الباب الثالث

العلاقات

Relations

العلاقات بين عناصر المجموعات تظهر في العديد من الموضوعات. كل يوم نحن نتعامل مع علاقات مثل تلك التي بين العمال وأرقام هواتفهم، الشخص وكنيته وهكذا. في الرياضيات ندرس علاقات مثل تلك التي بين الأعداد الصحيحة الموجبة مثل علاقة يقسم أو علاقة يتآلف بمعيار n، وهكذا.

العلاقات بين عناصر المجموعات تمثل باستخدام بناء يقال له علاقة والتي هي مجموعة جزئية من الضرب الكارتيزي للمجموعات. العلاقات يمكن أن تستخدم لحل المشاكل مثل تحديد ما هي ثنائيات المدن المرتبطة بخطوط طيران في شبكة. سوف ندرس علاقة التكافؤ وأنواع خاصة من العلاقات في هذا الفصل.

٣-١ العلاقات وخواصها Relations and Their Properties

أكثر الطرق مباشرة للتعبير عن العلاقة بين عناصر مجموعتين هو استخدام الثنائيات المرتبة التي تنتج من العناصر ذات العلاقة. لهذا السبب، مجموعات الثنائيات المرتبة تسمى علاقات ثنائية.

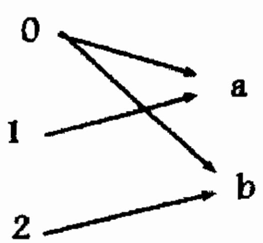
تعريف٣-١-١. نفرض A و B مجموعتان. **العلاقة الثنائية** binary relation من A إلى B هي مجموعة جزئية من $A \times B$.

بتعبير آخر العلاقة الثنائية من A إلى B هي مجموعة R من الثنائيات المرتبة، حيث العنصر الأول في كل ثنائي مرتب يأتي من A والعنصر الثاني يأتي من B. نستخدم الرمز aRb للتعبير عن أن $(a,b)\in R$ و الرمز $a \not R b$ للتعبير عن أن $(a,b)\notin R$.

مثال ٣-١-٢. نفرض أن A هي مجموعة كل الطلاب في معهدك العلمي و B هي مجموعة كل المقررات. نفرض R هي العلاقة التي تتكون من الثنائيات

المرتبة (a,b)، حيث a الطالب المسجل في المقرر b. على سبيل المثال إذا كان كل من أحمد و علي مسجل في $CS518$ ، فإن الثنائيان $(\text{Ahmad}, CS518)$ و $(\text{Aly}, CS518)$ تنتمي إلى R. ومع ذلك فإذا كان علي ليس مسجل $CS510$ فإن الثنائي $(\text{Aly}, CS510)$ لاينتمي إلى R. لاحظ أنه إذا كان هناك طالب لم يسجل أية مقررات في الوقت الحالي فإنه لن يكون هناك أي ثنائي في R له العنصر الأول هذا الطالب.

مثال ٣-١-٣. نفرض $A=\{0,1,2\}$ و $B=\{a,b\}$. إذن $\{(0,a),(0,b),(1,a),(2,b)\}$ تكون علاقة من A إلى B . هذه تعني أن $0Ra$ ولكن $1 \not R b$. العلاقة يمكن تمثيلها بيانيا، كما هو مبين في شكل ٣-١-١ ، باستخدام الأسهم لتمثل الثنائيات المرتبة. هناك طريقة أخرى لتمثيل هذه العلاقة وذلك باستخدام الجدول وهو مايتضح أيضا من شكل ٣-١-١.



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

شكل ٣-١-١

العلاقات على مجموعة Relations on a Set

العلاقات من مجموعة إلى نفسها لها اهتمام خاص.

تعريف ٣-١-٤. **العلاقة على المجموعة** relation on a set A هي علاقة من المجموعة A إلى نفسها.

مثال ٣-١-٥.

١- نفرض $A=\{2,4,6,8\}$ ونعرف علاقة R على A كمايلي:
$(x,y)\in R$ إذا وفقط إذا كان x يقسم y. إذن

$$R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(4,4),(4,8),(6,6),(8,8)\}$$

لاحظ أن كل عدد يقسم نفسه.

٢- نفرض $A=\mathbb{N}$ ونعرف $R \subseteq A \times A$ كمايلي xRy إذا وفقط إذا كان x و y لهما نفس الباقي عند القسمة على 3. حيث أن A لانهائية فإنه لايمكن إعطاء كل عناصر R بصورة صريحة ولكن، على سبيل المثال،

$$(1,4),(1,7),(1,10),\ldots,(2,5),(2,8),\ldots.(0,0),(1,1),\ldots \in R$$

لاحظ أن xRx لكل $x \in \mathbb{N}$ وطالما كان xRy فإن yRx .

٣- نفرض $A=\mathbb{R}$ ، نعرف العلاقة R على $\mathbb{R}$ كما يلي: xRy إذا وفقط إذا كان $y=x^2$. إذن R تتكون من نقاط القطع المكافئ $y=x^2$.

٤- نفرض $A=\mathbb{R}$ ، نعرف العلاقة R على $\mathbb{R}$ كما يلي: xRy إذا وفقط إذا كان $x \cdot y=1$. إذن R تتكون من كل الأزواج $(x,\frac{1}{x})$ حيث x عدد حقيقي غير صفري.

٥- نفرض $A=\{1,2,3\}$ ونعرف R على A كمايلي: xRy إذا وفقط إذا كان $x+y=7$. حيث أن مجموع أي عنصرين من عناصر A لا يزيد عن 6 نجد أنه لا توجد عناصر في A تحقق هذه العلاقة وبالتالي $R=\phi$.

مثال ٣-١-٦. نعتبر العلاقات التالية على مجموعة الاعداد الصحيحة

$$R_1=\{(a,b): a \le b\}$$

$$R_2=\{(a,b): a > b\}$$

$$R_3=\{(a,b): a=b \text{ or } a=-b\}$$

$$R_4=\{(a,b): a=b\}$$

$$R_5=\{(a,b): a=b+1\}$$

$$R_6=\{(a,b): a+b \le 3\}$$

أي من هذه العلاقات تحتوي الثنائيات $(1,1)$ ، $(1,2)$ ، $(2,1)$ ، $(1,-1)$ و $(2,2)$؟

الحل: الثنائي $(1,1)$ يقع في العلاقات R_1 ، R_3 ، R_4 و R_6 ؛ الثنائي $(1,2)$ يقع في R_1 و R_6 ؛ الثنائي $(2,1)$ يقع في R_2 ، R_5 و R_6 ؛

الثنــائي $(1,-1)$ يقـع فـي R_2 ، R_3 وR_6 ؛ الثنــائي $(2,2)$ يقـع فـي R_1 ، R_3 و R_4 .

مثال ٣-١-٧. كم علاقة توجد على مجموعة بها n عنصر ؟

الحل: العلاقة على مجموعة A هي مجموعة جزئية من $A \times A$. وحيث أن $A \times A$ بها n^2 عنصر عندما يكون A بها n عنصر والمجموعة التـي بهـا m عنـصر يكـون لهـا 2^m مجموعـة جزئيـة، فإنـه يوجـد 2^{n^2} مجموعة جزئية في $A \times A$. لذلك توجد 2^{n^2} علاقة على مجموعة بها n عنــصر. وعلــى ســبيل المثــال، يوجــد $2^{3^2} = 2^9 = 512$ علاقــة علــى المجموعة $\{a,b,c\}$.

تعريف٣-١-٨. نفرض كانت $R \subseteq A \times B$ علاقة من A إلى B. إذن **نطاق** R domain يرمز له بالرمز $\text{dom}(R)$ يعرف كمايلي

$$\text{dom}(R) = \{a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in R\}$$

مدى R range يرمزله بالرمز $\text{range}(R)$ يعرف كمايلي

$$\text{range}(R) = \{b \in B : \exists a \in A : (a,b) \in R\}$$

تعريف ٣-١-٩. نفرض R علاقة من المجموعـة A إلـى المجموعة B ، أي أن $R \subseteq A \times B$. إذن $R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$ تــسمى العلاقـــة العكسية أو **معكوس العلاقة** R. واضـح أن R^{-1} علاقة من B إلـى A لأن $R^{-1} \subseteq B \times A$.

مثال ٣-١-١٠ . أوجد معكوس العلاقات التالية على المجموعة $\{1,2,3,4\}$.

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

$$R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

$$R_6=\{(3,4)\}$$

الحل:

$$R_1^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(4,3),(1,4),(4,4)\}$$

$$R_2^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2)\}$$

$$R_3^{-1}=\{(1,1),(2,1),(4,1),(1,2),(2,2),(3,3),(1,4),(4,4)\}$$

$$R_4^{-1}=\{(1,2),(1,3),(2,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

$$R_6^{-1}=\{(4,3)\}$$

نظرية ٣-١-١١. إذا كانت $R\subseteq A\times B$ علاقة فإن

(أ) $\mathrm{dom}(R)=\mathrm{range}(R^{-1})$. (ب) $\mathrm{range}(R)=\mathrm{dom}(R^{-1})$.

(ج) $(R^{-1})^{-1}=R$.

البرهان:

(أ) بما أن

$$a\in dom(R)\Leftrightarrow \exists b\in B:(a,b)\in R$$
$$\Leftrightarrow \exists b\in B:(b,a)\in R^{-1}\Leftrightarrow a\in \mathrm{range}(R^{-1})$$

إذن $\mathrm{dom}(R)=\mathrm{range}(R^{-1})$.

(ب) مثل برهان (ا) ويترك للقارئ.

(ج) بما أن $(a,b)\in R\Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\Leftrightarrow (a,b)\in (R^{-1})^{-1}$

إذن $(R^{-1})^{-1}=R$.

خواص العلاقات Properties of Relations

يوجد العديد من الخواص التي تستخدم في تصنيف العلاقات على مجموعة. هنا نقدم أكثر هذه الخواص أهمية.

تعريف ٣-١-١٢. العلاقة R على المجموعة A تسمى **عاكسة** reflexive ، إذا كان $(a,a)\in R$ لكل $a\in A$.

مثال ٣-١-١٣. أي من العلاقات في مثال ٣-١-١٠ تكون عاكسة ؟

الحل: العلاقات R_3 و R_5 عاكسة لأن كلاهما تحتوي كل الثنائيات على الصورة (a,a)، وهي $(1,1)$ ، $(2,2)$ ، $(3,3)$ و $(4,4)$. العلاقات الأخرى ليست عاكسة. على وجه الخصوص العلاقات R_1 ، R_2 ، R_4 و R_6 أي منها لا تحتوي $(3,3)$.

