الباب الثاني
تراكيب أساسية
المجموعات والرواسم
Sets and Functions

كثير من الرياضيات المتقطعة يركز على دراسة التراكيب المتقطعة، التي تستخدم لتمثيل الأشياء المتقطعة. كثير من التراكيب المتقطعة الهامة تبنى باستخدام المجموعات، والتي هي تجمعات لاشياء. من بين التراكيب المتقطعة التي بنيت من مجموعات، التوافيق ، وهي تجمعات غير مرتبة من الاشياء تستخدم على نطاق واسع في العد؛ العلاقات، وهي مجموعات من الثنائيات المرتبة التي تمثل علاقات بين الاشياء؛ الرسومات، وهي مجموعة من الرؤوس والحواف التي تربط بين الرؤوس. هذه بعض المواضيع التي سوف نتعرض لها بالدراسة في الفصول القادمة.

مفهوم الرواسم هو مفهوم بالغ الأهمية في الرياضيات المتقطعة. الراسم يعين لكل عنصر في مجموعة عنصر وحيد في مجموعة. الرواسم تلعب دورا مهما خلال الرياضيات المتقطعة.

٢-١ المجموعات Sets

في هذا الفصل، نقدم التركيبة الأساسية في الرياضيات المتقطعة والتي عليها تبنى كل التركيبات المتقطعة الأخرى، ألا وهي المجموعات. المجموعات تستخدم لتجميع الاشياء مع بعضها. غالبا، الاشياء في مجموعة يكون لها خواص متماثلة. فمثلا، كل الطلاب في هذا الفصل تكون مجموعة، كما أن كل الطلاب المسجلين في مقرر الرياضيات المتقطعة تكون مجموعة. الآن نعطي تعريف المجموعة.

تعريف ٢-١-١. المجموعة هي تجمع من الأشياء غير المرتبة.

تعريف ٢-١-٢. الأشياء في مجموعة أيضا تسمى عناصر elements أو أعضاء members المجموعة. يقال أن المجموعة تحتوي contain

عناصرها. عادة نرمز للمجموعات بالحروف الكبيرة مثل A، B، C، ... وللعناصر بالحروف الصغيرة مثل a، b، c، ...

يوجد العديد من الطرق لوصف المجموعة. واحدة من هذه الطرق هو سرد عناصر المجموعة، عندما يكون ذلك ممكنا. نستخدم رمز الأقواس حيث جميع عناصر المجموعة تكتب بين قوسين على الصورة { }. على سبيل المثال، الرمز $\{a,b,c\}$ يمثل مجموعة بها ثلاث عناصر a ، b و c.

مثال ٢-١-٣. المجموعة O من الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة أقل من 10 يمكن تمثيلها بالصورة $O=\{1,3,5,7,9\}$.

أحيانا رمز الأقواس يستخدم لوصف مجموعة دون كتابة جميع عناصرها. بعض عناصر المجموعة تكتب، ومن ثم نستخدم علامات النقاط (...) عندما يكون السلوك العام للعناصر واضح.

مثال ٢-١-٤. مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أقل من 100 يمكن الرمز لها بالصورة $\{1,2,3,...,99\}$.

المجموعات التالية تلعب دورا هاما في الرياضيات المتقطعة

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ ،

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ ،

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,3,...\}$ ،

مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}=\{p/q : p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0\}$.

تعريف ٢-١-٥. مجموعتان يقال أنهما متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر.

مثال ٢-١-٦. المجموعتان $\{1,3,5\}$ و $\{3,5,1\}$ متساويتان، حيث أن لهما نفس العناصر. لاحظ أن ترتيب العناصر في المجموعة ليس له اعتبار. لاحظ أيضا أن تكرار العنصر أكثر من مرة ليس له اعتبار، لذلك $\{1,3,3,3,5,5,5,5\}$ هي نفس الشئ مثل المجموعة $\{1,3,5\}$.

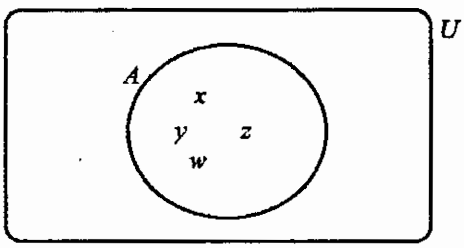
طريقة أخرى لوصف مجموعة باستخدام رمز منشئ المجموعة set builder. نصف جميع العناصر في مجموعة باعطاء الخاصية أو الخواص التي يجب أن تحققها العناصر. فمثلاء المجموعة O من الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة أقل من 10 يمكن أن تكتب بالصورة

$\{x:$ عدد صحيح موجب فردي أقل من 10 $x\}$

المجموعات يمكن أن تمثل بالرسم باستخدام **أشكال فن**. في أشكال فن، المجموعة الشاملة universal set ، وهي المجموعة التي تحتوي كل الأشياء تحت الاعتبار، تمثل بمستطيل. داخل هذا المستطيل تمثل المجموعات بدوائر أو بأي أشكال أخرى. أحيانا تستخدم النقاط لتمثل عناصر معينة في المجموعة.

مثال ٢-١-٧. إرسم شكل فن الذي يمثل المجموعة $A=\{x,y,z,w\}$.

الحل: شكل ٢-١-١ هو الشكل المطلوب.



شكل ٢-١-١

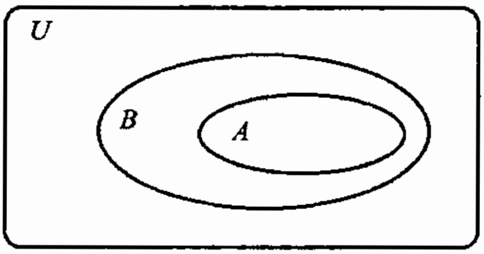
نكتب $x\in A$ لنرمز إلى أن x عنصر في A. الرمز $x\notin A$ يعنى أن x ليست عنصر أو لاتنتمي إلى A.

توجد مجموعة خاصة لا تحتوي أية عناصر. هذه المجموعة تسمى **المجموعة الخالية** empty set ويرمز لها بالرمز ϕ ، وقد يرمز لها أحيانا بالرمز $\{\}$.

ينبغي التمييز بين المجموعة الخالية ϕ والمجموعة $\{\phi\}$، أي المجموعة التي تحتوي عنصر واحد ϕ.

المجموعة التي تحتوي عنصر واحد فقط مثل $\{x\}$ تسمى مجموعة مفردة singleton set.

تعريف ٢-١-٨. يقال أن المجموعة A **مجموعة جزئية** من المجموعة B، ونكتب $A \subseteq B$ إذا كانت كل عناصر A هي أيضا عناصر في B، كما هو موضح في شكل ٢-٢-٢.



$A \subseteq B$

شكل ٢-١-٢

واضح أن $A \subseteq B$ إذا وفقط إذا كان التقرير $\forall x(x \in A \to x \in B)$ صادق.

نظرية ٢-١-٩. لأي مجموعة S يكون

(i) $\phi \subseteq S$ ، (ii) $S \subseteq S$.

البرهان: سوف نبرهن (i) ونترك (ii) كتمرين.

نفرض S مجموعة. لبيان أن $\phi \subseteq S$ ، نوضح أن $\forall x\ (x \in \phi \to x \in S)$ يكون صادق. حيث أن المجموعة الخالية لا تحتوي أية عناصر ، ينتج أن $x \in \phi$ دائما كاذب. من ذلك ينتج أن التضمين $x \in \phi \to x \in S$ دائما صادق حيث أن الفرض فيها دائما كاذب. أي أن $\forall x\ (x \in \phi \to x \in S)$ يكون صادق. وهذا يكمل برهان (i).

لكي نؤكد على أن A مجموعة جزئية من B ولكن $A \neq B$، نكتب $A \subset B$ ونقول أن A مجموعة جزئية خالصة (فعلية) proper subset من B.

لبيان أن مجموعتين لهما نفس العناصر نبين أن كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى. بتعبير آخر يمكننا بيان أنه إذا كان A و B مجموعتان بحيث $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ فإن $A = B$.

تعريف ٢-١-١٠. نفرض S مجموعة. إذا كانت S تحوي تحديدا عدد n عنصر مختلفة، حيث n عدد صحيح غير سالب، فيقال أن S **مجموعة منتهية** finite set وأن n هو عدد عناصر S أو العدد الكاردينالي cardinality ويرمز لذلك بالرمز $|S|$. إذا لم تكن المجموعة S منتهية فإنها تكون **لانهائية** infinite.

مثال٢-١-١١. المجموعة $O = \{1,3,5,7,9\}$ منتهية و $|O| = 5$ ، بينما مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تكون مجموعة لانهائية.

تعريف ٢-١-١٢. نفرض S مجموعة. **مجموعة القوة** the power set للمجموعة S، ويرمز لها بالرمز $P(S)$ ، هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من S.

مثال ٢-١-١٣. أوجد مجموعة القوة للمجموعة $\{0,1,2\}$.

الحل: مجموعة القوة $P(\{0,1,2\})$ للمجموعة $\{0,1,2\}$ هي

$$\{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\},\phi\}$$

إذا كان عدد عناصر مجموعة ما n فإن مجموعة القوة لها تحتوي 2^n عنصر.

الضرب الكارتيزي Cartesian Product

النوني المرتب $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ هو تجمع مرتب فيه a_1 هو العنصر الأول، a_2 هو العنصر الثاني، ...، a_n هو العنصر النوني. كل عنصر من هذه العناصر يسمى إحداثي coordinate أو مركبة component .

نقول أن نونيان مرتبان يكونا متساويان إذا كانت إحداثياتهما المتناظرة متساوية. بتعبير آخر $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ إذا وفقط إذا كان $a_i = b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

كحالة خاصة، عندما $n = 2$ ، النوني المرتب يسمى **ثنائي** (زوج) **مرتب** ordered pair . الثنائيان المرتبان (a,b) و (c,d) يكونا متساويين إذا كان $a = c$ و $b = d$. لاحظ أن (a,b) و (b,a) يكونا غير متساويان إلا إذا كان $a = b$.

تعريف ٢-١-١٤. نفرض A و B مجموعتان. **الضرب الكارتيزي** Cartesian product للمجموعتين A و B ، يرمز له بالرمز $A \times B$ ، هو مجموعة كل الثنائيات المرتبة (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$. أي أن

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

مثال ٢-١-١٥. نفرض A تمثل مجموعة كل الطلاب في الجامعة و B تمثل مجموعة كل المقررات الدراسية التي يمكن أن يسجل بها الطلاب. ما هو حاصل الضرب الكارتيزي $A \times B$ ؟

الحل: الضرب الكارتيزي يتكون من كل الثنائيات المرتبة (a,b)، حيث a طالب في الجامعة و b أحد المقررات التي يمكن أن يسجل بها هذا الطالب. المجموعة $A \times B$ تمثل كل الاحتمالات لتسجيل الطلاب في مقررات الجامعة.

مثال ٢-١-١٦. أوجد حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعتين $A = \{1,2\}$ و $B = \{a,b,c\}$.

الحل: $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$.

المجموعة الجزئية R من الضرب الكارتيزي $A \times B$ يسمى علاقة relation من المجموعة A إلى المجموعة B. عناصر R هي ثنائيات مرتبة حيث المركبة الأولى عنصر في A والمركبة الثانية عنصر في B.

على سبيل المثال $R=\{(a,0),(a,1),(a,3),(b,1),(b,2)\}$ علاقة من المجموعة $\{a,b,c\}$ إلى المجموعة $\{0,1,2,3\}$.

حاصلا الضرب $A\times B$ و $B\times A$ يكونا غير متساويان إلا إذا كان $A=\phi$ أو $B=\phi$ (وفي هذه الحالة $A\times B=\phi$) أو إذا كان $A=B$.

العمليات على المجموعات Set Operations

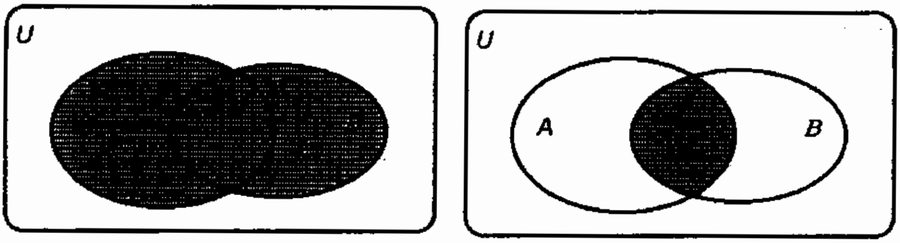
يمكن ضم مجموعتين بطرق مختلفة عديدة لنحصل على مجموعة أخرى. على سبيل المثال، إذا بدأنا بمجموعة طلاب تخصص الرياضيات ومجموعة طلاب تخصص علوم الحاسب في معهدك العلمي، يمكننا تكوين مجموعة الطلاب تخصص رياضيات أو تخصص علوم حاسب، مجموعة طلاب تخصص رياضيات وتخصص علوم حاسب، مجموعة الطلاب غير المتخصصين في الرياضيات، وهكذا.

تعريف ٢-١-١٧. نفرض أن A و B مجموعتان. **إتحاد** union A و B، يرمز له بالرمز $A\cup B$، هو المجموعة التي تحتوى كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما. أي أن

$$A\cup B=\{x : x\in A\vee x\in B\}$$

تعريف ٢-١-١٨. نفرض A و B مجموعتان. **تقاطع** intersection A و B، يرمز له بالرمز $A\cap B$، هو المجموعة التي تحتوي العناصر الموجودة في A و B معا. أي أن $A\cap B=\{x : x\in A\wedge x\in B\}$.

في الشكل التالي، أشكال فن التي تمثل إتحاد وتقاطع المجموعتين A و B.



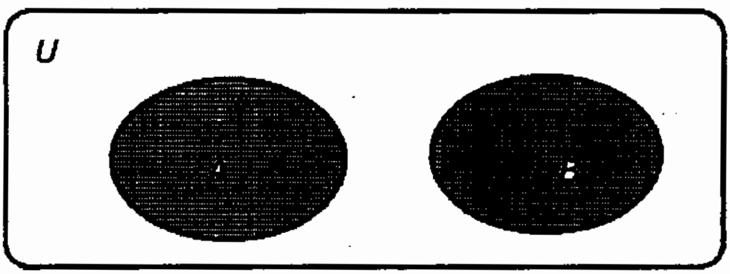
$A \cup B$ **شكل ٢-١-٣** $A \cap B$

مثال ٢-١-١٩. نفرض $A = \{1,3,5\}$ و $B = \{1,2,3\}$. إذن $A \cup B = \{1,2,3,5\}$ ، $A \cap B = \{1,3\}$.

مثال ٢-١-٢٠. إتحاد مجموعة الطلاب تخصص رياضيات ومجموعة الطلاب تخصص علوم حاسب في معهدك هي مجموعة كل الطلاب في معهدك الذين هم تخصص رياضيات أو تخصص علوم حاسب (أو التخصصين معا). التقاطع هو مجموعة الطلاب التي تجمع بين تخصص رياضيات وتخصص علوم حاسب.

تعريف ٢-١-٢١. يقال أن مجموعتان **منفصلتان** (غير متقاطعتان) disjoint إذا كان تقاطعهما هو المجموعة الخالية. أي أن المجموعتان A و B تكونا منفصلتان إذا كان $A \cap B = \phi$.

مثال ٢-١-٢٢. المجموعتان $A = \{1,3,5,7,9\}$ و $B = \{2,4,6,8,10\}$ منفصلتان، حيث أن $A \cap B = \phi$.



$A \cap B = \phi$

شكل ٢-١-٥

قد نحتاج أحيانا لمعرفة عدد العناصر في اتحاد مجموعات.لإيجاد عدد العناصر في اتحاد مجموعتين منتهيتين A و B ، لاحظ أن $|A|+|B|$ تحسب عناصر A غير الموجودة في B وعناصر B غير الموجودة في A مرة واحدة فقط والعناصر المشتركة بينهما تحسبها مرتين. لذلك إذا طرحنا عدد العناصر الموجود في المجموعتين A و B معا من $|A|+|B|$ نحصل على عدد عناصر الاتحاد. لذلك

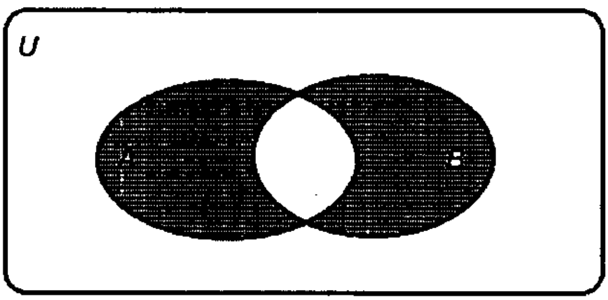
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

تعريف ٢-١-٢٣. نفرض A و B مجموعتان. **الفرق** difference بين A و B ، يرمز له بالصورة $A - B$ (أو $A \setminus B$)، هو المجموعة المكونة من تلك العناصر الموجودة في A ولكن ليست في B. الفرق بين A و B أيضا يسمى مكملة B بالنسبة إلى A. لذلك

$$A - B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

الفرق المتماثل symmetric difference لـ A و B ، يرمز له بالصورة $A \Delta B$، يعرف كما يلي:

$$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$$



$A \Delta B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$

شكل ٢-١-٦

مثال ٢-١-٢٤. $\{1,3\ 5\} - \{1,2,3\} = \{5\}$

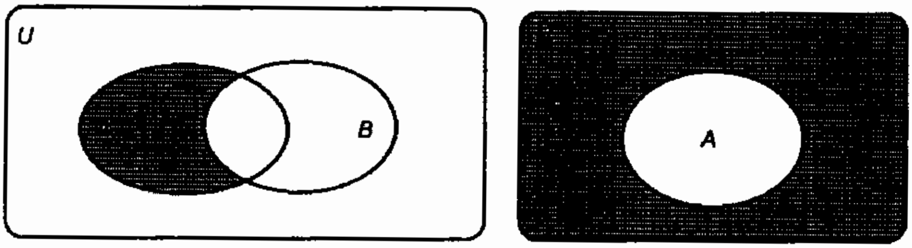
بينما $\{1,2,3\} - \{1,3,5\} = \{2\}$.

لذلك $\{1,3,5\}\Delta\{1,2,3\}=\{5\}\cup\{2\}=\{2,5\}$.

