الباب الرابع

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

العديد من العبارات الرياضية تنص على أن خاصية ما تكون محققة لكل الأعداد الحقيقية الموجبة. من الأمثلة على هذه العبارات، لكل عدد صحيح موجب n: $n! \le n^n$ ؛ $n^3 - n$ تقبل القسمة على 3 ؛ المجموعة التي بها n عنصر لها 2^n مجموعة جزئية ؛ و مجموع الـ n الأولى من الأعداد الصحيحة الموجبة يساوي $n(n+1)/2$.

الهدف الأساسي من هذا الفصل هو إعطاء توضيح لمفهوم الاستنتاج الرياضي. البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي له جزأين. أولا، يبين أن تلك العبارة تكون محققة للعدد الصحيح الموجب 1. ثانيا، يبين أنه إذا كانت العبارة محققة لعدد صحيح موجب فإنها تكون صحيحة للعدد الأكبر التالي له مباشرة. الاستنتاج الرياضي وضع على أساس قاعدة الاستدلال التي تخبرنا أنه إذا كان $P(1)$ و $\forall k(P(k) \to P(k+1))$ كلاهما صادق لنطاق الاعداد الصحيحة الموجبة، فإن $\forall\, n\, P(n)$ يكون أيضا صادق. الاستنتاج الرياضي يمكن أن يستخدم لاثبات كم هائل من النتائج المختلفة. فهم كيفية بناء وقراءة براهين الاستنتاج الرياضي هو المفتاح الأساسي لفهم الرياضيات المتقطعة.

٤-١ الاستنتاج الرياضي

على وجه العموم، الاستنتاج الرياضي يمكن استخدامة لاثبات العبارات التي تقترح أن $P(n)$ تكون صادقة لكل الاعداد الصحيحة الموجبة n، حيث $P(n)$ هي دالة تقرير. البرهان باستخدام الاستنتاج له جزأين، خطوة الأساس basis step، حيث نبين أن $P(1)$ صادق، و خطوة الاستنتاج inductive step، حيث نبين أنه لكل الأعداد الصحيحة الموجبة k، إذا كان $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون صادق.

مبدأ الاستنتاج الرياضي

Principle of Mathematical Induction

لإثبات أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، حيث $P(n)$ دالة تقرير نكمل خطوتين

خطوة الأساس Basis Step: نتحقق من أن $P(1)$ صادق.

خطوة الاستنتاج Inductive Step: نبين أن العبارة الشرطية $P(k) \to P(k+1)$ تكون صادقة لكل عدد صحيح موجب k.

لإكمال خطوة الاستنتاج في البرهان باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي، نفرض أن $P(k)$ يكون صادق لأي عدد صحيح موجب اختياري k ونبين أنه تحت هذا الفرض، $P(k+1)$ يجب أيضا أن يكون صادق. الفرض بأن $P(k)$ صادق يسمى فرض الاستنتاج. بمجرد إكمال كلا الخطوتين في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي، نكون قد بينا أن $P(n)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة، أي أننا بينا أن $\forall\, nP(n)$ يكون صادق حيث التسوير مأخوذ على كل الأعداد الصحيحة الموجبة. في خطوة الاستنتاج، بينا أن $\forall k(P(k) \to P(k+1))$ يكون صادق. لصياغته كقاعدة استدلال، هذا الأسلوب للبرهان يمكن صياغته كما يلي

$$\left[\, P(1) \wedge \forall\, k\, \left(P(k) \to P(k+1)\right) \right] \to \forall\, n\, P(n)$$

ملاحظة ٤-١-١. في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي لا نفترض أن $P(k)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة! فقط نبين أنه إذا فرض أن $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. لذلك، البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي ليس حالة من تسول المسألة أو الاستدلال الدائري.

مثال ٤-١-٢. بين أنه إذا كان n عدد صحيح موجب، فإن

$$1+2+...+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

الحل: نفرض $P(n)$ هي التقرير بأن مجموع n حد الأولى من الأعداد الصحيحة الموجبة يكون $n(n+1)/2$. يجب أن نفعل أمرين لإثبات أن

$P(n)$ صادق لكل $n=1,2,3,...$. يجب أن نبين أن $P(1)$ يكون صادق وأن العبارة الشرطية $P(k)\rightarrow P(k+1)$ تكون صادقة لكل $k=1,2,3,...$.