مثال ٣-١-١٤. هل علاقة "يقسم" علاقة عاكسة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ؟

الحل: حيث أن $a|a$ أينما كان a عدد صحيح موجب، علاقة "يقسم" تكون علاقة عاكسة. (لاحظ أنه إذا استبدلنا مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بمجموعة الأعداد الصحيحة فإن علاقة "يقسم" لاتكون علاقة عاكسة لأن 0 لايقسم 0).

تعريف ٣-١-١٥. العلاقة R على المجموعة A تسمى **متماثلة** symmetric إذا كان $(b,a)\in R$ كلما كان $(a,b)\in R$ لكل $a,b\in A$.

العلاقة R على المجموعة A بحيث $(a,b)\in R$ و $(b,a)\in R$ إذا وفقط إذا كان $a=b$ لكل $a,b\in A$ تسمى **متخالفة** antisymmetric .

مثال ٣-١-١٦. أي من العلاقات في مثال ٣-١-١٠ متماثلة وأيها متخالفة.

الحل: العلاقات R_2 و R_3 متماثلة. يمكننا التحقق من أن بقية العلاقات ليس من بينها علاقة متماثلة. العلاقات R_4 ، R_5 و R_6 كلها متخالفة. لكل من هذه العلاقات لايوجد ثنائي من العناصر a و b بحيث $a\neq b$ وكل من (a,b) و (b,a) ينتمي للعلاقة. يمكننا التحقق من أن بقية العلاقات ليس من بينها أي علاقة متخالفة. هذا يمكن بيانه بإيجاد عنصرين a و b بحيث $a\neq b$ وكل من (a,b) و (b,a) ينتمي للعلاقة.

مثال ٣-١-١٧. أي من العلاقات في مثال ٣-١-٦ تكون متماثلة وأيها متخالفة؟

الحل. العلاقات R_3 ، R_4 و R_6 كلها متماثلة. R_3 متماثلة، حيث إذا كان $a=b$ أو $a=-b$ فإن $b=a$ أو $b=-a$. R_4 متماثلة لأنه إذا كان $a=b$ فإن $b=a$. R_6 متماثلة لأن $a+b \le 3$ يؤدي إلى $b+a \le 3$. يمكن للقارئ التحقق من أن بقية العلاقات ليس من بينها علاقة متماثلة.

العلاقات R_1 ،R_2 ،R_4 و R_5 كلها متخالفة. R_1 متخالفة لأن المتباينتين $a \le b$ و $b \le a$ تؤديان إلى $a=b$. R_2 متخالفة لأنه من المستحيل أن يكون $a<b$ و $b<a$. R_4 متخالفة لأن أي عنصرين يكونا مرتبطين بالعلاقة R_4 إذا وفقط إذا كانا متساويين. R_5 متخالفة لأنه من غير الممكن أن يكون $a=b+1$ و $b=a+1$. يمكن للقارئ التحقق من أن بقية العلاقات ليس من بينها علاقة متخالفة.

تعريف ٣-١-١٨. العلاقة R على المجموعة A تسمى **متعدية** (ناقلة) transitive إذا كان كلما كان $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ فإن $(a,c) \in R$ لكل $a,b,c \in A$.

مثال ٣-١-١٩. أي من العلاقات في مثال ٣-١-١٠ تكون ناقلة؟

الحل: العلاقات R_4 ،R_5 و R_6 كلها ناقلة. حيث لكل من هذه العلاقات يمكننا بيان أنه إذا كان (a,b) و (b,c) تنتمي للعلاقة، فإن (a,c) أيضا تكون كذلك. على سبيل المثال، R_4 ناقلة، لأن $(3,2)$ و $(2,1)$ ؛ $(4,2)$ و $(2,1)$؛ $(4,3)$ و $(3,1)$ ؛ $(4,3)$ و $(3,2)$ هي فقط مجموعات الأزواج من هذا النوع و $(3,1)$، $(4,1)$ و $(4,2)$ تنتمي إلى R_4.

R_1 ليست ناقلة، لأن $(3,4)$ و $(4,1)$ تنتمي إلى R_1 ولكن $(3,1)$ لاتنتمي.
R_2 ليست ناقلة لأن $(1,2)$ و $(2,1)$ تنتمي إلى R_2 ولكن $(2,2)$ لاتنتمي.
R_3 ليست ناقلة لأن $(4,1)$ و $(1,2)$ تنتمي إلى R_3 ولكن $(4,2)$ لاتنتمي.

باستخدام المقدرات نجد أن العلاقة R على المجموعة A تكون ناقلة إذا كان

$$\forall a \forall b \forall c(((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R)$$

مثال ٣-١-٢٠. أي من العلاقات في مثال ٣-١-٦ ناقلة؟

الحل: العلاقات R_1، R_2، R_3 و R_4 كلها ناقلة. R_1 ناقلة لأن $a \le b$ و $b \le c$ يؤدي إلى $a \le c$. R_2 ناقلة لأن $a > b$ و $b > c$ يؤدي إلى $a > b$. R_3 ناقلة لأن $a = \pm b$ و $b = \pm c$ يؤدي إلى $a = \pm c$. R_4 واضح أنها ناقلة. R_5 ليست ناقلة، حيث أن $(2,1)$ و $(1,0)$ تنتمي إلى R_5 ولكن $(2,0)$ لاتنتمي. R_6 ليت ناقلة لأن $(1,2)$ و $(2,1)$ تنتمي إلى R_6 ولكن $(2,2)$ لاتنتمي.

مثال ٣-١-٢١. هل علاقة "يقسم" على مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ناقلة ؟

الحل: نفرض أن a يقسم b و b يقسم c. إذن يوجد عددان صحيحان موجبان s و r بحيث $b = as$ و $c = bt$. لذلك $c = a(st)$ ، أي أن a يقسم c. من ذلك ينتج أن علاقة "يقسم" على مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة تكون ناقلة.

تركيب العلاقات Combining Relations

حيث أن العلاقة من A إلى B هي مجموعة جزئية من $A \times B$، فإن علاقتين من A إلى B يمكن تركيبهما بأي طريقة يتم بها تركيب مجموعتين مثل الاتحاد والتقاطع والفرق.

مثال ٣-١-٢٢. نفرض $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4\}$. العلاقتان $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ و $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ يمكن تركيبهما للحصول على

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2,2),(3,3)\}$$

$R_2 - R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

مثال ٣-١-٢٣. نفرض R_1 و R_2 علاقتان على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث $R_1 = \{(x,y) : x < y\}$ و $R_2 = \{(x,y) : x > y\}$. ما هي $R_1 \cup R_2$ ، $R_1 \cap R_2$ ، $R_1 - R_2$ ، $R_2 - R_1$ و $R_1 \oplus R_2$ ؟

الحل: لاحظ أن $(x,y) \in R_1 \cup R_2$ إذا وفقط إذا كان $(x,y) \in R_1$ أو $(x,y) \in R_2$. لذلك $(x,y) \in R_1 \cup R_2$ إذا وفقط إذا كان $x < y$ أو $y < x$. وحيث أن الشرط $x < y$ أو $y < x$ هو نفس الشرط $x \neq y$ ، ينتج أن $R_1 \cup R_2 = \{(x,y) : x \neq y\}$.

لاحظ أنه من المستحيل أن يكون الثنائي (x,y) ينتمي إلى R_1 و R_2 في آن واحد، حيث من المستحيل أن يكون $x < y$ و $y < x$ في آن واحد. لذلك $R_1 \cap R_2 = \phi$. يمكننا أيضا بيان أن $R_2 - R_1 = R_2$ و $R_1 - R_2 = R_1$. كذلك $R_1 \oplus R_2 = R_1 \cup R_2 - R_1 \cap R_2 = \{(x,y) : x \neq y\}$.

هناك طريقة أخرى لتركيب علاقتين مشابهة لطريقة تحصيل الرواسم.

تعريف ٣-١-٢٤. نفرض R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B و S علاقة من المجموعة B إلى المجموعة C. **تحصيل** composite العلاقتين R و S هو العلاقة التي تتكون من كل الثنائيات المرتبة (a,c) ، حيث $a \in A$ و $c \in C$ وبحيث يوجد $b \in B$ بحيث $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in S$. تحصيل العلاقتين R و S يرمز له بالرمز $S \circ R$.

مثال ٣-١-٢٥. ما هو تحصيل العلاقتين R و S ، حيث R هي العلاقة من $\{1,2,3\}$ إلى $\{1,2,3,4\}$ و $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$ و S هي العلاقة من $\{1,2,3,4\}$ إلى $\{0,1,2\}$ و $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$ ؟

الحل: $S \circ R$ تتكون باستخدام كل الثنائيات المرتبة في R والثنائيات المرتبة في S حيث العنصر الثاني في الثنائي المرتب المأخوذ من R يساوي العنصر

الأول في الثنائي المرتب المأخوذ من S. فعلى سبيل المثال الثنائي المرتب $(2,3)$ من R والثنائي المرتب $(3,1)$ من S ينتج عنهما الثنائي المرتب $(2,1)$ في $S \circ R$. بحساب كل الثنائيات المرتبة نجد أن

$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

يمكن تعريف قوى العلاقة R بتكرار تعريف تحصيل علاقتين

تعريف ٣-١-٢٦. نفرض R علاقة على المجموعة A . قوى R ، R^n ، $n=1,2,3,...$ تعرف بالتتابع $R^1 = R$ ، $R^{n+1} = R^n \circ R$.

مثـال ٣-١-٢٧. نفـرض $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. أوجـد R^n ، $n=2,3,...$.

الحل: حيث أن $R^2 = R \circ R$ ، نجد أن $R^2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}$. علاوة على ذلك $R^3 = R^2 \circ R$ ومن ثم $R^3 = (1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$. حسابات إضافية تبين أن $R^4 = R^3$. وعلى وجه العموم $R^n = R^3$ لكل $n=5,6,7,...$.

نظرية ٣-١-٢٨ إذا كانت $R \subseteq A \times B$ و $S \subseteq B \times C$ علاقتان فإن

(أ) $\text{dom}(S \circ R) \subseteq \text{dom}(R)$. (ب) $\text{range}(S \circ R) \subseteq \text{range}(S)$.

(ج) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

البرهان: (أ) حيث أن

$$a \in \text{dom}(S \circ R) \Rightarrow \exists c \in C : (a,c) \in S \circ R$$

$$\Rightarrow \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \Rightarrow a \in \text{dom}(R)$$

إذن $\text{dom}(S \circ R) \subseteq \text{dom}(R)$.

(ب) $c \in \text{range}(S \circ R) \Rightarrow \exists a \in A : (a,c) \in S \circ R$

$$\Rightarrow \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \Rightarrow c \in \text{range}(S)$$

إذن $\operatorname{range}(S \circ R) \subseteq \operatorname{range}(S)$.

