المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي جعل العلم النافع طريقاً موصلاً لرضاه، وصراطاً يتبعه من أراد هداه، ويحيد عنه من ضل واتبع هواه، ومن أضل ممن اتبع هواه بغير هدىً من الله، وأشهد أن لا إله إلا الله رفع شأن العلم وأهله حتى وصلوا من المجد منتهاه، ومن العز أعلى ذراه، فمن سلك طريقاً يبتغي فيه علماً؛ سهل الله له به طريقاً إلى جنته وعلاه، وأشهد أن محمداً عبده ورسوله الرحمة المهداة، والنعمة المسداة، صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه الهداة التقاة، ومن سار على نهجه إلى يوم لقاه.

أما بعد فهذا كتاب الرياضيات المتقطعة وتطبيقاتها أقدمه للمكتبة العربية حسبة لله وخدمة لأبنائي الدارسين إسهاما مني في تبسيط تدريس العلوم الحديثة وخاصة الرياضيات .

ما هي الرياضيات المتقطعة

الرياضيات المتقطعة هي جزء الرياضيات الذي يهتم بدراسة الأشياء المتقطعة (هنا كلمة متقطعة تعني أشياء مختلفة أو غير مترابطة). من أنواع المسائل التي يتم حلها باستخدام الرياضيات المتقطعة ما يلي:

- كم طريقة توجد لاختيار كلمة مرور صالحة على نظام الحاسب؟
- ما هو أقصر طريق بين مدينتين باستخدام نظام وسائل النقل؟
- هل يوجد ربط بين جهازي حاسب في شبكة؟
- كيف يمكن سرد قائمة من الأعداد الصحيحة بحيث تكون الاعداد في ترتيب تصاعدي ؟

سوف نتعلم التركيبات والطرق المتقطعة اللازمة لحل مثل هذه المشكلات.

بصورة أكثر تعميما ، يتم استخدام الرياضيات المتقطعة عندما يتم عد الأشياء، و عندما يتم دراسة العلاقات بين المجموعات المنتهية (أو المعدودة) ، و عندما يتم تحليل العمليات التي تحتوي على عدد محدود من الخطوات .

لماذا ندرس الرياضيات المتقطعة

هناك العديد من الأسباب الهامة لدراسة الرياضيات المتقطعة . من خلال هذه المقرر يمكنك تطوير المهارات الرياضية الخاصة بك ، أي ، قدرتك على فهم وإنشاء الحجج الرياضية .أيضا الطالب سوف يتعلم مجموعة خاصة من الحقائق الرياضية وكيفية تطبيقها. كذلك، الرياضيات المتقطعة هي المدخل إلى مقررات أكثر تقدما في جميع أجزاء العلوم الرياضية . الرياضيات المتقطعة توفر الأسس الرياضية للعديد من مقررات علوم الحاسب ، تشمل هياكل البيانات ، الخوارزميات ، نظرية قواعد البيانات، نظرية الآلية ، اللغات الرسمية ، نظرية المترجمات ، أمن الحاسوب ، وأنظمة التشغيل.

مقرر الرياضيات المتقطعة الناجح يجب أن يهتم بعناية وتوازن بالموضوعات التالية:

التفكير الرياضي: الطالب سوف يتعلم التفكير الرياضي من أجل أن يقرأ، يعبر، وينشيء محاججات رياضية بطريقة سليمة. لذلك بدأ الكتاب بالمنطق الرياضي، الذي يعتبر أساس المناقشات التالية وطرق البرهان.

التحليل التركيبي: مهارة مهمة في حل المسائل وهي كيفية عد الأشياء. مناقشة العد في هذا الكتاب تبدأ بالطرق الأساسية للعد والتركيز على التحليل التركيبي لحل مسائل العد وليس على تطبيق الصيغ.

التراكيب المتقطعة: مقرر الرياضيات المتقطعة سوف يعلم الطالب كيفية التعامل مع التراكيب المتقطعة والتي هي تراكيب رياضية مجردة تستخدم لتمثيل الأشياء والعلاقات بين هذه الأشياء. هذه التراكيب المتقطعة تشمل التباديل، العلاقات، الرسومات والأشجار.

تطبيقات ونمذجة: الرياضيات المتقطعة لها تطبيقات في ما يمكن أن نتصوره من مساحات الدراسة. يوجد العديد من التطبيقات لعلوم الحاسب كما يوجد لها تطبيقات في الكيمياء والنبات وعلم الحيوان وعلوم التجارة. النمذجة في الرياضيات التطبيقية تعتبر من مهارات حل المسائل التي سوف يتعلمها الطالب.