تعريف ٢-١-٢٥. نفرض U هي المجموعة الشاملة. **المكملة** complement للمجموعة A، يرمز لها بالصورة $\overline{A}$ أو A^c ، هي مكملة A بالنسبة إلى U. بتعبير آخر مكملة A هي $U-A$. العنصر ينتمي إلى $\overline{A}$ إذا وفقط إذا كان لاينتمي إلى A. لذلك $\overline{A}=\{x : x \notin A\}$.

بمجرد تعيين المجموعة الشاملة، يمكن تعريف مكملة أي مجموعة.

الشكل التالي يوضح أشكال فن التي تمثل الفرق بين المجموعتين A و B ومكملة المجموعة A .



$A-B$ $\overline{A}$

شكل ٢-١-٧

متطابقات المجموعات Set Identities

الجدول التالي يعطي المتطابقات الأكثر أهمية في المجموعات. سوف نبرهن بعض هذه المتطابقات باستخدام ثلاث طرق مختلفة.

الاسم	المتطابقة
قوانين الوحدة	$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$
قوانين الهيمنة	$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$
قوانين التعادل	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
قانون التكميل	$\overline{(\overline{A})}$
قوانين الابدال	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
قوانين الدمج(المشاركة)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
قوانين التوزيع	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
قوانين دي مورجان	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
قوانين الامتصاص	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
قوانين المكملة	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$

جدول ٢-١-١

مثال ٢-١-٢٦. برهن أن $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

البرهان: سوف نبرهن التساوي بين المجموعتين ببيان أن كل مجموعة منهما تكون جزئية من الأخرى.

أولا نفرض أن $x \in \overline{A \cap B}$. من تعريف المكملة، $x \notin A \cap B$. من تعريف التقاطع، التقرير $\sim\big((x\in A)\wedge(x\in B)\big)$ يكون صادق. ومن المنطق، هذا يكافئ $\sim(x\in A)$ أو $\sim(x\in B)$. لذلك $x\notin A$ أو $x\notin B$. من تعريف المكملة، $x\in \overline{A}$ أو $x\in\overline{B}$. من تعريف الاتحاد ينتج أن $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. وهذا يبين أن $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$.

الآن نفرض أن $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$. من تعريف الاتحاد $x\in\overline{A}$ أو $x\in\overline{B}$. باستخدام تعريف المكملة $x\notin A$ أو $x\notin B$. تبعا لذلك $\sim(x\in A)\vee\sim(x\in B)$ يكون صادق. من تعريف التقاطع ينتج أن $\sim(x\in A\cap B)$ يكون صادق. نستخدم تعريف المكملة لنستنتج أن $x\in\overline{A\cap B}$. هذا يوضح أن $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$. وهذا يكمل البرهان.

مثال ٢-١-٢٧. استخدم العنصر المنشئ والتكافؤ المنطقي لبيان أن $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

الحل:

$$\overline{A\cap B}=\{x: x\notin A\cap B\}$$

$$\begin{aligned}\overline{A\cap B}&=\{x:\sim(x\in(A\cap B))\}\\&=\{x:\sim(x\in A\wedge x\in B)\}\\&=\{x: x\notin A\vee x\notin B\}\\&=\{x: x\in\overline{A}\vee x\in\overline{B}\}\\&=\{x: x\in\overline{A}\cup\overline{B}\}\\&=\overline{A}\cup\overline{B}\end{aligned}$$

مثال ٢-١-٢٨. برهن أن $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ لأي ثلاث مجموعات A، B و C.

الحل: سوف نبرهن هذه المتطابقة ببيان أن كل طرف مجموعة جزئية من الطرف الآخر.

نفرض أن $x \in A \cap (B \cup C)$. إذن $x \in A$ و $x \in B \cup C$. ومن ذلك ينتج أن $x \in A$، و $x \in B$ أو $x \in C$. ومنها نحصل على $x \in A$ و $x \in B$ أو $x \in A$ و $x \in C$. أي أن $x \in A \cap B$ أو $x \in A \cap C$. من ذلك نستنتج أن $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ومن ثم

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

الآن نفرض أن $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. إذن $x \in (A \cap B)$ أو $x \in (A \cap C)$. ومن ثم $x \in A$ و $x \in B$ أو $x \in A$ و $x \in C$. من هذا نجد أن $x \in A$، و $x \in B$ أو $x \in C$. تبعا لذلك $x \in A$ و $x \in B \cup C$. من تعريف التقاطع نحصل على $x \in A \cap (B \cup C)$. ومن ثم نخلص إلى $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. وهذا يكمل البرهان.

جداول الانتماء

متطابقات المجموعات يمكن برهانها أيضا باستخدام جداول العضوية (الانتماء). نعتبر كل تركيبة من المجموعات التي يمكن أن ينتمي لها عنصر ونتحقق أن العنصر في تركيبات المجموعات ينتمي إلى كلا طرفي المتطابقة.

نشير إلى إنتماء العنصر لمجموعة بالرمز 1 ولعدم إنتماء العنصر بالرمز 0.

مثال ٢-١-٢٩. استخدم جدول الانتماء لبيان أن

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

الحل: جدول الانتماء لهذه التراكيب من المجموعات مبين في جدول ٢-١-٢ هذا الجدول يحتوي ثمانية صفوف. حيث أن العمودان المناظران لـ $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ متماثلان، فإن المتطابقة تكون محققة.

A	B	C	$B\cup C$	$A\cap(B\cup C)$	$A\cap B$	$A\cap C$	$(A\cap B)\cup(A\cap B)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

جدول ٢-١-٢

متطابقات المجموعات الأخري يمكن استنتاجها باستخدام ماسبق برهانه من متطابقات.

مثال ٢-١-٣٠. نفرض ثلاث مجموعات A، B و C. بين أن

$$\overline{A\cup(B\cap C)} = (\overline{C}\cup\overline{B})\cap\overline{A}$$

الحل: لدينا
$$\begin{aligned}\overline{A\cup(B\cap C)} &= \overline{A}\cap\left(\overline{B\cap C}\right)\\ &= \overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})\\ &= (\overline{B}\cup\overline{C})\cap\overline{A}\\ &= (\overline{C}\cup\overline{B})\cap\overline{A}\end{aligned}$$

حيث أن اتحاد وتقاطع المجموعات يحقق قوانين الدمج، المجموعات $A\cup B\cup C$ و $A\cap B\cap C$ تكون معرفة جيدا عندما تكون A، B و C مجموعات. أيضا يمكننا اعتبار اتحاد وتقاطع عدد اختياري من المجموعات.

تعريف ٢-١-٣١. (i) اتحاد تجمع من المجموعات هو المجموعة التي تحتوي تلك العناصر التي تكون عناصر في واحدة على الأقل من مجموعات ذلك التجمع. نستخدم الرمز $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n$ لنشير إلى اتحاد المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(ii) تقاطع تجمع من المجموعات هو المجموعة التي تحتوي تلك العناصر التي تكون عناصر في كل مجموعات ذلك التجمع. نستخدم الرمز $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .. \cap \cup A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ لنشير إلى تقاطع المجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$.

تمثيل الحاسب للمجموعة Computer Representation of the sets

توجد عدة طرق لتمثيل الحاسب للمجموعة. نذكر هنا طريقة لتخزين عناصر مجموعة باستخدام ترتيب اختياري للعناصر في المجموعة الشاملة. هذه الطريقة لتمثيل المجموعات تجعل حساب تركيبات المجموعات أمر يسير.

نفرض أن المجموعة الشاملة U منتهية (ومن حجم مناسب بحيث عدد عناصر U لا يكون أكبر من ذاكرة الحاسب المستخدم).

أولا نعين ترتيب لعناصر U، على سبيل المثال $a_1, a_2, \dots, a_n$. نمثل المجموعة الجزئية A من U على صورة **سلسلة بتات** bit string طولها n، حيث البت رقم i يكون 1 إذا كان a_i ينتمي إلى A ويكون 0 إذا كان a_i لاينتمي إلى A.

مثال ٢-١-٣٢. نفرض $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، وترتيب عناصر U يكون في ترتيب تصاعدي، أي أن $a_i = i$. ماهي سلاسل البتات التي تمثل المجموعة الجزئية المكونة من الاعداد الصحيحة الفردية من U، المجموعة الجزئية المكونة من الاعداد الصحيحة الزوجية من U، والمجموعة الجزئية المكونة من الاعداد الصحيحة التي لاتزيد عن 5 في U؟

الحل: سلسلة البتات التي تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية في U، أي المجموعة $\{1,3,5,7,9\}$، لها البت 1 في المواضع الأول، الثالث، الخامس، السابع والتاسع، ولها البت 0 في بقية المواضع. هذه السلسلة هي

10 1010 1010

السلسلة التي تمثل مجموعة الأعداد الزوجية في U ،وهي $\{2,4,6,8,10\}$، هي 01 0101 0101

(قسمنا هذه السلسلة التي طولها عشرة إلى كتل طول كل واحدة منها أربعة لسهولة القراءة حيث أن سلاسل البتات الطويلة تصعب قراءتها).

مجموعة الأعداد الصحيحة في U التي لاتزيد عن 5 ، وهي $\{1,2,3,4,5\}$، تمثل بالسلسلة

11 1110 0000

باستخدام سلاسل البتات التي تمثل المجموعات، يمكننا بسهولة إيجاد مكملة المجموعة والاتحاد والتقاطع والفرق بين مجموعتين.

لأيجاد سلسلة البتات لمكملة مجموعة من سلسلة البتات للمجموعة، ببساطة نغير 1 إلى 0 ونغير 0 إلى 1، حيث أن $x \in A$ إذا وفقط إذا كان $x \notin \bar{A}$.

للحصول على سلسلة البتات للاتحاد والتقاطع لمجموعتين نجري عمليات البتات البوليانية على سلاسل البتات التي تمثل المجموعتين. البت في الموضع رقم i في سلسلة البتات التي تمثل الاتحاد تكون 1 إذا كانت إحدى البتتين على الأقل في الموضع رقم i في السلسلتين 1، وتكون 0 إذا كانت كلا البتتين 0. لذلك سلسلة البتات للاتحاد هي bitwise OR لسلسلتي البتات للمجموعتين. البت في الموضع رقم i في سلسلة البتات التي تمثل التقاطع تكون 1 إذا كانت كلا البتتين في الموضع رقم i في السلسلتين 1، وتكون 0 إذا كانت إحدى البتتين 0. لذلك سلسلة البتات للتقاطع هي bitwise AND لسلسلتي البتات للمجموعتين.

مثال ٢-١-٣٣. بينا أن سلسلة البتات للمجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ (المجموعة الشاملة هي $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$) هي 10 1010 1010 .

سلسلة البتات للمكملة نحصل عليها باستبدال 0 مع 1 والعكس. هذا يعطي سلسلة البتات للمكملة هي 01 0101 0101 .

وهذه تناظر المجموعة $\{2,4,6,8,10\}$.

مثال ٢-١-٣٤. سلسلة البتات للمجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ هي $11\,1110\,0000$ وللمجموعة $\{1,3,5,7,9\}$ هي $10\,1010\,1010$. باستخدام سلاسل البتات أوجد الاتحاد والتقاطع لهاتان المجموعتان.

الحل: سلسلة البتات للاتحاد هي

$$11\,1110\,\,0000 \vee 10\,1010\,1010 = 11\,1110\,1010$$

والتي تناظر المجموعة $\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

سلسلة البتات للتقاطع هي

$$11\,1110\,\,0000 \wedge 10\,1010\,1010 = 10\,1010\,\,0000$$

والتي تناظر المجموعة $\{1,3,5\}$.

مجموعة الأعداد الصحيحة

فيما يلي بعض خواص الأعداد الصحيحة التي نحتاج إليها في دراستنا في الأبواب التالية في هذا الكتاب. نبدأ بتقديم بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالأعداد الصحيحة.

نفرض a و b عددان صحيحا، نقول أن a يقسم b (او b مضاعف a) إذا كان يوجد عدد صحيح m بحيث $b = am$ ، وللتعبير عن ذلك نستخدم الرمز $a\,|\,b$. إذا كانت a لايقسم b فإننا نرمز لذلك بالرمز $a \nmid b$. إذا كان a يقسم b وكان $a \neq 0$ فإن النسبة b/a تكون عدد صحيح. إذاكان a لايقسم b و $a > 0$ فإنه بقسمة b على a نحصل على خارج قسمة q وباقي r حيث $0 \le r < a$ ويكون $b = aq + r$.

الآن نذكر بعض خواص عملية القسمة في الأعداد الصحيحة. إثبات هذه الخواص بسيط وينتج من التعريف. لأي أعداد صحيحة a، b و c يكون:

(أ) $1\,|\,a$ ، $-1\,|\,a$ ، $a\,|\,a$ ، $-a\,|\,a$.

(ب) إذا كان $a\,|\,b$ و $b\,|\,c$ فإن $a\,|\,c$.

(ج) إذا كان $a\,|\,b$ و $a\,|\,c$ فإن $a\,|\,(b+c)$ و $a\,|\,(b-c)$.

(د) إذا كان $a,b>0$ و $a|b$ فإن $a \le b$.
(هـ) إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإن $a=b$ أو $a=-b$.
العدد الصحيح $p>1$ يسمى عدد أولى إذا كان لايقبل القسمة إلا على 1، -1، p و -p. بتعبير آخر العدد الصحيح $p>1$ يسمى عدد أولى إذا لم يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين صحيحين أصغر منه. كمثال 2، 3 ، 5 و 7، 11، 13 كلها أعداد أولية. العدد الصحيح $n>1$ الذي ليس أولى يسمى عدد مركب composite (العدد 1 لايعتبر أولى ولا يعتبر مركب). تعبير مركب هنا ليس المقصود به complex ،العدد الذي له جزء حقيقي وجزء تخيلي، ولكن المقصود به العدد الصحيح الذي يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين صحيحين أصغر منه وكلاهما أكبر من الواحد الصحيح.

المجموعات المتعددة Multisets

أحيانا عدد مرات تكرار العنصر في تجمع غير مرتب من الأشياء يكون معتبر. **المجموعات المتعددة** multisets هي تجمعات غير مرتبة من الأشياء حيث يمكن للعناصر أن تتكرر أكثر من مرة فعلى سبيل المثال، مجموعة التقديرات التي حصل عليها طلاب الفرقة الثانية بقسم الرياضيات في مادة الرياضيات المتقطعة. من الواضح أنه يمكن لعدد من الطلاب الحصول على نفس التقدير. أيضا مجموعة الدرجات العلمية لأعضاء هيئة التدريس بقسم الرياضيات هي مثال لمجموعة متعددة.

الرمز $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$ يستخدم للتعبير عن مجموعة متعددة حيث العنصر a_1 يظهر m_1 ، العنصر a_2 يظهر m_2 مرة ، وهكذا. الأعداد m_i ، $i=1,2,\dots,r$ ، تسمى تعدد (**تكرار**) a_i، $i=1,2,\dots,r$.
نفرض P و Q مجموعتان متعددتان. **اتحاد** P و Q هو المجموعة المتعددة حيث تكرار العنصر يكون هو الحد الأعلى (max) لتكراري العنصر في P و Q. **تقاطع** P و Q هو المجموعة المتعددة حيث تكرار العنصر يكون هو الحد الأدنى (min) لتكراري العنصر في P و Q. الفرق بين P و Q هو

المجموعة المتعددة حيث تكرار العنصر يكون هو تكرار العنصر في P مطروحا منه تكرار العنصر في Q، فإذا كان الناتج سالب يكون التكرار صفر. **مجموع** P و Q هو المجموعة المتعددة حيث تكرار العنصر فيها هو مجموع تكراري العنصر في P و Q. يرمز لاتحاد وتقاطع والفرق ومجموع مجموعتين متعددتين A و B بالرموز المعتادة $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $A + B$.

المجموعات الفازية Fuzzy sets

في دراستنا للمجموعات قدمنا طريقتين لكتابة المجموعة. طريقة السرد وهي كتابة كل عناصر المجموعة، إن كان ذلك ممكنا، وطريقة الوصف وهي إعطاء وصف محدد لعناصر المجموعة. هناك طريقة أخرى لكتابة مجموعة وهي ما يعرف **بالدالة المميزة** (الذاتية) characteristic function . حيث إذا كانت U هي المجموعة الشاملة و $A \subseteq U$ فإنه يوجد راسم $\mu_A : U \to \{0,1\}$ حيث، لكل $x \in U$ يكون

$\mu_A(x) = 1$ إذا كان $x \in A$ ،

$\mu_A(x) = 0$ إذا كان $x \notin A$ (أي $x \in \overline{A}$)

الدالة μ_A تسمى الدالة المميزة للمجموعة A.

مع الأهمية الكبيرة التي تتمتع بها نظرية المجموعات في دراسة مختلف العلوم وفي الطليعة منها علوم الرياضيات، إلا أن المجموعات بالصورة التي سبق تقديمها لم تعد تفي بكل الاحتياجات خاصة عندما تكون عناصر المجموعة موصوفة وصفا وصفيا وليس كميا. فمثلا عند الحديث عن مجموعة الطلاب المتفوقين في مقرر الرياضيات المتقطعة فإن وصف متفوقين لا يمكن تحديده بالمجموعات العادية حيث أن نسبة التفوق بين الطلاب تتفاوت. كذلك عند الحديث عن مجموعة الرجال الأكثر طولا والنساء الأكثر جمالا والأطفال الأكثر ذكاء في مدينة... وهكذا. لذلك كان التفكير في وضع ما يسمى بالمجموعات الفازية حيث تم توسيع مدى الدالة المميزة لمجموعة لتصبح الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 و 1 ، $[0,1]$، بدلا عن المجموعة التي تحتوي فقط 0 و 1، $\{0,1\}$.

تعريف٢-١-٣٥. المجموعة الفازية fuzzy set من المجموعة الشاملة U تعرف على أنها الدالة $\mu_A : U \to [0,1]$ حيث $\mu_A(x)$ تشير إلى درجة انتماء العنصر x للمجموعة A لكل $x \in U$.

هنا نذكر بدون تفصيل بعض الخواص المتعلقة بالمجموعات الفازية.

$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ لكل $x \in U$.

$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$ لكل $x \in U$.

$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$ لكل $x \in U$.

$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ لكل $x \in U$.

$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ لكل $x \in U$.

تمارين ٢-١

١- أكتب عناصر المجموعات التالية

(أ) $\{x : x^2 = 1$ بحيث x عدد حقيقي $\}$.

(ب) $\{x : 12$ عدد صحيح موجب أقل من x $\}$.