خطوة الاساس: $P(1)$ يكون صادق، لأن $1=\frac{1(1+1)}{2}$.

خطوة الاستنتاج: لفرض الاستنتاج، نفرض أن $P(k)$ محقق لعدد صحيح موجب اختياري k. أي نفرض أن

$$1+2+...+k=\frac{k}{2}(k+1)$$

تحت هذا الفرض، يجب أن نبين أن $P(k+1)$ يكون صادق، أي أن

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

يكون أيضا صادق. بإضافة $k+1$ إلى كلا الطرفين في المعادلة في $P(k)$، نحصل على

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k}{2}(k+1)+(k+1)$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

المعادلة الأخيرة تبين أن $P(k+1)$ يكون صادق تحت الفرض أن $P(k)$ صادق. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

الآن أكملنا خطوة الاساس وخطوة الاستنتاج، لذلك بالاستنتاج الرياضي، يكون $P(n)$ صادق لكل عدد صحيح موجب n. الذي برهناه هو $1+2+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$ لكل عدد صحيح موجب n.

كما لاحظنا، الاستنتاج الرياضي ليس أداة لإيجاد نظريات عن الأعداد الصحيحة الموجبة، ولكن طريقة لإثبات النتائج التي بالفعل تم اقتراحها.

مثال ٤-١-٣. اقترح صيغة لمجموع n حدا الاولى من الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية. ومن ثم برهن على صحة هذا المقترح باستخدام الاستنتاج الرياضي.

البرهان: مجموع n حدا الاولى من الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية لقيم $n=1,2,3,4,5$ هي

$1=1$ ، $1+3=4$ ، $1+3+5=9$ ، $1+3+5+7=16$ ، $1+3+5+7+9=25$.

من هذه القيم يكون من المعقول اقتراح أن مجموع n حدا الاولى من الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية يكون n^2، أي أن

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

الآن نحتاج إلى طريقة لإثبات أن هذا المقترح يكون صحيحا، إذا كان بالفعل كذلك.

نفرض أن $P(n)$ ترمز إلى التقرير أن مجموع n حدا الاولى من الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية يكون n^2. مقترحنا هو أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة. لاستخدام الاستنتاج الرياضي في إثبات هذا المقترح، يجب أولا إكمال خطوة الأساس، أي يجب أن نبين أن $P(1)$ يكون صادق. ثم بعد ذلك نجري خطوة الاستنتاج، أي يجب أن نبين أن $P(k+1)$ يكون صادق عندما $P(k)$ يفترض أنه صادق. الآن نحاول إتمام هاتان الخطوتان.

خطوة الأساس: $P(1)$ تنص على أن مجموع الحد الأول من الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية هو 1^2، وهذا صحيح لأن الحد الأول من الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية هو 1. إذن خطوة الاساس اكتملت.

خطوة الاستنتاج: لإتمام خطوة الاستنتاج يجب أن نبين أن التقرير $P(k) \rightarrow P(k+1)$ يكون صادق لكل عدد صحيح موجب k. لعمل ذلك، نفرض أولا فرض الإستنتاج. فرض الإستنتاج هو أن العبارة $P(k)$ تكون صادقة، أي أن

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

لبيان أن $\forall k(P(k)\rightarrow P(k+1))$ صادق، يجب أن نبين أنه إذا كان $P(k)$ صادق فإن $P(k+1)$ يكون صادق. لاحظ أن $P(k+1)$ هي العبارة

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

بفرض أن $P(k)$ صادق، ينتج أن

$$\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) \\
&=[1+3+5+\ldots+(2k-1)]+(2k+1) \\
&=k^2+(2k+1) \\
&=k^2+2k+1 \\
&=(k+1)^2
\end{aligned}$$

هذا يبين أن $P(k+1)$ تنتج من $P(k)$. لاحظ أننا استخدمنا فرض الاستنتاج $P(k)$ في المعادلة الثانية لنعوض عن مجموع الـ k حد الأولى من الأعداد الصحيحة الفردية الموجبة بـ k^2.

الآن أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج. نتيجة لذلك، من مبدأ الاستنتاج الرياضي، نستخلص أن $P(n)$ يكون صادق لكل الاعداد الصحيحة الموجبة n. أي أن

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

لكل الاعداد الصحيحة الموجبة n.