في هذا الكتاب سوف نتعرض لدراسة مجموعة واسعة من التراكيب المنفصلة . هناك ثلاثة مواضيع هامة ؛ المنطق ، ومجموعات والرواسم سوف يتم تغطيتها. قواعد المنطق تحدد معنى العبارات الرياضية. على

سبيل المثال ، هذه القواعد تساعدنا على فهم وتفسير عبارات مثل : "يوجد عدد صحيح ليس مجموع مربعين ". المنطق هو أساس كل تفكير رياضي ، ولها تطبيقات عملية في تصميم آلات الحوسبة ، وفقا لمواصفات النظام ، وفي الذكاء الاصطناعي ، وفي برمجة الحاسب ، و غيرها من مجالات علوم الحاسب ، وكذلك في العديد من المجالات الأخرى من الدراسة.

لفهم الرياضيات، يجب علينا أن نفهم كيف تشكل محاججة رياضية صحيحة ، وهذا هو البرهان. وعلاوة على ذلك ، لتعلم الرياضيات يحتاج الشخص أن يكون فعالا في بناء الحجج الرياضية وليس مجرد قراءة المعروض. البراهين ليست مهمة فقط في الرياضيات ، ولكن أيضا في أجزاء كثيرة من علوم الحاسب . من المواضيع الهامة في الرياضيات المتقطعة، الاستنتاج الرياضي هو طريقة من طرق البرهان الذي يستخدم لإثبات العبارات الرياضية التي تقترح أن خاصية ما تكون صحيحة لكل الصحيحة الموجبة .

جزء كبير من الرياضيات المتقطعة يخصص لدراسة تراكيب منفصلة ، وهي التي تستخدم لتمثيل أشياء منفصلة. العديد من التراكيب المنفصلة المهمة يتم بناؤها باستخدام المجموعات ، التي هي مجموعات من الأشياء. من بين التراكيب المنفصلة التي بنيت من المجموعات هي التوافيق ، والتي هي عبارة عن مجموعات من الأشياء غير المرتبة المستخدمة على نطاق واسع في العد ، والعلاقات ، وهي عبارة عن مجموعات من أزواج مرتبة تمثل العلاقات بين الأشياء. مفهوم الراسم في غاية الأهمية في الرياضيات المتقطعة . الراسم هو قاعدة تعين لكل عنصر من مجموعة على وجه التحديد عنصر واحد من مجموعة أخرى. بعض التراكيب المفيدة مثل المتواليات و السلاسل ماهي إلا أنواع خاصة من الرواسم. الرواسم تلعب أدوارا هامة في جميع الرياضيات المتقطعة ، ويتم استخدامها لدراسة حجم مجموعات ، لعد أشياء من أنواع مختلفة. عند حل مسألة نقوم بوضع النموذج الرياضي المناسب لهذه المسألة. وضع النموذج الرياضي المناسب هو فقط جزء من الحل. لإتمام الحل نحتاج إلى طريقة للحل باستخدام هذا الموذج. المطلوب هو عملية تتم في متتابعة من الخطوات تسمى خوارزمية.

العلاقات بين عناصر من مجموعات تحدث في كثير من الحالات. كل يوم نحن نتعامل مع علاقات مثل تلك العلاقات بين رجال الأعمال وأرقام هواتفهم،الأشخاص ووظائفهم، الدول وعواصمها، وهلم جرا . في الرياضيات ندرس علاقات مثل تلك التي بين الأعداد الصحيحة الموجبة وتلك التي تقسمها، والأعداد الصحيحة المتآلفة بمعيار 5 ، الأعداد ومربعاتها، وهكذا .