(ج) حيث أن

$$\begin{aligned}(c,a) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (a,c) \in S \circ R \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B : (a,b) \in R, (b,c) \in S \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B : (b,a) \in R^{-1} \wedge (c,b) \in S^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in B : (c,b) \in S^{-1} \wedge (b,a) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (c,a) \in R^{-1} \circ S^{-1}\end{aligned}$$

إذن $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

نظرية ٣ـ١ـ٢٩. نفرض R، S و T ثلاث علاقات، إذن

(أ) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

(ب) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

(ج) $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$.

(د) $(S - T) \circ R \supseteq (S \circ R) - (T \circ R)$.

البرهان: (أ) حيث أن

$$\begin{aligned}(a,d) \in T \circ (S \circ R) &\Leftrightarrow \exists c : (a,c) \in S \circ R \wedge (c,d) \in T \\ &\Leftrightarrow \exists c, \exists b : [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S] \wedge (c,d) \in T \\ &\Leftrightarrow \exists c, \exists b : (a,b) \in R \wedge [(b,c) \in S \wedge (c,d) \in T] \\ &\Leftrightarrow \exists b : (a,b) \in R \wedge (b,d) \in T \circ S \\ &\Leftrightarrow (a,d) \in (T \circ S) \circ R\end{aligned}$$

إذن $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

(ب) حيث أن

$$(\mathrm{a},\mathrm{c}) \in (S \cup T) \circ R \Leftrightarrow \exists b : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in (S \cup T)$$

$$\Leftrightarrow \exists b:(a,b)\in R \wedge [(b,c)\in S \vee (b,c)\in T]$$
$$\Leftrightarrow \exists b:[(a,b)\in R \wedge (b,c)\in S]\vee[(a,b)\in R \wedge (b,c)\in T]$$
$$\Leftrightarrow (a,c)\in (S\circ R)\vee (a,c)\in (T\circ R)$$
$$\Leftrightarrow (a,c)\in (S\circ R)\cup (T\circ R)$$

إذن $(S\cup T)\circ R=(S\circ R)\cup(T\circ R)$.

(ج) و (د) تبرهن بنفس الطريقة ونترك كتمرين للقارئ.

ملاحظة ٣-١-٣٠. التساوي في (ج) و (د) في النظرية السابقة قد لا يتحقق كما يتضح من المثال التالي:

مثال ٣-١-٣١. نفرض $R=\{(1,2),(1,3),(3,4)\}$ ،
$S=\{(1,2),(2,2),(2,3)\}$ و $T=\{(2,3),(3,2),(3,4)\}$.
إذن $S\cap T=\{(2,3)\}$ ، $S-T=\{(1,2),(2,2)\}$.
لذلك $(S\cap T)\circ R=\{(1,3)\}$ ، $(S-T)\circ R=\{(1,2)\}$
بينما $S\circ R=\{(1,2),(1,3)\}$ ، $T\circ R=\{(1,3),(1,2),(1,4)\}$ ،
$(S\circ R)\cap(T\circ R)=\{(1,2),(1,3)\}$ ، $(S\circ R)-(T\circ R)=\phi$.
إذن $(S\cap T)\circ R\neq(S\circ R)\cap(T\circ R)$
$(S-T)\circ R\neq(S\circ R)-(T\circ R)$.

علاقات الترتيب

تعريف ٣-١-٣٢. العلاقة R على المجموعة A تسمى **ترتيب جزئي** partial order على A إذا كانت R عاكسة ومتخالفة ومتعدية. أحيانا نطلق على علاقة الترتيب الجزئي على A **ترتيب** order or ordering لـ A.

تعريف ٣-١-٣٣. العلاقة R على المجموعة A تسمى **ترتيب خطي** linear order أو **ترتيب كلي** totally ordered على A إذا كانت R ترتيب جزئي وكان $(x,y)\in R$ أو $(y,x)\in R$ لكل $x,y\in A$، أي إذا كان كل عنصرين في A يمكن مقارنتهما بالنسبة إلى R.

إذا كانت R علاقة ترتيب على A فإننا عادة نكتب $\leq$ (أو أي رمز مماثل) بدلا عن R، بمعنى أن $x \leq y$ إذا وفقط إذا كان xRy . إذا كانت $\leq$ علاقة ترتيب على A، فإننا نسمي الثنائي $(A,\leq)$ **مجموعة مرتبة جزئيا** أو للاختصار **مجموعة مرتبة** ordered set. علاوة على ذلك إذا كانت $\leq$ ترتيب خطي فإننا نسمي $(A,\leq)$ **مجموعة مرتبة خطيا** linearly ordered set أو سلسلة chain.

مثال ٣-١-٣٤.

١- نفرض $A=\{2,3,4,5,6\}$ ونعرف R بالعلاقة المعتادة $\leq$ على $\mathbb{N}$ ، أي أن aRb إذا وفقط إذا كان $a \leq b$. إذن R تكون ترتيب خطي على A.

٢- دعنا نعرف علاقة أخرى على $\mathbb{N}$ بالصورة $a|b$ إذا وفقط إذا كان a تقسم b. لبيان أن $|$ ترتيب جزئي سوف نبين أنها تحقق شروط التعريف الثلاثة لعلاقة الترتيب الجزئي.

الانعكاس: حيث أن كل عدد طبيعي يقسم نفسه فإن $a|a$ لكل $a \in \mathbb{N}$.

التخالف: إذا كانت a تقسم b فإنه إما $a=b$ أو $a \leq b$ بالترتيب المعتاد على $\mathbb{N}$؛ بالمثل إذا كان b تقسم a فإن $a=b$ أو $b \leq a$. وحيث أن $a \leq b$ و $b \leq a$ يؤدي إلى $a=b$ فإن $a|b$ و $b|a$ يؤدي إلى $a=b$.

الانتقال: إذا كانت a تقسم b و b تقسم c فإن a تقسم c أيضا.

لذلك $|$ ترتيب جزئي على $\mathbb{N}$.

٣- نفرض $A=\{x,y\}$ ونعرف $\leq$ على مجموعة القوة $P(A)$ بالصورة $s \leq t$ إذا وفقط إذا كان $s \subseteq t$. هذه تعطى العلاقة التالية: $\phi \leq \phi$ ، $\phi \leq \{x\}$ ، $\phi \leq \{y\}$، $\phi \leq \{x,y\}=A$، $\{x\} \leq \{x\}$ ، $\{x\} \leq \{x,y\}$ ، $\{y\} \leq \{y\}$ ، $\{y\} \leq \{x,y\}$، $\{x,y\} \leq \{x,y\}$.

مثال ٣-١-٣٥. إذا كان n عدد صحيح موجب، نفرض D_n ترمز إلى مجموعة كل الأعداد الصحيحة قواسم n. إذن $(D_n,|)$ تكون مرتبة جزئيا. لبعض n تكون D_n مرتبة كليا ولكن للبعض الآخر لا تكون مرتبة كليا. فمثلا $(D_8,|)$ مرتبة كليا ولكن $(D_6,|)$ ليست مرتبة كليا.

مثال ٣-١-٣٦. لأي عدد صحيح n نفرض I_n ترمز إلى مجموعة كل الأعداد الصحيحة $\{x : 1 \le x \le n\}$. إذن $(I_n, |)$ تكون مرتبة جزئيا وليست مرتبة كليا.

مخططات المجموعات المرتبة

إذا كانت A مجموعة منتهية فإن المجموعة المرتبة $(A, \le)$ يمكن أن تمثل بمخطط (رسم)، حيث كل عنصر في A يمثل برأس ولاتوجد عروة في هذا المخطط. علاوة على ذلك إذا كان y يغطي x فإنه توجد حافة تربط x إلى y. في المجموعة المرتبة $(A, \le)$ يقال أن y **يغطي** cover x إذا كان $x < y$ ولايوجد أي عنصر z بحيث $x < z$ و $z < y$.

عناصر خاصة في المجموعات المرتبة

تعريف ٣-١-٣٧. نفرض $(A, \le)$ مجموعة مرتبة ونفرض B مجموعة جزئية من A. إذن

١- العنصر $b \in B$ يسمى **عنصر أصغر في** B least element (**عنصر أكبر** greatest element) إذا كان $b \le x$ ($x \le b$) لكل $x \in B$. المجموعة B يمكن أن يكون لها على الأكثر عنصر أصغر (عنصر أكبر) واحد. حيث إذا كان b و b' عنصران أصغران في B فإنه سوف يكون $b \le b'$ و $b' \le b$. لذلك من خاصية التخالف يكون $b = b'$.

٢- العنصر $b \in B$ يسمى **عنصر أصغري** minimal (**عنصر أعظمي** maximal) لـ B إذا كان لايوجد $x \in B$ بحيث $x < b$ ($x > b$). إذا كانت المجموعة B تحتوي عنصر أصغر b فإنه بالطبع يكون هو العنصر الأصغري الوحيد في B. ومع ذلك إذا كانت B تحتوي عنصر أصغري فليس من الضروري أن يكون هو العنصر الأصغر الوحيد في B.

٣- العنصر $b \in A$ يسمى حد أدنى lower bound (حد أعلى upper bound) للمجموعة B، إذا كان $b \le x$ ($b \ge x$) لكل $x \in B$.

٤- إذا كانت كل الحدود الدنيا لها عنصر أكبر، فإن هذا العنصر الأكبر يسمى **أكبر حد أدنى** greatest lower bound (glb) للمجموعة B. بالمثل يمكن تعريف **أصغر حد أعلى** least upper bound (lub) للمجموعة B.

نفرض $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة و $a,b\in A$. إذا كان a و b لهما أصغر حد أعلى فإنه يسمى **وصل** join العنصرين ويرمز له بالرمز $a\vee b$. إذا كان للعنصرين a و b أكبر حد أدني فإنه يسمى **ملتقى** a و b meet ويرمز له بالرمز $a\wedge b$.

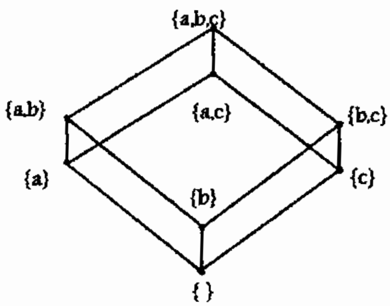
لذلك إذا كان $c=a\wedge b$ فإن c يحقق

١- $c\leq a$ ، $c\leq b$.

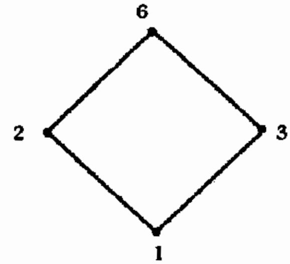
٢- إذا كان $d\leq a$ و $d\leq b$ فإن $d\leq c$.

بالمثل إذا كان $c=a\vee b$ فإن c يحقق خواص مشابهة مع عكس علاقة الترتيب.

