفة بمرتب مرتفع". الفروض هي $C(\text{Samy})$، $j(\text{Samy})$،

$\forall x\,(j(x) \to h(x))$. باستخدام التخصيص الشامل والفرض الأخير ينتج $j\,(\text{Samy}) \to h(\text{Samy})$. بتطبيق قاعدة التثبت على هذه الخلاصة والفرض الثاني ينتج $h(\text{Samy})$. باستخدام العطف والفرض الأول ينتج $C\,(\text{Samy}) \wedge h(\text{Samy})$. أخيرا باستخدام تعميم الوجود ينتج $\exists x\,(C(x) \wedge h(x))$.

(ب) نفرض $C(x)$ هي "x يكون في هذا الفصل"، $w(x)$ هي "x يستمتع بمشاهدة الحوت" و $p(x)$ هي "x يهتم بتلوث البحار". الفروض تكون $\exists x\,(C(x) \wedge W(x))$ و $\forall x\,(w(x) \to p(x))$. من الفرض الأول $c(y) \wedge w(y)$ لشخص معين y. باستخدام التبسيط ينتج $w(y)$. باستخدام الفرض الثاني والتخصيص الشامل ينتج $w(y) \to p(y)$. باستخدام التثبت ينتج $p(y)$ وباستخدام العطف ينتج $c(y) \wedge p(y)$. أخيرا من تعميم الوجود تنتج الخلاصة المطلوبة $\exists x\,(C(x) \wedge p(x))$.

١١- الخطأ يحدث في خطوة 5 لأنه لايمكننا (كما تم في المحاججة) فرض أن c التي تجعل P صادق هي نفس c التي تجعل Q صادق.

١٣- الخطأ في تحديد أن سامي هو الشخص المسرور لأن الفرض هو يوجد شخص مسرور ولم يحدد سامي.

١٤- الخطأ هو في تحديد أن s هو Aly.

١٥-

الخطوة	السبب
1- $\forall x\,(P(x) \wedge R(x))$	فرض
2- $P(a) \wedge R(a)$	التخصيص الشامل
3- $P(a)$	التبسيط
4- $\forall x\,(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)))$	فرض
5- $Q(a) \wedge S(a)$	تخفيض التخصيص العام من (3) و (4)
6- $S(a)$	التبسيط من (5)

$R(a)$ -7	التبسيط من (2)
$R(a) \wedge S(a)$ -8	العطف من (6) و (7)
$\forall x\,(R(x) \wedge S(x))$ -9	التعميم الشامل من (8)

١٦-

الخطوة	السبب
$\exists x \sim P(x)$ -1	فرض
$\sim P(c)$ -2	تخصيص الوجود من (1)
$\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ -3	فرض
$P(c) \vee Q(c)$ -4	التخصيص الشامل من (3)
$Q(c)$ -5	قياس الفصل من (4) و (2)
$\forall x\,(\sim Q(x) \vee S(x))$ -6	فرض
$\sim Q(c) \vee S(c)$ -7	انتخصيص الشامل من (6)
$S(c)$ -8	قياس الفصل من (5) و (7)
$\forall x\,(R(x) \to \sim S(x))$ -9	فرض
$R(c) \to \sim S(c)$ -10	التخصيص الشامل من (9)
$\sim R(c)$ -11	طريقة الإنكار من (8) و (10)
$\exists x \sim R(x)$ -12	تعميم الوجود من (11)

حلول تمارين ١-٥

١- نفرض m عدد زوجي ، إذن $m = 2k$ حيث k عدد صحيح. بالتربيع $m^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. لذلك m^2 يكون عدد زوجي.

٢- هناك ثلاث احتمالات $x < y$ ، $y < x$ و $x = y$.

الحالة الأولى $x < y$: $\max(x,y) = y$ و $\min(x,y) = x$

لذلك $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$

الحالة الثانية $y < x$: $\max(x,y) = x$ و $\min(x,y) = y$

$\max(x,y)+\min(x,y)=x+y$ لذلك

الحالة الثالثة $x=y$:

$\min(x,y)=x=y$ و $\max(x,y)=x=y$

$\max(x,y)+\min(x,y)=x+y$ لذلك

٣- (i)⇐(ii): إذا كان $a<b$ فإن $a+a<a+b$، أي $2a<a+b$ ومنها يكون $a<\frac{a+b}{2}$.

(ii)⇐(iii): إذا كان $a<\frac{a+b}{2}$ فإن $2a<a+b$ ومنها $a<b$. بجمع b على الطرفين نحصل على $a+b<b+b=2b$ ومنها يكون $\frac{a+b}{2}<b$.

(iii)⇐(i): نفرض $\frac{a+b}{2}<b$. إذن $a+b<2b$ ومنها يكون $a<b$.

٤- $x=\frac{c-b}{a}$ يكون حل حيث أن $a\frac{c-b}{a}+b=c-b+b=c$. لإثبات أن هذا الحل وحيد، نفرض أنه يوجد حلان x_1، x_2. إذن $ax_1+b=c$ و $ax_2+b=c$. وهذا يؤدي إلى $ax_1+b=ax_2+b$. ومنها نحصل على $ax_1=ax_2$. بالقسمة على a $(a\neq 0)$ نحصل على $x_1=x_2$.

٥- البرهان يكون بالحالات $x\geq 0$، $y\geq 0$؛ $x\geq 0$، $y<0$؛ $x<0$، $y\geq 0$ و $x<0$، $y<0$.

٦- ما هي طرق البرهان التي تعتقد أنه ينبغي استخدامها في كل من الحالات التالية ؟

(أ) برهان إنشائي. (ب) برهان بالتناقض.

٧- البرهان البديهي.

٨- البرهان البديهي.

٩- البرهان البديهي.

١٠- (أ) نفرض أن n عدد فردي. لذلك $n = 2k + 1$ لعدد ما صحيح k.
إذن $n^3+5=2(4k^3+6k^2+3k+3)$ ويكون n^3+5 عدد زوجي

(ب) نفرض أن n^3+5 عدد فردي و n عدد فردي. حيث أن حاصل ضرب عددين فرديين يكون عدد فردي فإن n^2 يكون عدد فردي وكذلك n^3 يكون عدد فردي. إذن n^3+5 يكون عدد زوجي، تناقض.

١١- نفرض أن x عدد كسري و y عدد غير كسري ونفرض أن $x+y$ عدد كسري. إذن $x=\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان و $b\neq 0$، و $x+y=\frac{c}{d}$ حيث c و d عددان صحيحان و $d\neq 0$. إذن $y=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{cb-ad}{bd}$. وحيث أن $bd\neq 0$، فإن y يكون عدد كسري، وهذا تناقض.

١٢- البرهان هنا يكون في إتجاهين. الأول نبرهن أنه إذا كان n عدد زوجي فإن $7n+4$ يكون زوجي. الثاني نبرهن أنه إذا كان $7n+4$ عدد زوجي فإن n يكون زوجي.

١٣- نبرهن أن (i)⇐(ii)، (ii)⇐(iii) و (iii)⇐(i).

١٤- 1=1. البرهان إنشائي.

١٥- $8=2^3$، $9=3^2$. البرهان إنشائي .

حلول تمارين الباب الثاني

حلول تمارين ٢-١

١- (أ) $\{1,-1\}$. (ب) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$.

(ج) $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81\}$. (د) ϕ.

٢- (أ) $\{x : x = 3y, 0 \le y \le 4, y \in \mathbb{Z}\}$.

(ب) $\{x : x \in \mathbb{Z}, -3 \le x \le 3\}$.

٣- (أ)، (ب)، (ج)، (هـ)، (ك)، (ن) كاذب .

(د)، (و)، (ز)، (ح)، (ط)، (ي)، (ل)، (م) صادق.

٤- الضرب الكارتيزي هو مجموعة الثنائيات حيث الإحداثي الأول يمثل المقرر الدراسي الذي يدرسه الأستاذ الممثل بالإحداثي الثاني.

٥- حيث أن ϕ هي المجوعة الخالية لتي ليس بها عناصر، ومن تعريف الضرب الكارتيزي فإن $A \times \phi = \{(a,b) : a \in A, b \in \phi\} = \phi$ وبالمثل $\phi \times A = \{(a,b) : a \in \phi, b \in A\} = \phi$.

٦- (أ) $\{\phi, \{a\}\}$. (ب) $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

(ج) $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$.

٧- (أ) مجموعة كل الطلاب الذين يعيشون في منطقة لا تبعد أكثر من واحد كيلومتر عن الجامعة و يذهبون إلى الجامعة سيرا على الأقدام.

(ب) مجموعة كل الطلاب الذين يعيشون في منطقة لا تبعد أكثر من واحد كيلومتر عن الجامعة أو يذهبون إلى الجامعة سيرا على الأقدام.

(ج) مجموعة كل الطلاب الذين يعيشون في منطقة لا تبعد أكثر من واحد كيلومتر عن الجامعة ولا يذهبون إلى الجامعة سيرا على الأقدام.

(د) مجموعة كل الطلاب الذين يذهبون إلى الجامعة سيرا على الأقدام و يعيشون في منطقة تبعد أكثر من واحد كيلومتر عن الجامعة.

٨- (أ) $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. (ب) $A \cap B = \{3\}$.

(ج) $A-B=\{1,2,4,5\}$.　　(د) $B-A=\{0,6\}$.

٩- (أ) نفرض $x \in A \cup B$، إذن $x \in A$ أو $x \in B$. ومن ثم $x \in A$ أو $x \in B$ أو $x \in C$ وهذا يعني أن $x \in A \cup B \cup C$. إذن $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$.

(ج) نفرض $x \in (A-B)-C$. إذن $x \in (A-B)$ و $x \notin C$. ومنها يكون $x \in A$ و $x \notin B$ و $x \notin C$. أي أن $x \in A$ و $x \notin C$. ومن ثم $x \in A-C$. إذن $(A-B)-C \subseteq A-C$.

(د) نفرض $x \in (A-C) \cap (C-B)$. إذن $x \in (A-C)$ و $x \in (C-B)$. إذن $x \in A$ و $x \notin C$ و $x \in C$ و $x \notin B$. إذن $x \notin C$ و $x \in C$. إذن $x \in C \cap C^c = \phi$.

١٠-(أ) B مجموعة جزئية من A.　(ب) A مجموعة جزئية من B.

(ج) $A \cap B = \phi$.　(د) هذا صحيح لأي مجموعتين.

(هـ) $A = B$.

١١-(أ) 0011100000.　(ب) 1010010001.

(ج) 0111001110.

١٢- (أ) $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$.　(ب) $\{2,4,5,6,7\}$.

(ج) $\{1,10\}$.

١٣- (أ) المجموعة الخالية.　(ب) المجموعة الشاملة.

١٤- (ج) نفرض $x \in A-B$. إذن $x \in A$ و $x \notin B$. إذن $x \in A$ ومن ثم يكون $A-B \subseteq A$.

(د)
$$A \cap (B-A) = \{x : x \in A \wedge x \in B-A\}$$
$$= \{x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A\}$$
$$= \{x \in A \wedge x \notin A\} = \phi$$

(هـ)
$$A \cup (B - A) = \{x : x \in A \vee x \in (B - A)\}$$
$$= \{x : x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A\}$$
$$= \{x : x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$$

١٥- نعلم أن $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. بتطبيق هذه العلاقة نحصل على
$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)|$$
$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| = |A| + |B| + |C|$$
$$- |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C|$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

١٦- (أ) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_i = \{1,2,3,\dots,i\}$. (ب) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 = \{1\}$

١٧- (أ) نفرض $(a,b) \in (A \times B) \cap (B \times A)$. إذن $(a,b) \in (A \times B)$ و $(a,b) \in (B \times A)$. إذن $a \in A$ و $b \in B$ و $a \in B$ و $b \in A$ إذن $a \in A \cap B$ و $b \in A \cap B$. إذن $(a,b) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$. والعكس أيضا يكون صحيح، لذلك يكون

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B) .$$

(ب) مثل الجزء الأول من برهان (أ)

١٨- (أ) $(a,b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A$ و $b \in B \cap C \Leftrightarrow$ $a \in A$ و $b \in B$ و $b \in C \Leftrightarrow a \in A$ و $b \in B$ و $a \in A$ و $b \in C \Leftrightarrow (a,b) \in A \times B$ و $(a,b) \in A \times C \Leftrightarrow$ $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

١٩- نفرض أن $A \times B \subseteq C \times D$ ونفرض أن $a \in A$ و $b \in B$. إذن $(a,b) \in A \times B$ ومن ثم $(a,b) \in C \times D$. لذلك $a \in C$ و $b \in D$.
لذلك $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$. بنفس الطريقة يمكن إثبات الاتجاه العكسي.