(ج) $\{x : x < 100$ و x مربع عدد صحيح $\}$.

(د) $\{x : x^2 = 2$ بحيث x عدد صحيح $\}$.

٢- استخدم العنصر المنشئ للمجموعة في وصف المجموعات التالية:

(أ) $\{0,3,6,9,12\}$. (ب) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

٣- حدد ما إذا كانت العبارات التالية صادقة أم كاذبة

(أ) $\phi \in \{0\}$. (ب) $0 \in \phi$.

(ج) $\{0\} \subset \phi$. (د) $\phi \subset \{0\}$.

(هـ) $\{0\} \in \{0\}$. (و) $\{0\} \subset \{0\}$.

(ز) $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$. (ح) $\phi \in \{\phi\}$.

(ط) $\phi \in \{\phi, \{\phi\}\}$.　　(ي) $x \in \{x\}$.

(ك) $\phi \in \{\{\phi\}\}$.　　(ل) $\{x\} \in \{\{x\}\}$.

(م) $\{x\} \subseteq \{x\}$.　　(ن) $\phi \in \{x\}$.

٤- ما هو الضرب الكارتيزي $A \times B$ ، حيث A هي مجموعة المقررات الدراسية التي طرحها قسم الرياضيات في الجامعة و B هي مجموعة أساتذة الرياضيات في الجامعة.

٥- نفرض أن A مجموعة. بين أن $\phi \times A = A \times \phi = \phi$.

٦- أوجد مجموعة القوة لكل من المجموعات التالية.

(أ) $\{a\}$.　　(ب) $\{a,b\}$.　　(ج) $\{\phi, \{\phi\}\}$.

٧- نفرض أن A مجموعة الطلاب الذين يعيشون في منطقة لاتبعد أكثر من واحد كيلومتر عن الجامعة و B مجموعة الطلاب الذين يذهبون إلى الجامعة سيرا على الأقدام. صف الطلاب في كل من المجموعات التالية:

(أ) $A \cap B$.　　(ب) $A \cup B$.

(ج) $A - B$.　　(د) $B - A$.

٨- نفرض أن $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $B = \{0,3,6\}$. أوجد

(أ) $A \cup B$　　(ب) $A \cap B$.

(ج) $A - B$.　　(د) $B - A$.

٩- نفرض أن A، B و C ثلاث مجموعات. بين أن

(أ) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$.

(ب) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$.

(ج) $(A - B) - C \subseteq A - C$.

(د) $(A - C) \cap (C - B) = \phi$.

(هـ) $(B-A)\cup(C-A)=(B\cup C)-A$.

١٠- ماذا يمكن أن تقول عن المجموعتين A و B إذا علمت أن

(أ) $A\cup B=A$ ؟ (ب) $A\cap B=A$ ؟

(ج) $A-B=A$ ؟ (د) $A\cap B=B\cap A$ ؟

(هـ) $A-B=B-A$ ؟

١١- باعتبار أن المجموعة الشاملة هي $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، عبر عن المجموعات التالية باستخدام سلاسل البتات.

(أ) $\{3,4,5\}$. (ب) $\{1,3,6,10\}$.

(ج) $\{2,3,4,7,8,9\}$.

١٢- باستخدام نفس المجموعة الشاملة في تمرين 11 ، أوجد المجموعة الممثلة بسلسلة البتات في الحالات التالية:

(أ) 11 1100 1111. (ب) 01 0111 1000 .

(ج) 10 0000 0001 .

١٣- ماهي المجموعات الجزئية من مجموعة شاملة منتهية التي تمثلها سلسلة البتات التالية ؟

(أ) سلسلة البتات التي جميعها أصفار.

(ب) سلسلة البتات التي جميعها وحدات.

١٤- نفرض أن A و B مجموعتين. بين أن

(أ) $(A\cap B)\subseteq A$. (ب) $A\subseteq(A\cup B)$.

(ج) $A-B\subseteq A$. (د) $A\cap(B-A)=\phi$.

(هـ) $A\cup(B-A)=A\cup B$.

١٥- بين أنه إذا كان A، B و C ثلاث مجموعات فإن

$$| A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

١٦ـ نفرض أن $A_i = \{1,2,3,\dots,i\}$ ، حيث $i = 1,2,3,\dots$. أوجد

(أ) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. (ب) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

١٧ـ لأي مجموعتين A و B برهن أن

(أ) $(A\times B)\cap(B\times A) = (A\cap B)\times(A\cap B)$.

(ب) $(A\times B)\cup(B\times A) \subseteq (A\cup B)\times(A\cup B)$.

١٨ـ لأي ثلاث مجموعات A ، B و C برهن أن

(أ) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

(ب) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

(ج) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$.

(د) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$.

(هـ) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$.

١٩ـ برهن أن $A\times B\subseteq C\times D$ إذا وفقط إذا كان $A\subseteq C$ و $B\subseteq D$.

٢٠ـ نفرض أن A و B هي المجموعات المتعددة $\{3\cdot a, 2\cdot b, 1\cdot c\}$ و $\{2\cdot a, 3\cdot b, 4\cdot d\}$. أوجد

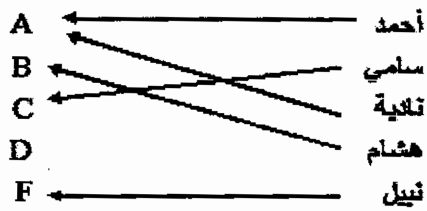
(أ) $A\cup B$. (ب) $A\cap B$.

(ج) $A-B$. (د) $B-A$.

(هـ) $A+B$.

٢-٢ الرواسم Functions I

في كثير من الحالات نعين لكل عنصر في مجموعة عنصر معين في مجموعة أخرى. على سبيل المثال، نفرض أن كل طالب في فصل الرياضيات المتقطعة عين له أحد التقديرات من المجموعة $\{A,B,C,D,F\}$. ونفرض أن التقديرات هي A لأحمد، C لسامي، A لناديه، B لهشام، F لنبيل. هذا التعيين للتقديرات موضحة في شكل ٢-٢-١.



شكل ٢-٢-١

هذا التعيين هو مثال لراسم . مفهوم الراسم (الدالة) له أهمية واسعة في الرياضيات وعلوم الحاسب.

تعريف ٢-٢-١. نفرض A و B مجموعتان. الراسم f من A إلى B هو قاعدة تحدد عنصر وحيد من B لكل عنصر من A. نكتب $f(a)=b$ إذا كان b هو العنصر الوحيد من B الذي يتحدد بالراسم f للعنصر a من A. إذا كان f راسم من A إلى B فإننا نكتب $f: A \to B$.

الراسم يتعين بطرق عديدة. أحيانا برسم مخطط سهمي كما في شكل ٢-٢-١. غالبا تعطي صيغة مثل $f(x)=x+1$ لتعريف الراسم.

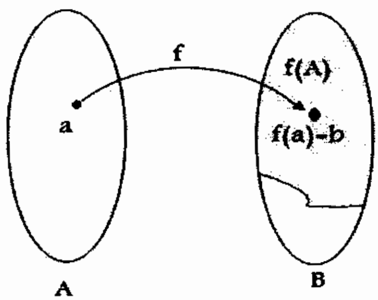
ملاحظة ٢-٢-٢. الراسم $f: A \to B$ يعرف أحيانا على أنه علاقة من A إلى B .

النطاق والمدى

إذا كـان f راسم من A إلـى B ، نقول أن A هـي **نطـاق** (مجـال) f domain و B هــي **النطــاق المــصاحب** codomain لــ f. إذا كــان $f(a)=b$، نقول أن b هي صـورة a image . **مـدى** f range، $f(A)$، هو مجموعة كل صور عناصر A . أي أن

$$\text{range}\, f = \{b \in B : \exists a \in A \wedge f(a)=b\}$$

واضح أن المدى يكون مجموعة جزئية من النطاق المصاحب.

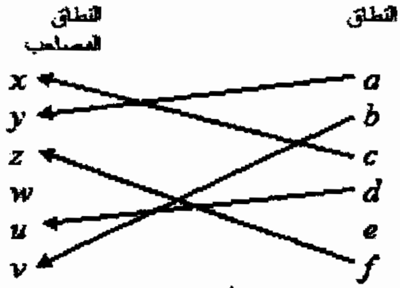


شكل ٢-٢-٢

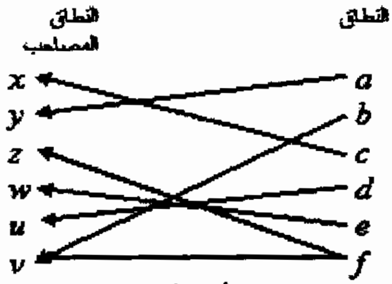
تعريـف ٢-٢-٣. نفـرض $f: A \to B$ و $g: C \to D$ راسـمان . يقـال أن الراســمان متــساويان ونكتــب $f = g$ ، إذا كـــان $A = C$ ، $B = D$ و $f(a) = g(a)$ لكل $a \in A$. أي أن الراسمان يكونـا متساويان إذا كـان لهمـا نفس النطـاق ونفـس النطـاق المـصاحب وتتـساوى صـور العناصـر بالنـسبة لكليهما.

من تعريـف الراسم بأنه قاعدة تعين لكل عنـصر من النطـاق عنـصر وحيـد في النطاق المصاحب نجد أن كل عنصر في النطـاق يجـب أن ينـاظره عنـصر في النطاق المصاحب وهذا العنـصر فـي النطـاق المصاحب يكون وحيد علـى

ذلك فلا يصح أن يوجد عنصر في النطاق لايناظره عنصر في النطاق المصاحب كما لايجوز أن يكون هناك عنصر في النطاق يناظره أكثر من عنصر في النطاق المصاحب. ولكن للراسم قد توجد عناصر في النطاق المصاحب لاتناظرها عناصر في النطاق كما قد يوجد عنصر في النطاق المصاحب يناظره أكثر من عنصر في النطاق. هذه الحالات سوف نناقشها في أنواع الرواسم.



ليس راسم
يوجد عنصر في النطاق e لايناظره عنصر في النطاق المصاحب



ليس راسم
يوجد عنصر في النطاق f يناظره عنصران في النطاق المصاحب

شكل ٢-٢-٣

مثال ٢-٢-٤. نفرض $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ يعين مربع العدد الصحيح لذلك العدد الصحيح. أي أن $f(x)=x^2$، حيث نطاق f هو مجموعة كل الأعداد الصحيحة، والنطاق المصاحب يمكن أن يختار على أنه مجموعة كل الأعداد الصحيحة، مدى f هو مجموعة كل الأعداد غير السالبة التي تكون مربع كامل، أي المجموعة $\{0,1,4,9,16,\ldots\}$.

الرواسم التي مداها أعداد حقيقية والتي لها نفس النطاق يمكن أن تجمع وتضرب.

تعريف ٢-٢-٥. نفرض f_1 و f_2 راسمان من A إلى $\mathbb{R}$. إذا f_1+f_2 و f_1f_2 تكون أيضا رواسم من A إلى $\mathbb{R}$ تعرف كما يلي:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x) \quad \text{و} \quad (f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x).$$

لاحظ أن f_1+f_2 و f_1f_2 تم تعريفهما بتعيين قيمهما عند x بدلالة قيم f_1 و f_2.

مثال ٢-٢-٦. نفرض f_1 و f_2 راسمان من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ بحيث $f_1(x)=x^2$ و $f_2(x)=x-x^3$. ماهي الرواسم f_1+f_2 و f_1f_2 ؟

الحل: $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$

$$=x^2+\left(x-x^2\right)=x$$

و $\left(f_1f_2\right)=x^2\left(x-x^2\right)=x^3-x^4$.

عندما يكون f راسم من المجموعة A إلى المجموعة B، فإن صورة مجموعة جزئية من A أيضا يمكن تعريفها.

تعريف ٢-٢-٧. نفرض $f:A\to B$ راسم ، $S\subseteq A$ و $H\subseteq B$. **صورة** image S هي المجموعة الجزئية من B التي تتكون من صور عناصر S. ونرمز لصورة S بالرمز $f(S)$ ، أي أن

$$f(S)=\{f(s):s\in S\}$$

الصورة العكسية inverse image للمجموعة H، هي المجموعة الجزئية $f^{-1}(H)$ من A التي صورها عناصر في H، أي أن

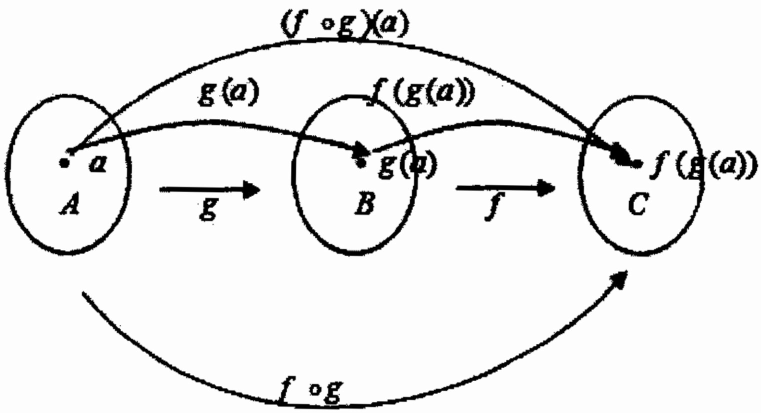
$$f^{-1}(H)=\{a\in A:f(a)\in H\}$$

مثال ٢-٢-٨. نفرض $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ ونعرف $f:A\to B$ بالصورة $f(a)=2$ ، $f(b)=1$ ، $f(c)=4$، $f(d)=1$، $f(e)=1$. صورة المجموعة الجزئية $S=\{b,c,d\}$ هي المجموعة

$f(S)=\{1,4\}$. الصورة العكسية للمجموعة الجزئية $\{2,3\}$ هي $f^{-1}\{2,3\}=\{a\}$.

تحصيل الرواسم

تعريف ٢-٢-٩. نفرض $g:A\to B$ و $f:B\to C$ راسمين. تحصيل (تركيب composition) الراسمين f و g ويرمز له بالصورة $f\circ g$ هو الراسم $f\circ g:A\to C$ المعرف بالصورة $(f\circ g)(a)=f(g(a))$.



شكل ٢-٢-٤

لاحظ أن الراسم المركب $f\circ g$ لا يمكن تعريفة إلا إذا كان مدي g مجموعة جزئية من نطاق f.

مثال ٢-٢-١٠. نفرض $g:\{a,b,c\}\to\{a,b,c\}$ و $f:\{a,b,c\}\to\{1,2,3\}$ راسمين بحيث $g(a)=b$ ، $g(b)=c$ ، $g(c)=a$ ، $f(a)=3$ ، $f(b)=2$ و $f(c)=1$. الراسم المركب $f\circ g$ يعرف كما يلي:

$$(f\circ g)(a)=f\big(g(a)\big)=f(b)=2,$$

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1,$$

$$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$$

لاحظ أن $g \circ f$ غير معرف حيث أن مدى f ليس مجموعة جزئية من نطاق g.

مثال ٢-٢-١١.نفرض $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ و $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ راسمان معرفان كمايلي: $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = 3x + 2$. إذن

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2)$$

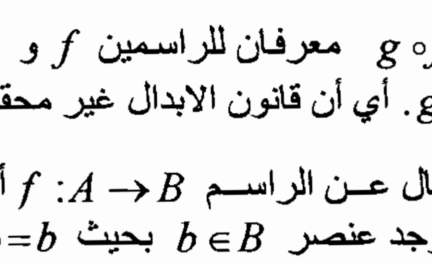
$$= 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3)$$

$$= 2(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

لاحظ أن $f \circ g$ و $g \circ f$ معرفان للراسمين f و g في مثال٢-٢-١١ ومع ذلك $g \circ f \neq f \circ g$. أي أن قانون الابدال غير محقق لتحصيل الرواسم.

تعريف ٢-٢-١٢. يقال عن الراسم $f : A \to B$ أنه **الراسم الثابت** constant map إذا وجد عنصر $b \in B$ بحيث $f(\mathrm{a}) = b$ لكل $a \in A$.



شكل ٢-٢-٥

تعريف ٢-٢-١٣. نفرض $f:A\to B$ راسم و $C\subset A$. الراسم $g:C\to B$ يسمى **تقييد** restriction لـ f على C إذا كان $g(a)=f(a)$ لكل $a\in C$. في هذه الحالة f يسمى **توسيع** extension لـ g. نرمز لتقييد f على C بالرمز f_C أو $f|C$.

تعريف ٢-٢-١٤. نفرض $f:A\to B$ راسم. إذا كان $A\subseteq B$ و $f(a)=a$ لكل $a\in A$ فإن f يسمى **راسم احتواء** inclusion. الراسم $f:A\to A$ بحيث $f(a)=a$ لكل $a\in A$ يسمى **راسم الوحدة** identity map أو راسم التطابق.

خواص الرواسم

بعض الرواسم يكون لها صور مختلفة للعناصر المختلفة في النطاق. هذا النوع من الرواسم يسمى أحادي.

تعريف ٢-٢-١٥. الراسم $f:A\to B$ يسمى **أحادي** (1-1) injective (one-to-one)، إذا كان $f(x)=f(y)$ يؤدي إلى $x=y$ لكل x و y في النطاق A. أو بتعبير مكافئ إذا كان $x\neq y$ يؤدي إلى $f(x)\neq f(y)$.

مثال ٢-٢-١٦. حدد ما إذا كان الراسم f من $\{a,b,c,d\}$ إلى $\{1,2,3,4,5\}$، حيث $f(a)=4$، $f(b)=5$، $f(c)=1$ و $f(d)=3$، أحادي.

الحل: هذا الراسم أحادي حيث أنه يأخذ قيم مختلفة لكل عناصر النطاق الأربعة.

مثال ٢-٢-١٧. حدد ما إذا كان الراسم $f(x)=x^2$، من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة ،أحادي.

الحـل: الراسـم $f(x)=x^2$ لـيس أحـادي لأن $f(1)=f(-1)$ ولكـن $1\neq -1$. لاحظ أن هذا الراسم يكون أحادي إذا تم تقييد النطاق على الأعداد الصحيحة الموجبة.

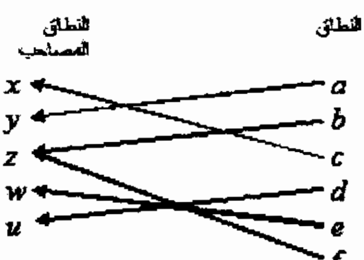
تعريف ٢-٢-١٨. الراسم $f:A\to B$ يقال أنه راسم **فوقي** onto or surjective إذا كان لكل عنصر $b\in B$ يوجد عنصر $a\in A$ بحيث $f(a)=b$. أي أن الراسم يكون فوقي إذا كان المدى للراسم يساوي النطاق المصاحب له.