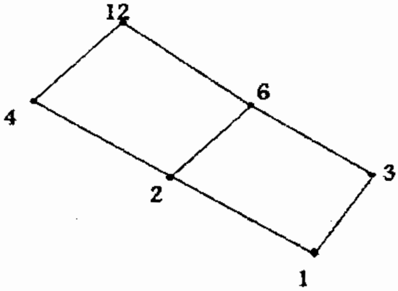
(أ) $(D_8,|)$



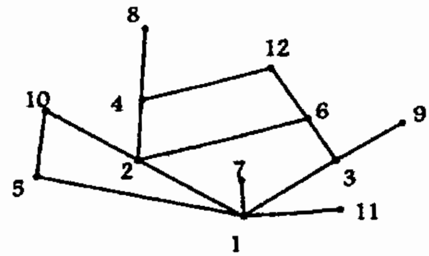
(ب) $(P\{a,b,c\},\subseteq)$



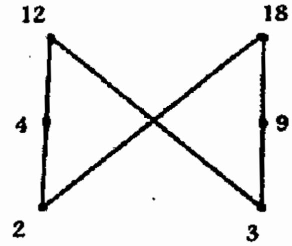
(ب) $(D_6,|)$



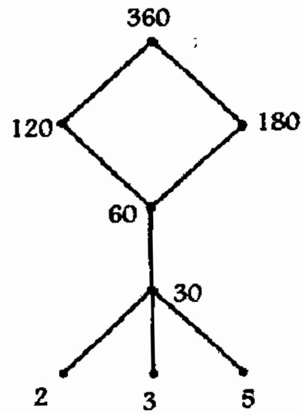
(ج) $(D_{12},|)$



(هـ) $(I_{12},|)$

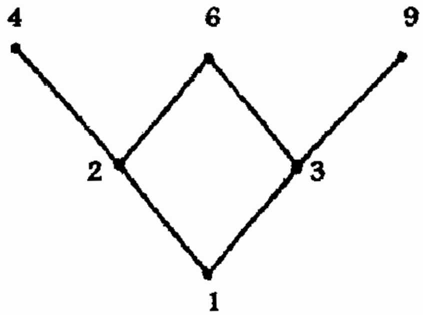


(و) $(\{2,3,4,9,12,18\},|)$



(ز)

$(\{2,3,5,30,60,120,180,360\},|)$



(ح)

$(\{1,2,3,4,6,9\},|)$

شكل ٣-١-٢

في المجموعات المرتبة كليا، مفهوم العنصر الأصغر والعنصر الأصغري ينطبقان، كذلك مفهوم العنصر الكبر والعنصر الأعظمي ينطبقان. ولكن في حالة المجموعات المرتبة جزئيا وليس كليا، هذه المفاهيم تختلف. على سبيل المثال المجموعات المرتبة في شكل٣-١-٢ (أ)، (ب)، (ج)، (د)، (هـ) و (ح) لها عنصر أصغر وحيد. المجموعات المرتبة في (و) و (ز) لها عدة عناصر صغرى، 2 و 3 لـ (و) و 2، 3، 5 لـ (ز). المجموعات المرتبة (أ)، (ب)، (ج)، (د) و (ح) لها عنصر أكبر وحيد بينما $(I_{12},|)$ في (و٩ لها عنصران أكبران 12و 18 بينما المجموعة المرتبة في (ح) لها عناصر كبرى 4، 6 و9.

المجموعات المرتبية جيدا Well-ordered sets

المجموعة المرتبة كليا A تسمى **مرتبة ترتيبا جيدا** إذا كان كل مجموعة جزئية غير خالية B من A يكون لها عنصر أصغر. علاوة على ذلك، $(A,\leq)$ تسمى ترتيب **جيد**.

حيث أن A مرتبة كليا، ينتج أن أي مجموعة جزئية B تحتوي عنصر أصغري واحد وهذا العنصر يكون هو النصر الأصغر.

مثال ٣-١-٣٨. (أ) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مع علاقة الترتيب العادية $\leq$ تكون مرتبة جيدا.

(ب) $(\mathbb{Z},\leq)$ ليست مرتبة جيدا، لأن مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ليس لها عنصر أصغر.

(ج) $(\mathbb{Q},\leq)$ تكون ترتيب كلي ولكنه ليس ترتيب جيد.

(د) أي مجموعة منتهية مرتبة كليا تكون مرتبة جيدا.

الشبكيات Lattices

تعريف ٣-١-٣٩. **الشبكية** lattice هي مجموعة مرتبة بحيث كل عنصرين يكون لهما أصغر حد علوي lub وأكبر حد سفلي glb.

lub للعنصرين a و b في الشبكية يرمز لهما بالرمز $a\vee b$ و glb لهما يرمز له بالرمز $a\wedge b$.

مثال ٣-١-٤٠. (أ) نفرض U أي مجموعة، $(P(U),\subseteq)$ تكون شبكية حيث أصغر حد علوي للمجموعتين الجزئيتين B و C من U هو $B\cup C$ وأكبر حد سفلي لهما هو $B\cap C$.

(ب) أي مجموعة مرتبة كليا تكون شبكية حيث $a\vee b$ ببساطة هو أكبر العنصرين a و b. فعلى سبيل المثال مجموعة العداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مع علاقة الترتيب العادية $\leq$ تكون شبكية ولأي $a,b\in\mathbb{R}$ يكون $a\vee b=\max\{a,b\}$ و $a\wedge b=\min\{a,b\}$.

(ج) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مع علاقة يقسم تكون شبكية حيث $a \wedge b = \gcd(a,b)$ و $a \vee b = lcm(a,b)$، حيث $\gcd(a,b)$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و $lcm(a,b)$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b. علي سبيل المثال $6 \wedge 9 = 3$ و $6 \vee 9 = 18$.

(د) المجموعات المرتبة في شكل ٣-١-٢ (أ)، (ب)، (ج) و(د) كلها تكون شبكيات. (هـ) ليس شبكية، لايوجد $a \vee b$ لكل عنصرين. (ز) ليست شبكية، لايوجد $a \wedge b$ لكل عنصرين. (و) ليست شبكية، لايوجد $a \wedge b$ أو $a \vee b$ لكل عنصرين.

مبدأ التناظر Principle of duality

أي خاصية للشبكيات تظل صحيحة إذا استبدلنا $\le$ مع $\ge$ كل منهما بالأخرى و $\vee$ مع $\wedge$ خلال هذه الخاصية.

مبدأ التناظر يكون محقق لعوامل ثلاثة. أولا، $\le$ و $\ge$ كلاهما عاكسة ومتخالفة ومتعدية. ثانيا، glb تعرف باستبدال $\le$ مع $\ge$ في تعريف lub. ثالثا، أي خاصية للشبكيات تكون صحيحة إذا أمكن إثباتها من خلال خواص الإنعكاس والتخالف والتعدي لكل من $\le$ و $\ge$ ومن وجود lub و glb لأي عنصرين في الشبكية.

تمارين ٣-١

١- أكتب كل الثنائيات المرتبة في العلاقة R من $A = \{0,1,2,3,4\}$ إلى $B = \{0,1,2,3\}$ حيث $(a,b) \in R$ إذا وفقط إذا كان

(أ) $a = b$. (ب) $a + b = 4$. (ج) $a > b$. (د) $a | b$.

٢- لكل من العلاقات التالية على المجموعة $\{1,2,3,4\}$ حدد ما إذا كانت عاكسة، متماثلة، متخالفة أو ناقلة.

(أ) $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.

(ب) $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(ج) $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

(د) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(هـ) $\{(2,4),(4,2)\}$.

٣- حدد ما إذا كانت العلاقة R على مجموعة كل الناس عاكسة، متماثلة، متخالفة أو ناقلة، حيث $(a,b)\in R$ إذا وفقط إذا كان

(أ) a أطول من b.

(ب) a و b مولودان في نفس اليوم.

(ج) a و b لهما جد مشترك.

(د) a له الاسم الأول مثل b.

٤- حدد ما إذا كانت العلاقة R على مجموعة الأعداد الصحيحة عاكسة، متماثلة، متخالفة أو ناقلة حيث $(x,y)\in R$ إذا وفقط إذا كان

(أ) $x \neq y$.　　　(ب) $xy \geq 1$.

(ج) $x=y+1$ أو $x=y-1$.

(د) $x \equiv y \pmod 7$.　　　(هـ) x مضاعف y.

(و) x و y زوجيان معا أو فرديان معا.

(ز) $x=y^2$.　　　(ح) $x \geq y^2$.

٥- إعتبر العلاقات التالية على مجموعة الأعداد الحقيقية

$$R_1=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a>b\}$$

$$R_2=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\geq b\}$$

$$R_3=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a<b\}$$

$$R_4=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a\leq b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\}$$

$$R_6 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq b\}$$ أوجد

(أ) $R_1 \cup R_3$, $R_1 \cup R_5$, $R_2 \cap R_4$, $R_1 - R_2$.

(ب) $R_2 \cup R_4$, $R_3 \cup R_6$, $R_3 \cap R_6$, $R_6 - R_3$, $R_2 \oplus R_6$.

(ج) $R_1 \circ R_1$, $R_1 \circ R_2$, $R_1 \circ R_3$, $R_2 \circ R_3$, $R_3 \circ R_3$.

(د) $R_2 \circ R_1$, $R_2 \circ R_2$, $R_3 \circ R_6$, $R_5 \circ R_3$.

٦- نفرض R_1 هي علاقة "يقسم" و R_2 هي علاقة "مضاعف" على مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة. أوجد

(أ) $R_1 \cup R_2$. (ب) $R_1 \cap R_2$.

(ج) $R_1 - R_2$. (د) $R_2 - R_1$.

(هـ) $R_1 \oplus R_2$.

٧- نفرض R و S علاقتان عاكستان على المجموعة A . برهن على صحة أو عدم صحة العبارات التالية:

(أ) $R \cup S$ تكون عاكسة. (ب) $R \cap S$ تكون عاكسة.

(ج) $R - S$ تكون عاكسة. (د) $S \circ R$ تكون عاكسة.

٨- نفرض $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4)\}$

و $S = \{(1,3),(2,1),(2,2),(4,2)\}$. أوجد

(أ) $\text{dom}(R^{-1})$. (ب) $\text{range}(S^{-1})$.

(ج) $S \circ R$. (د) $(R \circ S)^{-1}$.

(هـ) $S^{-1} \circ R^{-1}$. (و) $\text{dom}(S \cup R)$.

(ز) $(R \cup S)^{-1}$. (ح) $\text{dom}(S - R)$.

(ط) $(S-R)^{-1}$. (ي) $(R\cap S)^{-1}$.

(ك) $\operatorname{dom}(R\cap S)$. (ل) $\operatorname{dom}(R)\cap\operatorname{dom}(S)$.