٢٠-(أ) $A \cup B = \{3 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 4 \cdot d\}$.

(ب) $A \cap B = \{2 \cdot a, 2 \cdot b\}$.

(ج) $A - B = \{1 \cdot a, 1 \cdot c\}$.   (د) $B - A = \{1 \cdot b, 4 \cdot d\}$.

(هـ) $A + B = \{5 \cdot a, 5 \cdot b, 1 \cdot c, 4 \cdot d\}$.

حلول تمارين ٢-٢

١- (أ) $f(0)$ غير معرف، أي أن 0 ليس له صورة.

(ب) الأعداد السالبة ليس لها صور.

(ج) كل عنصر له صورتين.

٢- (أ) ليست راسم. (ب) راسم. (ج) ليست راسم.

٣- (أ) النطاق هو $\mathbb{Z}$ والمدى $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(ب) النطاق $\mathbb{Z}^+$ والمدى $\mathbb{Z}^+ - \{1\}$.

(ج) النطاق مجموعة كل سلاسل البتات والمدى $\mathbb{N}$.

(د) النطاق مجموعة كل سلاسل البتات والمدى $\mathbb{N}$.

(هـ) النطاق = المدى = $\mathbb{Z}$.

٤- (أ) أحادي. (ب) ليس أحدي. (ج) أحادي. (د) أحادي.

٥- (أ) فوقي. (ب) ليس فوقي. (ج) ليس فوقي. (د) فوقي. (هـ) فوقي.

٦- (أ) تناظر أحادي . (ب) ليس تناظر أحادي.

(ج) تناظر أحادي. (د) ليس تناظر أحادي.

٧- $(f \circ g)(x) = f(x+2) = (x+2)^2 + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(x^2+1) = x^2+1+2 = x^2+3$$

٨- $(g \circ f)(x) = acx + cb + d$ ، $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$

إذا كان $f \circ g = g \circ f$ فإن $acx + ad + b = acx + cb + d$.

وهذا يؤدي إلى $ad + b = cb + d$ أو $\frac{a-1}{b} = \frac{c-1}{d}$.

٩- هذا الراسم تناظر أحادي وبالتالي يكون منعكس. $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

١٠- (أ) $y \in f(S \cup T) \Leftrightarrow$ يوجد $x \in S \cup T$ بحيث $f(x) = y$
$\Leftrightarrow$ يوجد $x \in S$ أو $x \in T$ بحيث $f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(S)$ أو
$y \in f(T) \Leftrightarrow y \in f(S) \cup f(T)$.

(ب) مثل برهان (أ) بدون عكس الأسهم.

١١- (أ) $f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$.

(ب) $f^{-1}(\{x : 0 < x < 1\})\{x : -1 < x < 1\}$.

(ج) $f^{-1}(\{x : x > 4\}) = \{x : x > 2\}$.

١٢- نفرض f راسم فوقي. إذن كل عنصر من B يكون صورة لعنصر في A، وحيث أن كل عنصر من A له صورة وحيدة في B ، ولأن عدد عناصر A يساوي عدد عناصر B، فإن كل عنصر في B يكون صورة لعنصر وحيد في A ويكون الراسم أحادي.

من جهة أخرى نفرض أن الراسم أحادي. إذن كل عنصر في B يكون صورة لعنصر واحد على الأكثر من A. وحيث أن كل عنصر في A له صورة وحيدة في B، ولأن عدد عناصر A يساوي عدد عناصر B، فإن كل عنصر في B يكون صورة لعنصر من A ويكون الراسم فوقي.

١٣- (أ) صحيحة. (ب) خطأ. (ج) صحيحة. (هـ) خطأ. (و) صحيحة.

١٤- يمكن للراسم الثابت يكون فوقي إذا كان النطاق المصاحب يتكون من عنصر واحد فقط. يمكن للراسم الثابت يكون أحادي إذا كان النطاق يتكون من عنصر واحد فقط.

١٥-(أ) معرف. النطاق هو النطاق المصاحب هو A.

(ب) غير معرف.

(ج) معرف. النطاق A والنطاق المصاحب C.

(د) غير معرف.

(هـ) معرف. النطاق C والنطاق المصاحب A.

(و) معرف. النطاق هو النطاق المصاحب هو C.

(ز) معرف. النطاق هو النطاق المصاحب هو B.

(ح) معرف. النطاق A والنطاق المصاحب B.

١٦- (أ) حيث أن $f_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1 & x\in A\cap B\\ 0 & x\notin A\cap B\end{cases}$

و $f_A(x)\cdot f_B(x)=\begin{cases}1 & x\in A\wedge x\in B\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

ينتج المطلوب

(ب) $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\cdot f_B(x)$.

إذا كان $x\in A\cap B$ فإن $f_A(x)+f_B(x)=1+1=2$

و $f_A(x)\cdot f_B(x)=1\cdot 1=1$ ومن ثم يكون

$$f_{A\cup B}(x)=2-1=1$$

إذا كان $x\in A\cup B$ ولكن $x\notin A\cap B$ فإن

$f_A(x)+f_B(x)=1$ و $f_A(x)\cdot f_B(x)=0$

ومن ثم يكون $f_{A\cup B}(x)=1-0=1$

يمكن إثبات هذه العلاقة باستخدام الجداول.

(ج)

$f_A(x)$	$f_{\overline{A}}(x)$	$1-f_A(x)$
1	0	0
0	1	1

حلول تمارين ٢-٣

١- (أ) 1. (ب) 2. (ج) 1-. (د) 0. (هـ) 3. (و) 3-. (ز) 1. (ح) 2.

٢- (أ) عدد n 1's يليها عدد n 0's لكل $n=1,2,3,...$.

(ب) تكتب الأعداد الفردية مرة واحدة وتكرر الأعداد الزوجية مرتين إبتداء من 1.

(ج) يتبادل 2^n مع 0 لقيم $n=0,1,2,3,...$.

(د) $\{3\cdot 2^r\}_{r=0,1,2,3,...}$. (هـ) $\{22-7n\}_{n=1,2,3,...}$.

(و) $\{a_n\}$ حيث $a_1=3$ و $a_{n+1}=a_n+(n+1)$.

(ز) $\{2n^3\}_{n=1,2,3,...}$.

٣- (أ) 16. (ب) 84. (ج) $\frac{176}{105}$. (د) 4.

٤- (أ) $1533 = 3\cdot 511 = \frac{3(512-1)}{1} = \frac{3\cdot 2^9-3}{2-1}$.

(ب) $510 = \frac{2(2^8-1)}{2-1} = \sum_{i=0}^{7} 22^i = \sum_{i=0}^{7} 2^{i+1} = \sum_{j=1}^{8} 2^j$.

(ج) $$\sum_{j=2}^{8}(-3)^j = \sum_{i=0}^{6}(-3)^{i+2} = \sum_{i=0}^{6}9(-3)^i = \frac{9((-3)^7-1)}{-3-1}$$

$$= \frac{9(-2187-1)}{-4} = \frac{9(-2188)}{-4} = 4923$$

(د) $44289 = \frac{2(-19683-1)}{-4} = \frac{2((-3)^9-1)}{-3-1} = \sum_{j=0}^{8} 2\cdot(-3)^j$.

٥- $a = f(a, f(b,c)) \neq f(f(a,b),c) = c$.

٦- (أ) إبدالية. (ب) دامجة. (ج) لها عنصر محايد هو 0.

٧- (أ) إبدالية، دامجة. (ب) إبدالية، دامجة.

(ج) ليست إبدالية، دامجة.

(د) إبدالية، دامجة .

٨- (أ) لها عنصر محايد 0. (ب)، (ج) ليس لها عنصر محايد.

(د) لها عنصر محايد 3.

٩- (أ) $|A \times A| = 25$. (ب) 5^{25} . (ج) 5^{25} . (د) 5^{15} .

١٠- (أ) 4^{24} . (ب) 5^{15} . (ج) 5^{16} .

١١-(أ) قابلة للعد. نعتبر الراسم $f(n) = n + 10$ من $\mathbb{Z}^+$ إلى المجموعة المعطاة. واضح أن هذا الراسم تناظر أحادي.

(ب) قابلة للعد. نعتبر الراسم $f(n) = 1 - 2n$ من $\mathbb{Z}^+$ إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية السالبة. واضح أن هذا الراسم تناظر أحادي.

(ج) غير قابلة للعد.

(د) قابلة للعد. نعتبر الراسم $f(n) = 10n$ من $\mathbb{Z}^+$ إلى مجموعة الأعداد الصحيحة . واضح أن هذا الراسم تناظر أحادي.

(هـ) قابلة للعد لأنها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الكسرية الصحيحة التي هي قابلة للعد.

(و) قابلة للعد. نعتبر الراسم التناظر أحادي بين $\mathbb{Z}^+$ وعدد 1's في سلسلة البتات.

١٢- (أ) $\pi_A(D) = \{y^2 : y \in \mathbb{R}\}$، $\pi_B(D) = \mathbb{R}$.

(ب) $\pi_A(D) = \mathbb{R}$، $\pi_B(D) = \{\sin x : x \in \mathbb{R}\}$.

(ج) $\pi_A(D) = \pi_B(D) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

١٣- (أ) درجة الجدول 5.

(ب)

أسماء الحبوب	النسبة% لفيتامين أ	النسبة % لفيتامين ج	النسبة % للبروتين
U	25	25	6
V	25	2	4
W	25	2	4
X	60	40	20
Y	25	40	10
Z	25	40	10

حلول تمارين الباب الثالث

حلول تمارين ٣-١

١- (أ) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

(ب) $\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$.

(ج) $\{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),$
$(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

(د) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

٢- (أ) ناقلة فقط. (ب) عاكسة، متماثلة وناقلة. (ج) متخالفة فقط.
(د) عاكسة، متماثلة وناقلة. (هـ) متماثلة فقط.

٣- (أ) ناقلة ومتخالفة. (ب) عاكسة، متماثلة وناقلة.
(ج) عاكسة، متماثلة و ناقلة. (د) عاكسة، متماثلة وناقلة.

٤- (أ) متماثلة فقط. (ب) متماثلة فقط. (ج) متماثلة فقط.
(د) عاكسة، متماثلة وناقلة. (هـ) عاكسة ومتخالفة.
(و) عاكسة متماثلة وناقلة. (ز) متخالفة. (ح) متخالفة.

٥- (أ) $R_1 \cup R_3 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq b \right\}$

(ب) $R_6 - R_3 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > b \right\}$.

(ج) $R_1 \circ R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

(د) $R_2 \circ R_1 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \geq b \right\}$.

٦- (أ) $R_1 \cup R_2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}, a \mid b \vee b \mid a\}$.
(ب) $R_1 \cap R_2 = \{(a,a) : a \in \mathbb{Z}\}$.

(ج) $R_1 - R_2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}, a \neq b, a \mid b\}$.

(د) $R_2 - R_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}, a \neq b, b \mid a\}$.

(هـ) $R_1 \oplus R_2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Z}, a \mid b \vee b \mid a, a \neq b\}$.

٧- (أ) $(a,a) \in R$ و $(a,a) \in S$ لكل $a \in A$. لذلك $(a,a) \in R \cup S$ لكل $a \in A$ وتكون $R \cup S$ عاكسة.

(ب) $(a,a) \in R$ و $(a,a) \in S$ لكل $a \in A$. لذلك $(a,a) \in R \cap S$ لكل $a \in A$ وتكون $R \cap S$ عاكسة.

(ج) $(a,a) \in R$ و $(a,a) \in S$ لكل $a \in A$. لذلك $(a,a) \notin R - S$ لكل $a \in A$ وتكون $R - S$ ليست عاكسة.

(د) $(a,a) \in R$ و $(a,a) \in S$ لكل $a \in A$. لذلك $(a,a) \in R \circ S$ لكل $a \in A$ وتكون $R \circ S$ عاكسة.

٨- (أ) $\operatorname{dom}(R^{-1}) = \{1,2,4\}$.

(ب) $\operatorname{range}(S^{-1}) = \{1,2,4\}$.