مثال ٤-١-٤. استخدم الاستنتاج الرياضي في بيان أن

$$1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$$

لكل الاعداد الصحيحة غير السالبة n.

الحل: نفرض $P(n)$ هو التقرير

$$1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$$

لأي عدد صحيح n.

خطوة الأساس: $P(0)$ يكون صادق لأن $2^0=2^1-1$. وهذا يكمل خطوة الأساس.

خطوة الاستنتاج: لفروض الاستنتاج نفرض أن $P(k)$ يكون صادق. أي نفرض أن $1+2+2^2+...+2^k=2^{k+1}-1$.

لتنفيذ خطوة الاستنتاج باستخدام هذا الفرض، يجب أن نبين أنه عندما يكون $P(k)$ صادق فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. أي يجب أن نبين أن

$$1+2+2^2+...+2^k+2^{k+1}=2^{(k+1)+1}-1=2^{k+2}-1$$

بفرض صدق $P(k)$. من هذا الفرض نجد أن

$$\begin{aligned}1+2+2^2+...+2^k+2^{k+1}&=(1+2+2^2+...+2^k)+2^{k+1}\\&=(2^{k+1}-1)+2^{k+1}\\&=2\cdot 2^{k+1}-1\\&=2^{k+2}-1\end{aligned}$$

وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n. أي أن

$$1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$$

لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n.

في مثال ٤-١-٤، في خطوة الأساس بينا أن $P(0)$ صادق، لأن النظرية التي نريد برهانها هي على الصورة $\forall n P(n)$، حيث النطاق كان كل الأعداد الصحيحة غير السالبة. كما يوضح هذا المثال، لاستخدام الاستنتاج لبيان أن $P(n)$ يكون صادق لكل $n=b,b+1,b+2,\ldots$، حيث b عدد صحيح يختلف عن 1، نبين أن $P(b)$ يكون صادق (خطوة الأساس) ومن ثم نبين أن العبارة الشرطية $P(k)\rightarrow P(k+1)$ تكون صادقة لكل $k=b,b+1,b+2,\ldots$ (خطوة الاستنتاج). لاحظ أن b يمكن أن تكون سالب، صفر، أو موجب.

مثال ٤-١-٥. مجموع المتسلسلة الهندسية. استخدم الاستنتاج الرياضي في برهان صيغة مجموع عدد منتهي من حدود المتسلسلة الهندسية:

$$\sum_{j=0}^{n} a r^j = a+ar+ar^2+\ldots+ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$$

حيث $r\neq 1$، حيث n عدد صحيح غير سالب.

الحل: لإثبات هذه الصيغة باستخدام الاستنتاج الرياضي، نفرض أن $P(n)$ هي التقرير أن مجموع الـ $n+1$ حد الأولى من المتسلسلة الهندسية في هذه الصيغة صحيح.

خطوة الأساس: $P(0)$ صادق، لأن

$$\frac{ar^{0+1}-a}{r-1} = \frac{ar-a}{r-1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$$

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج هو العبارة أن $P(k)$ يكون صادق، حيث k عدد صحيح غير سالب. أي أن $P(k)$ هي العبارة

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^k=\frac{ar^{k+1}-a}{r-1}$$

لإكمال خطوة الاستنتاج يجب أن نبين أنه إذا كان $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. لبيان ذلك، نضيف ar^{k+1} إلى طرفي المعادلة المفروضة بـ $P(k)$. نجد أن

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^k+ar^{k+1}=\frac{ar^{k+1}-a}{r-1}+ar^{k+1}$$

بإعادة كتابة الطرف الأيمن في هذه المعادلة نحصل على

$$\frac{ar^{k+1}-a}{r-1}+ar^{k+1}=\frac{ar^{k+1}-a}{r-1}+\frac{ar^{k+2}-ar^{k+1}}{r-1}$$

$$=\frac{ar^{k+2}-a}{r-1}$$

بضم المعادلتين الأخيرتين نحصل على

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^k+ar^{k+1}=\frac{ar^{k+2}-a}{r-1}$$

هذا يبين أنه إذا كان فرض الاستنتاج $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يجب أن يكون صادق. وهذا يكمل خطوة لاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n.