(م) $\operatorname{range}(R\cap S)$. (ن) $\operatorname{range}(R)\cap\operatorname{range}(S)$.

٩- نفرض R و S علاقتان من A إلى B. برهن أن:

(أ) $\operatorname{dom}(S\cup R)=\operatorname{dom}(S)\cup\operatorname{dom}(R)$.

(ب) $\operatorname{range}(R\cup S)=\operatorname{range}(R)\cup\operatorname{range}(S)$.

(ج) $\operatorname{dom}(S\cap R)\subseteq\operatorname{dom}(S)\cap\operatorname{dom}(R)$.

(د) $\operatorname{range}(R\cap S)\subseteq\operatorname{range}(R)\cap\operatorname{range}(S)$.

(هـ) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$.

(و) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

(ز) $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$.

(ح) $R\subseteq S \Leftarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$.

١٠- نفرض R، S و T ثلاث علاقات. برهن أن

(أ) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$.

(ب) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$.

(ج) $(R\circ S)-(R\circ T)\subseteq R\circ(S-T)$.

١١- نفرض R و S علاقتان على المجموعة A، بين ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خطأ

(أ) إذا كانت R متماثلة فإن R^{-1} تكون متماثلة.

(ب) إذا كانت R متخالفة فإن R^{-1} تكون متخالفة.

(ج) إذا كانت R عاكسة فإن $R\cap R^{-1}\neq\phi$.

(د) إذا كانت R متماثلة فإن $R \cap R^{-1} \neq \phi$.

(هـ) إذا كانت R متعدية و S متعدية فإن $R \cup S$ تكون متعدية.

(و) إذا كانت R متعدية و S متعدية فإن $R \cap S$ تكون متعدية.

(ز) إذا كانت R متخالفة و S متخالفة فإن $R \cup S$ تكون متخالفة.

(ح) إذا كانت R متخالفة و S متخالفة فإن $R \cap S$ تكون متخالفة.

(ط) إذا كانت R عاكسة و S عاكسة فإن $R \cup S$ تكون عاكسة.

(ي) إذا كانت R عاكسة و S عاكسة فإن $R \cap S$ تكون عاكسة.

١٢- نفرض l_1 و l_2 عنصران في مجموعة مرتبة L. برهن أنه إذا كان l_1 و l_2 لهما glb (lub) فإنه يكون وحيد.

١٣- بين أنه إذا كانت L مجموعة مرتبة لها عنصر أصغر (عنصر أكبر) فإن هذا العنصر يكون وحيد.

١٤- نفرض $L = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ مجموعة مرتبة بعلاقة الترتيب الجزئي "يقسم". حدد glb و lub لكل زوج من العناصر. هل هذه المجموعة المرتبة لها عنصر أصغر؟ هل لها عنصر أكبر؟

١٥- برهن أنه إذا كانت $(L,\vee,\wedge)$ شبكية و l_1 و l_2 عنصران في L فإن $(l_1 \vee l_2 = l_1) \Leftrightarrow (l_1 \wedge l_2 = l_2) \Leftrightarrow (l_2 \leq l_1)$.

١٦- نفرض L مجموعة مرتبة بها عنصر أصغر وعنصر أكبر. بين أن L تكون شبكية إذا كان لأي $x_1,x_2,y_1,y_2 \in L$، حيث $x_i \leq y_j$ $(i,j \in \{1,2\})$، يوجد عنصر $z \in L$ بحيث $x_i \leq z \leq y_j$ $(i,j \in \{1,2\})$.

١٧- الشبكية $(L,\vee,\wedge)$ تسمى مقياسية modular إذا كان لكل $l_1,l_2,l_3 \in L$ ، $(l_2 \leq l_1) \rightarrow (l_2 \vee (l_1 \wedge l_3) = l_1 \wedge (l_2 \vee l_3))$.
بين أنه في الشبكة المقياسية يكون

$$(l_2 \geq l_1) \rightarrow (l_2 \wedge (l_1 \vee l_3) = l_1 \vee (l_2 \wedge l_3)).$$

٢-٣ تمثيل العلاقات Representing Relations

توجد عدة طرق لتمثيل علاقة بين مجموعات منتهية. كما رأينا في فصل ٢-١ طريقة كتابة كل الثنائيات المرتبة للعلاقة. هناك طريقة أخرى لتمثيل العلاقة وهي استخدام الجدول. في هذا الفصل، سوف نناقش طرق بديلة لتمثيل العلاقات. واحدة من هذه الطرق هي طريقة المصفوفات 0-1 ، وهي المصفوفات التي جميع عناصرها إما 0 أو 1. الطريقة الأخرى باستخدام الرسم لتمثيل العلاقة ويسمى الرسومات الموجهة.

تمثيل العلاقات باستخدام المصفوفات

العلاقة بين مجموعتين منتهيتين يمكن تمثيلها باستخدام مصفوفات 0-1 . نفرض R علاقة من المجموعة $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ إلى المجموعة $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. العلاقة R يمكن تمثيلها بمصفوفة $M_R=[m_{ij}]$ ، حيث

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if} \quad (a_i,b_j)\in R\\ 0 & \text{if} \quad (a_i,b_j)\notin R\end{cases}.$$

مثال ٣-٢-١. نفرض $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{1,2\}$ و $R=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$. ماهي المصفوفة التي تمثل العلاقة R ؟

الحل: $M_R=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

مثال ٣-٢-٢. نفرض $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$. ماهي الثنائيات المرتبة في العلاقة الممثلة بالمصفوفة

$$M_R=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} ؟$$

الحل: حيث أن R تتكون من الثنائيات المرتبة (a_i, b_j) بحيث $m_{ij} = 1$ ، فإن $R = \{(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_2,b_4),(a_3,b_1),(a_3,b_3),(a_3,b_5)\}$.

مصفوفة العلاقة على مجموعة، والتي تكون مربعة، يمكن استخدامها لتحديد ما إذا كانت العلاقة لها خواص معينة. R تكون عاكسة إذا وفقط إذا كان $(a_i, a_i) \in R$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$ ، حيث $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ هي المجموعة المعرف علها العلاقة R. لذلك R تكون عاكسة إذا وفقط إذا كان $m_{ii} = 1$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. أي أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة تكون كلها 1.

العلاقة R تكون متماثلة إذا وفقط إذا كان $(a,b) \in R$ يؤدي إلى $(b,a) \in R$. نتيجة لذلك العلاقة R على المجموعة $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ تكون متماثلة إذا وفقط إذا كان $(a_j, a_i) \in R$ كلما كان $(a_i, a_j) \in R$. لذلك R تكون متماثلة إذا وفقط إذا كان $m_{ji} = 1$ كلما كان $m_{ij} = 1$. هذا يعني أيضا أن $m_{ji} = 0$ كلما كان $m_{ij} = 0$. وبالتالي R تكون متماثلة إذا وفقط إذا كان $m_{ij} = m_{ji}$ لكل $i, j = 1,2,\ldots,n$. أي أن المصفوفة تكون متماثلة.

مثال ٣-٢-٣. نفرض أن العلاقة R على مجموعة ممثلة بالمصفوفة

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هل R عاكسة، متماثلة ؟

الحل: حيث أن كل عناصر القطر في هذه المصفوفة تساوي 1 ، R تكون عاكسة. علاوة على ذلك M_R متماثلة، من ذلك ينتج أن R تكون متماثلة.

تعريف ٣-٢-٤. نفرض $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتي 1-0 من درجة $n \times n$. إذن **ربط** join المصفوفتين A و B ، يرمز له بالرمز

$A \vee B$ ، هو مصفوفة 0-1 حيث العنصر رقم ij فيها هو $a_{ij} \vee b_{ij}$.
ملتقى meet المصفوفتين A و B ، يرمز له بالرمز $A \wedge B$ ، هو مصفوفة 0-1 حيث العنصر رقم ij فيها هو $a_{ij} \wedge b_{ij}$.

تعريف ٣-٢-٥. نفرض $A=[a_{ij}]$ مصفوفة 0-1 من درجة $m \times k$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة 0-1 من درجة $k \times n$. الضرب البولياني Boolean product لـ A و B ،يرمز له بالرمز $A \odot B$ ، هو المصفوفة من درجة $m \times n$ التي عنصرها رقم ij هو c_{ij} حيث

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

مثـــال ٣-٢-٦. أوجـــد ربـــط وملتقـــى المـــصفوفتين $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

الحل:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 0 \\ 0\vee 1 & 1\vee 1 & 0\vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0 \\ 0\wedge 1 & 1\wedge 1 & 0\wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ٣-٢-٧. أوجد الضرب البولياني للمصفوفتين A و B حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 1)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 0)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0 \\ 0\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

العمليات الثنائية الربط والملتقي يمكن استخدامهما لإيجاد المصفوفات التي تمثل إتحاد وتقاطع علاقتين كما يلي:

$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$ و $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$.

مثال ٣-٢-٨. نفرض أن العلاقتان R_1 و R_2 على مجموعة A ممثلتين بالمصفوفتين

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ، M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماهي المصفوفات التي تمثل $R_1 \cup R_2$ و$R_1 \cap R_2$ ؟

الحل:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الآن نوجه اهتمامنا إلى عملية تحديد مصفوفة تحصيل علاقتين. هذه المصفوفة يمكن إيجادها باستخدام الضرب البولياني للمصفوفتين كما يلي:

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

مثال ٣-٢-٩. أوجد المصفوفة التي تمثل العلاقة $S\circ R$ حيث المصفوفتان الممثلتان للعلاقتين R و S هما

$$M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل: المصفوفة التي تمثل $S\circ R$ هي

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعريف ٣-٢-١٠. نفرض $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ مصفوتين $0-1$ من درجة $m\times n$. نقول أن A تسبق precedes أو أقل من B less than ونكتب $A \le B$، إذا كان $a_{ij} \le b_{ij}$ لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

مثال ٣-٢-١١. نفرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. واضح أن $A \le B$.

تعريف ٣-٢-١٢. نفرض $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ مصفوفة $0-1$ من درجة $m\times n$. مدور A transpose، يرمز له بالرمز A^t هو المصفوفة $A^t = [a^*_{ji}]_{n\times m}$، حيث $a^*_{ji} = a_{ij}$ لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

مثال ٣-٢-١٣. نفرض $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، إذن $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

نظرية ٣-٢-١٤. نفرض A مجموعة عدد عناصرها n و R علاقة على A. نفرض M_R هي مصفوفة العلاقة R. إذن

(أ) R تكون عاكسة إذا وفقط كان $I_n \le M_R$.

(ب) R تكون متماثلة إذا وفقط إذا كان $M_R = M_R^t$.

(ج) R تكون ناقلة إذا وفقط إذا كان $M_R \odot M_R = M_R^2 \le M_R$.