(ج) $S \circ R = \{(2,1),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$.

(د) $(R \circ S)^{-1} = \{(3,1),(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$.

٩- (أ) نفرض $a \in \operatorname{dom}(S \cup R)$. إذن يوجد $b \in B$ بحيث $(a,b) \in S \cup R$. وهذا يعني أن $(a,b) \in S$ أو $(a,b) \in R$. ومن ثم $a \in \operatorname{dom}(S)$ أو $a \in \operatorname{dom}(R)$. إذن

$\operatorname{dom}(S \cup R) \subseteq \operatorname{dom}(S) \cup \operatorname{dom}(R)$.

من جهة أخرى نفرض $a \in \operatorname{dom}(S) \cup \operatorname{dom}(R)$. إذن $a \in \operatorname{dom}(S)$ أو $a \in \operatorname{dom}(R)$. والتالي يوجد $b \in B$ بحيث $(a,b) \in S$ أو $(a,b) \in R$. لذلك $(a,b) \in S \cup R$ ومن ثم ويكون $a \in \operatorname{dom}(S \cup R)$

$\text{dom}(S \cup R) \subseteq \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S)$، وهذا يكمل البرهان.

(هـ) $(a,b) \in (R \cup S)^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in R \cup S \Leftrightarrow (b,a) \in R$ أو $(b,a) \in S \Leftrightarrow (a,b) \in R^{-1}$ أو $(a,b) \in S^{-1} \Leftrightarrow$ $(a,b) \in R^{-1} \cup S^{-1}$.

١٠- (أ) نفرض $(a,c) \in R \circ (S \cup T)$. إذن يوجد b بحيث $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in S \cup T$. وهذا يؤدي إلى $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in S$ أو $(b,c) \in T$. لذلك $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in S$ أو $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in T$. ومنها $(a,b) \in R \circ S$ أو $(a,b) \in R \circ T$. إذن $(a,b) \in (R \circ T) \cup (R \circ S)$ ويكون $R \circ (S \cup T) \subseteq (R \circ T) \cup (R \circ S)$. بالمثل يمكن إثبات العكس.

١١- نفرض R و S علاقتان على المجموعة A، بين ماإذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خطأ

(أ) صحيحة. (ب) صحيحة. (ج) صحيحة. (د) صحيحة.

(هـ) خطأ . (و) صحيحة . (ز) خطأ . (ح) صحيحة.

(ط) صحيحة. (ي) صحيحة .

حلول تمارين ٣-٢

١- (أ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(د) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

٢- (أ) $\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$.

(ب) $\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$.

(ج) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

٣- (أ) $M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(ب) $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(ج) $M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(د) $M_{R_1 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

٤- (أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

٥- (أ) $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,3),$
$(3,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$

٦- إذا كانت جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي 1 فإن العلاقة تكون عاكسة.

٧- (أ) عاكسة، متماثلة، ليست متخالفة، وناقلة.

(ب) ليست عاكسة، ليست متماثلة، متخالفة، ناقلة.

(ج) ليس عاكسة، متماثلة، ليست متخالفة، ليست ناقلة.

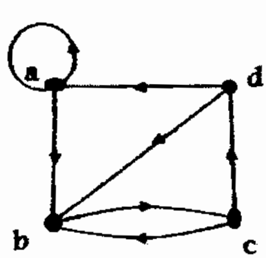
٩- (أ) $\sum_{k=1}^{1000} k = \frac{1000(1001)}{2} = 500 \times 1001 = 500500$.

(ب) 1000.

(ج) $1000^2 - 999 = 999001$.

(د) $1000^2 - 1 = 999999$.

١٢-



١٣- (أ) $\{(a,a),(b,a),(b,b),(b,c),(c,c),(a,c)\}$.

(ب) $\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$.

(ج) $\{(a,c),(b,a),(c,d),(d,b)\}$.

١٥- يوجد 8 مصفوفات B بحيث $A \le B$. يوجد 6 مصفوفات C بحيث $C \le A$.

حلول تمارين ٣-٣

١- أي من العلاقات على مجموعة كل الناس تكون علاقة تكافؤ ؟ حدد خواص علاقة التكافؤ التي تفقدها العلاقات الأخرى.

(أ) علاقة تكافؤ. (ب) علاقة تكافؤ. (ج) ليس ناقلة. (د) علاقة تكافؤ.

٢- (أ) علاقة تكافؤ. (ب) ليست ناقلة.

(ج) ليست عاكسة وليست ناقلة وليست متماثلة.

(د) ليست عاكسة و ليست متعدية.

٣- نفرض A مجموعة غير خالية و f راسم نطاقه A. نفرض R علاقة على A تتكون من كل الثنائيات المرتبة (x,y) بحيث $f(x)=f(y)$.

(أ) $f(x)=f(x)$ لذلك $(x,x)\in R$ لكل $x\in A$ وتكون العلاقة عاكسة.

إذا كان $(x,y)\in R$ فإن $f(x)=f(y)$ ومنها $f(y)=f(x)$ وبالتالي $(y,x)\in R$ وتكون العلاقة متماثلة.

إذا كان $(x,y),(y,z)\in R$ فإن $f(x)=f(y)$ و $f(y)=f(z)$ ومن ثم $f(x)=f(z)$ وبالتالي $(x,z)\in R$ وتكون العلاقة ناقلة وبالتالي تكون علاقة تكافؤ.

(ب) $[x]=\{y\in A: f(x)=f(y)\}$.

٤- (أ) $\{(0,0),(1,1),(,1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),$
$(3,5),(5,3),(4,4),(5,4),(5,5)\}$

(د) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$.

٦- (أ) تجزيء. (ب) ليست تجزيء. (ج) تجزيء. (د) ليست تجزيء.

حلول تمارين الباب الرابع

حلول تمارين ٤-١

١- $$2+4+6+...+2n=2(1+2+3+...+n)$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

نفرض أن $P(n)$ هي $2+4+...+2n=n(n+1)$.

خطوة الأساس: عندما $n=1$، $2=1(1+1)$، $P(1)$ تكون صحيحة.

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج، نفرض أن $P(k)$ صحيحة، أي $2+4+...+2k=k(k+1)$. لإكمال خطوة الاستنتاج يجب أن نبين أن $P(k+1)$ تكون صحيحة، أي يجب أن نبين أن $2+4+...+2k+2(k+1)=(k+1)((k+1)+1)$. الآن

$$2+4+...+2k+2(k+1)=[2+4+...+2k]+2(k+1)$$
$$=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)$$

أي أن $P(k+1)$ تكون صحيحة بفرض أن $P(k)$ صحيحة.

الآن أكملنا خطوة الاساس وخطوة الاستنتاج، لذلك بالاستنتاج الرياضي، تكون $P(n)$ صحيحة لكل عدد صحيح موجب n، أي أن $2+4+...+2n=n(n+1)$.

٢- إرشاد: خطوة الأساس $n=0$.

خطوة الاستنتاج

$$\frac{3(5^{k+1}-1)}{4}+3\cdot5^{k+1}=\frac{3(5^{k+1}-1)+4\cdot3\cdot5^{k+1}}{4}=\frac{3\cdot5\cdot5^{k+1}-3}{4}$$
$$=\frac{3(5^{k+2}-1)}{4}$$

٣- (أ) $P(1)$ هو التقرير $1^2=\frac{1}{6}(1+1)(2+1)$

(ب) $1=1$.

(ج) فرض الاستنتاج $1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$.

٥- خطوة الأساس عندما $n=2$، $1+\frac{1}{4}<2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج نفرض أن $P(k)$ محققة، أي

نفرض أن $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$.

المطلوب إثبات أن $P(k+1)$ تكون محققة، أي مطلوب إثبات أن

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

الآن $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

حيث أن $k>1$ فإن $3k+1>k$ ومنها نحصل على

$k^3+2k^2+3k+1>k^3+2k^2+k$ وهذا يؤدي إلى

$(k+1)^3-k(k+1)>k(k+1)^2$ ومنها نحصل على

$\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}>\frac{1}{k+1}$ ومنها يكون $\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{k+1}$. لذلك

$2-(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2})<2-\frac{1}{k+1}$ أي أن

$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$. ومن ثم تكون $P(k+1)$ بشرط تحقق $P(k)$ وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

٦- فرض الاستنتاج k^3+2k تقبل القسمة على 3. الآن

$$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+2k+2$$
$$=(k^3+2k)+3(k^2+k+1)$$

وهذه تقبل القسمة على 3، لأنها مجموع حدين كل منهما يقبل القسمة على 3.

٧- فرض الاستنتاج $k^5 - k$ يقبل القسمة على 5. الآن

$$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 4k$$

$$= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

وهذه تقبل القسمة على 5.

٨- فرض الاستنتاج $k^2 - 1$ تقبل القسمة على 8، حيث كان k عدد صحيح موجب فردي. الآن

$$(k+2)^2 - 1 = k^2 + 4k + 4 - 1$$

$$= (k^2 - 1) + 4(k+1)$$

حيث أن k عدد صحيح فردي موجب فإن $k+1$ يكون عدد زوجي، $2t$ مثلا، ومن ثم

$$(k^2 - 1) + 4(k+1) = (k^2 - 1) + 8t$$

وهذا يقبل القسمة على 8.

٩- (أ) فرض الاستنتاج $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. الآن

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}$$

$$\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cup B_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$$

١٠- عندما $n=2$ ، $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ وهذه هي قوانين دي مورجان.

فرض الاستنتاج $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}$

المطلوب إثبات أن $\overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$

الآن $\overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup A_{k+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \cap \overline{A_{k+1}}$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i} \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}$$

١١- $A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$

فرض الاستنتاج $A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$

الآن

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{bmatrix}$$

١٢- نفرض A مجموعة بها عنصرين. إذن A يوجد بها مجموعة جزئية واحدة تحتوي عنصرين $\frac{2(2-1)}{2} = 1$.

فرض الاستنتاج: نفرض أن المجموعة التي بها k عنصر لها $\frac{k(k-1)}{2}$ مجموعة جزئية تحتوي تحديدا عنصرين.

نفرض أن A مجموعة بها $k+1$ عنصر ونفرض p عنصر معين في A ونفرض $S = A - \{p\}$. إذن S تحتوي k عنصر وبالتالي تحتوي $\frac{k(k-1)}{2}$ مجموعة جزئية تحتوي تحديدا عنصرين. $\{\{a,p\} : a \in S\}$ مجموعات جزئية عددها k تحتوي تحديدا عنصرين. إذن عدد المجموعات الجزئية من A التي تحتوي تحديدا عنصرين يساوي

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k(k-1)+2k}{2} = \frac{(k+1)k}{2}$$

١٤- العلاقة صحيحة عندما $n = 1$ وذلك من الفرض.

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج $AB^k = B^k A$.

المطلوب إثبات أن $AB^{k+1} = B^{k+1}A$.

الآن

$$AB^{k+1} = ABB^k = BAB^k = BB^k A = B^{k+1}A$$

١٥- فرض الاستنتاج $a^k \equiv b^k \pmod{m}$. إذن $a^k - b^k = qm$ حيث q عدد صحيح.

الآن $a^{k+1} - b^{k+1} = (a^k - b^k)(a+b) + ab^k - ba^k$

$$= qm(a+b) - ab(a^{k-1} - b^{k-1})$$

$$= qm(a+b) - abrm$$

حيث استخدمنا مبدأ الاستنتاج القوي وتكون $a^{k-1}-b^{k-1}=rm$ حيث r عدد صحيح. لذلك $a^{k+1}-b^{k+1}$ يقبل القسمة على m ويكون $a^{k+1}\equiv b^{k+1} \pmod{m}$.