مثال ٤-١-٦. استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة المتباينة $n<2^n$ لكل عدد صحيح موجب n.

الحل: نفرض أن $P(n)$ هي التقرير $n < 2^n$.

خطوة الأساس: $P(1)$ صادق، لأن $1 < 2^1 = 2$. وهذا يكمل خطوة الأساس.

خطوة الاستنتاج: نفرض أولا أن فرض الاستنتاج $P(k)$ يكون صادق لكل عدد صحيح موجب k. أي أن $k < 2^k$. لإتمام خطوة الاستنتاج نحتاج إلى بيان أنه إذا كان $P(k)$ صادق فإن $P(k+1)$، والذي هو العبارة $k+1 < 2^{k+1}$، يكون صادق. أي أننا نحتاج إلى بيان أنه إذا كان $k < 2^k$ فإن $k+1 < 2^{k+1}$. لبيان ذلك نضيف 1 إلى طرفي المتباينة $k < 2^k$، ثم نلاحظ أن $1 \le 2^k$. وهذا يعطينا

$$k+1 < 2^k + 1 \le 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

هذا يوضح أن $P(k+1)$ يكون صادق، على أساس أن $P(k)$ صادق. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $n < 2^n$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n.

مثال ٤-١-٧. استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة المتباينة $2^n < n!$ لكل عدد صحيح موجب n حيث $n \ge 4$. (لاحظ أن هذه المتباينة غير صحيحة عندما $n = 1,2,3$).

الحل: نفرض $P(n)$ هي التقرير $2^n < n!$.

خطوة الأساس: لإثبات المتباينة لقيم $n \ge 4$ فإن خطوة الأساس تكون هي $P(4)$. لاحظ أن $P(4)$ صادق لأن $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

خطوة الاستنتاج: لإكمال خطوة الاستنتاج نفرض أن $P(k)$ صادق لكل عدد صحيح موجب k حيث $k \ge 4$. أي نفرض أن $2^k < k!$ لكل عدد صحيح

موجب k حيث $k \geq 4$. مع هذا الفرض يجب إثبات أن $P(k+1)$ أيضا يكون صادق. أي أنه إذا كان $2^k < k!$ فإن $2^{k+1} < (k+1)!$. الآن

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$	من تعريف الدالة الأسية
$< 2 \cdot k!$	من فرض الاستنتاج
$< (k+1)\,k!$	لأن $2 < k+1$
$= (k+1)!$	من تعريف المضروب.

هذا يوضح أن $P(k+1)$ يكون صادق، على أساس أن $P(k)$ صادق. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $2^n < n!$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة n حيث $n \geq 4$.

مثال ٤-١-٨. الأعداد التوافقية harmonic numbers، H_j، $j = 1, 2, 3 \ldots$، هي الأعداد المعرفة كما يلي:

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{j}$$

على سبيل المثل $H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$.

استخدم الاستنتاج الرياضي لبيان أن

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

كلما كان n عدد صحيح غير سالب.

الحل: لانجاز البرهان، نفرض أن $P(n)$ هي التقرير

$$H_{2^n} \geq 1 + \tfrac{n}{2}$$

خطوة الأساس: $P(0)$ يكون صادق، لأن $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$.

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج هو أن العبارة $P(k)$ تكون صادقة، أي أن $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$، حيث k عدد صحيح غير سالب. يجب أن نبين أنه إذا كان $P(k)$ صادق فإن $P(k+1)$، والذي ينص على $H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$، أيضا يكون صادق. لذلك باعتبار فرض الاستنتاج، ينتج أن

$$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= H_{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

(لأنه يوجد عدد 2^k حد كل منها أقل من أو يساوي $\frac{1}{2^{k+1}}$)

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

بحذف العامل المشترك 2^k

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{k+1}{2}$$

وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n.

مثال ٤-١-٩. استخدم الاستنتاج الرياضي لبيان أن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 لأي عدد صحيح موجب n.

الحل: نفرض أن $P(n)$ ترمز إلى التقرير "$n^3 - n$ يقبل القسمة على 3".

خطوة الأساس: العبارة $P(1)$ تكون صادقة لأن $1^3 - 1 = 0$ يقبل القسمة على 3. وهذا يكمل خطوة الأساس.