مثال ٢-٢-١٩. نفرض f راسم من $\{a,b,c,d\}$ إلى $\{1,2,3\}$ معرف بالصورة $f(a)=3$ ، $f(b)=2$ ، $f(c)=1$ و $f(d)=3$. هل f راسم فوقي ؟

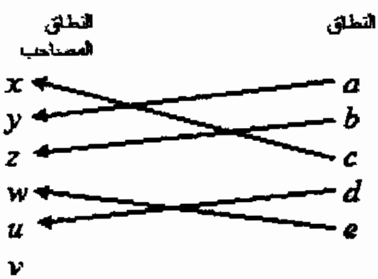
الحل: حيث أن كل عناصر النطاق المصاحب الثلاثة هي صور لعناصر من النطاق، إذن f يكون راسم فوقي.

تعريف ٢-٢-٢٠. الراسم $f:A\to B$ يقال أنه **تناظر أحادي** (one-to-one correspondence) bijective إذا كان أحادي وفوقي.

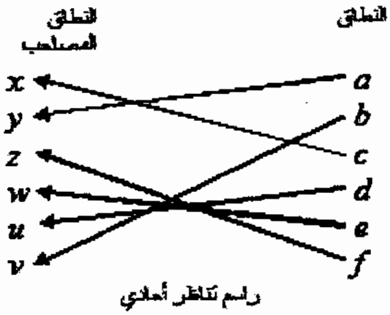
مثال ٢-٢-٢١. الراسم f من $\{a,b,c,d\}$ إلى $\{1,2,3,4\}$ المعرف بالصورة $f(a)=4$ ، $f(b)=2$ ، $f(c)=1$ و $f(d)=3$ يكون تناظر أحادي.



راسم ليس أحادي
يوجد عنصران مختلفان b و f لهما نفس الصورة z



راسم ليس فوقي
يوجد عنصر في النطاق المصاحب v لايناظره عنصر في النطاق



شكل ٢-٢-٦

تمهيدية ٢-٢-٢٢. نفرض $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ راسمان، إذن

(١) إذا كان f و g فوقيان فإن $g\circ f:X\to Z$ يكون فوقي.

(٢) إذا كان f و g أحاديان فإن $g\circ f:X\to Z$ يكون أحادي.

البرهان: سوف نبرهن الجزء الثاني ونترك الجزء الأول كتمرين للقارئ.

نفرض $x_1,x_2\in X$ بحيث $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$. إذن $g(f(x_1))=g(f(x_2))$. وحيث أن g أحادي، ينتج أن $f(x_1)=f(x_2)$. ولكن f أيضا أحادي، لذلك $x_1=x_2$. وهذا يعني أن $g\circ f$ يكون أحادي.

من تمهيدية ٢-٢-٢٢ نستنتج أنه إذا كان $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ راسمان كلاهما تناظر أحادي فإن $g\circ f:X\to Z$ يكون أيضا تناظر أحادي.

معكوس الراسم

نفرض $f:X\to Y$ راسم تناظر أحادي. إذا كانت $y\in Y$ فإنه يوجد $x\in X$ بحيث $f(x)=y$ (حيث أن الراسم فوقي) وحيث أن الراسم أحادي فإن هذا العنصر x يكون وحيد. نعرف الراسم $f^{-1}:Y\to X$ بالصورة $f^{-1}(y)=x$. الراسم f^{-1} يسمى معكوس f. الآن نحسب $f\circ f^{-1}$ والذي يرسم Y فوقي إلى X.

$$(f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y$$

لذلك $f\circ f^{-1}$ يكون هو راسم الوحدة على Y. كذلك $f^{-1}\circ f$ يكون هو راسم الوحدة من X فوق نفسها. من جهة أخرى إذا كان $f:X\to Y$ راسم بحيث يوجد راسم $g:Y\to X$ بحيث $g\circ f$ و $f\circ g$ تكون هي رواسم الوحدة على X و Y على الترتيب، سوف نوضح أن g يكون تناظر أحادي بين Y و X. لاحظ أن g فوقي، حيث إذا كان $x\in X$ فإن $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$ ، لأن $g\circ f$ راسم وحدة. لذلك x يكون هو صورة $f(x)$ تحت تأثير g. لذلك g يكون فوقي. بالمثل إذا كان $g(y_1)=g(y_2)$ ، باستخدام خاصية أن $f\circ g$ راسم وحدة نجد أن $y_1=(f\circ g)(y_1)=f(g(y_1))=f(g(y_2))=(f\circ g)(y_2)=y_2$. لذلك g يكون تناظر أحادي.

المناقشة السابقة هي برهان للنظرية التالية

نظرية ٢-٢-٢٣. الراسم $f:X\to Y$ يكون تناظر أحادي إذا وفقط إذا كان يوجد راسم $g:Y\to X$ بحيث أن $g\circ f$ و $f\circ g$ تكون هي رواسم الوحدة على X و Y على الترتيب. الراسم g يكون هو معكوس الراسم f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}\circ f"'] & Y \arrow[r, "f^{-1}"] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f\circ f^{-1}"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

شكل ٢-٢-٧

الراسم التناظر أحادي يسمى **منعكس** (قابل للانعكاس) invertible، حيث أنه يمكننا تعريف معكوس لهذا الراسم. الراسم يسمى **غير منعكس** (غير قابل للانعكاس) not invertible إذا لم يكن له معكوس، أي إذا لم يكن تناظر أحادي.

مثال ٢-٢-٢٤. نفرض f راسم من $\{a,b,c\}$ إلى $\{1,2,3\}$ بحيث $f(a)=2$ ، $f(b)=3$ و $f(c)=1$. هل f منعكس، إذا كان كذلك، ماهو المعكوس ؟

الحل: الراسم f منعكس حيث أن تناظر أحادي. الراسم العكسي f^{-1} يعكس التناظرات المعينة بـ f ، لذلك $f^{-1}(1)=c$ ، $f^{-1}(2)=a$ و $f^{-1}(3)=b$.

مثال ٢-٢-٢٥. نفرض الراسم $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ معرف بالصورة $f(x)=x+1$. هل f منعكس، وإذا كان كذلك أوجد المعكوس ؟

الحل: لبيان أن الراسم أحادي، نفرض أن $f(x_1)=f(x_2)$. إذن $x_1+1=x_2+1$ ومنها $x_1=x_2$ وهذا يعني أن f أحادي. لبيان أن الراسم فوقي نفرض y عنصر في النطاق المصاحب. إذا كان $f(x)=y$ فإن $y=x+1$ وبالتالي $x=y-1$. واضح أنه إذا كان y عنصر في النطاق المصاحب (عدد صحيح) فإن x ينتمي إلى النطاق (عدد صحيح). إذن f راسم فوقي وبالتالي يكون تناظر أحادي. إذن $y-1$ يكون هو العنصر الوحيد في $\mathbb{Z}$ الذي صورته تحت تأثير f هي y. لذلك f يكون منعكس ومعكوسه هو $f^{-1}(y)=y-1$.

مثال ٢-٢-٢٦. نفرض الراسم $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ معرف بالصورة $f(x)=x^2$. واضح أن f ليس منعكس حيث أنه ليس أحادي كما سبق بيانه في مثال ٢-٢-١٨.

برهان النظرية التالية يكون باستخدام تعريف تحصيل الرواسم وتعريف المعكوس ويترك كتمرين للقارئ.

نظرية ٢-٢-٢٧. إذا كان $f : X \to Y$، $g : Y \to Z$ راسمان منعكسان فإن $g \circ f : X \to Z$ يكون منعكس ويكون $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

مع أن عملية تحصيل الرواسم لا تحقق قانون الابدال، إلا أنها تحقق قانون الدمج (المشاركة).

نظرية ٢-٢-٢٨. نفرض $f : X \to Y$، $g : Y \to Z$ و $h : Z \to W$ رواسم. إذن $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

البرهان: لاحظ أولا أن $h \circ g$ معرف ويأخذ Y إلى W، لذلك $(h \circ g) \circ f$ يكون أيضا معرف ويأخذ X إلى W. بالمثل $g \circ f$ معرف ويأخذ X إلى Z. لذلك $h \circ (g \circ f)$ يكون معرف ويأخذ X إلى W.

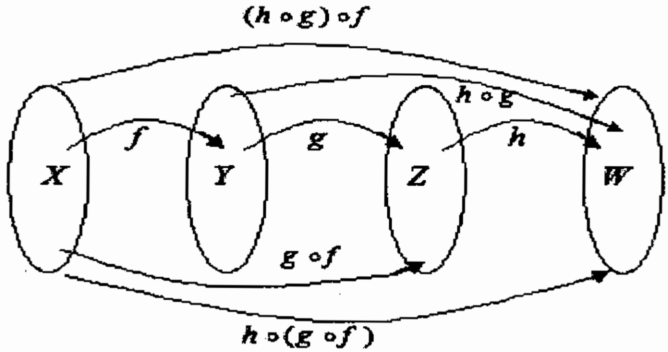
لإثبات التساوي يجب أن نبين أن $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ لكل $x \in X$. من تعريف تحصيل الراسمين

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

كذلك

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$$

إذن $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ لكل $x \in X$.



شكل ٢-٢-٨

نظريـــــة ٢-٢-٢٩. نفـــرض $f:X \to Y$ راســـم و $A,B \subseteq X$ و $G,H \subseteq Y$. إذن

(أ) $A=B \Leftarrow f(A)=f(B)$.

(ب) $G=H \Leftarrow f^{-1}(G)=f^{-1}(H)$.

(ج) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(د) $f(f^{-1}(G)) \subseteq G$.

(هـ) $f(G)-f(H) \subseteq f(G-H)$.

(و) $f^{-1}(G-H)=f^{-1}(G)-f^{-1}(H)$.

البرهان: (أ) نفرض $A=B$، إذن

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A: f(x)=y \Leftrightarrow$$

$$\exists x \in B: f(x)=y \Leftrightarrow y \in f(B)$$

وعليه يكون $f(A)=f(B)$.

(ب) نفرض أن $G=H$، إذن

$$x \in f^{-1}(G) \Leftrightarrow f(x) \in G \Leftrightarrow f(x) \in H \Leftrightarrow x \in f^{-1}(H)$$

لذلك $f^{-1}(G)=f^{-1}(H)$.

(ج) حيث أن $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$،

لذلك $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

(د) حيث أن

$$y \in f(f^{-1}(G)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(G): y=f(x) \Rightarrow$$

$$f(x) \in G: y=f(x) \Rightarrow y \in G$$

لذلك $f(f^{-1}(G)) \subseteq G$.

(هـ) حيث أن

$$y \in f(G)-f(H) \Rightarrow y \in f(G) \wedge y \notin f(H) \Rightarrow$$
$$\exists x \in G : y = f(x) \wedge f(x) \notin f(H) \Rightarrow$$
$$\exists x \in G : x \notin f^{-1}(f(H)) \subseteq H \Rightarrow x \in H - G \Rightarrow$$
$$y = f(x) \in f(G-H)$$

لذلك $f(G)-f(H) \subseteq f(G-H)$.

(و) حيث أن

$$x \in f^{-1}(G-H) \Leftrightarrow f(x) \in G-H \Leftrightarrow$$
$$f(x) \in G \wedge f(x) \notin H \Leftrightarrow x \in f^{-1}(G) \wedge x \notin f^{-1}(H) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(G)-f^{-1}(H))$$

إذن $f^{-1}(G-H)=f^{-1}(G)-f^{-1}(H)$.

نظرية ٢-٢-٣٠. نفرض $f : X \to Y$ راسم و $\{A_i\}_{i \in I}$ عائلة مرقمة من المجموعات الجزئية من X و $\{B_i\}_{i \in I}$ عائلة مرقمة من المجموعات الجزئية من Y. إذن

(أ) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

(ب) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

(ج) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

(د) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

البرهان: (أ) حيث أن

$$y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i : y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\exists i \in I : x \in A_i \wedge y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\exists j \in I : y \in f(A_j) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

إذن $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

(ب) حيث أن

$$y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i) \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{i \in I} A_i : y = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A_i \forall i \in I : y = f(x)$$

$$\Rightarrow (f(x) \in f(A_i) \forall i \in I) \wedge y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A_i) \forall i \in I \Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

إذن $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$.

(ج) حيث أن

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow \exists j \in I : f(x) \in B_j$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in I : x \in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

إذن $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

(د) حيث أن

$$x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \Leftrightarrow f(x) \in B_i, \forall i \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_i) \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

لذلك $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

تمارين ٢-٢

١- لماذا لا تكون f من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ راسم في الحالات التالية:

(أ) $f(x)=\frac{1}{x}$ ؟ (ب) $f(x)=\sqrt{x}$ ؟

(ج) $f(x)=\pm\sqrt{x^2+1}$ ؟

٢- حدد ما إذا كانت f من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{R}$ راسم، حيث

(أ) $f(n)=\pm n$. (ب) $f(n)=\sqrt{n^2+1}$.

(ج) $f(n)=\frac{1}{(n^2-4)}$.

٣- أوجد نطاق ومدى كل من الرواسم التالية:

(أ) الراسم الذي يعين لكل عدد صحيح غيرسالب رقمه الأخير.

(ب) الراسم الذي يعين لكل عدد صحيح موجب العدد الأكبر من مباشرة.

(ج) الراسم الذي يعين لكل سلسلة بتات عدد البتات التي قيمتها 1 في السلسلة.

(د) الراسم الذي يعين لكل سلسلة بتات عدد البتات في هذه السلسلة.

(هـ) الراسم الذي يعين لكل ثنائي من الأعداد الصحيحة الموجبة أكبر هذين العددين.

٤- حدد ما إذا كان الراسم من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ في الحالات التالية أحادي:

(أ) $f(n)=n-1$. (ب) $f(n)=n^2+1$.

(ج) $f(n)=n^3$. (د) $f(n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

٥- حدد ما إذا كان الراسم $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ فوقي، إذا كان

(أ) $f(m,n)=m+n$. (ب) $f(m\ n)=m^2+n^2$.

(ج) $f(m,n)=|n|$.　　　(د) $f(m,n)=m$.

(هـ) $f(m,n)=m-n$.

٦- حدد ما إذا كان الراسم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تناظر أحادي، حيث

(أ) $f(x)=2x+1$.　　　(ب) $f(x)=x^2+1$

(ج) $f(x)=x^3$.　　　(د) $f(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)}{x^2+2}$.

٧- أوجد $f\circ g$ و $g\circ f$ حيث $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=x+2$ راسمين من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$.

٨- نفرض $f(x)=ax+b$ و $g(x)=cx+d$، حيث a ، b، c و d ثوابت. حدد لأي الثوابت a ، b، c و d يكون $f\circ g=g\circ f$ محقق.

٩- بين أن الراسم $f(x)=ax+b$ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يكون منعكس، حيث a و b ثوابت و $a\neq 0$ ، وأوجد معكوس f.

١٠- نفرض $f:A\to B$ راسم و $S,T\subseteq A$ ، بين أن

(أ) $f(S\cup T)=f(S)\cup f(T)$.

(ب) $f(S\cap T)\subseteq f(S)\cap f(T)$.

١١- نفرض $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ راسم معرف بالصورة $f(x)=x^2$. أوجد

(أ) $f^{-1}(\{1\})$.　　　(ب) $f^{-1}(\{x:0<x<1\})$.

(ج) $f^{-1}(\{x:x>4\})$.

١٢- نفرض $f:A\to B$ راسم، حيث A و B مجموعتين منتهيتين بحيث $|A|=|B|$. بين أن f يكون أحادي إذا وفقط إذا كان فوقي.

١٣- حدد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خطأ

(أ) إذا كان $f:A\to B$ تناظر أحادي و A و B مجموعات منتهية فإن $A=B$.

(ب) إذا كان $f : A \to B$ أحادي فإنه يكون منعكس.

(ج) إذا كان $f : A \to B$ منعكس فإنه يكون أحادي.

(د) إذا كان $f : A \to B$ أحادي و $g, h : B \to C$ بحيث $g \circ f = h \circ f$ فإن $g = h$.

(هـ) إذا كان $f : A \to B$ راسم و $A_1, A_2 \subseteq A$ فإن $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

(و) إذا كان $f : A \to B$ راسم و $B_1, B_2 \subseteq B$ فإن $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

١٤- هل يمكن للراسم الثابت أن يكون أحادي؟ فوقي؟

١٥- نفرض الرواسم $f : A \to B$ ، $g : B \to A$ ، $h : C \to B$ ، $F : B \to C$ و $G : A \to C$. بين مإذا كان التحصيل التالي معرف أم لا. إذا كان معرف حدد النطاق والنطاق المصاحب للراسم الناتج.

(أ) $g \circ f$. (ب) $h \circ f$. (ج) $F \circ f$.

(د) $G \circ f$. (هـ) $g \circ h$. (و) $F \circ h$.

(ز) $h \circ G \circ g$. (ح) $h \circ G$.

١٦- نفرض S مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U. الدالة الذاتية (المميزة) characteristic function $f_S : U \to \{0,1\}$ تعرف بالصورة
$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}.$$

نفرض A و B مجموعتان، بين أن

(أ) $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

(ب) $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$.

(ج) $f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

١٧- إذا كان $f : A \to B$ راسم أحادي وكـان C و D مجموعتين جزئيتين من A فبرهن أن

(أ) $f(C) = f(D) \Leftarrow C = D$.

(ب) $C = f^{-1}(f(C))$.

(ج) $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.

(د) $f(C - D) = f(C) - f(D)$.

١٨- أثبت أنـه إذا كـان (ج) أو(د) فـي تمـرين (١٨) محقـق لأي مجمـوعتين جزئيتين C و D من A فإن الراسم f يكون أحادي.

٢-٣ الرواسم II

في الفصل السابق قدمنا تعريف الراسم وبعض أنواع الرواسم وخواصها وكيفية تحصيل الرواسم ومفهوم معكوس الراسم. في هذا الفصل نستكمل دراسة الرواسم وذلك بعرض كيفية تمثيل الرواسم وتقديم بعض الرواسم الهامة. أيضا نقدم في هذا الفصل مفهوم قابلية العد ودور الرواسم فيها. في نهاية الفصل نقدم نوعا مهما من الرواسم وهو مايسمى بالعملية الثنائية.