١٨- $$(k+1)!-1+(k+1)(k+1)!$$
$$=(k+1)!(1+k+1)-1=(k+1)!(k+2)-1$$
$$=(k+2)!-1$$

١٩- $$\frac{1-(-7)^{k+1}}{4}+2(-7)^{k+1}=\frac{1-(-7)^{k+1}}{4}+\frac{8(-7)^{k+1}}{4}$$
$$=\frac{1-(-7)^{k+1}+8(-7)^{k+1}}{4}=\frac{1+7(-7)^{k+1}}{4}=\frac{1-(-7)(-7)^{k+1}}{4}$$
$$=\frac{1-(-7)^{k+2}}{4}$$

٢٠-(أ) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

(ب) عندما $n=1$، $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

فرض الاستنتاج $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

الآن $$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

٢١- فرض الاستنتاج $$(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k)\cup B$$
$$=(A_1\cup B)\cap(A_2\cup B)\cap\dots\cap(A_k\cup B)$$

الآن $$(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k\cap A_{k+1})\cup B$$
$$=((A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k)\cap A_{k+1})\cup B$$

$$=((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cup B) \cap (A_{k+1} \cup B)$$
$$= (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap$$
$$\ldots \cap (A_k \cup B) \cap (A_{k+1} \cup B)$$

حلول تمارين ٤-٢

١- (أ) $f(1) = 3$ ،$f(2) = 5$ ،$f(3) = 7$ ،$f(4) = 9$.
(ب) $f(1) = 3$ ،$f(2) = 9$ ،$f(3) = 27$ ،$f(4) = 81$.
(ج) $f(1) = 2$ ،$f(2) = 4$ ،$f(3) = 16$ ،$f(4) = 65536$.
(د) $f(1) = 3$ ،$f(2) = 13$ ،$f(3) = 183$ ،$f(4) = 33673$.

٢- (أ) غير محققة. (ب) $f(n) = 1 - n$.
(ج) $f(n) = 4 - n$ ، $n \geq 2$.
(د) $f(n) = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$. (هـ) $f(n) = 3^n$.

٣- (أ) $a_{n+1} = a_n + 6$ ،$a_1 = 6$.
(ب) $a_{n+1} = a_n + 2$ ،$a_1 = 1$.
(ج) $a_{n+1} = 10a_n$ ،$a_1 = 10$.
(د) $a_{n+1} = a_n$ ،$a_1 = 5$.

٤- (أ) عندما $n = 1$ ،$f_0^2 + f_1^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \times 1$. وهذا يبين أن النتيجة صحيحة عندما $n = 1$. نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n = k \geq 1$. فرض الاستنتاج هو $\sum_{i=1}^{k} f_i^2 = f_k f_{k+1}$. لإثبات العلاقة عندما $n = k + 1$

$$\sum_{i=0}^{k+1} f_i^2 = \sum_{i=0}^{k} f_i^2 + f_{k+1}^2 = (f_k f_{k+1}) + f_{k+1}^2$$
$$= f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2}$$

لذلك العلاقة تكون صحيحة عندما $n = k + 1$ ومن ثم تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

(ب) نفرض $P(n)$ هي $f_1+f_3+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}$.

خطوة الأساس: $P(1)$ محققة لأن $f_1=1=f_2$.

خطوة الاستنتاج نفرض أن $P(k)$ محققة . الآن

$$f_1+f_3+\ldots+f_{2k-1}+f_{2k+1}=f_{2k}+f_{2k+1}$$
$$=f_{2k+2}=f_{2(k+1)}$$

٥- $F(0)=0$، $F(n)=F(n-1)+n$، $n\geq 1$.

٦- $P_m(0)=0$ ، $P_m(n+1)=P_m(n)+m$.

٧- (أ) $0\in S$، إذا كان $x\in S$ فإن $x+2\in S$ و $x-2\in S$.

(ب) $2\in S$ وإذا كان $x\in S$ فإن $x+3\in S$.

(ج) $1\in S$ ، $2\in S$، $3\in S$، $4\in S$ وإذا كـــان $x\in S$ فـــإن $x+5\in S$.

حلول تمارين الباب الخامس

حلول تمارين ٥-١

١- (أ) يوجد $325\times 18 = 5850$ طريقة وذلك من قاعدة الضرب.
(ب) من قاعدة الجمع يوجد $325+18 = 343$ طريقة.

٢- (أ) 4^{10}. (ب) 5^{10}.

٣- 26^3.

٤- $26\times 25\times 24 = 15600$.

٥- $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6$ (1 هي السلسلة التي طولها صفر).

٦- $n+1$ حيث تم عد السلسلة الخالية.

٧- 2^8.

٨- $1+26+26^2+26^3+26^4$ ، بما فيها السلسلة الخالية.

٩- (أ) 990 . (ب) 500. (ج) 27.

١٠- (أ) صفر. (ب) 120. (ج) 720 . (د) 2520 .

١١- حيث أنه لدينا ستة فصول كل فصل يعقد لقاءا أبوعيا فإنه يوجد في الأسبوع ستة لقاءات ولكن أيام الأسبوع المتاح فيها عقد اللقاءات هي خمسة، لذلك بقسمة ستة لقاءات على خمسة أيام نجد أنه يوجد على الأقل يوما من أيام الأسبوع يعقد به على الأقل لقائين. بين أن أي مجموعة من ستة فصول، كل فصل يعقد لقاءا منتظما مرة اسبوعيا في يوم معين من الاسبوع، يجب أن يوجد أثنين يلتقيا في نفس اليوم، بفرض أن أي من الفصول لايعقد في يومين في نهاية الاسبوع.

١٢- حيث أن عدد حروف اللغة 28 ويوجد 30 طالب في الفصل، فإنه يوجد على الأقل $2 = \left\lceil \frac{30}{28} \right\rceil$ منهم تبدأ أسمائهم بنفس الحرف.

١٣- حيث أنه يوجد أربعة بواقي ممكنة عند قسمة أي عدد صحيح على 4، فإنه من مبدأ برج الحمام ينتج أنه إذا كان لدينا خمسة أعداد صحيحة فإنه على الأقل إثنين منهم يكون لهما نفس الباقي عند القسمة على 4.

١٤- (أ) مجموعة الأعداد الثمانية الصحيحة الموجبة الأولى وهي $1,2,3,4,5,6,7,8$ بتجميع هذه الأعداد في مجموعات جزئية تتكون من عددين بحيث مجموع العددين في كل مجموعة جزئية يساوي 9 نحصل

على $\{1,8\}$، $\{2,7\}$، $\{3,6\}$ ، $\{4,5\}$.إذا اخترنا خمسة من هذه الأعداد فإن إثنين منهم على الأقل يقعان في مجموعة واحدة من هذه المجموعات الجزئية. مجموع هذان العددان يساوي 9 كما هو مطلوب.
(ب) الإجابة بالنفي. على سبيل المثال نأخذ $\{1,2,3,4\}$.
١٥- حيث أنه يوجد ستة أجهزة حاسب ، فإن عدد الأجهزة الأخرى التي يكون جهاز موصل بها هو عدد صحيح بين 0 و 5. ومع هذا 0 و 5 لايمكن أن يحدثا معا. لبيان ذلك ، لاحظ أنه إذا كان بعض الأجهزة غير موصل بأي جها آخر فإنه لايوجد أي جهاز يكون موصل بكل الأجهزة الخمسة الأخرى. وإذا كان يوجد جهاز موصل بكل الأجهزة الخمسة الأخرى فإنه لايوجد جهاز يكون غير موصل بأي جهاز آخر. لذلك يوجد خمسة احتمالات لعدد الأجهزة التي يكون موصل بها جهاز، من مبدأ برج الحمام يوجد على الأقل جهازين من الأجهزة الستة يكونا موصلين بنفس العدد من الأجهزة الأخرى.
١٦- باستخدام مبدأ برج الحمام المعمم بوضع $|S|$ شيء ، $f(s)$ لـ $s \in S$، في $|T|$ صندوق، واحد لكل عنصر من T، نحصل على النتيجة المطلوبة.

حلول تمارين ٥-٢

١- $a,b,c - a,c,b - b,a,c - b,c,a - c,a,b - c,b,a$.

٢- $6! = 720$. ٣- $5! = 2 = 120$.

٤- (أ) توجد 120 تبديلة منها $1,2,3,4,5$، $1,3,2,4,5$، $1,3,2,5,4$، $1,3,5,2,4$، $1,3,5,4,2$.

(ب) عدد التبديلات التي طولها 3 لـ S هو $P(5,3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ منها $1,2,4,5,3$، $1,2,5,3,4$، $1,2,4,3,5$.

(ج) عدد توافيق-3 لـ S هو $C(5,3) = \frac{5!}{3!2!} = 10$ هي $1,2,3$، $1,2,4$، $1,2,5$، $1,3,4$، $1,3,5$، $1,4,5$، $2,3,4$، $2,3,5$، $2,4,5$، $3,4,5$.

٥- (أ) $P(8,1) = 8$. (ب) $P(8,5) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$.

(ج) $P(8,8)=1$.

(د) $P(10,9)=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2$.

(هـ) $C(5,1)=\frac{5!}{4!}=5$. (و) $C(5,3)=\frac{5!}{3!2!}=10$.

(ز) $C(8,4)=\frac{8!}{4!4!}=70$. (ح) $C(8,8)=\frac{8!}{8!}=1$.

(ط) $C(8,0)=\frac{8!}{8!}=1$.

٦- $P(9,5)=9\times8\times7\times6\times5$.

٧- (أ) !7 . (ب) !6 . (ج) !5 . (د) !5. (هـ) صفر. (و) صفر.
(ز) !4.

٩-
$$3C(10,10)+2C(10,9)+C(10,8)$$
$$=3\frac{10!}{10!}+2\frac{10!}{9!}+\frac{10!}{8!}=3+20+90=113$$

١٠-
$$C(7,4)C(9,1)+C(7,3)C(9,2)+C(7,2)C(9,3)$$
$$+C(7,1)C(9,4)$$
$$=\frac{7!}{4!3!}\frac{9!}{8!}+\frac{7!}{3!4!}\frac{9!}{2!7!}+\frac{7!}{2!5!}\frac{9!}{3!6!}+\frac{7!}{6!}\frac{9!}{4!5!}$$
$$=315+1260+1764+882=4221$$

١٢- (أ)

$$(x+y)^5=(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

نختار حد من كل قوس لينتج معنا x^5، x^4y، x^3y^2، x^2y^3، xy^4، y^5. الحصول على x^5 يتم بطريقة واحدة وبالتالي معاملها يساوي 1. x^4y نحصل عليها باختيار x من أربعة أقواس و y من القوس الخامس. لذلك معاملها يكون $\binom{5}{4}$. بالمثل معامل x^3y^2 يكون $\binom{5}{3}$ ومعامل x^2y^3 يكون $\binom{5}{2}$ ومعامل xy^4 يكون $\binom{5}{1}$، أخيرا معامل y^5 يساوي 1.

(ب) $(x+y)^5 = x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3$
$+\binom{5}{4}xy^4 + y^5$

١٤- x^7 نحصل عليه باختيار x من سبعة أقواس من 11 قوس في حاصل الضرب ونختار 1 من بقية الأقواس، لذلك معامل x^7 يكون
$\binom{11}{7} = \frac{11!}{7!4!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2} = 330$.

١٥- معامل x^9 هو $2^{10}(-1)^9\binom{19}{9}$.

١٦- معامل x^8y^9 هو $3^8 2^9\binom{17}{8}$.

١٧- 1 11 55 165 330 462 330 165 55 11 1

١٨-

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$
$$= \frac{n+1}{k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$
$$= (n+1)\binom{n}{k-1}\Big/k$$

هذه المتطابقة مع $\binom{n}{0}=1$ تعطي تعريف إرتدادي لمعاملات ذات الحدين.

١٩- (ب)
$$\binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-2)!}$$
$$= 2n^2 - n = n(n-1) + n^2$$
$$= 2\frac{n(n-1)}{2} + n^2 = 2\frac{n!}{2!(n-2)!} + n^2$$
$$= 2\binom{n}{2} + n^2$$

٢٠- نفرض أن المجموعة بها n عنصر. من نتيجة ٥-٢-٣٢
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$
الطرف الأيسر يعطي عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها زوجي، والطرف الأيمن يعطي عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها فردي.

حلول تمارين ٥-٣

١- (أ) $2, 12, 72, 432, 2592, 15462$.

(ب) $2, 4, 16, 256, 65536$. (ج) $1, 2, 5, 11, 26$.

(د) $1, 1, 6, 27, 204$. (هـ) $1, 1, 0, 1, 3, 3$.

٢- (أ) $6\ ,\ 17\ ,\ 49\ ,\ 143\ ,\ 421$.

(ج)
$$5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5(2^{n-1} + 5\cdot 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 5\cdot 3^{n-2})$$
$$= 5\cdot 2^{n-1} + 25\cdot 3^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} - 10\cdot 3^{n-1}$$
$$= 2\cdot 2^{n-1} + 15\cdot 3^{n-1} = 2^n + 5\cdot 3^n = a_n$$

٣- (أ) $a_0 = 3$ ، $a_n = a_{n-1}$.