(د) R تكون متخالفة إذا وفقط إذا كان $M_R \wedge M_R^t \le I_n$.

حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من درجة n (المصفوفة المربعة من درجة n والتي جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي كل منها يساوي 1).

البرهان: ينتج من تعريف خواص العلاقات وخواص المصفوفات $0-1$ وسوف نبرهن (ج) ونترك بقية الأجزاء كتمرين للقارئ.

نفرض $M_R^2 \le M_R$. إذا كان $(x,y),(y,z) \in R$ فإنه يوجد 1 في صف x وعمود y و 1 في صف y وعمود z للمصفوفة M_R. نتيجة لذلك في M_R^2 يوجد 1 في صف x وعمود z. هذا يعني أنه يجب أن يكون في M_R يوجد 1 في صف x وعمود z لأن $M_R^2 \le M_R$. لذلك $(x,z) \in R$ وتكون R ناقلة.

من جهة أخرى، نفرض أن R ناقلة ونفرض أن M_R هي مصفوفة R.
نفرض s_{xz} هو العنصر في الصف x والعمود z في M_R^2 حيث $s_{xz} = 1$.

حيث أن $s_{xz}=1$ في M_R^2، فإنه يوجد على الأقل $y\in A$ حيث $m_{xy}=m_{yz}=1$ في M_R. هذا يحدث فقط إذا كان xRy و yRz.
وحيث أن R ناقلة فيكون xRz. لذلك $m_{xz}=1$ و يكون $M_R^2\le M_R$.

تمثيل العلاقات باستخدام الرسومات الموجهة

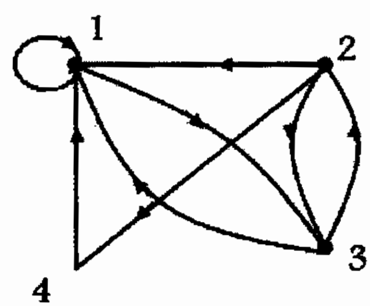
توجد طريقة أخرى مهمة لتمثيل علاقة على مجموعة باستخدام التمثيل التخطيطي. كل عنصر في المجموعة يمثل بنقطة وكل ثنائي يمثل باستخدام قطعة مستقيمة (أو قوس) يشار إليها بسهم.

تعريف ٣-٢-١٠. الرسم الموجه directed graph، يتكون من مجموعة من النقاط V، تسمى رؤوس vertices مع مجموعة E من الثنائيات المرتبة من عناصر V يسمى كل منها حافة edge أو وصلة arc . الرأس a تسمى الرأس الابتدائي initial للحافة (a,b) والرأس b يسمى الرأس النهائي terminal لهذه الحافة. الحافة على الصورة (a,a) يمثل بقوس يبدأ من الرأس a وينتهي عندها في صورة دائرة وتسمى عروة loop.

مثال ٣-٢-١١. الرسم الموجه للعلاقة

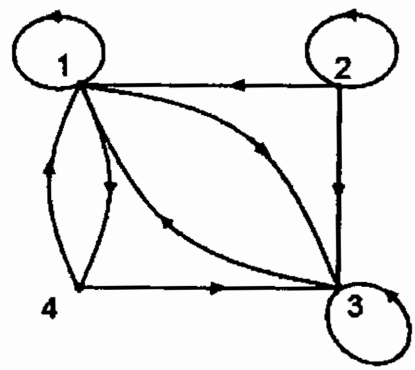
$$R=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

على المجموعة $\{1,2,3,4\}$ هو الرسم المبين في شكل ٣-٢-١



شكل ٣-٢-١

مثال ٣-٢-١٢. ماهي الثنائيات المرتبة في العلاقة الممثلة بالرسم الموجه في شكل ٣-٢-٢.



شكل ٣-٢-٢

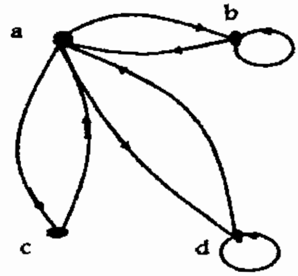
الحل: الثنائيات المرتبة في العلاقة هي

$$R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$$

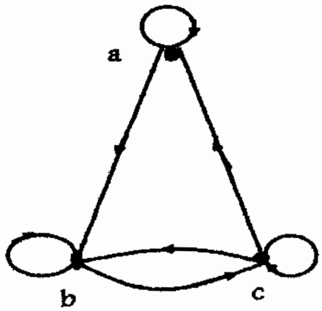
كل زوج من هذه الأزواج يناظر حافة في الرسم الموجه، $(2,2)$ و $(3,3)$ كل منها تناظر عروة.

الرسم الموجه الذي يمثل علاقة يمكن استخدامه لتحديد ما إذا كانت العلاقة تحقق الخواص المختلفة. فعلى سبيل المثال العلاقة تكون عاكسة إذا وفقط إذا كان يوجد عروة عند كل رأس من رؤوس الشكل الموجه. العلاقة تكون متماثلة إذا وفقط إذا كان بين كل رأسين مختلفين يوجد حافة لها اتجاهين متعاكسين. بالمثل العلاقة تكون متخالفة إذا كان لايوجد أي حواف لها اتجاهات متعاكسة بين أي رأسين مختلفين في الرسم. أخيرا، العلاقة تكون ناقلة إذا وفقط إذا كان كلما كان يوجد حافة من الرأس x إلى الرأس y وحافة من الرأس y إلى الرأس z ، فإنه توجد حافة من x إلى z.

مثال ٣-٢-١٣. حدد ما إذا كانت العلاقة الممثلة بالرسم الموجه في شكل ٣-٢-٣عاكسة، متماثلة، متخالفة أو ناقلة.



الرسم الموجه S



الرسم الموجه R

شكل ٣-٢-٣

الحل: لانه يوجد عروة عن كل رأس في الرسم R ، فإن العلاقة تكون عاكسة. R ليست متماثلة وليست متخالفة لأنه يوجد حافة من a إلى b ولكن لاتوجد حافة من b إلى a كذلك توجد حواف في كلا الاتجاهين تربط b و c. أخيرا R ليست ناقلة لأنه توجد حافة من a إلى b وتوجد حافة من b إلى c ولكن لا توجد حافة من a إلى c.

حيث أنه لاتوجد عروة عند كل رأس في الرسم الموجه للعلاقة S، فإن هذه العلاقة ليست عاكسة. العلاقة متماثلة وليست متخالفة، لأن كل حافة بين رأسين مختلفين تناظرها حافة أخرى بين نفس الرأسين ولكن في الاتجاه المعاكس. أيضا ليس من الصعب أن نرى من الرسم الموجه أن العلاقة ليست ناقلة، لأن (c,a) و (a,b) تنتمي إلى S ولكن (c,b) لا تنتمي إلى S.

تمارين ٣-٢

١- مثل كل من هذه العلاقات على $\{1,2,3\}$ بمصفوفة

(أ) $\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$.

(ب) $\{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$.

(ج) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$.

(د) $\{(1,3),(3,1)\}$.

٢- أكتب كل الثنائيات المرتبة للعلاقة على $\{1,2,3\}$ التي تناظر هذه المصفوفات (حيث الصفوف والأعمدة تناظر الأعداد الصحيحة مرتبة تصاعديا).

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

٣- نفرض R_1 و R_2 علاقتان على مجموعة A ممثلتان بالمصفوفتين

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ، \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

أوجد المصفوفات التي تمثل

(أ) $R_1 \cup R_2$. (ب) $R_1 \cap R_2$. (ج) $R_2 \circ R_1$.

(د) $R_1 \circ R_1$.

٤- مثل كل من هذه العلاقات على $\{1,2,3,4\}$ بمصفوفة (العناصر مرتبة تصاعديا)

(أ) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

(ب) $\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)\}$.

(ج) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2)\}$.

(د) $\{(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}$

٥- أكتب الثنائيات المرتبة في العلاقة على $\{1,2,3,4\}$ التي تناظر المصفوفات (حيث الصفوف والأعمدة تناظر الأعداد الصحيحة مرتبة تصاعديا).

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(ج) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

٦- كيف يمكن استخدام المصفوفة التي تمثل علاقة R على مجموعة A لتحديد ما إذا كانت العلاقة ليست عاكسة ؟

٧- حدد ما إذا كانت العلاقات الممثلة بالمصفوفات في تمرين 2 عاكسة، ليست عاكسة، متماثلة، متخالفة، و/أو ناقلة.

٨- حدد ما إذا كانت العلاقات الممثلة بالمصفوفات في تمرين 5 عاكسة، ليست عاكسة، متماثلة، متخالفة، و/أو ناقلة.

٩- كم صفر تحتويه المصفوفة الممثلة للعلاقة R على $A=\{1,2,3,\ldots,1000\}$ إذا كانت R هي

(أ) $\{(a,b):a>b\}$ ؟ (ب) $\{(a,b):a\neq b\}$ ؟

(ج) $\{(a,b):a=b+1\}$ ؟ (د) $\{(a,b):ab=1\}$ ؟

١٠- ارسم الرسم الموجه الممثل لكل علاقة في تمرين 2.

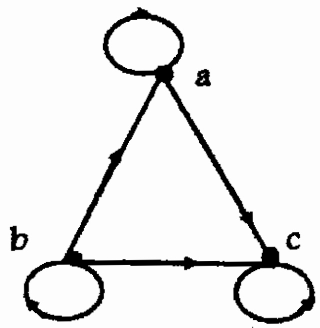
١١- ارسم الرسم الموجه الممثل لكل علاقة في تمرين 5.

١٢- ارسم الرسم الموجه الممثل للعلاقة

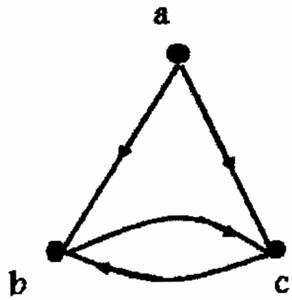
$\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b)\}$.