التعداد ،أي عد الأشياء مع خصائص معينة ، هو جزء مهم من التوافيق ، دراسة ترتيبات الأشياء. القواعد الأساسية للعد يمكن أن تحل مجموعة متنوعة هائلة من المسائل. على سبيل المثال ، يمكننا استخدام هذه القواعد لتعداد أرقام الهواتف المختلفة الممكنة، أرقام لوحات السيارات ، كلمات المرور المسموح به على نظام الحاسب، والأوامر المختلفة التي يمكن للمتسابقين في سباق الانتهاء منها . أداة مهمة من أدوات العد هو مبدأ برج الحمام . والذي ينص على أنه عند وضع أشياء في صناديق وكان عدد الأشياء أكثر من عدد الصناديق فإنه سوف يوجد على الأقل صندوق واحد يوضع فيه أكثر من شيء. العلاقات التكرارية يمكن استخدامها في مسائل العد الأكثر تعقيدا. أيضا العديد من مسائل العد يمكن حلها باستخدام صيغة متسلسلة قوى، تسمى الدالة المولدة، حيث معاملات قوى المتغير تمثل حدود المتتابعة التي نرغب في إيجادها. بالإضافة إلى حل مسائل العد، يكون أيضا باستطاعتنا استخدام الدوال المولدة لحل العلاقات التكرارية وإثبات المتطابقات التركيبية. مسائل أخرى في العد يمكن حلها بمبدأ الإدراج والاستبعاد الذي يعد العناصر في اتحاد المجموعات. كل هذه الطرق للعد سوف تدرس في هذا الكتاب.

الرسومات هي تراكيب منفصلة تتكون من الرؤوس والحواف التي تربط هذه الرؤوس . يمكن حل مسائل الانضباط باستخدام نماذج الرسومات. تلوين الرسومات له العديد من التطبيقات ، منها على سبيل المثال عملية الجدولة والتعيين.

يطلق على الرسم المتصل الذي لا يحتوي على دوائر بسيطة، شجرة. وقد استخدمت الأشجار منذ فترة طويلة في عام 1857 ، عندما إستخدم آرثر كيلي الأشجار في عد أنواع معينة من المركبات الكيميائية. منذ ذلك

الوقت ، استخدمت الأشجار في حل المشاكل عل نطاق واسع من التخصصات . الأشجار مفيدة بشكل خاص في علوم الحاسب ، حيث توظف على نطاق واسع في الخوارزميات. على سبيل المثال ، يتم استخدام الأشجار لبناء خوارزميات فعالة لتحديد العناصر في القائمة.

الجبر البولياني من الموضوعات التي تزداد أهميتها يوما بعد يوم . كاهتمام خاص للمتخصصين في علوم الحاسب، هو أصغر جبر بولياني والذي نطاقه المجموعة المكونة من عنصرين. التعبيرات البوليانية المولدة على هذا الجبر البولياني المعين تتجسد بشبكات توافقية وتستخدم في تصميم الحاسبات. حيث أن الحواسيب الرقمية تبنى أساسا من مكونات ثنائية- بمعنى- مكونات تفترض فقط وضعين ممكنين مختلفين، مختلف الوحدات الدالية في الحواسيب الرقمية يمكن النظر إليها باعتبارها شبكة محولات (شبكة مفاتيح).

هذا الكتاب يتكون من ثمانية وعشرين فصلا مقسمة على ثمانية أبواب.

الباب الأول، موضوعه قواعد المنطق وطرق البرهان، يتكون من خمسة فصول. في الفصل الأول تم تعريف التقرير وقيم وجداول الصدق للتقارير وأدوات الربط المنطقية التي تستخدم لتكوين تقارير مركبة من تقارير بسيطة. أيضا قدمنا مفهوم القوانين والتناقضات والتكافؤ المنطقي. في الفصل الثاني قدمنا منطق المقدرات والعبارات المسورة وبعض أنواع المسورات وخاصة تسوير الوجود والتسوير الشامل. في الفصل الثالث قدمنا المسورات المختلطة ونفي وترتيب المسورات. أما الفصل الرابع فقد خصص لتقديم قواعد الاستدلال لمنطق التقارير وقواعد الاستدلال للعبارات المسورة وكيفية بناء المحاججات الصحيحة. أخيرا وفي الفصل الخامس، قدمنا بعض طرق البرهان المشهورة ومنها البرهان المباشر وغير المباشر والبرهان بالتناقض وبرهان العبارات المتكافئة وبراهين الوجود والواحدية.

يختص الباب الثاني بتقديم ودراسة إثنين من أهم التراكيب الأساسية وهما المجموعات والرواسم. يتكون هذا الباب من أربعة فصول. في الفصل الأول تم تقديم مفهوم المجموعة وطرق وصفها والمجموعة الشاملة ومكملة المجموعة والعمليات على المجموعات مثل الاتحاد