ب) $a_0 = 0$، $a_n = a_{n-1} + 2$.

ج) $a_0 = 3$، $a_n = a_{n-1} + 2$.

د) $a_0 = 1$، $a_n = 5a_{n-1}$.

هـ) $a_0 = 0$، $a_1 = 1$، $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$.

و) $a_0 = 0$، $a_n = a_{n-1} + 2n$.

٤- أ)

$$\begin{aligned}
&a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9\\
&= -(n-1) + 2 + 2(-(n-2) + 2) + 2n - 9\\
&= -n + 1 + 2 - 2n + 4 + 4 + 2n - 9\\
&= -n + 2 = a_n
\end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned}
&a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9\\
&= 7 \cdot 2^{n-1} - n + 1 + 2 + 2(7 \cdot 2^{n-2} - n + 2 + 2)\\
&\qquad + 2n - 9\\
&= 7 \cdot 2^{n-1} - n + 3 + 7 \cdot 2^{n-1} - 2n + 8 + 2n - 9\\
&= 7 \cdot 2^{n} - n + 2 = a_n
\end{aligned}$$

٥- أ) $a_n = 2 \cdot 3^n$. ب) $a_n = 2n + 3$.

ج) $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. د) $a_n = (n+2)^2$.

هـ) $a_n = 2^n$. و) $a_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

ز) $a_n = 5n!$. ح) $a_n = 2^n n!$.

٦- أ) $a_0 = 6.2$، $a_n = (1.3)a_{n-1}$.

ب) $a_n = (1.3)^n 6.2$

ج) $a_{20} = (1.3)^{20} 6.2$

٧- أ) $a_n = a_{n-1} + 1$. ب) $1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$.

ج) $a_n = n$.

٨- (أ) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$، $n \geq 2$
(ب) $a_0 = 0$، $a_1 = 0$.
(ج) $a_7 = a_6 + a_5 + 2^5 = 43 + 19 + 32 = 94$.

٩- (أ) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$، $n \geq 3$.
(ب) $a_0 = 1$، $a_1 = 2$، $a_2 = 4$.
(ج) 81.

حلول تمارين ٥-٤

١- (أ) 30. (ب) 29. (ج) 24. (د) 18.

٢- (أ) 300. (ب) 150. (ج) 175. (د) 100.

٣- $14 + 20 = 34$. $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$، $\left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 14$.

٤- 295.

٥- (أ) عدد الأعداد الصحيحة الموجبة أقل من 31 وتقبل القسمة على 3 يساوي $\left\lfloor \frac{31}{3} \right\rfloor = 10$. لذلك عدد الأعداد الصحيحة الموجبة بين 5 و 31 التي تقبل القسمة على 3 يساوي 9 . هذه الأعداد هي 6، 9، 12، 15 ، 18، 21، 24، 27 ، 30.
(ب) $\left\lfloor \frac{31}{4} \right\rfloor = 7 - 1 = 6$ يوجد ستة أعداد صحيحة بين 5 و 31 تقبل القسمة على 4. هذه الأعداد هي 8، 12، 16 ، 20 ، 24 ، 28.
(ج) $\left\lfloor \frac{31}{12} \right\rfloor = 2$ يوجد عددان هما 12 ، 24.

٦- كم عدد صحيح موجب بين 50 و 100
(أ) سبعة أعداد هي 98,91,84,77,70,63,56.
(ب) خمسة أعداد هي 99,88,77,66,55.
(ج) عدد واحد فقط 77 .

حلول تمارين ٥ـ٥

١ـ أوجد صيغة مغلقة للدالة المولدة لكل من المتتابعات التالية

(أ) $f(x)=\frac{2x(1-x^6)}{1-x}$. (ب) $\frac{x^3}{1-x}$. (ج) $\frac{x}{1-x^3}$.

(د) $\frac{2}{1-2x}$. (هـ) $(1+x)^7$. (و) $\frac{2}{1+x}$.

(ز) $\frac{1}{1-x}-x^2$. (ح) $\frac{x^3}{(1-x)^2}$.

٢- (أ) $a_n=\binom{3}{n}3^{3-n}(-4)^3$ لقيم $n=0,1,2,3$، $a_n=0$

لكل $n\geq 4$. $-64,144,-108,27,0,0,0,\ldots$

(ب) $a_n=\binom{3}{n}$ لقيم $n=0,1,2,3$، $a_n=0$ لكل $n\geq 4$.

$1,3,3,1,0,0,0,\ldots$.

(ج) $a_n=5^n$. (د) $(-3)^{n-3}$ لكل

$n\geq 3$، $a_0=a_1=a_2=0$.

(هـ) $a_n=n$، $n\geq 2$، $a_0=a_1=0$.

(و) المعاملات غير الصفرية فقط هي $a_0=a_5=1$،

$a_2=a_4=3$.

(ز) $a_n=3(-3)^n$ لكل $n\leq 3$، $a_n=0$ لكل $n\geq 4$.

٣- (أ) 6. (ب) 3.

٤- (أ) 10. (ب) 6. (ج) صفر.

٥- (أ) $G(x)-a_0-a_1x-a_2x^2$. (ب) $G(x^2)$.

(ج) $x^4G(x)$. (د) $G(2x)$.

حلول تمارين الباب السادس

حلول تمارين ٦ـ١

١ـ متعدد ٢ـ بسيط ٣ـ موجه ٤ـ متعدد.

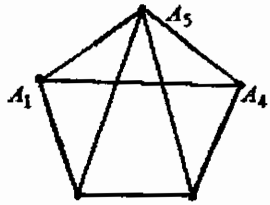
٦ـ (أ) بسيط. (ب) متعدد.

٧ـ العلاقة ليست عاكسة لأن الرسم بسيط والتالي لاتوجد حافة تربط كل رأس بنفسه (عروة) ومن ثم لكل u ، $(u,u) \notin R$. العلاقة متماثلة لأنه إذا كانت هناك حافة تربط الرأس u بالرأس v أي إذا كان uRv فإن هذه الحافة أيضا تربط الرأس v بالرأس u أي أن vRu.

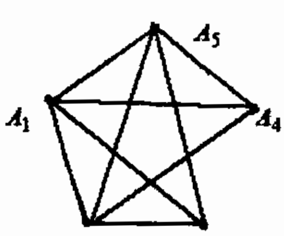
نفرض G رسم بسيط. بين أن العلاقة R على مجموعة رؤوس G حيث uRv إذا وفقط إذا كان يوجد حافة مصاحبة لـ $\{u,v\}$، تكون علاقة متماثلة وغير عاكسة.

٨ـ وجود عروة عند كل رأس يعني أن كل رأس u يرتبط مع نفسه بحافة $\{u,u\}$ وتكون العلاقة عاكسة. أيضا العلاقة متماثلة، حيث إذاكانت uRv فإنه توجد حافة مصاحبة للرأسين $\{u,v\}$، وهذه الحافة تكون أيضا مصاحبة للرأسين $\{v,u\}$ ويكون vRu.

٩ـ (أ)



(ب)



١٠- الرسم يكون موجه فقد يكون الشخص A يعرف إسم الشخص B ولكن الشخص B لايعرف إسم الشخص A. والرسم لا يكون متعدد وكل شخص بالتأكيد يعرف نفسه لذلك توجد عروة عند كل شخص(رأس).

١٢- (أ) $3,3,2,2,2$. (ب) $4,1,1,1,1$. (ج) $4,3,3,2,2,2$.
(د) $4,4,2,2,2,2$. (هـ) $3,3,3,3,2,2$.

حلول تمارين ٦-٢

١- (أ) 6 رؤوس، 6 حواف ، c نقطة معلقة ، d نقطة معزولة.
درجات الرؤوس $(a,2),(b,4),(c,1),(d,0),(e,2),(f,3)$
(ب) 5 رؤوس، 12 حافة،
درجات الرؤوس $(a,6),(b,5),(c,6),(d,5),(e,2)$
(ج) 9 رؤوس، 12 حافة، d و f رؤوس معزولة.
درجات الرؤوس $(a,3),(b,2),(c,4),(d,0),(e,6),(f,0),$
$(g,4),(h,2),(i,3)$

٢- (أ) مجموع درجات الرؤوس 12.
(ب) مجموع درجات الرؤوس24.
(ج) مجموع درجات الرؤوس24.

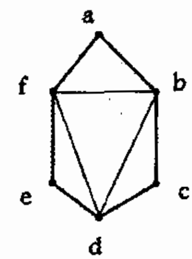
٣- (أ) ثنائي التقسيم $\{a,c\}$، $\{b,d,e\}$.
(ب) ثنائي التقسيم $\{e\}$، $\{a,b,c,d\}$.
(ج) ليس ثنائي التقسم.
(د) ثنائي التقسيم $\{e,a,b,d\}$، $\{f,c\}$.
(هـ) ليس ثنائي التقسم.

٤- (أ) لايوجد. (ب) لا يوجد . (ج) يوجد. (د) لا يوجد .
(هـ) يوجد. (و) يوجد. (ز) يوجد. (ح) يوجد .

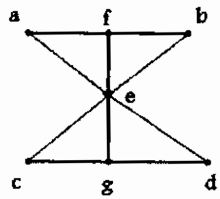
٥- (أ) لجميع قيم n. (ب) لجميع قيم n. (ج) 3.

٦- $m = n$.

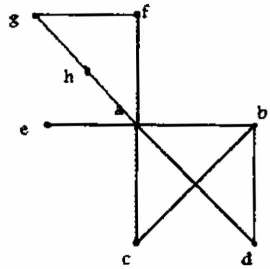
٧- (أ)



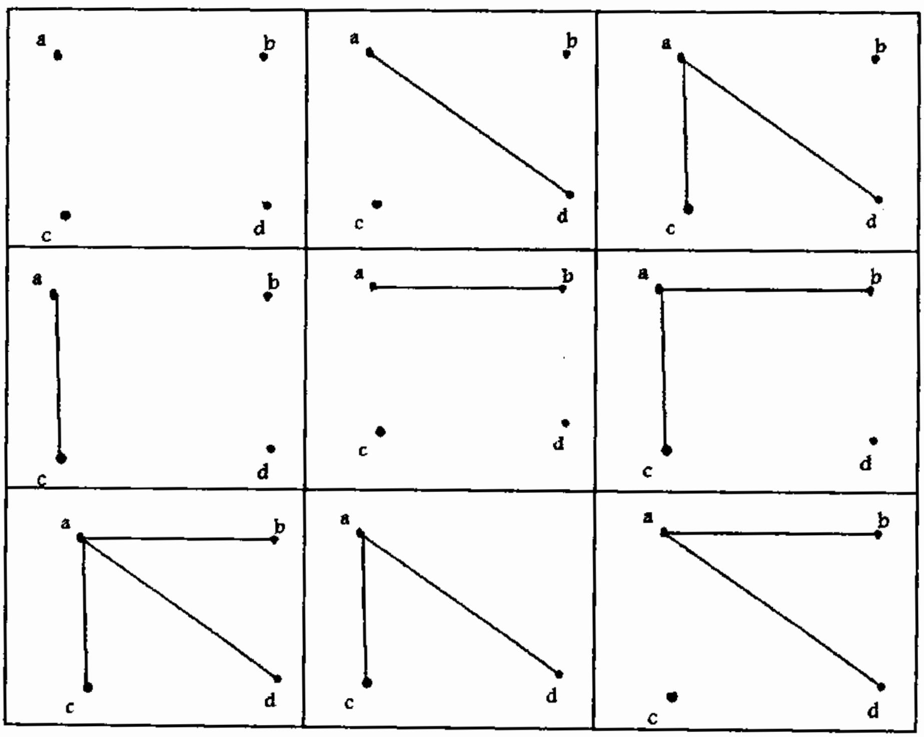
(ب)