خطوة الاستنتاج: لفرض الاستنتاج نفرض أن $P(k)$ يكون صادق؛ أي نفرض أن $k^3 - k$ يقبل القسمة على 3. لإتمام خطوة الاستنتاج يجب أن نبين أنه إذا كان $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون صادق. أي أنه إذا كان $k^3 - k$ يقبل القسمة على 3، فإن $(k+1)^3 - (k+1)$ يقبل القسمة على 3. لاحظ أن

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1)$$
$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$$

وحيث أن كلا الحدين في الطرف الأيمن لهذه المعادلة يقبل القسمة على 3 (الأول من فرض الاستنتاج والثاني لأنه مضاعف صحيح للعدد 3)، ينتج أن $(k+1)^3 - (k+1)$ أيضا يقبل القسمة على 3. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

مثال ٤-١-١٠. استخدم الاستنتاج الرياضي لبيان أنه إذا كانت S مجموعة منتهية تحتوي n عنصر، فإنه يكون لها عدد 2^n مجموعة جزئية، حيث n عدد صحيح غير سالب.

الحل: نفرض أن $P(n)$ هي التقرير أن المجموعة الجزئية المنتهية التي تحتوي n عنصر يكون لها 2^n مجموعة جزئية.

خطوة الأساس: $P(0)$ يكون صادق، لأن المجموعة التي ليس بها عناصر هي المجموعة الخالية، والمجموعة الخالية لها مجموعة جزئية وحيدة هي نفسها، $2^0 = 1$.

خطوة الاستنتاج: لفرض الاستنتاج نفرض أن $P(k)$ صادق لعدد صحيح غير سالب k، أي نفرض أن كل مجموعة تحتوي k عنصر يكون لها 2^k مجموعة جزئية. يجب أن نبين أنه تحت هذا الفرض، $P(k+1)$، والتي تنص على أن كل مجموعة تحتوي $k+1$ عنصر يكون لها 2^{k+1} مجموعة جزئية، يجب أن يكون صادق. لبيان ذلك نفرض أن T مجموعة بها $k+1$ عنصر. إذن يمكننا كتابة $T = S \cup \{a\}$ حيث a أحد عناصر T و $S = T - \{a\}$ (وبالتالي $|S| = k$). المجموعات الجزئية من T يمكن الحصول عليها بالطريقة التالية. لكل مجموعة جزئية X من S توجد تحديدا مجموعتان جزئيتان، X و $X \cup \{a\}$. هذا يعين كل المجموعات الجزئية من T وجميعها تكون مختلفة. ولأنه يوجد 2^k مجموعة جزئية من S، فإنه يوجد $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ مجموعة جزئية من T. وهذا يكمل برهان خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n. أي أننا أثبتنا أن كل مجموعة منتهية تحتوي n عنصر يكون لها عدد 2^n مجموعة جزئية.

مثال ٤-١-١١. استخدم الاستنتاج الرياضي لاثبات التعميم التالي لقوانين دي مورجان:

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

كلمـا كانـت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعـات جزئيـة مـن مجموعـة شـاملة U، $n \geq 2$.

الحل: نفرض $P(n)$ هي المتطابقة $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$ لـ n مجموعة.

خطوة الأساس: العبارة $P(2)$ تنص علـى أن $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. وهذه هي أحد قوانين دي مورجان.

خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج هو أن العبـارة $P(k)$ صـادقة، حيث k عدد صحيح و $k \geq 2$، وهي العبارة

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k} A_j} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}$$

كلما كان $A_1, A_2, \ldots, A_k$ مجموعات جزئية من مجموعـة شـاملة U. لتنفيذ خطوة الاستنتاج نحتاج لبيـان أن هذا الفرض يؤدي إلـى أن $P(k+1)$ يكـون صـادق. أي نحتاج إلى بيان أنه إذا كانت هذه المتطابقة محققة لأي تجمع من k من المجموعات الجزئية من U فإنها أيضا تكون محققة لأي تجمـع من $k+1$ من المجموعات الجزئية من U. نفرض أن $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ تجمع من المجموعات الجزئية من U. عندما نفترض تحقق فرض الاستنتاج، نحصل على