التمثيل البياني للرواسم

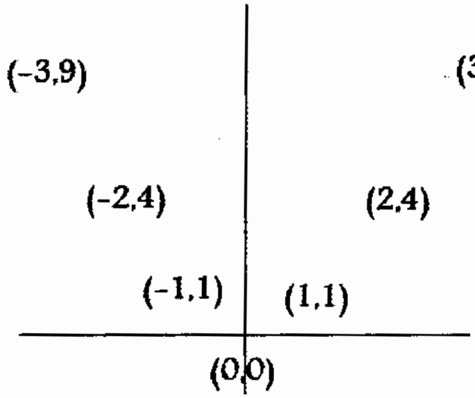
يمكننا تعيين مجموعة من الثنائيات المرتبة في $A \times B$ لكل راسم من A إلى B . هذه المجموعة من الثنائيات تسمى الرسم graph للراسم وغالبا نستخدم الرسم للمساعدة في فهم سلوك الراسم.

تعريف٢-٣-١. نفرض $f: A \to B$ راسم. الرسم graph لـ f هو مجموعة الثنائيات المرتبة $\{(a,b): a \in A \wedge f(a)=b\}$.

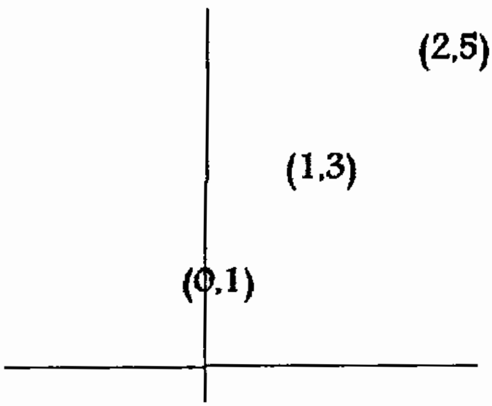
من التعريف، رسم الراسم $f: A \to B$ هو مجموعة جزئية من $A \times B$ تحتوي الثنائيات المرتبة حيث المركبة الثانية هي العنصر من B الذي يكون صورة للمركبة الأولى تحت تأثير f.

مثال ٢-٣-٢. رسم الراسم $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $f(x)=2x+1$ هو المعطى في شكل ٢-٣-١، بينما رسم الراسم $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $g(x)=x^2$ هو المعطى في شكل٢-٣-٢.

رسم f هو مجموعة الثنائيات المرتبة $(x, 2x+1)$ حيث x عدد صحيح. رسم g هو مجموعة الثنائيات المرتبة (x, x^2) حيث x عدد صحيح.



شكل ٢-٣-١
$g(x)=x^2$



$f(x)=2x+1$
شكل ٢-٣-٢

بعض الرواسم الهامة

فيما يلي نقدم راسمين مهمين في الرياضيات المتقطعة، يسميان دالة الحد الأدنى (دالة الأرضية) ودالة الحد الأعلى (دالة السقف). نفرض x عدد حقيقي. دالة الأرضية تقرب x إلى أقرب عدد صحيح لـ x أقل من أو يساوي x ، ودالة السقف تقرب x إلى أقرب عدد صحيح لـ x أكبر من أو يساوي x. هذه الرواسم غالبا تستخدم عند عد الأشياء.

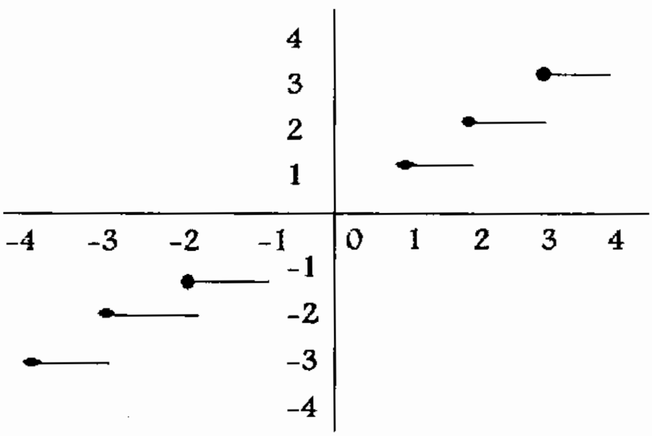
تعريف٢-٣-٣. دالة الأرضية (الحد الأدنى) floor function هو راسم يعين لكل عدد حقيقي x أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x. قيمة دالة الأرضية عند x يرمز لها بالرمز $\lfloor x \rfloor$. **دالة السقف** (الحد الأعلى) ceiling function هو راسم يعين لكل عدد حقيقي x أصغر عدد صحيح أكبر من أو يساوي x. قيمة دالة السقف عند x يرمز لها بالرمز $\lceil x \rceil$.

مثال٢-٣-٤. هذه بعض القيم لدالة الارضية ودالة السقف

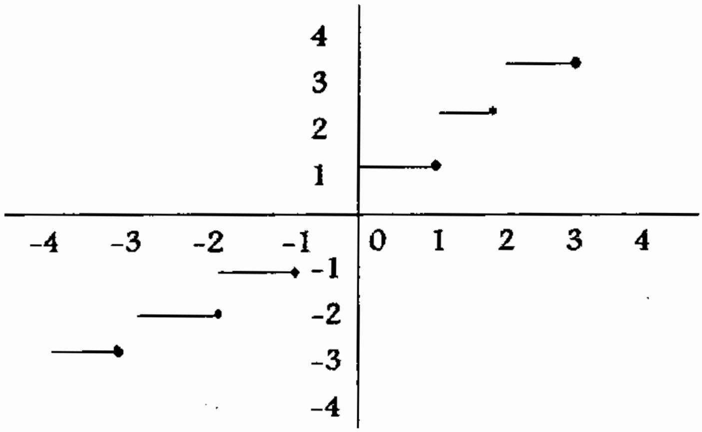
$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0, \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1, \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1, \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$$

$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lceil 3.1 \rceil = 4, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lceil 7 \rceil = 7$$

الآن نعرض رسم دالة الارضية ودالة السقف. في شكل ٢-٣-٣ نعرض رسم دالة الارضية $\lfloor x \rfloor$. لاحظ أن هذه الدالة تأخذ نفس القيمة n على الفترة $[n, n+1)$ ثم تقفز إلى $n+1$ عند $x = n+1$. في شكل ٢-٣-٤ نعرض رسم دالة السقف $\lceil x \rceil$. هذه الدالة تأخذ نفس القيمة $n+1$ على الفترة $(n, n+1]$ ثم تقفز إلى $n+2$ عندما تكون x أكبر قليلا من $n+1$.



شكل ٢-٣-٣ (دالة الأرضية)



شكل ٢-٣-٤ (دالة السقف)

جدول ٢-٣-١، حيث x عدد حقيقي و n عدد صحيح، يعرض بعض الخواص البسيطة الهامة لدالتي الارضية والسقف.

(١-أ)	$\lfloor x \rfloor = n$ إذا وفقط إذا كان $n \le x < n+1$.
(١-ب)	$\lceil x \rceil = n$ إذا وفقط إذا كان $n-1 < x \le n$.
(١-ج)	$\lfloor x \rfloor = n$ إذا وفقط إذا كان $x-1 < n \le x$.
(١-د)	$\lceil x \rceil = n$ إذا وفقط إذا كان $x \le n < x+1$.
(٢)	$x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$.
(٣-أ)	$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
(٣-ب)	$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.
(٤-أ)	$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
(٤-ب)	$\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

جدول ٢-٣-١

كل خاصية من الخواص الواردة في الجدول يمكن اثباتها باستخدام تعريف دالتي الارضية والسقف. الخواص (١-أ)، (١-ب)، (١-ج) و (١-د) تنتج مباشرة من التعريف. فعلى سبيل المثال (١-أ) تنص على أن

$n = \lfloor x \rfloor$ إذا وفقط إذا كان العدد الصحيح n أقل من أو يساوي x و $n+1$ أكبر من x. وهذا تماما مايعني أن n هي أكبر عدد صحيح لايزيد عن x والذي هو التعريف $n = \lfloor x \rfloor$. الخواص (١-ب)، (١-ج) و (١-د) يمكن توضيحها بنفس الكيفية. الآن نبرهن (٤-أ)

برهان (٤-أ): نفرض أن $m = \lfloor x \rfloor$، حيث m عدد صحيح موجب. من (١-أ) ينتج أن $m \le x < m+1$. بإضافة n إلى طرفي المتباينة نجد أن $m+n \le x+n \le m+n+1$. باستخدام (١-أ) مرة أخرى نجد أن $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$. وهذا يكمل البرهان.

مثال٢-٣-٥. برهن على صحة أو عدم صحة العلاقة $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ لكل الأعداد الحقيقية x و y.

الحل: رغم أن هذه العبارة يبدوا أنها معقولة، إلا أنها كاذبة. نأخذ مثال عكسي $x = \frac{1}{2}$، $y = \frac{1}{2}$. مع هذه القيم نجد أن

$$\lceil x+y \rceil = \left\lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1$$

ولكن

$$\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1+1 = 2$$

المتتابعات والمجموع Sequences and summation

المتتابعات هي قوائم مرتبة من العناصر. تستخدم المتتابعات في الرياضيات المتقطعة في عديد من الموضوعات. يمكن استخدام المتتابعات لحل مسائل عد معينة. أيضا بناء مهم للبيانات في علوم الحاسب.

عندما يمكن وضع عناصر مجموعة لانهائية في قائمة فإنها تسمى معدودة (قابلة للعد) سوف ننهي هذا الفصل بمناقشة كل من المجموعات

القابلة للعد وغير القابلة للعد. سوف نبرهن أن الأعداد النسبية تكون مجموعة قابلة للعد ولكن الأعداد الحقيقية ليست قابلة للعد.

المتتابعات Sequences

المتتابعة هي بناء متقطع يستخدم لتمثيل قائمة مرتبة، على سبيل المثال $1,2,3,5,8$ هي متتابعة من خمسة حدود و $1,3,9,27,81,\ldots,30,\ldots$ هي متتابعة لانهائية.

تعريف ٢-٣-٦. المتتابعة هي راسم من مجموعة الأعداد الصحيحة ، عادة إما المجموعة $\{0,1,2,3,\ldots\}$ أو المجموعة $\{1,2,3,\ldots\}$، إلى مجموعة S. نستخدم الرمز a_n لنرمز إلى صورة العدد الصحيح n. a_n تسمى حد للمتتابعة. نستخدم الرمز $\{a_n\}$ لوصف المتتابعة. لاحظ أنه قد يحدث خلط مع رمز المجموعة، ولكن سوف يكون معروف ضمن سياق الكلام هل المقصود مجموعة أم متتابعة.

مثال ٢-٣-٧. اعتبر المتتابعة $\{a_n\}$ ، حيث $a_n = \frac{1}{n}$. قائمة حدود هذه المتتابعة ، بداية من a_1، والتي هي $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots.$ تبدأ بالحدود $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$.

تعريف ٢-٣-٨ . المتوالية الهندسية هي متتابعة على الصورة

$$a,ar,ar^2,\ldots,ar^n,\ldots$$

حيث الحد الابتدائي a والنسبة المشتركة (الأساس) r أعداد حقيقية.

مثال ٢-٣-٩. المتتابعات $\{b_n\}$ حيث $b_n=(-1)^n$، $\{c_n\}$ حيث $c_n = 2\cdot 5^n$ و $\{d_n\}$ حيث $d_n = 6\cdot(\frac{1}{3})^n$ كلها متواليات هندسية حدها الابتدائي 1، 2 و 6 والنسبة المشتركة -1 ، 2 و $\frac{1}{3}$ ، على الترتيب.

تعريف ٢-٣-١٠ . المتوالية العددية هي متتابعة على الصورة

$$a,a+d,a+2d,a+3d,\ldots,a+nd,\ldots$$

حيث الحد الابتدائي a والفرق المشترك d أعداد حقيقية.

المتتابعات على الصورة $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ غالبا تستخدم في علوم الحاسب. هذه المتتابعة المنتهية أيضا تسمى **سلسلة** string. هذه السلسلة يرمز لها أيضا بالرمز $a_1a_2a_3..a_n$. **طول السلسلة** length هو عدد الحدود في السلسلة. **السلسلة الخالية** empty string، يرمز لها بالرمز λ هي السلسلة التي ليس بها حدود. طول السلسلة الخالية يساوي صفر.

متتابعات خاصة من الأعداد

المسألة المشتركة في الرياضيات المتقطعة هي إيجاد صيغة أو قاعدة عامة لتكوين حدود متتابعة. أحيانا يكون معروف لدينا عدد قليل من حدود متتابعة ناتجة من حل مسألة، والهدف هو مطابقة المتتابعة. معرفة عدد قليل من الحدود الأولى من متتابعة قد يساعد في إعطاء مقترح حول متطابقة المتتابعة. بعد عمل هذا الاقتراح يمكننا التأكد إذا كان ذلك صحيحا.

عند محاولة استنتاج صيغة أو قاعدة لحدود متتابعة من عدد قليل من الحدود الأولى فيها، نحاول وضع نمط معين لهذه الحدود.

مثال ٢-٣-١١. أوجد صيغة للمتتابعة التي لها الحدود الخمسة الأولى

(أ) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$.

(ب) $1,3,5,7,9$.

(ج) $1,-1,1,-1,1$.

الحل: (أ) واضح أن المقام هو قوة للعدد 2. لذلك المتتابعة تكون $\{a_n\}$، حيث $a_n=\frac{1}{2^n}$، $n=0,1,2,3,...$. وتكون المتتابعة المقترحة هي المتوالية الهندسية حيث $a=1$ و $r=\frac{1}{2}$.

(ب) نلاحظ أن كل حد نحصل عليه بإضافة 2 إلى الحد السابق له. لذلك المتتابعة التي حدها $a_n=2n+1$، $n=0,1,2,3,...$ تكون مناسبة. المتتابعة المقترحة هي المتوالية الحسابية حيث $a=1$ و $d=2$.

(ج) الحدود تتردد بين 1 و -1 . المتتابعة حيث $a_n = (-1)^n$، $n = 0,1,2,3,...$ تكون ممكنة. هذه المتتابعة المقترحة هي المتتابعة الهندسية حيث $a = 1$ و $r = -1$.

مثال ٢-٣-١٢. كيف يمكننا بناء حدود متتابعة إذا كانت الحدود العشرة الأولى منها هي $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4$ ؟

الحل: لاحظ أن العدد 1 يظهر مرة واحدة، العدد 2 يظهر مرتين، العدد 3 يظهر ثلاث مرات والعدد 4 يظهر أربع مرات. إذن قاعدة منطقية لتوليد هذه المتتابعة هو أن العدد n يظهر n مرة. لذلك الحدود الخمسة التالية كلها تكون 5 يليها ستة حدود كلها 6، وهكذا.

مثال ٢-٣-١٣. كيف يمكننا بناء حدود متتابعة إذا كانت الحدود العشرة الأولى منها هي $5,11,17,23,29,35,41,47,53,59$ ؟

الحل: لاحظ أن كل حد من الحدود التسعة بعد الحد الأول في هذه المتتابعة نحصل عليه بإضافة 6 إلى الحد السابق له. لذلك الحد رقم n يمكن تكوينه بالبداية بـ 5 ونضيف $6(n-1)$ إليه. أي أن المقترح المنطقي للحد رقم n هو $5+6(n-1) = 6n-1$.

المجاميع Summations

الآن ندخل مفهوم المجموع. لإيجاد مجموع الحدود $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ من المتتابعة $\{a_n\}$ نستخدم الرمز

$$\sum_{j=m}^{n} a_j \quad \text{أو} \quad \textstyle\sum_{j=m}^{n} a_j \quad \text{أو} \quad \sum_{m \le j \le n} a_j$$

لتمثيل $a_m + a_{m+1} + ... + a_n$.

هنا المتغير j يسمى **دليل المجموع** index of summation. اختيار الحرف j كمتغير هو اختياري، حيث يمكننا استخدام أي حرف آخر. لذلك

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

دليل المجموع يأخذ كل الأعداد الصحيحة التي تبدأ **بالنهاية السفلى** m lower limit وتنتهي **بالنهاية العليا** n upper limit.

مثال ٢-٣-١٤. نفرض أنه لدينا المجموع $\sum_{j=1}^{5} j^2$ ، ولكننا نريد دليل للمجموع يأخذ القيم من 0 إلى 4. لعمل ذلك نفرض $k = j - 1$. إذن المجموع في صورته الجديدة يصبح $\sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$. واضح أن المجموعين لهم نفس القيمة حيث أن

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

و

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4} (k+1)^2 &= (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2\end{aligned}$$

النظرية التالية تعطينا مجموع المتوالية الهندسية.

نظرية ٢-٣-١٥. إذا كان a و r عددان حقيقيان و $r \neq 0$ فإن

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} & \text{if } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{if } r = 1 \end{cases} .$$

البرهان: نفرض $S = \sum_{j=0}^{n} ar^j$. لحساب S، نضرب الطرفين في r لنحصل على

$$\begin{aligned} rS &= r\sum_{j=0}^{n} ar^j = \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} = \sum_{k=1}^{n+1} ar^k \\ &= (\sum_{k=1}^{n} ar^k) + (ar^{n+1} - a) \end{aligned}$$

إذن

$$rS = S + (ar^{n+1} - a)$$

بحل هذه المعادلة في S يتبين أنه إذا كانت $r \neq 1$ فإن

$$S=\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$$

إذا كانت $r=1$ فمن الواضح أن المجموع يساوي $(n+1)a$.

مثال ٢-٣-١٦. المجموع المزدوج (الثنائي) يظهر في كثير من الموضوعات. كمثال للمجموع المزدوج $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$.

لإيجاد قيمة المجموع المزدوج أولا نفك المجموع الداخلي ثم نتبع ذلك بحساب المجموع الخارجي

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij=\sum_{i=1}^{4}(i+2i+3i)=\sum_{i=1}^{4}6i$$
$$=6+12+18+24=60$$

الكاردينالية (الأصل) Cardinality

في فصل ٢-١ عرفنا الكاردينالية لمجموعة منتهية بأنه عدد عناصر المجموعة. أي أن الكاردينالية لمجموعة منتهية يخبرنا متى تكون مجموعتان لهما نفس الحجم أو أيهما أكبر من الأخرى. هل يمكننا توسيع هذا المفهوم إلى المجموعات اللانهائية ؟

تعريف٢-٣-١٧. المجموعتان A و B يكون لهما نفس الكاردينالية Cardinality إذا وفقط إذا كان يوجد راسم تناظر أحادي من A إلى B.