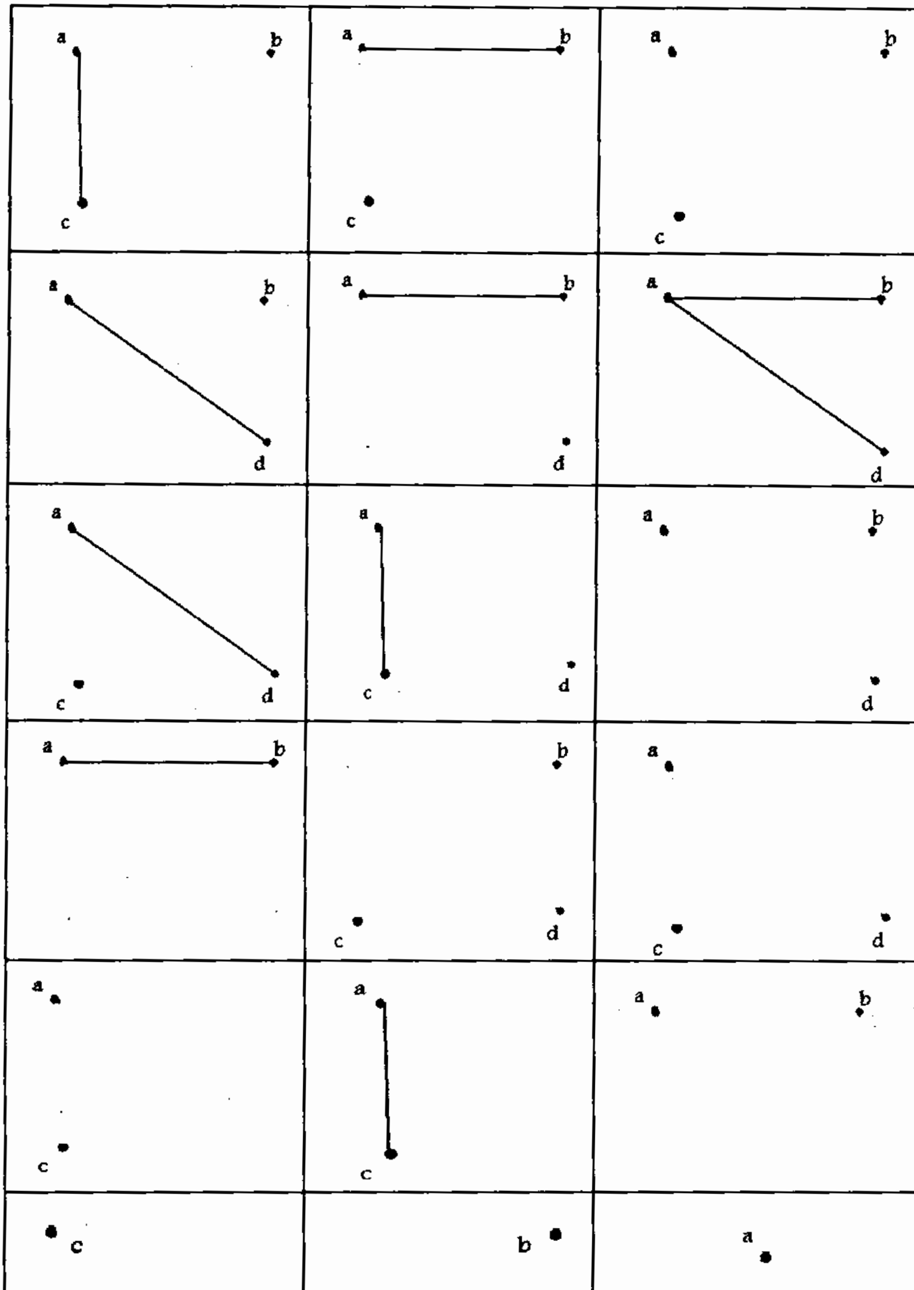


(ج)



١٠-





١١- مجموع درجات الرؤوس يساوي ضعف عدد الحواف. أي أن $\sum \deg v = 2e$ وحيث أن M هي أعلى درجة فإن $\sum \deg v \le Mv$.

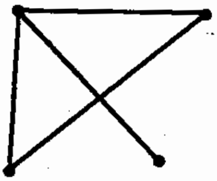
لذلك $2e \le Mv$ ومن ثم $M \ge \frac{2e}{v}$. بالمثل يمكن إثبات أن $m \le \frac{2e}{v}$، حيث m هي أقل درجة لرؤوس G.

١٢- (أ) $\overline{K_n}$ هو رؤوس K_n.

(ب) $\overline{K_{m,n}}$ هو رؤوس $K_{m,n}$. (ج) $\overline{C_n}$ هو رؤوس C_n.

١٥- نفرض أن الرسم ليس به رأس من درجة 0 أو 1. إذن درجة أي رأس في الرسم يكون أكبر من أو يساوي 2. لذلك $\sum \deg v \ge 2v = 2(e+1) = 2e+1$. وهذا يناقض حقيقة أن $\sum \deg v = 2e$. إذن الرسم لابد أن يحتوي رأس من درجة 0 أو 1.

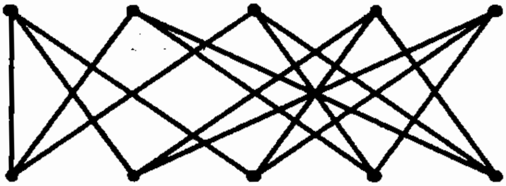
١٦- (أ)



(ز) لايوجد رسم لأن عد الرؤوس من درجات فردية ليس زوجي

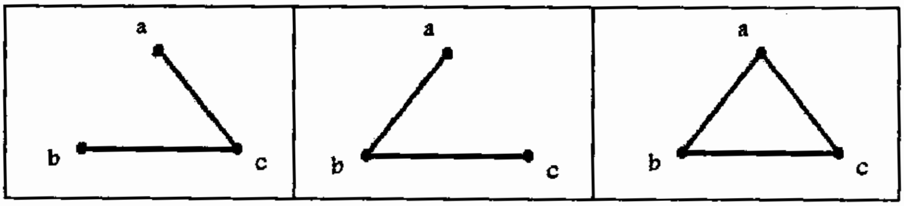
١٨-46 .

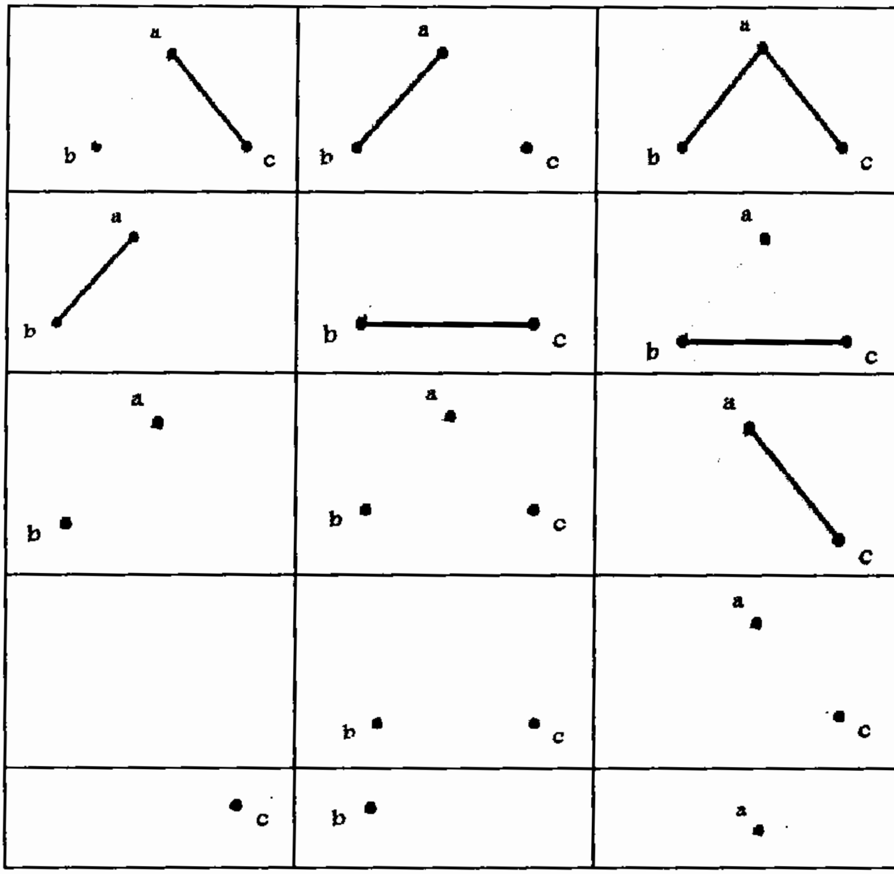
١٩- نعم يوجد.



٢٠- ثلاثة.

٢١- 17

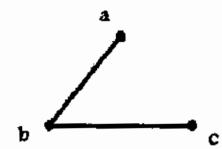




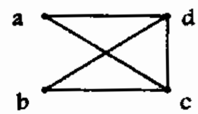
حلول تمارين ٦ـ٣

١- $G \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

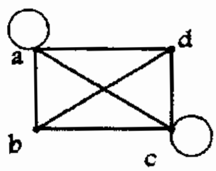
٢- (أ)



(ب)



(ج)



٣- (أ)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٤-

الرأس الابتدائي	رؤوس النهاية (أ)	رؤوس النهاية (ب)
a	a,c	b
b	a,b,c,d	b,c
c	a,b,c,d	b,c,d
d	b,d	a

٥- مثل كل من الرسومات التالية بمصفوفة تجاور.

(أ)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ج)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(د)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(هـ)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٦- (أ) متماثلان $u_1 \leftrightarrow v_2$ ، $u_3 \leftrightarrow v_3$ ، $u_5 \leftrightarrow v_4$ ، $u_2 \leftrightarrow v_5$ ، $u_4 \leftrightarrow v_1$.

(ب) غير متماثلان ، عدد الرؤوس مختلف وكذلك عدد الحواف.

(ج) متماثلان $u_1 \leftrightarrow v_1$ ، $u_4 \leftrightarrow v_2$ ، $u_7 \leftrightarrow v_3$ ، $u_3 \leftrightarrow v_4$ ، $u_6 \leftrightarrow v_5$ ، $u_2 \leftrightarrow v_6$ ، $u_5 \leftrightarrow v_7$.

حلول تمارين ٦-٤

١- (أ) ليس مسار، لا توجد حافة من c إلى a.

(ب) مسار طوله 4.

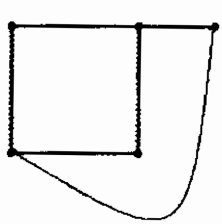
(ج) ليس مسار، لا توجد حافة من b إلى a.

(د) مسار، دورة، طوله 5.

٢- (أ) غير مترابط. (ب) مترابط. (ج) غير مترابط.

٣- (أ)

(ب)



(ج) ليس مستوي (د) ليس مستوي

٤- (أ) لا توجد دورة أويلر أومسار أويلر.

(ب) توجد دورة أويلر $b,c,f,i,h,f,e,h,d,e,b,d,a,b$.

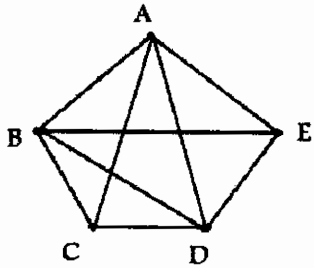
(ج) لاتوجد دورة أويلر. يوجد مسار أويلر

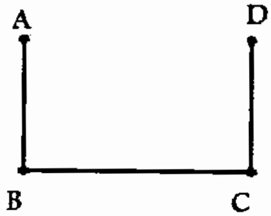
a,e,c,e,b,e,d,b,a,c,d

(د) لا توجد دورة أويلر أومسار أويلر.

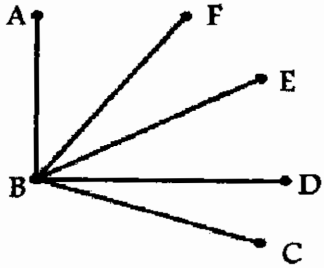
حلول تمارين ٦-٥

١- (أ) خمسة ألوان. (ب) لونان





(ج) لونان



٢- (أ) اربعة . (ب) ثلاثة . (ج) أربعة. (د) لونان.

٣- (أ) بازالة g يصبح العدد اللوني 2.

(ب) بازالة c يصبح العدد اللوني 2.

(ج) بازالة b أو d يصبح العدد اللوني 2.