١٣- أكتب الثنائيات المرتبة في العلاقة الممثلة بالرسم الموجه

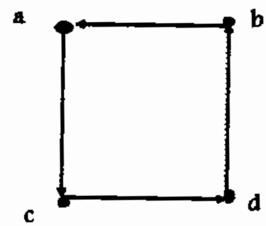
(أ)



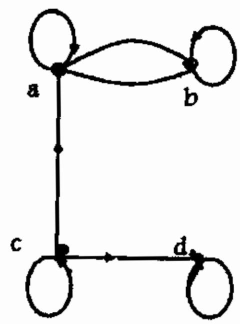
(ب)



(ج)



(د)



١٤- كم مصفوفة $0-1$ A من درجة 6×6 بحيث $A=A^t$؟

١٥- نفرض $A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$. كم مصفوفة $0-1$ B بحيث $A\le B$؟ كم مصفوفة $0-1$ C بحيث $C\le A$؟

٣-٣ علاقة التكافؤ Equivalence Relations

العددان الصحيحان a و b يرتبطان بعلاقة "التآلف بمعيار 4" عندما 4 تقسم $a-b$. سوف نبين أن هذه العلاقة تكون عاكسة، متماثلة وناقلة. ليس من الصعب بيان أن a ترتبط مع b إذا وفقط إذا كان لهما نفس الباقي عند القسمة على 4. من ذلك ينتج أن هذه العلاقة تجزئ مجموعة الأعداد الصحيحة إلى فصول مختلفة. عندما نهتم فقط بالباقي الذي يتركه العدد الصحيح عند القسمة على 4 ، نحتاج فقط لمعرفة الفصل الذي ينتمي إليه، وليس لقيمته الخاصة.

هذه العلاقة هي مثال لعلاقة تكافؤ، وهي العلاقة التي تكون عاكسة، متماثلة وناقلة. في هذا الفصل سوف نبين أن هذه العلاقة تقسم المجموعة إلى فصول منفصلة من العناصر المتكافئة. علاقات التكافؤ تظهر عندما تكون عنايتنا فقط بعنصر في مجموعة هل هو في فصل خاص من العناصر بدلا عن الاهتمام بهذا العنصر على وجه الخصوص.

علاقات التكافؤ Equivalence Relations

تعريف ٣-٣-١. العلاقة على مجموعة A تسمى **علاقة تكافؤ** إذا كانت عاكسة، متماثلة وناقلة.

علاقات التكافؤ تكون هامة في الرياضيات وعلوم الحاسب. أحد أسباب هذه الأهمية أنه في علاقة التكافؤ، عندما يكون عنصران مرتبطان بهذه العلاقة فإنه يكفل لنا القول بأنهما متكافئان.

تعريف ٣-٣-٢. العنصران a و b المرتبطان بعلاقة تكافؤ يقال أنهما **متكافئان equivalent**. الرمز $a \sim b$ يستخدم للرمز على أن a و b متكافئان بالنسبة لعلاقة تكافؤ معينة.

مثال ٣-٣-٣. نفرض R علاقة على مجموعة الأعداد الصحيحة بحيث aRb إذا وفقط إذا كان $a=b$ أو $a=-b$. سبق في مثال ٣-١-١٧ و ٣-١-٢٠ بيان أن هذه علاقة عاكسة، متماثلة وناقلة. لذلك R تكون علاقة تكافؤ.

مثال ٣-٣-٤. نفرض R علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث aRb إذا وفقط إذا كان $a-b$ عدد صحيح. هل R تكون علاقة تكافؤ ؟

الحل: لأن $a-a=0$ عدد صحيح لكل عدد حقيقي a ، aRa. لذلك، R تكون عاكسة. الآن نفرض أن aRb. إذن $a-b$ يكون عدد صحيح، ومن ثم $b-a=-(a-b)$ يكون أيضا عدد صحيح ويكون bRa ، أي أن R متماثلة. أخيرا، إذا كان aRb و bRc فإن $a-b$ و $b-c$ يكونا عددان صحيحان. إذن $a-c=(a-b)+(b-c)$ يكون أيضا عدد صحيح وبالتالي يكون aRc وتكون R ناقلة. نتيجة لذلك، R تكون علاقة تكافؤ.

مثال ٣-٣-٥. الإئتلاف معيار m Congruence Modulo m. نفرض m عدد صحيح موجب حيث $m>1$. بين أن العلاقة $R=\{(a,b): a\equiv b \pmod{m}\}$ تكون علاقة تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة، حيث $a\equiv b \pmod{m}$ إذا وفقط إذا كان m تقسم $a-b$.

الحل: لاحظ أن $a-a=0$ تقسم m لأن $0=0\cdot m$. إذن $a\equiv a \pmod{m}$، ومن ثم هذه العلاقة تكون عاكسة. الآن نفرض أن $a\equiv b \pmod{m}$ ، لذلك $a-b=km$ ، حيث k عدد صحيح. من ذلك ينتج أن $b-a=(-k)m$ ويكون $b\equiv a \pmod{m}$ وبالتالي فالعلاقة متماثلة. أخيرا إذا كان $a\equiv b \pmod{m}$ و $b\equiv c \pmod{m}$ فإنه يوجد عددان صحيحان s و t بحيث $a-b=sm$ و $b-c=tm$. بالجمع نحصل على $a-c=(a-b)+(b-c)=sm+tm=(s+t)m$. لذلك $a\equiv c \pmod{m}$. إذن علاقة الائتلاف معيار m علاقة ناقلة وبالتالي فهي علاقة تكافؤ.

إذا كان $a\equiv b \pmod{m}$ ، من تعريف الائتلاف، $m\,|\,(a-b)$. هذا يعني أنه يوجد عدد صحيح k بحيث $a-b=km$ ومنها يكون $a=b+km$. من جهة أخرى، إذا كان يوجد عدد صحيح k بحيث $a=b+km$ فإن $a-b=km$ وتكون $m\,|\,(a-b)$. إذن $a\equiv b \pmod{m}$. من هذه المناقشة يمكننا صياغة مايلي: "نفرض m عدد صحيح موجب. الأعداد الصحيحة a و b تكون متآلفة معيار m إذا وفقط إذا كان يوجد عدد صحيح k بحيث $a=b+km$".

مثال ٣-٣-٦. نفرض R هي علاقة على مجموعة سلاسل حروف اللغة الانجليزية بحيث aRb إذا وفقط إذا كان $L(a)=L(b)$ حيث $L(x)$ هو طول السلسلة x. هل R علاقة تكافؤ ؟

الحل: لأن $L(a)=L(a)$، ينتج أن aRa كلما كانت a سلسلة وبالتالي R تكون عاكسة. الآن نفرض أن aRb، لذلك $L(a)=L(b)$ ومن ثم يكون bRa لأن $L(b)=L(a)$، أي أن R متماثلة. أخيرا، إذا كان aRb و bRc فإن $L(a)=L(b)$ و$L(b)=L(c)$. إذن $L(a)=L(c)$ ومنها يكون aRc وتكون العلاقة R ناقلة وبالتالي علاقة تكافؤ.

مثال ٣-٣-٧. بين أن علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست علاقة تكافؤ.

الحل: سبق في مثال ٣-١-١٣ ومثال ٣-١-١٩ بيان أن هذه العلاقة عاكسة ومتعدية. ومع ذلك فهذه العلاقة ليست متماثلة لأن $1|2$ ولكن $2\nmid 1$. من ذلك نستنتج أن علاقة "يقسم" على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ليست علاقة تكافؤ.

فصول التكافؤ Equivalence Classes

نفرض A مجموعة كل الطلاب خريجي كليات العلوم. نعتبر العلاقة R على A التي تتكون من كل الثنائيات (x,y) حيث x و y تخرجا من نفس الجامعة. إذا أعطينا خريج x ، يمكننا تكوين مجموعة كل الخريجين المكافئين لـ x بالنسبة للعلاقة R. هذه المجموعة تتكون من كل الخريجين الذين تخرجوا من كلية العلوم من الجامعة التي تخرج منها x. هذه المجموعة الجزئية من A تسمى فصل تكافؤ للعلاقة R.

تعريف ٣-٣-٨. نفرض R علاقة تكافؤ على المجموعة A. مجموعة كل العناصر من A التي ترتبط مع العنصر a بالنسبة للعلاقة R يسمى **فصل تكافؤ** a equivalence class ويرمز له بالرمز $[a]_R$. عندما تكون لدينا علاقة واحدة تحت الاعتبار يمكن حذف الدليل R ونكتب $[a]$ للإشارة إلى

فصل التكافؤ هذا. أحيانا تستخدم رموز أخرى لفصول التكافؤ منها $\overline{a}$ و $C(a)$.

بتعبير آخر، فصل تكافؤ العنصر a لعلاقة التكافؤ R على المجموعة A هو

$$[a]=\{s \in A:(a,s)\in R\}$$

إذا كان $b\in[a]$، فإن b يسمى ممثل representative لفصل التكافؤ هذا. أي عنصر في فصل التكافؤ يمكن أن يستخدم كممثل لفصل التكافؤ هذا.

مثال ٣-٣-٩. ما هو فصل التكافؤ لعدد صحيح بالنسبة لعلاقة التكافؤ في مثال ٣-٣-٣ ؟

الحل: حيث أن هذا العدد الصحيح يكون مكافئ لنفسه وللعدد سالبه، ينتج أن $[a]=\{a,-a\}$. هذه المجموعة تحتوي عددين صحيحين إلا إذا كان $a=0$. على سبيل المثال $[7]=\{7,-7\}$، $[-5]=\{-5,5\}=[5]$ و $[0]=\{0\}$.

مثال ٣-٣-١٠. أوجد فصول التكافؤ للعددين 0 و 1 بالنسبة لعلاقة الائتلاف معيار 4.

الحل: فصل تكافؤ 0 يتكون من كل الأعداد الصحيحة a بحيث $a\equiv 0 \pmod 4$. الأعداد الصحيحة في هذا الفصل هي التي تقبل القسمة على 4. لذلك فصل تكافؤ 0 لهذه العلاقة هو

$$[0]=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$$

فصل تكافؤ 1 يتكون من كل الأعداد الصحيحة a بحيث $a\equiv 1 \pmod 4$. الأعداد الصحيحة في هذا الفصل هي التي لها الباقي 1 عند القسمة على 4. لذلك فصل تكافؤ 1 لهذه العلاقة هو

$$[1]=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$$

في المثال السابق أوجدنا فصول التكافؤ للعددين 0 و 1 بالنسبة لعلاقة الائتلاف معيار 4. هذا المثال يمكن تعميمه باستبدال 4 بأي عدد صحيح موجب m. فصول التكافؤ لعلاقة الائتلاف معيار m تسمى فصول الائتلاف

معيار m congruent classes modulo. فصل ائتلاف العدد الصحيح a معيار m يرمز له بالرمز $[a]_m$، لذلك

$$[a]_m = \{..., a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, ...\}$$

مجموعة كل فصول الائتلاف معيار m يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}_m$. واضح أن

$$\mathbb{Z}_m = \{[0],[1],[2],...,[m-1]\}$$

لكل $[a],[b] \in \mathbb{Z}_m$ نعرف الجمع $(+)$ والضرب $(\cdot)$ كما يلي:

$[a]+[b]=[a+b]$ و $[a]\cdot[b]=[ab]$. على سبيل المثل في حالة $m=7$، $[2]+[6]=[2+6]=[8]=[1]$ و $[2][6]=[12]=[5]$.