الآن نقسم المجموعات اللانهائية إلى قسمين، القسم الأول المجموعات التي لها نفس الكاردينالية مثل الأعداد الطبيعية، والآخر المجموعات التي لها كاردينالية مختلفة.

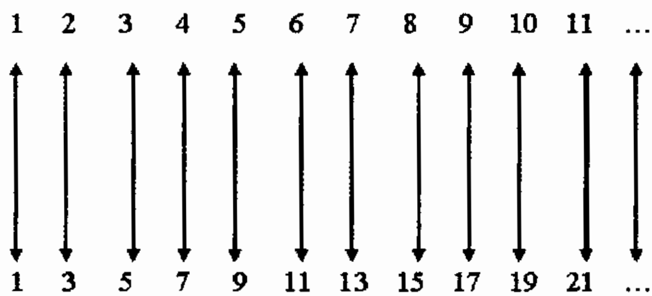
تعريف٢-٣-١٨. المجموعة المنتهية أو المجموعة التي لها الكاردينالية مثل الأعداد الصحيحة الموجبة تسمى مجموعة **معدودة** (قابلة للعد) countable. المجموعة التي هي ليست معدودة تسمى **غير معدودة** (غير قابلة للعد) uncountable. عندما تكون المجموعة اللانهائية S قابلة للعد فإننا نرمز للكاردينالية لها بالرمز $\aleph_0$. نكتب $|S|=\aleph_0$ ونقول أن S لها الكاردينالية "aleph null" .

مثال٢-٣-١٩. بين أن مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة تكون مجموعة قابلة للعد.

الحل: لبيان أن مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة تكون مجموعة قابلة، نعطي راسم تناظر أحادي بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. نعتبر الراسم

$$f(n) = 2n - 1$$

من $\mathbb{Z}^+$ إلى مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة. نبين أن هذا الراسم تناظر أحادي ببيان أنه فوقي وأحادي. لبيان أنه أحادي نفرض أن $f(m) = f(n)$. إذن $2m - 1 = 2n - 1$ ومن ثم $m = n$ ، أي أن f أحادي. لبيان أنه فوقي، نفرض أن t عدد صحيح موجب فردي. إذن t يقل بمقدار 1 عن عدد زوجي $2k$ ، حيث k عدد طبيعي. لذلك $t = 2k - 1 = f(k)$. نعطي هذا التناظر في شكل٢-٣-٥.



شكل ٢-٣-٥

المجموعة اللانهائية S تكون قابلة للعد إذا أمكن وضع عناصر المجموعة في صورة متتابعة. السبب في ذلك هو أن التناظر الأحادي f من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة إلى المجموعة S يمكن التعبير عنه في صورة متتابعة $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ، حيث $a_1 = f(1)$، $a_2 = f(2)$،...، $a_n = f(n)$،... . على سبيل المثال، مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الفردية يمكن وضعها على صورة متتابعة $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$، حيث $a_n = 2n - 1$.

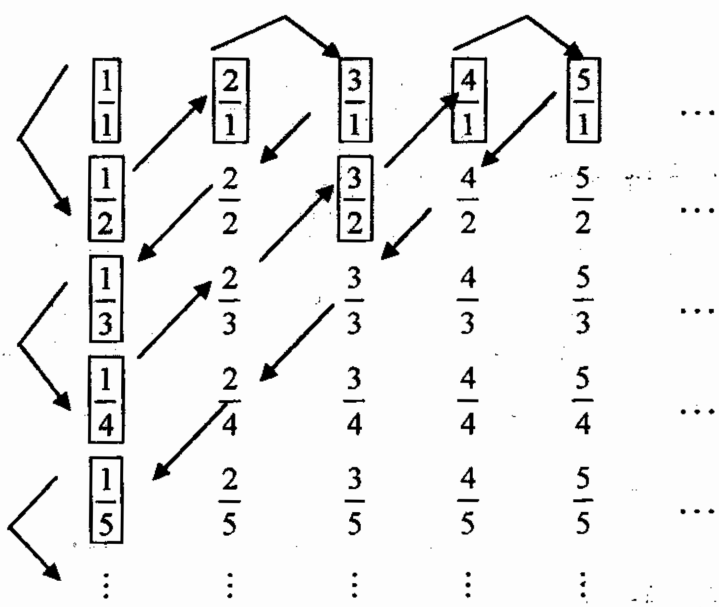
مثال٢-٣-٢٠ . بين أن مجموعة كل الأعداد الصحيحة تكون قابلة للعد.

الحل: نرتب كل الأعداد الصحيحة في متتابعة تبدأ بالصفر ثم نتابع بين الأعداد الموجبة والأعداد السالبة؛ $0,1,-1,2,-2,\ldots$. ومع ذلك يمكننا إيجاد تناظر أحادي بين مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومجموعة كل الأعداد الصحيحة. سوف نترك كتمرين بيان أن الراسم $f(n)=n/2$ عندما يكون n عدد زوجي و $f(n)=-(n-1)/2$ عندما يكون n عدد فردي يكون هو هذا التناظر. نتيجة لذلك مجموعة كل الأعداد الصحيحة تكون قابلة للعد.

ليس من العجيب أن تكون مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية ومجموعة الأعداد الصحيحة كلاهما قابلة للعد. الآن سوف نبرهن أن مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية) أيضا قابلة للعد.

مثال ٢-٣-٢١ . بين أن مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تكون قابلة للعد.

الحل: قد يبدو من المدهش أن مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تكون قابلة للعد، ولكننا سوف نبين كيف يمكن ترتيب الأعداد الكسرية الموجبة



شكل ٢-٣-٦

في متتابعة مثل $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. في البداية لاحظ أن كل عدد كسري موجب يكون على صورة القسمة p/q لعددين صحيحين حيث $q \neq 0$. يمكننا ترتيب الأعداد الكسرية الموجبة بترتيب تلك الأعداد التي مقامها $q = 1$ في الصف الأول، والتي مقامها $q = 2$ في الصف الثاني، وهكذا كما هو موضح في شكل ٢-٣-٦.

الفكرة في ترتيب الأعداد الكسرية في متتابعة هو أولا ترتيب الأعداد الكسرية الموجبة p/q والتي لها $p+q=2$، بعدها تلك الأعداد التي لها $p+q=3$، تليها الأعداد التي لها $p+q=4$، وهكذا متبعين المسار في شكل ٢-٢-٦ عندما نمر على عدد p/q قد سبق ترتيبه بالفعل لا نكرره مرة أخرى. على سبيل المثال، عندما نمر على العدد $2/2=1$ لا نكتبه لأنه سبقت كتابته عندما مررنا على $1/1=1$. الحدود الأول في قائمة الأعداد الكسرية الموجبة التي تم تكوينها هي 1، $1/2$، 2، 3، $1/3$، $1/4$، $2/3$، $3/2$، 4، 5، وهكذا. هذه الأعداد هي التي تظهر داخل مستطيلات؛ الأعداد الأخرى التي ليست داخل مستطيلات تركت لأنه تم اعتبارها بالفعل. وحيث أنه أمكن وضع الأعداد الكسرية الموجبة في متتابعة، كما يمكن للقارئ التأكد من ذلك، فإن مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة تكون قابلة للعد.

الآن رأينا أن مجموعة الأعداد الكسرية الموجبة قابلة للعد، هل هناك مقترح لمجموعة غير قابلة للعد ؟ الآن سوف نعطي طريقة مهمة لإثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

مثال٢-٣-٢٢. بين أن مجموعة الأعداد الحقيقية تكون مجموعة غير قابلة للعد.

الحل: لبيان أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد، نفرض أنها قابلة للعد ونصل إلى تناقض. إذن المجموعة الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقع بين 0 و 1 تكون أيضا قابلة للعد، حيث أن أي مجموعة جزئية من مجموعة قابلة للعد تكون قابلة للعد. بهذا الفرض،

الأعداد الحقيقية بين 0 و 1 يمكن ترتيبها في متتابعة بترتيب ما، ليكن $r_1 , r_2 , r_3 , \ldots$. نفرض أن التمثيلات العشرية لهذه الأعداد الحقيقية هي

$$r_1 = 0.d_{11}d_{12}\,d_{13}\,d_{14}\ldots$$

$$r_2 = 0.d_{21}d_{22}\,d_{23}\,d_{24}\ldots$$

$$r_3 = 0.d_{31}d_{32}\,d_{33}\,d_{34}\ldots$$

$$r_4 = 0.d_{41}d_{42}\,d_{43}\,d_{44}\ldots$$

$$\vdots$$

حيث $d_{ij} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. (على سبيل المثال إذا كان $r_1 = 0.23794102..$ فإن $d_{11} = 2$ ،$d_{12} = 3$ ،$d_{13} = 7$، وهكذا).

نكون عدد حقيقي جديد بتمثيل عشري $r = 0.d_1d_2\,d_3\,d_4\ldots$، حيث

$$d_i = \begin{cases} 4 & if \quad d_{ii} \neq 4 \\ 5 & if \quad d_{ii} = 4 \end{cases}$$

(كمثال، نفرض $r_1 = 0.23794102\ldots$ ،$r_2 = 0.44590138\ldots$، $r_3 = 0.09118764\ldots$ ،$r_4 = 0.80553900\ldots$، وهكذا. إذن يكون $r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots = 0.4544\ldots$، حيث $d_1 = 4$ لأن $d_{11} \neq 4$ و $d_2 = 5$ لأن $d_{22} = 4$ و $d_3 = 4$ لأن $d_{33} \neq 4$ و $d_4 = 4$ لأن $d_{44} \neq 4$، وهكذا).

كل عدد حقيقي يكون له تمثيل عشري وحيد، إذن العدد الحقيقي r لا يساوي أي من الأعداد في المتتابعة $r_1 , r_2 , r_3 , \ldots$ لأن التمثيل العشري للعدد r يختلف عن التمثيل العشري لـ r_i في الموضع رقم i جهة اليمين من العلامة العشرية، لكل i.

وحيث أنه يوجد عدد حقيقي بين 0 و 1 لم يدخل في متتابعة الأعداد الحقيقية بين 0 و 1، فإن مجموعة الأعداد الحقيقية بين 0 و 1 لا يمكن وضعها في متتابعة، ومن ثم تكون غير قابلة للعد. أي مجموعة لها مجموعة جزئية غير قابلة للعد تكون هي نفسها غير قابلة للعد. لذلك الأعداد الحقيقية تكون غير قابلة للعد.

العمليات الثنائية Binary operations

الآن نقدم نوعا هاما من أنواع الرواسم وهو ما يعرف بالعملية الثنائية.

تعريف ٢-٣-٢٣. نفرض أن A و B مجموعتان غير خاليتان. الراسم $f: A\times A \to B$ يسمى **عملية ثنائية** على A binary operation. إذا كانت $B\subseteq A$ فإن العملية الثنائية يقال أنها **مغلقة** closed على A (أيضا عندما $B\subseteq A$ قد نقول أن A مغلقة بالنسبة إلى f).

تعريف ٢-٣-٢٤. الراسم $g: A \to A$ يسمى **عملية أحادية** unary على A.

مثال ٢-٣-٢٥.(أ) الراسم $f: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ، المعرف بالصورة $f(a,b)=a-b$ ، يكون عملية ثنائية مغلقة على $\mathbb{Z}$.

(ب) إذا كان $g: \mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}$ راسم حيث $g(a,b)=a-b$ ، فإن g يكون عملية ثنائية على $\mathbb{Z}^+$ ولكنها ليست مغلقة، حيث على سبيل المثال $g(3,7)=3-7=-4\in\mathbb{Z}^+$.

(ج) الراسم $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ المعرف بالصورة $h(a)=\frac{1}{a}$ يكون عملية أحادية على $\mathbb{R}^+$.

مثال ٢-٣-٢٦. نفرض U هي المجموعة الشاملة ونفرض $A,B\subseteq U$

(أ) إذا كان $f: P(U)\times P(U)\to P(U)$ معرف بالصورة $f(A,B)=A\cup B$ ، فإن f يكون عملية ثنائية مغلقة على $P(U)$.

(ب) الراسم $g : P(U) \to P(U)$ المعرف بالصورة $g(A) = \overline{A}$ يكون عملية أحادية على $P(U)$.

تعريف ٢-٣-٢٧. نفرض $f : A \times A \to B$ عملية ثنائية على المجموعة A.

(أ) f تسمى **إبدالية** commutative إذا كان $f(a,b) = f(b,a)$ لكل $a,b \in A$.

(ب) عندما تكون $B \subseteq A$ (أي عندما تكون f مغلقة على A) فإن f تسمى **دامجة** associative إذا كان

$f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c))$ لكل $a,b,c \in A$

مثال ٢-٣-٢٨. العملية الثنائية في مثال ٢-٣-٢٦ (أ) تكون إبدالية ودامجة. في حين أن العملية الثنائية في مثال ٢-٣-٢٥ (أ) ليست إبدالية وليست دامجة.

مثال ٢-٣-٢٩. (أ) نعرف العملية الثنائية المغلقة $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بالصورة $f(a,b) = a + b - 3ab$. حيث أن كل من الجمع والضرب على الأعداد الصحيحة عملية إبدالية ودامجة ، ينتج أن

$$f(a,b) = a + b - 3ab = b + a - 3ba = f(b,a)$$

لذلك f تكون إبدالية.

لتحديد ما إذا كانت f دامجة، نعتبر $a,b,c \in \mathbb{Z}$، إذن

$$f(a,b) = a + b - 3ab$$

$$\begin{aligned} f(f(a,b),c) &= f(a,b) + c - 3f(a,b)c \\ &= (a + b - 3ab) + c - 3(a + b - 3ab)c \\ &= a + b + c - 3ac - 3ac - 3bc + 9abc \end{aligned}$$

بينما $f(b,c) = b + c - 3bc$

و $f(a,f(b,c)) = a + f(b,c) - 3af(b,c)$

$$= a + (b + c - 3bc) - 3a(b + c - 3bc)$$
$$= a + b + c - 3bc - 3ab - 3ac + 9abc$$

وحيث أن $f(a,f(b,c)) = f(f(a,b),c)$ لكل $a,b,c \in \mathbb{Z}$، فإن f تكون عملية ثنائية دامجة كما أنها إبدالية على $\mathbb{Z}$.

(ب) نعتبر العملية الثنائية المغلقة $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $h(a,b) = a|b|$. إذن $h(3,-2) = 3|-2| = 3 \cdot 2 = 6$ ولكن $h(-2,3) = -2|3| = (-2)(3) = -6$. لذلك h ليست إبدالية، ومع ذلك بالنسبة إلى الدمج، إذا كان $a,b,c \in \mathbb{Z}$ فإن

$$h(h(a,b),c) = h(a,b)|c| = a|b||c|$$

و
$$h(a,h(b,c)) = a|h(b,c)| = a|b||c|$$

لذلك العملية الثنائية المغلقة h تكون دامجة.

مثال ٢-٣-٣٠. نفرض $A = \{a,b,c,d\}$. إذن $|A \times A| = 16$ ، نتيجة لذلك يوجد 4^{16} راسم $f : A \times A \to A$ ، أي يوجد 4^{16} عملية ثنائية مغلقة على A. لتحديد عدد العمليات الثنائية المغلقة الابدالية g على A ، نعلم أنه توجد أربعة إختيارات لكل تعيين لـ $g(a,a)$ ، $g(b,b)$ ، $g(c,c)$ و $g(d,d)$. لذلك يوجد $4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ ثنائي مرتب في $A \times A$ على الصورة (x,y) ، $x \neq y$. هذه الثنائيات المرتبة التي عددها 12 يجب أن تعتبر كمجموعات مكونة من زوجين مرتبين من أجل تأكيد الإبدال . على سبيل المثال نحتاج إلى $g(a,b) = g(b,a)$ وقد نختار أي من العناصر الأربعة لـ $g(a,b)$ ، عندئذ يجب أن يكون هذا الاختيار أيضا لـ $g(b,a)$. لذلك حيث أنه يوجد أربعة إختيارات لكل من هذه العناصر التي عددها $\frac{12}{2} = 6$ ، نجد أن عدد العمليات الثنائية المغلقة الابدالية على A يكون $4^4 4^6 = 4^{10}$.

تعريف ٢-٣-٣١. نفرض $f : A \times A \to B$ عملية ثنائية على A. العنصر $x \in A$ يسمى **محايد** identity (أو عنصر محايد) لـ f إذا كان، لكل $a \in A$. $f(a,x) = a = f(x,a)$.

مثال ٢-٣-٣٢. (أ) نعتبر العملية الثنائية المغلقة $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث $f(a,b) = a+b$. هنا العدد الصحيح 0 يكون هو المحايد، حيث لكل عدد صحيح a يكون

$$f(a,0) = a+0 = a = 0+a = f(0,a)$$

(ب) بالنسبة للراسم في مثال٢-٣-٢٥ (أ) لايوجد محايد حيث إذا كان f لها محايد x فإنه لأي $a \in \mathbb{Z}$، $f(a,x) = a \Leftarrow a - x = a \Leftarrow$ $x = 0$. ولكن عندئذ $f(x,a) = f(0,a) = 0 - a = -a \neq a$ إلا إذا كانت $a = 0$.

(ج) نفرض $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ونفرض $g : A \times A \to A$ العملية الثنائية المغلقة المعرفة بالصورة $g(a,b) = \min(a,b)$. هذه العملية الثنائية إبدالية ودامجة، ولأي $a \in A$ يكون

$$g(a,7) = \min\{a,7\} = a = \min\{7,a\} = g(7,a)$$

لذلك 7 يكون عنصر محايد للعملية g.

في الجزأين (أ) و (ج) من مثال ٢-٣-٣٢ اختبرنا عمليتين ثنائيتين مغلقتين كل منها لها عنصر محايد. في الجزء (ب) من نفس المثال وجدنا عملية ثنائية ليس لها عنصر محايد. والسؤال الآن هل العملية الثنائية يمكن أن يكون لها أكثر من عنصر محايد؟ النظرية التالية تزودنا بالإجابة عن هذا السؤال.

نظرية ٢-٣-٣٣. نفرض $f : A \times A \to B$ عملية ثنائية. إذا كان f لها محايد فإن هذا المحايد يكون وحيدا.