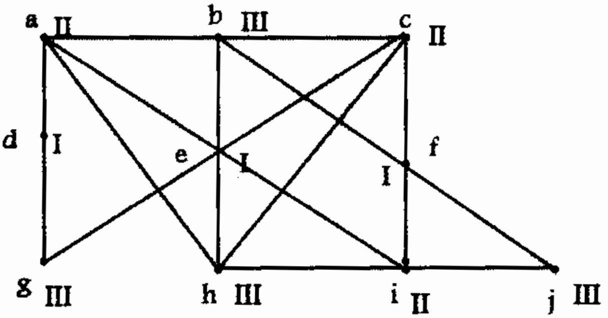
(د) لا يمكن.

٤-

فترة الامتحان	المقررات
I	C101, M195
II	C473
III	M116, M115, C273
IV	C102

٧- نرتب الرؤوس حسب درجاتها ترتيبا تنازليا كما يلي (من اليسار إلى اليمين) e,a,b,c,f,h,i,d,g,j. نختار اللون الأول لتلوين e وكل الرؤوس التي لاتجاورها وهي f و d. نختار اللون الثاني لتلوين a وكل الرؤوس التي لاتجاورها والتي لم يسبق تلوينها وهي c و i. نختار اللون الثالث لتلوين الرأس b وكل الرؤوس التي لاتجاورها والتي لم يسبق تلوينها وهي h، g و j. هذا التلوين مبين في الرسم

الرؤوس	اللون
e,d,f	I
a,c,i	II
b,h,g,j	III



٨- لونان.

٩- إذا كان n فردي فإن عدد الأولوان يساوي 4، وإذا كان n زوجي فإن عدد الألوان يساوي 3.

١٠- العدد التلويني للرسم K_n هو n. العدد التلويني للدورة C_n يكون 2 عندما تكون n عدد زوجي و 3 عندما تكون n عدد فردي.

حلول تمارين الباب السابع

حلول تمارين ٧-١

١- (أ) ليس شجرة، رسم غير مترابط. (ب) شجرة.

(ج) ليس شجرة، يحتوي دورة بسيطة. (د) شجرة.

(هـ) ليس شجرة، يحتوي دورة بسيطة. (و) شجرة.

(ز) شجرة. (ح) ليس شجرة، رسم غير مترابط.

(ط) شجرة. (ي) ليس شجرة، يحتوي دورة بسيطة.

٢- (أ) a . (ب) a,b,c,d,f,h,i,q,t.

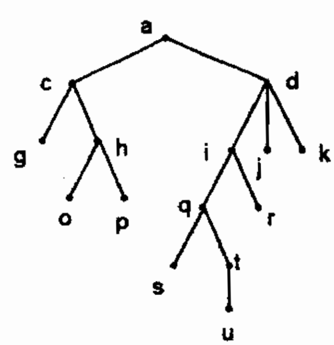
(ج) e,g,j,k,l,m,n,o,p,r,s,u. (د) لايوجد.

(هـ) c . (و) p. (ز) a,b,f . (ح) f,l,m,n.

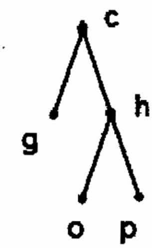
٤- لا.

٥- لا.

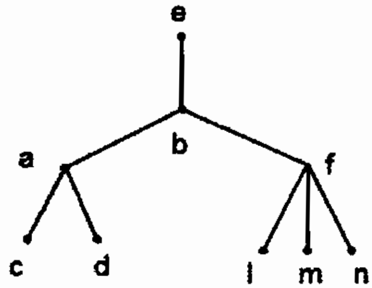
٦- (أ)



(ب)



(ج)

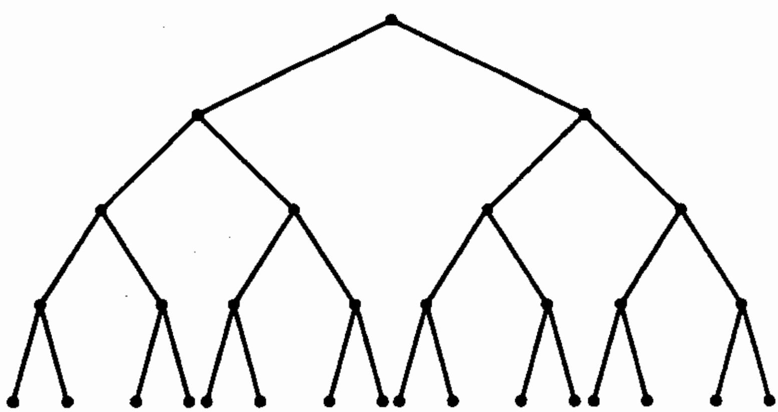


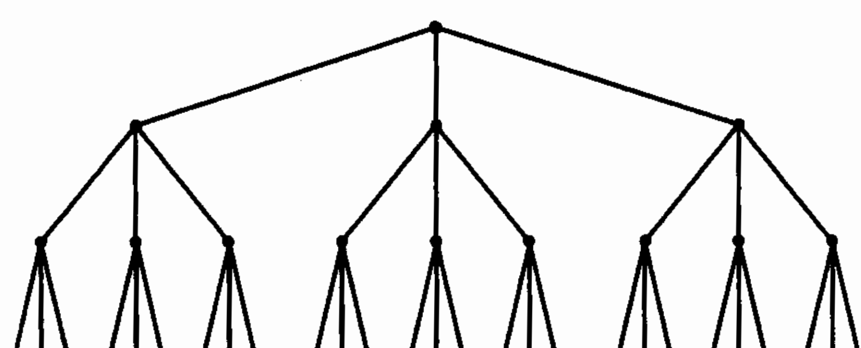
-٨ $i = 10000$ ، $n = 5$ ، $m = 5 \cdot 10000 + 1 = 50001$ ، $\ell = 40000 + 1 = 40001$.

عدد الأشخاص الذين استقبلوا الرسالة هو عدد الرؤوس m مطروحا منها 1 (وهو الجذر) أي يساوي 50000.

عدد الذين لم يرسلوها يساوي عدد الأوراق أي يساوي 40001.

-٩



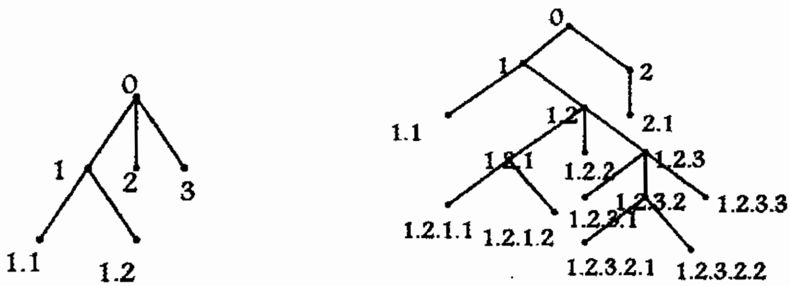


١٠- عدد الرؤوس $\frac{n^{h+1}-1}{n-1}=1+n+n^2+n^3+...+n^h$.

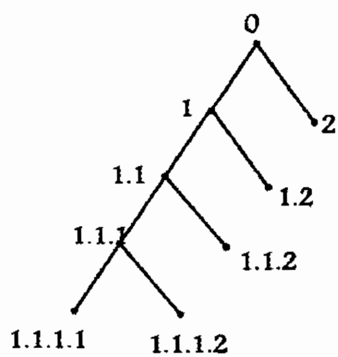
عدد الأوراق (عدد الرؤوس عند مستوي h) n^h.

حلول تمارين ٧-٢

١- (أ) (ب)



(ج)



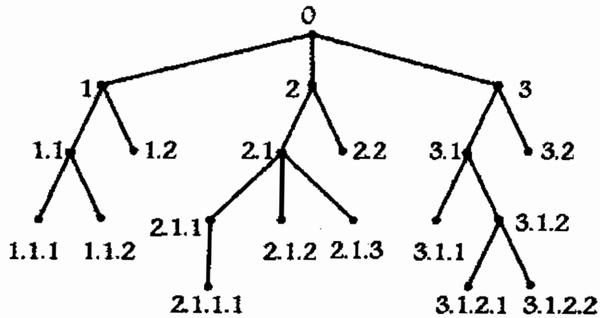
٢- (أ) v تكون عند مستوى تكون 5. (ب) عنوان والد v هو 3.4.5.2.

(ج) أقل عدد ممكن لأشقاء v هو 3.

(د) أقل عدد صحيح موجب للرؤوس في T هو 19.

(هـ) 0,1,2,3,3.1,3.2,3.3,3.4,3.4.1,3.4.2,3.4.3,3.4.5, 3.4.5.1,3.4.5.2,3.4.5.2.1,3.4.5.2.2,3.4.5.2.3

٣- (أ)



(ب)نعم يمكن للأوراق في شجرة متجذرة مرتبة أن يكون لها هذه القائمة العناوين العامة.

(ج) نعم يمكن للأوراق في شجرة متجذرة مرتبة أن يكون لها هذه القائمة العناوين العامة.

٤- (أ) $a,b,d,e,i,j,m,n,o,c,f,g,h,k,l,p$.

(ب) a,b,d,e,f,g,c .

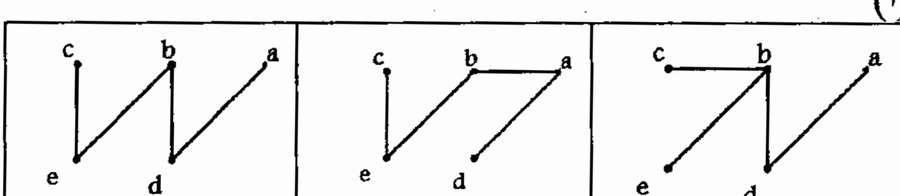
(ج) $a,b,e,k,l,m,f,g,n,r,s,c,d,h,o,i,j,p,q$.

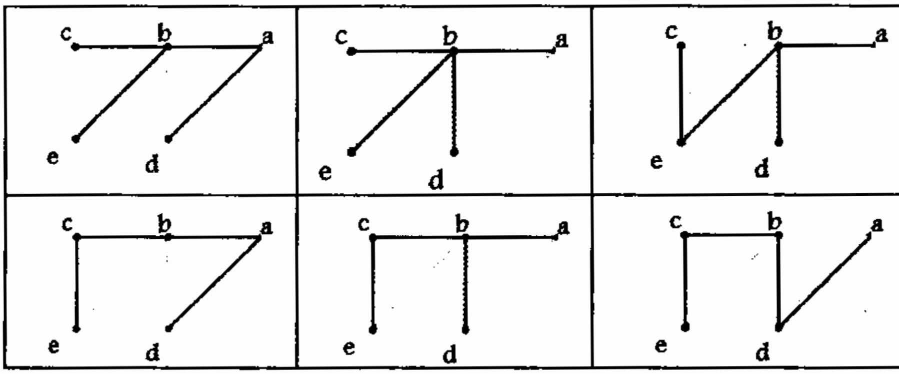
٥- $d,b,i,e,m,j,n,o,a,f,c,g,k,h,l,p$.

٦- $d,i,m,n,o,i,e,b,f,g,k,l,m,n,b,c,a$.

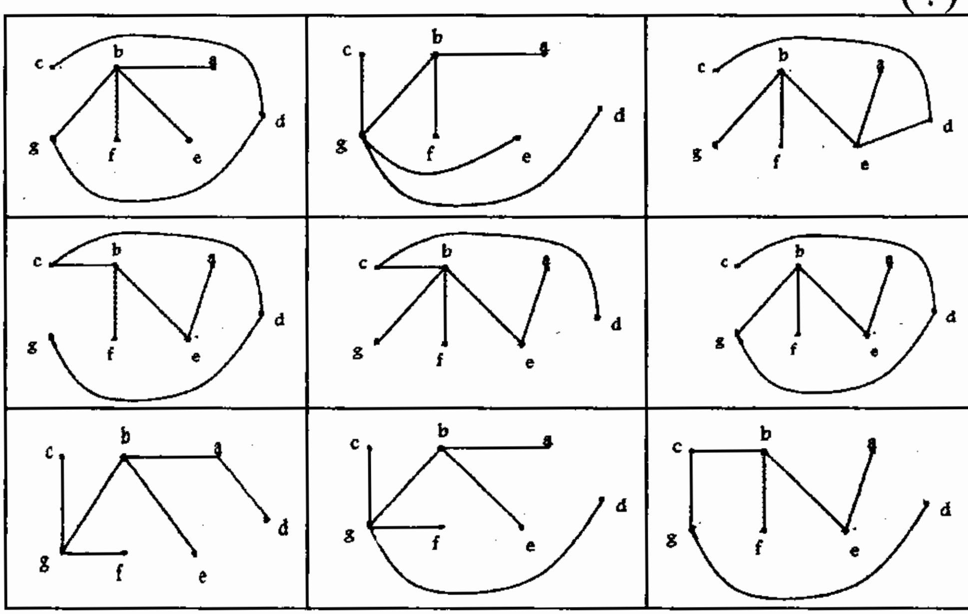
٧- في الشجرة إذا كان عدد الرؤوس n فإن عدد الحواف يكون $n-1$. نفرض أننا أزلنا r حافة من الرسم حتى نحصل على شجرة موسعة، إذن $m-r=n-1$. ومن ثم $r=m-n+1$.