والتقاطع والفرق والفرق المتماثل والضرب الكارتيزي لمجموعتين. كما قدمنا باختصار مفهومي المجموعات المتعددة والمجموعات الفازية. الفصلين الثاني والثالث تم تخصيصهما لدراسة الرواسم. حيث تم، في الفصل الثاني، تقديم مفهوم الراسم، النطاق، النطاق المصاحب، والمدي للراسم. كما قدمنا عملية تحصيل الرواسم وأنواع الرواسم من حيث كونها أحادية وفوقية وتناظر أحادي. أيضا قدمنا تعريف معكوس الراسم وشروط وجود معكوس للراسم وبعض النظريات عن خواص الصورة والصورة العكسية للراسم. في الفصل الثالث تم استكمال دراسة الرواسم بعرض بعض طرق تمثيل الرواسم وبعض الرواسم الهامة وكيفية استخدام الرواسم في إثبات قابلية العد لمجموعة. أيضا قدمنا مفهوم المتتابعات والمجموع. وفي نهاية الفصل قدمنا العمليات الثنائية وهي نوع خاص من الرواسم كما قدمنا تعريف رواسم الاسقاط. الفصل الرابع موضوعة الخوارزميات. في هذا الفصل قدمنا تعريف الخوارزمية والخواص التي يجب أن تتوفر في الخوارزمية وبعض الخوارزميات، مثل خوارزمية إيجاد أكبر عدد في متتابعة، خوارزميات البحث، وخوارزميات الفرز.

خصص الباب الثالث لدراسة العلاقات، وهو يتكون من ثلاثة فصول. الفصل الأول يتناول تعريف العلاقة ، معكوس العلاقة ، خواص العلاقات، وكذلك عملية تركيب وتحصيل العلاقات. أيضا قدمنا في هذا الفصل علاقة الترتيب والمجموعات المرتبة وفي نهاية الفصل قدمنا نوعا خاصا من المجموعات المرتبة وهو مايسمى بالشبكية. في الفصل الثاني قدمنا شرحا لطرق تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات والرسومات الموجهة. أما الفصل الثالث من هذا الباب فقد خصص لدراسة نوع هام من العلاقات وهو علاقة التكافؤ، حيث تم تعريف علاقة التكافؤ وقدمنا مثالا من أبرز الأمثلة على علاقة التكافؤ وهو ائتلاف الأعداد الصحيحة. أيضا قدمنا مفهوم فصول التكافؤ والتجزيء.

في الباب الرابع يتم دراسة مفهوم الاستنتاج الرياضي. يتكون هذا الباب من فصلين. في الفصل الأول قدمنا مبدأ الاستنتاج الرياضي وهو احد الطرق المهمة لإثبات العلاقات الرياضية التي تعتمد على عدد صحيح موجب. وفي نهاية هذا الفصل قدمنا مبدأ الاستنتاج القوي. أما

الفصل الثاني فقد خصص لدراسة التعريفات الارتدادية والاستنتاج التراكيبي، حيث قدمنا مفهوم التعريف الارتدادي للدوال وقدمنا بعض الأمثلة ومن أشهرها مفهوم أعداد فيبوناسي. أيضا قدمنا مفهوم التعريف الارتدادي للمجموعات والتراكيب. وفي نهاية الفصل قدمنا مفهوم الاستنتاج التراكيبي وهو الذي يستخدم في إثبات صحة النتائج حول المجموعات المعرفة ارتداديا.

الباب الخامس يتكون من خمسة فصول وقد خصص لدراسة موضوع العد.في الفصل الأول قدمنا مبدأين أساسيين في العد وهما قاعدة الضرب وقاعدة الجمع. أيضا قدمنا مبدأ الادراج والاستبعاد والذي يستخدم لتصحيح الخطأ الذي قد ينتج من تكرار بعض العناصر في الجمع. علاوة على ذلك قدمنا كيفية استخدام مخططات الاشجار في العد. في نهاية هذا الفصل قدمنا مبدأ برج الحمام. في الفصل الثاني قدمنا مفهوم التباديل والتوافيق وكيفية استخدامها في العد. كما قدمنا معاملات ذات الحدين ومثلث باسكال وبعض متطابقات ذات الحدين. الفصل الثالث تم تخصيصة لدراسة العلاقات التكرارية والتي تستخدم في العديد من مسائل العد التي يصعب حلها باستخدام طرق العد التي سبق دراستها في الفصلين السابقين. في الفصل الرابع قدمنا الصورة العامة لمبدأ الادراج والاستبعاد. أخيرا في الفصل الخامس قدمنا مفهوم الدوال المولدة والتي تستخدم لتمثيل المتتابعات بصورة فعالة باعتبار حدود المتتابعة كمعاملات لقوى متغير في صورة متسلسلة قوى. كما قدمنا أمثلة توضح كيفية استخدام الدالة المولدة في حل العلاقات التكرارية واثبات بعض متطابقات التوافيق.