البرهان: إذا كان f لها أكثر من محايد نفرض أن $x_1, x_2 \in A$ بحيث

$$f(a,x_1) = a = f(x_1,a) \quad \text{لكل } a \in A$$

و $$f(a,x_2) = a = f(x_2,a) \quad \text{لكل } a \in A.$$

باعتبار أن x_1 كعنصر في A و x_2 هو المحايد، إذن $f(x_1,x_2)=x_1$. الآن نعكس الاختيار x_1 و x_2 نجد أن $f(x_1,x_2)=x_2$. نتيجة لذلك يكون $x_1=x_2$ و f يكون لها محايد وحيد.

تعريف ٢-٣-٣٤. نفرض $f:A\times A\to B$ عملية ثنائية على A لها عنصر محايد e. العنصر $a'\in A$ يسمى **معكوس** للعنصر $a\in A$ إذا كان $f(a,a')=e=f(a',a)$.

الجداول Tables

بالنسبة للمجموعات المنتهية، العملية الثنائية على المجموعة يمكن تعريفها عن طريق جدول يسمى جدول العملية حيث تكتب عناصر المجموعة كرؤوس لأعمدة الجدول وتكتب على يسار الجدول كرؤوس للصفوف وينبغي أن تكتب العناصر أعلى الجدول وعلى يساره بنفس الترتيب.

مثال ٢-٣-٣٥. نفرض $S=\{0,1,2,3,4\}$ و $f:S\times S\to S$ معرفة كما يلي:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{if } x+y<5 \\ x+y-5 & \text{if } x+y\geq 5 \end{cases}$$

إذن f تكون عملية ثنائية على S ويمكن تمثيل هذه العملية عن طريق الجدول التالي

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

جدول ٢-٣-٢

واضح أن f إبدالية. وبصفة عامة يمكننا بسهولة ملاحظة أن العملية الثنائية المعرفة بجدول تكون إبدالية إذا وفقط إذا كانت عناصر الجدول الداخلية متماثلة بالنسبة لقطر الجدول الرئيسي الذي يبدأ من الركن الأيسر من أعلى وينتهي بالركن الأيمن من أسفل.

مثال ٢-٣-٣٥. نفرض $A=\{x,a,b,c,d\}$ ، كم عملية ثنائية مغلقة على A يكون لها x محايد؟

الحل: نفرض $f:A\times A\to A$ ، حيث $f(x,y)=y=f(y,x)$ لكل $y\in A$. يمكننا تمثيل f بجدول كما في جدول ٢-٣-٣ هنا القيم التسعة حيث x هي المركبة الأولى كما في (x,c) أو المركبة الثانية كما في (d,x) تكون محدودة بحقيقة أن x عنصر محايد. كل من العناصر الأخرى في الجدول وعددها 16 يمكن إكمالها بأي طريقة بعناصر A الخمسة.

f	x	a	b	c	d
x	x	a	b	c	d
a	a				
b	b				
c	c				
d	d				

جدول ٢-٣-٣

لذلك توجد 5^{16} عملية ثنائية مغلقة على A حيث x يكون المحايد لها.

من هذه يكون $5^{10}=5^4\cdot 5^{\frac{4^2-4}{2}}$ إبدالية. أيضا هناك 5^{16} عملية ثنائية مغلقة على A يكون لها المحايد b. لذلك توجد

$$5^{17}=\binom{5}{1}5^{16}=\binom{5}{1}5^{5^2-[2(5)-1]}=\binom{5}{1}5^{(5-1)^2}$$

عملية ثنائية مغلقة على A لها محايد، ومن هذه يوجد

$$5^{11}=\binom{5}{1}5^{10}=\binom{5}{1}5^{4}\cdot 5^{(4^2-4)/2}$$

عملية ثنائية إبدالية.

البنى الجبرية Algebraic structures

المجموعة غير الخالية مع عملية ثنائية أو أكثر بحيث تحقق بعض الشروط تسمى بنية جبرية. الزمرة تعتبر مثالا لمجموعة معرف عليها عملية ثنائية واحدة. المجموعة غير الخالية G مع العملية الثنائية * تسمى **زمرة** إذا كانت المجموعة مغلقة بالنسبة العملية الثنائية * وكانت العملية الثنائية * دامجة ولها عنصر محايد في G وكل عنصر في G له معكوس. علاوة على ذلك، إذا كانت العملية الثنائية * إبدالية فإن الزمرة تسمى زمرة إبدالية.

هناك بنى جبرية تتكون من مجموعة وعمليتين ثنائيتين. من أبرز الأمثلة على هذه البنى الحلقة، النطاق الصحيح والحقل. لمزيد من الدراسة للبنى الجبرية أنظر كتاب أساسيات الجبر المجرد الجزأين الأول والثاني للمؤلف.

المساقط

تعريف ٢-٣-٣٦. للمجموعتان A و B، إذا كان $D\subseteq A\times B$، فإن الراسم $\pi_A:D\to A$ حيث $\pi_A(a,b)=a$ يسمى **المسقط** (راسم الإسقاط) projection على الاحداثي الأول. الراسم $\pi_B:D\to B$ حيث $\pi_B(a,b)=b$ يسمى المسقط على الاحداثي الثاني.

نلاحظ أنه إذا كان $D=A\times B$ فإن π_A و π_B كلاهما يكون فوقي.

مثال ٢-٣-٣٧. نفرض $A=\{w,x,y\}$ و $B=[1,2,3,4\}$ ونفرض $D=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,4)\}$. إذن المسقط $\pi_A:D\to A$ يحقق

$$\pi_A(x,1)=\pi_A(x,2)=\pi_A(x,3)=x$$

و $\pi_A(y,1) = \pi_A(y,4) = y$

حيث أن $\pi_A(D) = \{x, y\} \subset A$ فإن هذا الراسم ليس فوقي.

بالنسبة إلى $\pi_B : D \to B$ نجد أن

$\pi_B(x,1) = \pi_B(y,1) = 1$ ، $\pi_B(x,2) = 2$ ، $\pi_B(x,3) = 3$ ، $\pi_B(y,4) = 4$. لذلك $\pi_B(D) = B$ ويكون هذا المسقط راسم فوقي.

مثال ٢-٣-٣٨. نفرض $A = B = \mathbb{R}$ ونعتبر المجموعة $D = \{(x,y) : y = x^2\}$. إذن D تمثل مجموعة جزئية من المستوى الاقليدي التي تحتوي نقاط القطع المكافئ $y = x^2$. من بين النقاط التي عددها لانهائي في D نجد النقطة $(3,9)$. هنا $\pi_A(3,9) = 3$ ، الاحداثي السيني للنقطة $(3,9)$، بينما $\pi_B(3,9) = 9$، الاحداثي الصادي للنقطة $(3,9)$.

بالنسبة لهذا المثال، $\pi_A(D) = \mathbb{R} = A$، لذلك π_A يكون فوقي وهو أيضا أحادي. ومع ذلك $\pi_B(D) = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$، لذلك π_B ليس فوقي، (كذلك ليس أحادي لأنه على سبيل المثال $\pi_B(2,4) = 4 = \pi_B(-2,4)$.

الآن نوسع مفهوم المسقط كما يلي: نفرض $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات و $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ بحيث $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ و $m \leq n$.

إذا كان $D \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ فإن الراسم $\pi : D \to A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_m}$ المعرف بالصورة $\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$ يكون هو مسقط D على المركبات $i_1, i_2, \ldots, i_m$. عناصر D تسمى نونيات مرتبة ordered n-tuple العنصر في $\pi(D)$ يكون ميمي مرتب.

المساقط تظهر بطريقة طبيعية في دراسة قواعد البيانات العلائقية (ذات العلاقة)، وهي طريقة موحدة لتنظيم ووصف كميات كبيرة من البيانات من خلال نظام الحوسبة الحديث على نطاق واسع.

مثال ٢-٣-٣٩. في جامعة معينة المجموعات التالية ذات صلة بأغراض التسجيل.

$A_1 =$ مجموعة أرقام المقررات التي يطرحها قسم الرياضيات.

$A_2 =$ مجموعة أسماء المقررات التي يطرحها قسم الرياضيات.

$A_3 =$ مجموعة أعضاء هيئة التدريس بقسم الرياضيات.

$A_4 =$ مجموعة حروف الهجاء التي تشير إلى فصول الدراسة.

نعتبر الجدول، أو العلاقة، $D \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ المعطاة في جدول ٢-٣-٤

رقم المقرر	اسم المقرر	الأستاذ	الفصل
MA111	حساب التفاضل I	أحمد	A
MA111	حساب التفاضل I	محمد	B
MA112	حساب التفاضل II	عادل	A
MA112	حساب التفاضل II	سعد	B
MA112	حساب التفاضل II	خالد	C
MA113	حساب التفاضل III	مصطفى	A

جدول ٢-٣-٤

المجموعات A_1, A_2, A_3, A_4 تسمى نطاق قاعدة البيانات ذات العلاقة relational data base والجدول يسمى من درجة 4. كل عنصر في D يسمى قائمة list. مسقط D على $A_1 \times A_3 \times A_4$ في جدول ٢-٣-٥

رقم المقرر	الأستاذ	الفصل
MA111	أحمد	A
MA111	محمد	B
MA112	عادل	A
MA112	سعد	B
MA112	خالد	C
MA113	مصطفى	A

جدول ٢-٣-٥

جدول ٢-٣-٦ يبين نتيجة مسقط D على $A_1 \times A_2$.

رقم المقرر	اسم المقرر
MA111	حساب التفاضل I
MA112	حساب التفاضل II
MA113	حساب التفاضل III

جدول ٢-٣-٦

جداول ٢-٣-٥و٢-٣-٦ طريقة أخرى لتمثيل نفس البيانات التي تظهر في جدول ٢-٣-٤ إذا أعطينا الجداول٢-٣-٥و٢-٣-٦ يمكننا الاستغناء عن جدول ٢-٣-٤.

تمارين ٢-٣

١- أوجد القيم التالية:

(أ) $\lfloor 1.1 \rfloor$.　(ب) $\lceil 1.1 \rceil$.　(ج) $\lfloor -0.1 \rfloor$.

(د) $\lceil -0.1 \rceil$.　(هـ) $\lceil 2.99 \rceil$.　(و) $\lceil -2.99 \rceil$.

(ز) $\left\lfloor \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rfloor$.　(ح) $\left\lceil \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \frac{1}{2} \right\rceil$.

٢- لقوائم الأعداد الصحيحة التالية أوجد صيغة بسيطة أو قاعدة لتوليد حدود متتابعة أعداد صحيحة والتي تبدأ بالقائمة المعطاة.

(أ) $1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,0,1,\ldots$.

(ب) $1,2,2,3,4,4,5,6,6,7,8,8,\ldots$.

(ج) $1,0,2,0,4,0,8,0,16,0,\ldots$.

(د) $3,6,12,24,48,96,192,\ldots$.

(هـ) $15,8,1,-6,-13,-20,-27,\ldots$.

(و) $3,5,8,12,17,23,30,38,47,\ldots$.

(ز) $2,16,54,128,250,432,686,\ldots$.

٣- ماهي قيمة المجموع التالي، حيث $S = \{1,3,5,7\}$؟

(أ) $\sum_{j \in S} j$.　(ب) $\sum_{j \in S} j^2$.

(ج) $\sum_{j \in S} \frac{1}{j}$.　(د) $\sum_{j \in S} 1$.

٤- ماهي قيمة المجموع بدلالة متوالية هندسية فيما يلي:

(أ) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot 2^j$.　(ب) $\sum_{j=1}^{8} 2^j$.

(ج) $\sum_{j=2}^{8} (-3)^j$.　(د) $\sum_{j=0}^{8} 2 \cdot (-3)^j$.

٥- نفرض $A=\{a,b,c\}$ و $f:A\times A\to A$ عملية ثنائية مغلقة على A معطاة بالجدول المبين. اعط مثال لتبين أن f ليست دامجة.

f	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	b
c	c	b	a

٦- نفرض $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ العملية الثنائية المغلقة المعرفة بالصورة
$$f(a,b)=\lceil a+b\rceil$$

(أ) هل f إبدالية؟

(ب) هل f دامجة؟

(ج) هل f لها عنصر محايد؟

٧- كل من الرواسم $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ يكون عملية ثنائية مغلقة على $\mathbb{Z}$. حدد في كل حالة ما إذا كانت f إبدالية و/أو دامجة.

(أ) $f(x,y)=x+y-xy$.

(ب) $f(x,y)=\max\{x,y\}$.

(ج) $f(x,y)=x^y$.

(د) $f(x,y)=x+y-3$.

٨- أي من العمليات الثنائية المغلقة في تمرين (٧) لها عنصر محايد؟

٩- نفرض $|A|=5$.

(أ) ماهو $|A\times A|$ ؟

(ب) كم راسم يوجد $f:A\times A\to A$.

(ج) كم عملية ثنائية مغلقة على A؟

(د) كم عملية ثنائية مغلقة إبدالية؟

١٠- نفرض $A = \{x, a, b, c, d\}$.

(أ) كم عملية ثنائية مغلقة f على A تحقق $f(a,b) = c$ ؟

(ب) كم من الرواسم في (أ) لها x محايد؟

(ج) كم من الرواسم في (أ) لها محايد؟

(د) كم من الرواسم في (ج) إبدالية؟

١١- حدد ما إذا كانت المجموعات التالية قابلة للعد أو غير قابلة للعد. للمجموعات قابلة للعد، أوجد تناظر أحادي بين هذه المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية.

(أ) الأعداد الصحيحة أكبر من 10.

(ب) الأعداد الصحيحة الفردية السالبة.

(ج) الأعداد الحقيقية بين 0 و 2.

(د) الأعداد الصحيحة مضاعفات 10.

(هـ) الأعداد الكسرية الصحيحة التي لا يمكن أن تكتب بمقام أقل من 4.

(و) كل سلاسل البتات التي لاتحتوي 0.

١٢- نفرض $A = B = \mathbb{R}$. حدد $\pi_A(D)$ و $\pi_B(D)$ لكل من المجموعات التالية $D \subset A \times B$.

(أ) $D = \{(x, y) : x = y^2\}$.

(ب) $D = \{(x, y) : y = \sin x\}$.

(ج) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

١٣- نفرض A_i ، $1 \le i \le 5$ هي النطاقات لجدول $D \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$ حيث

$A_1 = \{U ,V ,W ,X ,Y ,Z\}$ (تستخدم كرموز أسماء حبوب مختلفة في الاختبار) و $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \mathbb{Z}^+$. جدول D هو

أسماء الحبوب	عدد جرامات السكر	النسبة% لفيتامين أ	النسبة % لفيتامين ج	النسبة % للبروتين
U	1	25	25	6
V	7	25	2	4
W	12	25	2	4
X	0	60	40	20
Y	3	25	40	10
Z	2	25	40	10

(أ) ماهي درجة الجدول؟

(ب)أوجد مسقط D على $A_3 \times A_4 \times A_5$.

٢-٤ الخوارزميات Algorithms

يوجد العديد من الأنواع العامة للمسائل التي تظهر في الرياضيات المتقطعة. على سبيل المثال، إذا أعطينا متتابعة من الأعداد الصحيحة والمطلوب معرفة أكبر عدد فيها، إذا أعطينا مجموعة ومطلوب كتابة مجموعاتها الجزئية، إذا أعطينا مجموعة من الأعداد الصحيحة ومطلوب كتابتها في ترتيب تصاعدي، إذا اعطينا شبكة ومطلوب معرفة أقصر مسافة بين رأسين، وهكذا. عندما يكون لدينا هذه المسائل فإن أول ما نفكر فيه هو تحويل المسألة إلى نموذج رياضي. التراكيب المتقطعة التي تستخدم في مثل هذه النماذج تشمل المجموعات والمتتابعات والرواسم والتباديل والعلاقات والرسوم والأشجار.

وضع النموذج الرياضي المناسب هو فقط جزء من الحل. لإتمام الحل نحتاج إلى طريقة للحل باستخدام هذا النموذج. المطلوب هو عملية تتم في متتابعة من الخطوات تسمى خوارزمية.

تعريف٢-٤-١. الخوارزمية an algorithm هي مجموعة منتهية من تعليمات دقيقة لأداء عملية حسابية أو حل مسألة.

كلمة خوارزمية algorithm هي تحوير لإسم الخوارزمي (هو عالم الرياضيات المسلم محمد بن موسى الخوارزمي الذي عاش في القرن التاسع الميلادي). في البداية كانت كلمة خوارزمية تستخدم للقواعد التي تحكم إجراء العمليات الحسابية باستخدام الرموز العشرية. بعد تزايد الاهتمام بالآلات الحاسبة، مفهوم الخوارزمية أخذ معنى أوسع ليشمل كل العمليات المحدودة لحل المسائل وليس فقط إجراء العمليات الحسابية.

مثال ٢-٤-٢. صف خوارزمية لإيجاد أكبر عدد في متتابعة منتهية من الأعداد الصحيحة.

الحل: مع أن عملية إيجاد أكبر عنصر في متتابعة تبدو تافهة نسبيا إلا أنها تزودنا بتوضيح جيد لمفهوم الخوارزمية. يمكننا تعيين عملية لحل هذه المسألة بعدة طرق.

أولا: باستخدام لغة الكلام العادية لوصف متتابعة الخطوات المستخدمة. نجري الخطوات التالية

١- نضع حد أعلى إفتراضي يساوي أول عدد صحيح في المتتابعة.

٢- نقارن العدد التالي في المتتابعة بالحد الأعلى الإفتراضي. إذا كان هذا الحد أكبر من الحد الإفتراضي ، نضع هذا العدد الصحيح هو الحد الأعلى الإفتراضي. وإلا ننتقل لنقارن الحد الأعلى الإفتراضي بالحد التالي لهذا الحد.
٣- نكرر هذه الخطوة إذا كان هناك أعداد أكثر في المتتابعة.
٤- نتوقف عندما لا يتبقى أي عدد صحيح في المتتابعة، الحد الأعلى الإفتراضي سوف يكون هو أكبر عدد في المتتابعة.
الخوارزمية أيضا يمكن أن توصف باستخدام لغة الحاسب. وحيث أنه توجد العديد من لغات البرمجة المستخدمة وحتى لا نستخدم لغة معينة، سوف نستخدم في هذا الكتاب صيغة شبه مشفرة pseudocode .
وصف شبه المشفر لخوارزمية إيجاد أكبر عدد في متتابعة منتهية هو كالتالي:

<u>الخوارزمية 1: (خوارزمية إيجاد أكبر عدد في متتابعة منتهية)</u>

procedure *max*($a_1, a_2, \ldots, a_n$: integers)
max := a_1
for $i := 2$ **to** n
if max $< a_i$ then max:= a_i
{max is the largest element}

هذه الخوارزمية تعين الحد الإبتدائي للمتتابعة a_1 للمتغير max ، العروة "for" تستخدم لاختيار حدود المتتابعة المتتالية. إذا كان الحد أكبر من قيمة max الحالية، نعينه ليكون هو القيمة الجديدة للمتغير max .
هناك عدة خواص للخوارزمية، من المهم أن تكون حاضرة معنا عندما نصف خوارزمية. هذه الخواص هي:
المدخل input: الخوارزمية يكون لها قيم إدخال من مجموعة معينة.
المخرج output: لكل مجموعة مدخلات، الخوارزمية تنتج قيم مخرجات من مجموعة معينة. المخرجات هي حلول المسألة.
التعريف definiteness: خطوات الخوارزمية يجب أن تكون معرفة بدقة.