فصول التكافؤ والتجزيء

نفرض $\mathbb{Z}$ مجموعة كل الأعداد الصحيحة ونفرض R هي علاقة ائتلاف الأعداد الصحيحة معيار 2. يمكننا التحقق من أن R تقسم $\mathbb{Z}$ إلى مجموعتين منفصلتين، مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ومجموعة الأعداد الصحيحة الفردية واضح أن كل عددين زوجيين يكونا متآلفين معيار 2 ، كذلك كل عددين فرديين يكونا متآلفين معيار 2 . هاتان المجموعتان هما فصلا التكافؤ لعلاقة الائتلاف معيار 2. هذه المفاهيم نناقشها في ما يلي.

نظرية ٣-٣-١١. نفرض R علاقة تكافؤ على المجموعة A. العبارات التالية تكون متكافئة لكل $a,b \in A$:

(i) aRb . (ii) $[a]=[b]$. (iii) $[a]\cap[b]\neq\phi$.

البرهان: أولا نبرهن أن $(i) \to (ii)$. نفرض أن aRb، ونفرض $c\in[a]$. إذن aRc. حيث أن aRb و R متماثلة، إذن bRa. علاوة على ذلك، حيث أن R ناقلة و bRaو aRc، ينتج أن bRc. لذلك $c\in[b]$. وهذا يبين أن $[a]\subseteq[b]$. بالمثل يمكن إثبات أن $[b]\subseteq[a]$. إذن $[a]=[b]$.

ثانيا نبرهن أن $(ii)\to(iii)$. نفرض أن $[a]=[b]$، إذن $[a]\cap[b]\neq\phi$ ، حيث أن $a\in[a]$.

أخيرا نبرهن أن $(iii) \rightarrow (i)$. نفرض أن $[a] \cap [b] \neq \phi$. إذن يوجد عنصر c بحيث $c \in [a]$ و $c \in [b]$. بتعبير آخر aRc و bRc. إذن aRc و cRb. وهذا يؤدي إلى aRb.

حيث أن $(i) \rightarrow (ii)$ ، $(ii) \rightarrow (iii)$ و $(iii) \rightarrow (i)$ فإن العبارات الثلاث (i)، (ii) و (iii) تكون متكافئة.

الآن نبين كيف أن علاقة تكافؤ على مجموعة A تجزئ المجموعة. نفرض R علاقة تكافؤ على مجموعة A. إتحاد فصول تكافؤ العلاقة R يكون هو كل A ، لأن إي عنصر a في A يكون في فصل التكافؤ الخاص به، $[a]_R$. بتعبير آخر

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

بالإضافة إلى ذلك، من نظرية ٣-٣-١١، ينتج أن فصول التكافؤ تكون إما متساوية أو غير متقاطعة، لذلك $[a]_R \cap [b]_R = \phi$ عندما $[a]_R \neq [b]_R$.

هاتان الملاحظتان تبين أن فصول التكافؤ تكون تجزيء للمجموعة A ، لأنها تقسم A إلى مجموعات جزئية منفصلة. بصورة أكثر دقة **التجزيء** partition لمجموعة S هو تجمع من المجموعات الجزئية من S بحيث تكون هذه المجموعات الجزئية منفصلة واتحادها يساوي S. بتعبير آخر تجمع المجموعات الجزئية $A_i , i \in I$ (حيث I مجموعة ترقيم) يكون تجزيء لمجموعة S إذا وفقط إذا كان

$A_i \neq \phi$ لكل $i \in I$،

$A_i \cap A_j = \phi$ كلما كان $i \neq j$،

و $$\bigcup_{i \in I} A_i = S$$

رأينا كيف أن فصول التكافؤ لعلاقة تكافؤ على مجموعة تكون تجزيء لهذه المجموعة. المجموعات الجزئية في هذا التجزيء هي فصول التكافؤ.

والعكس، كل تجزيء لمجموعة يمكن أن يكون فصول تكافؤ. أي عنصران يكونا متكافئان بالنسبة لهذه العلاقة إذا وفقط إذا كانا ينتميان إلى نفس المجموعة الجزئية من التجزيء. لكي نرى ذلك، نفرض أن $\{A_i : i \in I\}$ تجزيء للمجموعة S. نفرض R علاقة على S تتكون من كل الثنائيات المرتبة (x,y) بحيث أن x و y ينتميان إلى نفس المجموعة الجزئية A_i من التجزيء. لبيان أن R علاقة تكافؤ يجب أن نبين أنها عاكسة، متماثلة ناقلة. حيث أن a تنتمي إلى نفس المجموعة مثل نفسها، إذن $(a,a) \in R$ لكل $a \in S$ ومن ثم R تكون عاكسة. إذا كانت $(a,b) \in R$ فإن a و b ينتميان إلى نفس المجموعة من التجزيء، وبالتالي b و a ينتميان إلى نفس المجموعة من التجزيء وهذا يؤدي إلى $(b,a) \in R$ وتكون R متماثلة. أخيرا، إذا كان $(a,b) \in R$ و $(b,c) \in R$ فإن a و b ينتميان إلى نفس المجموعة الجزئية من التجزيء ولتكن X، b و c ينتميان إلى نفس المجموعة من التجزيء ولتكن Y. إذن $b \in X \cap Y$. وحيث أن المجموعات الجزئية في التجزيء تكون إما غير متقاطعة أو متساوية، فإن $X = Y$. نتيجة لذلك يكون a و c تنتميان إلى نفس المجموعة الجزئية من التجزيء، X، لذلك $(a,c) \in R$ وتكون R ناقلة وبالتالي علاقة تكافؤ.

النظرية التالية تلخص لنا المناقشة السابقة

نظرية ٣-٣-١٢. نفرض R علاقة تكافؤ على مجموعة S . إذن فصول تكافؤ R تكون تجزيء للمجموعة S. وعلى العكس، إذا أعطينا تجزيء $\{A_i : i \in I\}$ للمجموعة S، فإنه توجد علاقة تكافؤ R تكون A_i، $i \in I$ هي فصول التكافؤ لها.

مثال ٣-٣-١٣. أكتب كل الثنائيات المرتبة في علاقة التكافؤ المولدة بالتجزيء $A_1 = \{1,2,3\}$، $A_2 = \{4,5\}$ و $A_3 = \{6\}$ للمجموعة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

الحل: المجموعات الجزئية في التجزيء تكون هي فصول تكافؤ العلاقة R. الثنائي (a,b) ينتمي لـ R إذا وفقط إذا كان a و b في نفس المجموعة

الجزئية من التجزيء. إذن الثنائيات المرتبة $(1,1)$ ، $(1,2)$ ، $(1,3)$ ، $(2,2)$، $(2,3)$ و، $(3,3)$ تنتمي إلى R لأن $A_1=\{1,2,3\}$ فصل تكافؤ. الثنائيات المرتبة $(4,4)$، $(4,5)$، $(5,4)$ و $(5,5)$ تنتمي إلى R لأن $A_2=\{4,5\}$ فصل تكافؤ. أخيرا الثنائي المرتب $(6,6)$ ينتمي إلى R لأن $A_3=\{6\}$ فصل تكافؤ. لاتوجد ثنائيات مرتبة أخرى تنتمي إلى غير التي هذه التي أشرنا إليها.

فصول ائتلاف الاعداد الصحيحة معيار m توضيح طبيعي لنظرية ٣-٣-١٢ يوجد m فصل ائتلاف مختلفة معيار m ، تناظر m باقي مختلفة ممكنة $0,1,2,\dots,m-1$ عند قسمة عدد صحيح على m. فصول الائتلاف المختلفة والتي عددها m يرمز لها كما يلي $[0]_m,[1]_m,\dots,[m-1]_m$، هذه تكون تجزيء لمجموعة الاعداد الصحيحة.

تمارين ٣-٣

١- أي من العلاقات على مجموعة كل الناس تكون علاقة تكافؤ ؟ حدد خواص علاقة التكافؤ التي تفقدها العلاقات الأخرى.

(أ) $\{(a,b)$: a و b لهما نفس العمر$\}$.

(ب) $\{(a,b)$: a و b لهما نفس الوالدين$\}$.

(ج) $\{(a,b)$: a و b تقابلا$\}$.

(د) $\{(a,b)$: a و b تتحدثان لغة مشتركة$\}$.

٢- أي من العلاقات التالية على مجموعة كل الرواسم من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ تكون علاقة تكافؤ ؟ العلاقة التي ليست علاقة تكافؤ حدد الخواص التي تفقدها.

(أ) $\{(f,g): f(1)=g(1)\}$.

(ب) $\{(f,g): f(0)=g(0) \text{ or } f(1)=g(1)\}$.

(ج) $\{(f,g): f(x)-g(x)=1\}$.

(د) $\{(f,g): f(0)=g(1) \text{ and } f(1)=g(0)\}$.

٣- نفرض A مجموعة غير خالية و f راسم نطاقه A. نفرض R علاقة على A تتكون من كل الثنائيات المرتبة (x,y) بحيث $f(x)=f(y)$.

(أ) بين أن R تكون علاقة تكافؤ على A.

(ب) ماهي فصول تكافؤ R ؟

٤- أكتب الثنائيات المرتبة في علاقة التكافؤ المولدة بالتجزيئات التالية للمجموعة $\{0,1,2,3,4,5\}$.

(أ) $\{0\},\{1,2\},\{3,4,5\}$.

(ب) $\{0,1\},\{2,3\},\{4,5\}$.

(ج) $\{0,1,2\},\{3,4,5\}$.

(د) $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$.

٥- أكتب الثنائيات المرتبة في علاقة التكافؤ المولدة بالتجزيئات التالية للمجموعة $\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

(أ) $\{a,b\}$ ،$\{c,d\}$ ،$\{e,f,g\}$.

(ب) $\{a\}$ ،$\{b\}$ ،$\{c,d\}$ ، $\{e,f\}$ ،$\{g\}$.

(ج) $\{a,c,e,f\}$ ،$\{b,d\}$ ،$\{g\}$.

٦- أي من التجمعات التالية تكون تجزيئا للمجموعة $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ ؟

(أ) $\{-3,-1,1,3\},\{-2,0,2\}$.

(ب) $\{-3,-2,1,0\},\{0,1,2,3\}$.

(ج) $\{-3,3\},\{-2,2\},\{-1,1\},\{0\}$.

(د) $\{-1,1\}$, $\{-3,-2,2,3\}$.

٧- نفرض R و S علاقتي تكافؤ على المجموعة A. أثبت أن

(أ) $S \circ R$ تكون علاقة تكافؤ على A إذا وفقط إذا كان $R \circ S = S \circ R$.

(ب) $S \cup R$ تكون علاقة تكافؤ على A إذا وفقط إذا كان $R \circ S \subseteq R \cup S$.

(ج) $R \cap S$ تكون علاقة تكافؤ على A.