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{k+1} A_j} = \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \cap A_{k+1}} \quad \text{من تعريف التقاطع}$$

$$= \overline{\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right)} \cup \overline{A_{k+1}} \quad \text{من قوانين دي مورجان}$$

$$= \left(\bigcup_{j=1}^{k} \overline{A_j}\right) \cup \overline{A_{k+1}} \quad \text{من فرض الاستنتاج}$$

$$= \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{A_j} \qquad \text{من تعريف الاتحاد}$$

وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n. أي نعلم أن

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

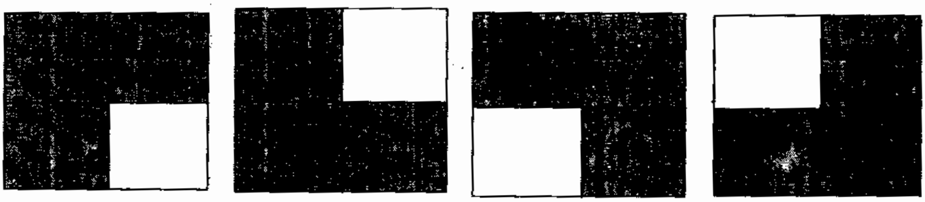
كلما كان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U و $n \geq 2$.

مثال ٤-١-١٢. نفرض n عدد صحيح موجب. بين أن أي رقعة شطرنج بها $2^n \times 2^n$ مربع نزع منها مربع يمكن أن تغطى بقطع على شكل L، حيث كل قطعة تغطي ثلاث مربعات كما هو مبين في شكل ٤-١-١.

شكل ٤-١-١

الحل: نفرض $P(n)$ هو التقرير أن أي رقعة شطرنج بها $2^n \times 2^n$ مربع نزع منها مربع يمكن أن تغطى بقطع على شكل L. يمكننا استخدام الاستنتاج الرياضي لإثبات أن $P(n)$ صادق لكل عدد صحيح موجب n.

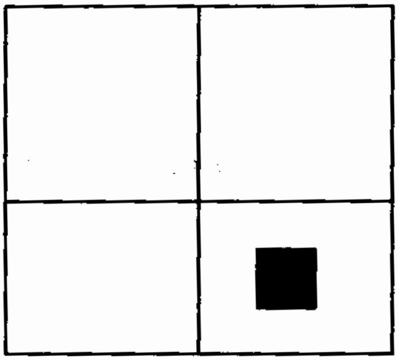
خطوة الأساس: $P(1)$ صادق، حيث أن أي رقعة شطرنج بها 2×2 مربع نزع منها مربع يمكن أن تغطى بقطع على شكل L كما في شكل ٤-١-٢.



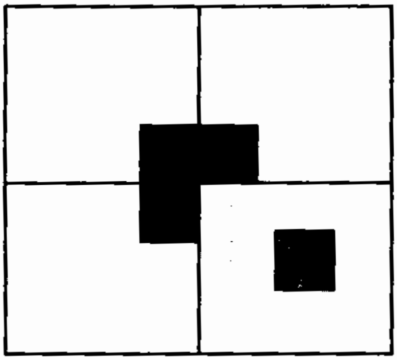
شكل ٤-١-٢

خطوة الاستنتاج: نفرض أن $P(k)$ صادق، أي نفرض أن أي رقعة شطرنج بها $2^k \times 2^k$ مربع نزع منها مربع يمكن أن تغطى بقطع على شكل L. يجب أن نبين أنه تحت هذا الشرط $P(k+1)$ يكون أيضا صادق، أي أن أي رقعة شطرنج بها $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ مربع نزع منها مربع يمكن أن تغطى بقطع على شكل L .

لبيان ذلك نعتبر رقعة شطرنج بها $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ مربع نزع منها مربع. نقسم هذه الرقعة إلى أربعة أجزاء كل جزء منها مساحته $2^k \times 2^k$ وذلك بقسمة الرقعة نصفين من الاتجاهين الرأسي والأفقي، كما هو موضح في شكل ٤-١-٣.