الصحة correctness: الخوارزمية سوف تنتج قيم نواتج صحيحة لكل مجموعة قيم مدخلة.
المحدودية finiteness: الخوارزمية ينبغي أن تعطي الناتج المطلوب بعد عدد منتهي من الخطوات لأي مجموعة مدخلات.
الفعالية effectiveness: يجب أن يكون من الممكن إجراء كل خطوة في الخوارزمية على وجه التحديد وفي كمية محدودة من الوقت.
العمومية generality: العملية ينبغي أن تكون قابلة للتطبيق لأي مسألة في الشكل المطلوب وليس فقط لمجموعة خاصة من المدخلات.
مثال ٢-٤-٣. بين أن الخوارزمية في مثال ٢-٤-٢ لإيجاد العنصر الأكبر في متتابعة منتهية من الأعداد الصحيحة، لها كل هذه الخواص المذكورة.
الحل: المدخلات للخوارزمية هي متتابعة من الأعداد الصحيحة. المخرج هو أكبر عدد صحيح في المتتابعة. كل خطوة في الخوارزمية معرفة بدقة لأنه تحديد وحيد وعملية منتهية وجملة شرطية موجودة. لبيان أن الخوارزمية صحيحة يجب أن نبين أنه عندما تنتهي الخوارزمية تكون قيمة المتغير max هي أكبر حدود المتتابعة. لبيان ذلك، لاحظ أن القيمة الابتدائية للمتغير max هي الحد الأول للمتتابعة، أختيرت مثل حدود المتتابعة ، max يتم تحديثها إلى الحد إذا كان هذا الحد يزيد عن الحد الأكبر السابق اختياره. هذه المناقشة تبين أن كل الحدود تم اختبارها وأن max تساوي قيمة أكبر حد. الخوارزمية تستخدم عدد منتهي من الخطوات. الخوارزمية يمكن أن تطبق في كمية محدودة من الوقت لأن الخطوات إما مقارنة أو تعيين. أخيرا، الخوارزمية يمكن أن تطبق على كل المتتابعات المنتهية.

خوارزميات البحث searching algorithm

مسألة وضع عنصر في قائمة مرتبة تحدث في كثير من الموضوعات. على سبيل المثال البرنامج الذي يختبر هجاء الكلمات يبحث عنها في القاموس، والذي هو قائمة مرتبة من الكلمات. المسائل من هذا النوع تسمى مسائل البحث. في هذا الفصل نناقش عدة خوارزميات للبحث. المسألة العامة للبحث يمكن أن توصف كما يلي: ضع عنصر x في قائمة من العناصر المختلفة $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، أو قرر

أنه ليس من القائمة. حل مسألة البحث هذه هو أن موضع هذا الحد في القائمة يساوي x (أي أن i هي الحل إذا كان $x = a_i$) و 0 إذا كان x ليس في القائمة.

البحث الخطي linear search

الخوارزمية الأولى التي سوف نقدمها تسمى خوارزمية البحث الخطي، أو البحث المتتالي. خوارزمية البحث الخطي تبدأ بمقارنة x مع a_i. عندما $x = a_1$، الحل يكون هو الموضع a_1 أي 1. عندما $x \neq a_1$، نقارن x مع a_2. إذا كان $x = a_2$، الحل يكون هو الموضع a_2 أي 2. عندما $x \neq a_2$، نقارن x مع a_3. نستمر في هذه العملية في مقارنة x بالتتابع مع كل حد في القائمة حتى نصل إلى الحل. إذا انتهت كل عناصر القائمة من البحث بدون موضع لـ x فإن الحل يكون 0. شبه المشفر لخوارزمية البحث الخطي هي الخوارزمية رقم 2.

<u>الخوارزمية 2: خوارزمية البحث الخطي</u>

procedure *linear search* (x : integer, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: distinct integers)
while ($i \leq n$ and $x \neq a_i$)
 $i := i + 1$
if $i \leq n$ **then** location $:= i$
else location $:= 0$ {location is the subscript of the term that equals x, or 0 if x is not found

البحث الثنائي the binary search

الآن نعتبر خوارزمية بحث أخرى. هذه الخوارزمية يمكن استخدامها عندما تعطى القائمة في ترتيب تصاعدي (إذا كانت القائمة من أعداد فإن الترتيب يكون من الأصغر إلى الأكبر وإذا كانت كلمات فإنها ترتب حسب الترتيب الهجائي). هذا النوع من خوارزمية البحث يسمى خوارزمية البحث الثنائي. هذه الخوارزمية تتم بمقارنة العنصر المراد وضعه في القائمة بالحد الأوسط في القائمة. القائمة عندئذ تنقسم إلى قائمتين جزئيتين من حجم أصغر. البحث يستمر بتقييد البحث إلى القائمة الجزئية المناسبة.

مثال ٢-٤-٤. للبحث عن 19 في القائمة 22 20 19 18 16 15 13 12 10 8 7 6 5 3 2 1 نقسم هذه القائمة التي تضم 16 عنصر إلى قائمتين أصغر كل قائمة تحتوي 8 عناصر، أي 10 8 7 6 5 3 2 1، 22 20 19 18 16 15 13 12 . إذن نقارن 19 مع الحد الأكبر في القائمة الأولى. ولأن $19 > 10$، البحث يقيد إلى القائمة الثانية التي تحتوي من الحد التاسع إلى الحد السادس عشر في القائمة الأصلية. أيضا نقسم هذه القائمة التي تحتوي 8 حدود إلى قائمتين أصغر تحتوي كل منهما أربعة حدود 16 15 13 12 ، 22 20 19 18. وحيث أن $19 > 16$ (أكبر حد في القائمة الأولى) فإن البحث يقيد إلى القائمة الثانية والتي تحتوي الحدود من الثالث عشر حتى السادس عشر في القائمة الأصلية. القائمة 22 20 19 18 تقسم إلى قائمتين 19 18، 22 20. ولأن 19 ليس أكبر من الحد الأكبر في القائمة الأولى والذي هو 19، البحث يقيد إلى القائمة 19 18 والتي تحتوي الحدين الثالث عشر والرابع عشر في القائمة الأصلية. هذه القائمة تنقسم إلى قائمتين كل قائمة تحتوي حد واحد: 18 و 19. ولأن $19 > 18$، البحث يقيد على القائمة الثانية والتي تحتوي الحد الرابع عشر في القائمة الأصلية وهو 19. الآن البحث إنتهى إلى حد واحد والمقارنة تمت و 19 يوضع في الحد الرابع عشر من القائمة الأصلية.

الآن نحدد خطوات خوارزمية البحث الثنائي للبحث عن العدد الصحيح x في القائمة $a_1,a_2,\ldots,a_n$ حيث $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$، نبدأ بمقارنة x مع الحد الأوسط للمتتابعة ، a_m، حيث $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. إذا كان $x > a_m$، البحث عن x سوف يقيد للنصف الثاني من المتتابعة والذي هو $a_{m+1},a_{m+2},\ldots,a_n$. إذا كانت x ليس أكبر من a_m، البحث يقيد على النصف الأول من المتتابعة وهو $a_1,a_2,\ldots,a_m$. الآن البحث تم تقييدة على قائمة عدد عناصرها لايزيد عن $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. باستخدام نفس العملية، نقارن x بالحد الأوسط للقائمة المقيدة، ومن ثم نقيد البحث على أحد نصفي القائمة. نكرر هذه العملية إلى أن نصل إلى قائمة بها عنصر

واحد، وعندها نقرر مإذا كان هذا الحد هو x. شبه المشفر لخوارزمية البحث الثنائي هو الموضح في خوارزمية 3.

خوارزمية 3: خوارزمية البحث الثنائي

```
procedure binary search (x : integer, a1,a2,...,an : increasing
                                                      integer)
i := 1   {i is left endpoint of search interval}
j := n   {j is right endpoint of search interval}
while i < j
begin
    m := ⌊(i + j)/2⌋
    if x > am then i := m + 1
    else j := m
end
if x = ai then location := i
else location := 0
{location is the subscript of the term equal to x, or 0 if x is not found}
```

الفرز Sorting

ترتيب عناصر قائمة من المسائل التي تظهر في كثير من الموضوعات. على سبيل المثال، لإنتاج دليل التليفونات يكون من الضروري ترتيب أسماء المشتركين. بوضع العنوانين مرتبة في قائمة بريد اليكتروني يمكننا تحديد ما إذا كان هنالك عناوين مكررة . إنشاء قاموس مفيد يتطلب أن تكون الكلمات موضوعة في ترتيب أبجدي.

نفرض أنه لدينا قائمة من عناصر مجموعة وأنه لدينا طريقة لترتيب عناصر المجموعة. الفرز هو وضع هذه العناصر في قائمة بحيث تكون مرتبة ترتيبا تصاعديا. على سبيل المثال، فرز القائمة 7,2,1,4,5,9 يعطي القائمة 1,2,4,5,7,9 وفرز القائمة d,h,c,a,f يعطي القائمة a,c,d,f,h. في هذا الفصل سوف نقدم خوارزميتين للفرز، فرز الفقاعة أو الفرز الوهمي bubble sort وفرز الادراج insertion sort .

فرز الفقاعة أو الفرز الوهمي Bubble Sort
هو أبسط خوارزميات الفرز ولكنها ليست أكثرها فعالية. في هذه الخوارزمية توضع القائمة في ترتيب تصاعدي عن طريق تتابع المقارنة بين العناصر المتجاورة وتبديلها إذا كانا في الترتيب الخاطئ.

لتنفيذ فرز الفقاعة، نجري العملية الأساسية، أي تبديل العنصر الأكبر مع العنصر الأصغر الذي يليه إبتداء من بداية القائمة مرورا بكل العناصر. نكرر هذه العملية حتى ينتهي الفرز. شبه الشفرة لفرز الفقاعة تعطى كخوارزمية 4. يمكننا تصور أن عناصر القائمة وضعت على شكل عمود. في فرز الفقاعة العنصر الأصغر يطفو إلى القمة كالفقاعة والعنصر الأكبر يغطس إلى القاع، ومن هنا جاء إسم فرز الفقاعة.

مثال ٢-٤-٥. استخدم فرز الفقاعة لوضع 3,2,4,1,5 في ترتيب تصاعدي.

الحل: خطوات هذه الخوارزمية تبدأ بمقارنة العنصرين الأولين 3 و 2. لأن $2 < 3$ ، نبدل 3 مع 2 ، لنحصل على القائمة 2,3,4,1,5. ولأن $3 < 4$ نستمر بمقارنة 4 و 1. حيث أن $1 < 4$، نبدل 1 مع 4 لنحصل على القائمة 2,3,1,4,5. لأن $4 < 5$ يكون أول عبور للقائمة قد تم. أول عبور يضمن أن العنصر الأكبر 5 يكون في الموضع الصحيح.

العبور الثاني يبدأ بمقارنة 3 و 2. وحيث أنهما في ترتيب صحيح، نقارن 3 مع 1. لأن $1 < 3$، نبدل 3 مع 1 لنحصل على القائمة 2,1,3,4,5. وحيث أن $3 < 4$، فإن هذان العددان يكونا في ترتيب صحيح. ليس من الضروري عمل مقارنات أخرى في هذا العبور لأن 5 بالفعل في وضعها الصحيح. العبور الثاني يضمن أن العنصران الأكبران 4 و 5 في وضعهما الصحيح.

العبور الثالث يبدأ بمقارنة 1 مع 2. بتبديل هذان العددان، لأن $1 < 2$، نحصل على القائمة 1,2,3,4,5. لأن $2 < 3$، هذان العنصران يكونا في الموضع الصحيح. ليس من الضروري عمل أي مقارنات أخرى لأن 4 و 5 بالفعل في وضعهما الصحيح. العبور الرابع يتكون من مقارنة واحدة وهي مقارنة 1 و 2، وحيث أن $1 < 2$، هذه العناصر تكون في موضعها الصحيح. وهذا يكمل فرز الفقاعة. فرز الفقاعة يوصف بشبه المشفر في خوارزمية رقم 4.

خوارزمية 4 فرز الفقاعة

Procedure *bubblesort*($a_1,...,a_n$: real numbers with $n \geq 2$)
for $i := 1$ **to** $n-1$
    for $j := 1$ **to** $n-i$
        if $a_j > a_{j+1}$ **then** interchanging a_j and a_{j+1}
$\{a_1,...,a_n$ is in increasing order$\}$

فرز الإدراج The insertion sort

لفرز قائمة بها n عنصر، فرز الادراج يبدأ بالعنصر الثاني. نقارن هذا العنصر بالعنصر الأول وندرجه قبل العنصر الأول إذا كان لايزيد عن العنصر الأول وبعد العنصر الأول إذا كان يزيد عنه. عند هذه النقطة، العنصران الأول والثاني يكونا في ترتيب صحيح. عندئذ، العنصر الثالث يقارن مع العنصر الأول، إذا كان أكبر من العنصر الأول يقارن مع العنصر الثاني ويدرج في موضعه الصحيح بين العناصر الثلاثة الأول.

على وجه العموم في الخطوة رقم j في فرز الادراج، العنصر رقم j في القائمة يدرج إلى الموضع الصحيح في قائمة العناصر المفرزة سلفا والتي عددها $j-1$. ومن ثم العناصر الأولى التي عددها j تكون قد وضعت في مواضعها الصحيحة. الخوارزمية تستمر حتى يوضع آخر عنصر في موضعه الصحيح بالنسبة لقائمة العناصر التي سبق فرزها وعددها $n-1$. فرز الإدراج يوصف بشبه المشفر في خوارزمية 5.

خوارزمية 5 فرز الإدراج

Procedure *insertion sort* ($a_1,...,a_n$: real numbers with $n \geq 2$)
for $j := 2$ to n
begin
    $i := 1$
    while $a_j > a_i$
        $i := i + 1$
    $m := a_j$

```
        for k := 0 to j - i - 1
              a_{j-k} := a_{j-k-1}
        a_i := m
end {a_1,...,a_n are stored}
```

مثال ٢-٤-٦. استخدم فرز الإدراج لوضع القائمة $3,2,4,1,5$ في ترتيب تصاعدي.

الحل: فرز الادراج يبدأ أولا بمقارنة 2 و 3. لأن $2<3$، نضع 2 في الموضع الأول لنحصل على القائمة $2,3,4,1,5$. عند هذه النقطة 2 و 3 يكونا في ترتيب صحيح. بعد ذلك ندرج العنصر الثالث، 4، في الجزء الذي تم فرزة بالفعل بعمل المقارنات $2<4$ و $3<4$. لذلك يوضع 4 في الموضع الثالث. عند هذه النقطة القائمة تكون $2,3,4,1,5$ ويكون ترتيب العناصر الثلاثة الأول صحيح. بعد ذلك نوجد الموضع الصحيح للعنصر الرابع، 1، بين العناصر التي تم فرزها $2,3,4$. لأن $1<2$ نضع 1 قبل 2 لنحصل على القائمة $1,2,3,4,5$. أخيرا ندرج 5 في الموضع الصحيح لها بمقارنتها بالتتابع مع كل من 1، 2 ، 3 و 4. لأن $4<5$، تذهب إلى نهاية القائمة، لنحصل على ترتيب صحيح للقائمة الكلية.

تمارين ٢-٤

١- أكتب كل الخطوات المستخدمة بالخوارزمية 1 لإيجاد العنصر الأكبر في القائمة 1,8,12,9,11,2,14,5,10,4.

٢- بين أي الخصائص في الخوارزمية الاجراءات التالية تحققها وأيها تفتقر إليها

(أ)

procedure *double*(n : positive integer)
while $n > 0$
$n := 2n$

(ب)

procedure *divide*(n : positive integer)
while $n \geq 0$
begin
$m := 1/n$
$n := n - 1$
end

(ج)

procedure *sum*(n : positive integer)
sum $:= 0$
while $i < 10$
sum $:=$ sum $+ 10$

(د)

procedure *choose*(a,b: integers)
$x :=$ either a or b

٣- أكتب خوارزمية لإيجاد مجموع كل الأعداد الصحيحة في قائمة.

٤- صف خوارزمية تأخذ مدخلات قائمة مكونة من n عدد صحيح وتعطي مخرج أكبر فرق نحصل عليه بطرح عدد صحيح في القائمة من العدد التالي له.

٥- أكتب الخطوات التي تستخدم للبحث عن 9 في المتابعة 1,3,4,5,6,8,9,11 باستخدام

(أ) البحث الخطي. (ب) البحث الثنائي.

٦- أكتب الخطوات التي تستخدم للبحث عن 7 في المتابعة 1,3,4,5,6,8,9,11 باستخدام

(أ) البحث الخطي. (ب) البحث الثنائي.

٧- استخدم فرز الفقاعة لفرز $6,2,3,1,5,4$ مبينا القائمة التي نحصل عليها في كل خطوة.

٨- استخدم فرز الفقاعة لفرز $3,1,5,7,4$ مبينا القائمة التي نحصل عليها في كل خطوة.

٩- استخدم فرز الفقاعة لفرز d,f,k,m,a,b مبينا القائمة التي نحصل عليها في كل خطوة.

١٠- استخدم فرز الإدراج لفرز $6,2,3,1,5,4$ مبينا القائمة التي نحصل عليها في كل خطوة.

١١- استخدم فرز الإدراج لفرز $3,1,5,7,4$ مبينا القائمة التي نحصل عليها في كل خطوة.

١٢- استخدم فرز الإدراج لفرز d,f,k,m,a,b مبينا القائمة التي نحصل عليها في كل خطوة.