الرسومات هي موضوع الدراسة في الباب السادس والذي يتكون من خمسة فصول. في الفصل الأول قدمنا تعريف الرسم، أنواع الرسومات، نماذج للرسومات ، ومصطلحات الرسم. في الفصل الثاني قدمنا عدد من الرسومات الخاصة التي تظهر وتستخدم كأمثلة في العديد من التطبيقات. من هذه الرسومات الخاصة الرسم التام، الدورة ، العجلة، والرسومات المنقسمة. أيضا قدمنا مفهوم الرسم الجزئي واتحاد رسمين. الفصل الثالث تم تخصيصه لتقديم بعض طرق تمثيل الرسومات مثل قائمة التجاور، مصفوفات التجاور، ومصفوفات التبعية. كذلك قدمنا مفهوم تماثل

الرسومات. الفصل الرابع موضوعه ترابط الرسومات والرسومات المستوية. في هذا الفصل تم تقديم تعريف الرسم المترابط ومفهوم المسارات ومسارات أويلر وقدمنا الشرط الضروري والكافي لوجود دورة أويلر في الرسم المترابط المتعدد. أيضا قدمنا مفهوم الرسومات المستوية وصيغة أويلر وبعض النتائج على هذه الصيغة. في الفصل الخامس قدمنا مفهوم تلوين الرسومات ومفهوم العدد التلويني وكيفية استخدام التلوين في الجدولة وخاصة عمل جداول الامتحانات.

الباب السابع يتكون من فصلين تم تخصيصهما لدراسة مفهوم الاشجار. في الفصل الأول قدمنا مفهوم الشجرة والشجرة المتجذرة والشجرة النونية والشجرة الثنائية وخواص الأشجار. في الفصل الثاني قدمنا كيفية معالجة البيانات التي تم تخزينها عن طريق الأشجار المتجذرة وذلك بتقديم نظام العنوان العام وطرق اجتياز الشجرة لزيارة رؤوس الشجرة عن طريق الاجتياز القبلي والاجتياز البيني والاجتياز البعدي. أيضا قدمنا مفهوم الأشجار الممتدة والشجرة الممتدة الصغرى.

الباب الثامن يتكون من فصلين ويعالج مفهوم الجبر البولياني. في الفصل الأول قدمنا مفهوم الجبر البولياني ومتطابقات الجبر البولياني والتعبيرات والدوال البولياني وتمثيل الدوال البولياني بصيغة الفصل الطبيعي وصيغة العطف الطبيعي وفي نهاية الفصل قدمنا مفهوم التمام الدالي. في الفصل الثاني تم تقديم مفهوم البوابات المنطقية وشبكات البوابات وبعض الأمثلة على الدوائر المنطقية كما قدمنا طريقتين لتصغير الدوائر وهما خرائط كارنوف وطريقة كوني مكلوسكي.

خلال عرض المادة العلمية حاولنا عرضها بصورة مبسطة ووضعنا بجوار كل مصطلح علمي ترجمته باللغة الانجليزية عند وروده للمرة الأولى لكي يتعرف عليه القارئ وحتى لا يكون هناك غموض في معنى المصطلح خاصة مع تعدد الترجمات.كذلك أوردنا عددا وافيا من الأمثلة المحلولة التي توضح المعنى المقصود من التعريف أو المفهوم المقدم. وفي نهاية كل فصل أوردنا عددا كافيا من التمارين التي تغطي المادة العلمية الواردة في الفصل حتى يتمكن الطالب من اختبار مدى استيعابه للمفاهيم الواردة وذلك بمحاولة حل هذه التمارين.

في نهاية الكتاب أوردنا حلول مختصرة لبعض تمارين الكتاب التي ننصح القارئ عدم اللجوء إليها إلا بعد أن يستنفذ جهده في محاولة حلها. كما أوردنا قائمة المراجع التي اعتمد عليها المؤلف في صياغة المحتوى العلمي للكتاب.

وفي الختام أسأل الله العظيم أن يتقبل هذا العمل وأن يجعله خالصا لوجهه الكريم وأن يكون نافعا ومفيدا لأبنائنا الدارسين كما أسأله سبحانه وتعالى التوفيق لهم، ونطلب الدعاء من كل من يقرأ في هذا الكتاب.

المؤلف

أ.د/ فتحي هشام خضر

ربيع أول ١٤٣٥ هـ

يناير ٢٠١٤م