٨- (أ)

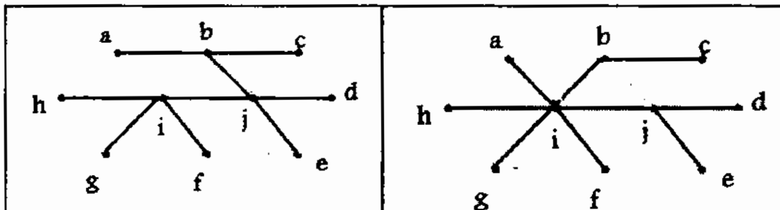


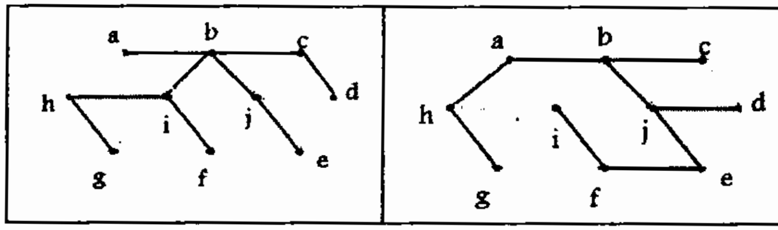


(ب)

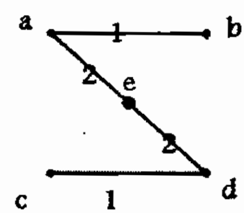


(ج)

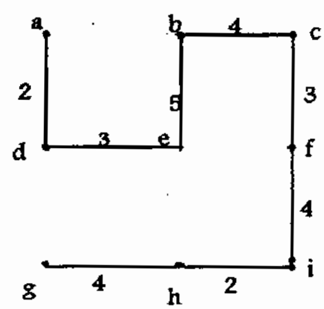




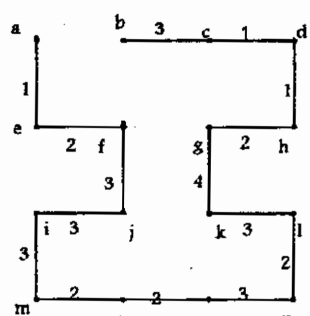
١٠- (أ) نختار الحافة $\{a,b\}$، بعدها نختار الحافة $\{a,e\}$، ثم نختار الحافة $\{e,d\}$، أخيرا نختار الحافة $\{c,d\}$



(ب)



(ج)



حلول تمارين الباب الثامن

حلول تمارين ٨-١

١- هذا ينتج مباشرة من تعريف مكملة العنصر.

٢- أولا، إثبات أن $\bar{a}+b=1 \Leftrightarrow a\cdot\bar{b}=0$:

$\bar{a}+b=1 \Leftrightarrow \overline{\bar{a}+b}=\bar{1} \Leftrightarrow \bar{\bar{a}}\cdot\bar{b}=\bar{1} \Leftrightarrow a\cdot\bar{b}=0$.

ثانيا، إثبات أن $a+b=b \Leftarrow a\cdot b=a$: نفرض أن $a+b=b$،

إذن $a\cdot b=a\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b=a+a\cdot b$

ومن قانون الامتصاص $a+a\cdot b=a$.

ثالثا، إثبات أن $a\cdot b=a \Leftarrow a+b=b$: نفرض أن $a\cdot b=a$.

إذن $a+b=a\cdot b+b=b$ وذلك من قانون الامتصاص.

رابعــــا، $a\cdot\bar{b}=0 \Leftarrow a+b=b$: $a\cdot\bar{b}=0 \Leftarrow a=b \Leftarrow$ $a+b=b$.

أخيـــرا، إثبـــات أن $a+b=b \Leftarrow a\cdot\bar{b}=0$: $a+b=b \Leftarrow$ $a\cdot\bar{b}=a\cdot(\overline{a+b})=a(\bar{a}\bar{b})=(a\bar{a})\bar{b}=0\bar{b}=0$.

$(i)a\cdot b=a,(ii)\,a+b=b,\,(iii)\bar{a}+b=1,\,(iv)a\cdot\bar{b}=0$

٣- (أ) $x\cdot 1=0 \Rightarrow x=0$. (ب) $x+x=0 \Rightarrow x=0$.

(ج) $x\cdot 1=x$ صحيحة لكل x.

(د) $x\cdot\bar{x}=1$ غير صحيحة لأي x .

٤- (أ) $x_1\bar{x}_2+x_3=x_1\bar{x}_2(x_3+\bar{x}_3)+(x_1+\bar{x}_1)(x_2+\bar{x}_2)x_3$.

(ب) $x_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3+\bar{x}_1x_2x_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$.

٥- (أ) $f(x,y)=\bar{x}y$.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

(ب) $f(x,y,z) = x + yz$

x	y	z	yz	$x + yz$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

(ج)

$f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{xyz}$

x	y	z	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	xyz	$\overline{xyz}$	$x\overline{y} + \overline{xyz}$
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

(د) $f(x,y,z) = x(yz + \overline{yz})$

x	y	z	yz	$\overline{yz}$	$yz + \overline{yz}$	$x(yz + \overline{yz})$
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0

٦- (أ) $x\bar{x}y = xy$.   (ب) $(x+0)+(1\cdot\bar{x})=1$.

٧- $f(x,y,z) = x\bar{y} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} = x\bar{y} + y\bar{z}$

(أ) $f(x,y,z) + x\bar{z} = x\bar{y} + y\bar{z} + x\bar{z}$

$= x\bar{y}(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})y\bar{z} + x(y+\bar{y})\bar{z}$

$= x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$

$= x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

$= x\bar{y} + y\bar{z} = f(x,y,z)$

(ب) $f(x,y,z) + x = x\bar{y} + y\bar{z} + x \neq f(x,y,z)$.

(ج) $f(x,y,z) + \bar{z} = x\bar{y} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{z}$

$= x\bar{y} + \bar{z} \neq f(x,y,z)$

٩- (أ)

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y} + x\bar{y}$
1	0	0	1	0	1	1

(ب)

w	x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$w + \bar{x}y$
1	1	0	0	0	1

(ج) $wx + \bar{y} + yz$.

w	x	y	z	$\bar{y}$	wx	yz	$wx + \bar{y} + yz$
1	1	0	0	1	1	0	1

(د) $.(wx+y\bar{z})+w\bar{y}+\overline{(w+y)(\bar{x}+y)}=1$

١٠-(أ) (i) $.\overline{wx}yz$ (ii) $.\bar{w}xy\bar{z}$

(iii) $.\bar{w}xyz$ (iv) $.\overline{wxy}z$

(ب) (i) $.w+x+\bar{y}+\bar{z}$ (ii) $.w+\bar{x}+\bar{y}+z$

(iii) $.w+\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$ (iv) $.w+x+y+\bar{z}$

١١- (أ)، (ب) صيغة الفصل الطبيعية لـ f هي

$$xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\overline{yz}+\bar{x}y\bar{z}$$
$$=\sum m(2,4,5,6,7)$$

صيغة العطف الطبيعي هي

$$(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$
$$=\prod M(0,1,3)$$

١٢- (أ) $.f=\prod M(0,1,2,3,4,7,9,10,12,13,14,15)$

(ب) $.f=\prod M(0,1,2,4,6,8,9)$

١٣- (أ) $xy+(x+y)\bar{z}+y=xy+y+x\bar{z}+y\bar{z}$

$$=y+y\bar{z}+x\bar{z}=y+x\bar{z}$$

(ب) $x+y+\overline{(\bar{x}+y+z)}=x+y+x\bar{y}\bar{z}$

$$=x+x\overline{yz}+y=x+y$$

(ج) $yz+wx+z+(wz\overline{(xy+wz)})=yz+wx+z$

١٤- (أ) $.xy+x\bar{y}=x(y+\bar{y})=x\cdot 1=x$

(ب) $.(x+y)(x+\bar{y})=x+x\bar{y}+yx=x+xy=x$

(ج) $xz+xy\bar{z}=(x+xy)z+xy\bar{z}=xz+xyz+xy\bar{z}$

$$=xz+xy$$

(د) $\overline{(x+y)}+\overline{(\bar{x}+\bar{y})}=\bar{x}\bar{y}+xy$

(هـ) $.x+\bar{x}y+\bar{x}\bar{y}=x+\bar{x}=1$

١٥- (أ) $.xy+x\bar{y}=x(y+\bar{y})=x\cdot 1=x$

(ب) $(x+y)(x+\bar{y}) = x + x\bar{y} + yx = x + xy = x$.

(ج) $x(\bar{x}+y) = xy$.

(د) $xyz + \bar{x}y + xy\bar{z} = \bar{x}y + xyz + xy\bar{z}$

$= \bar{x}y + xy = y$

(هـ) $y(w\bar{z} + wz) + xy = yw + xy$

$= yw + yx = y(w+x)$

(و) $\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz = \bar{x}z + xz = z$.

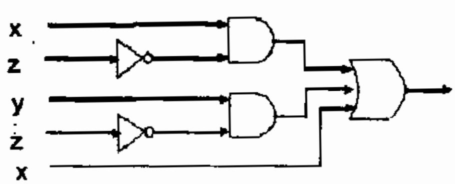
١٦- (أ) $xz + \bar{y}z$.

(ب) $xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$.

حلول تمارين ٨-٢

١- (أ) $(x+y)\bar{y}$.   (ب) $\overline{(x+y)} + (\bar{z}+x)$.   (ج) $\overline{\overline{x\,y}}$.

٢- (أ)



٣- (أ)

xy \ z	0	1
00		
01	1	1
11		
10	1	1

xy \ z	0	1
00		
01	1	1
11		
10	1	1

بتجميع الـ 1's في الصف الثاني نحصل على

$\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz = \bar{x}y$

بتجميع الـ 1's في الصف الرابع نحصل على

$x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z = x\bar{y}$

لذلك $f(x,y,z)=\bar{x}y+x\bar{y}$.

(ب) $f(w,x,y,z)=\prod M(0,1,4,5)$.

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1		
01	1			1
11				
10				

wx \ yz	00	01	11	10
00	1	1		
01	1			1
11				
10				

$$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}=\bar{w}\bar{y}\bar{z}$$

$$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}+\bar{w}xy\bar{z}=\bar{w}x\bar{z}$$

$$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{w}x\bar{y}z=\bar{w}\bar{x}\bar{y}$$

إذن $f(w,x,y,z)=\bar{w}\bar{y}\bar{z}+\bar{w}x\bar{z}+\bar{w}\bar{x}\bar{y}$

٤-

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0		0
01	0	0		
11	0	0		0
10				0

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0		0
01	0	0		
11	0	0		0
10				0

٥- (أ)

x \ y	0	1
0		
1	1	

(ب)

x \ y	0	1
0	1	
1		1

(ج)

x \ y	0	1
0	1	1
1	1	1

-٧

x	y	z	xy	yz	xz	$xy+xz+yz$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

-٨ (ب)

الحد الأصغر Minterm	سلسلة البتات Bit String	عدد 1s Number of 1s
xyz	111	3
$xy\overline{z}$	110	2
$\overline{x}yz$	011	2
$\overline{x}\,\overline{y}z$	010	1

الخطوة الثانية		الخطوة الأولى				
سلسلة البتات	الحد	سلسلة البتات	الحد	سلسلة البتات	الحد	
--1	(1,2,3,4) z	11-	(1,2) xy	111	xyz	1
-1-	(1,2,3,4)y	-11	(1,3) yz	110	$xy\overline{z}$	2
		01-	(3,4) $\overline{x}y$	011	$\overline{x}yz$	3
				010	$\overline{x}y\overline{z}$	4

$$xyz + xy\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} = y$$