شكل ٤-١-٣



شكل ٤-١-٤

أحد هذه الأجزاء نزع منه مربع ، من فرض الاستنتاج يمكن أن يغطى هذا الجزء بقطع على شكل L. الآن نتخيل أنه تم نزع مربع من مركز الرقعة الأصلية من ركن كل جزء من الأجزاء الثلاثة الأخرى والتي مساحة كل منها $2^k \times 2^k$ ، كما هو مبين في شكل ٤-١-٤ من فرض الاستنتاج كل جزء

يمكن أن يغطى بقطع على شكل L. علاوة على ذلك المربعات الثلاث التي تخيلنا أنها نزعت يمكن أن تغطى بقطعة واحدة على شكل L. لذلك رقعة الشطرنج الكلية التى مساحتها $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ أمكن تغطيتها كاملة بقطع على شكل L. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج.

وحيث أننا أكملنا خطوة الأساس وخطوة الاستنتاج، من مبدأ الاستنتاج الرياضي نعلم أن $P(n)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

لماذا يكون مبدأ الاستنتاج الرياضي صحيحا

لماذا يكون مبدأ الاستنتاج الرياضي طريقة برهان صحيحة ؟ السبب يأتي من خاصية الترتيب الجيد كمسلمة لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

نفرض أننا نعلم أن $P(1)$ صادق وأن التقرير $P(k)\rightarrow P(k+1)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة k. لبيان أن $P(n)$ يجب أن يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n، نفرض أنه يوجد على الأقل عدد واحد صحيح موجب حيث $P(n)$ يكون كاذب. إذن المجموعة S، المكونة من كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي عندها $P(n)$ يكون كاذب، مجموعة غير خالية. لذلك من خاصية الترتيب الجيد، S لها أصغر عنصر، نرمز له بالرمز m. m لايمكن أن يكون 1 لأن $P(1)$ صادق. وحيث أن m موجب وأكبر من 1، $m-1$ يكون عدد صحيح موجب. علاوة على ذلك، لأن $m-1$ أصغر من m، يجب أن يكون $P(m-1)$ صادق. ولأن العبارة الشرطية $P(m-1)\rightarrow P(m)$ صادقة، يجب أن يكون $P(m)$ صادق. وهذا يناقض إختيار m. لذلك $P(n)$ يجب أن يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n.

الاستنتاج القوي Strong induction

في الجزء السابق من هذا الفصل، قدمنا مفهوم الاستنتاج الرياضي وبينا كيفية استخدامه في برهان كم هائل من النظريات. الآن نقدم صورة للاستنتاج الرياضي تسمى الاستنتاج القوي والذي يستخدم غالبا عندما يكون ليس من السهل استخدام الاستنتاج الرياضي. خطوة الأساس في البرهان باستخدام الاستنتاج القوي هي نفس خطوة الأساس في البرهان باستخدام الاستنتاج

الرياضي. أي أننا نبرهن أن $P(1)$ تكون صحيحة عندما نريد إثبات أن $P(n)$ تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة. ومع ذلك خطوة الاستنتاج في البرهانين تختلف. حيث في البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي خطوة الاستنتاج تبين أنه إذا كان $P(k)$ صادق، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. أما في البرهان بالاستنتاج القوي، خطوة الاستنتاج تبين أنه إذا كان $P(j)$ صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن k، فإن $P(k+1)$ يكون أيضا صادق. أي أن خطوة الاستنتاج تفرض أن $P(j)$ يكون صادق لكل $j=1,2,\ldots,k$.

الاستنتاج القوي Strong induction

لإثبات أن $P(n)$ تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة، حيث $P(n)$ دالة تقارير، نكمل خطوتين:

خطوة الأساس: نتحقق من أن التقرير $P(1)$ يكون صادق.

خطوة الاستنتاج: نبين أن العبارة الشرطية

$$[P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(k)]\rightarrow P(k+1)$$

تكون صادقة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة k.

لاحظ أنه عند استخدام الاستنتاج القوي لإثبات أن $P(n)$ تكون صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة فروض الاستنتاج تشتمل على كل التقارير $P(1)$، $P(2)$،...، $P(k)$، لأنه يمكننا استخدام أي من هذه التقارير لإثبات $P(k+1)$ بدلا عن حالة الاستنتاج الرياضي التي نستخدم فيها $P(k)$ فقط لإثبات صحة $P(k+1)$.

الاستنتاج القوي يسمى أحيانا المبدأ الثاني للاستنتاج الرياضي second principle of mathematical induction أو الاستنتاج التام complete induction.

مثال ٤-١-١٣. بين أنه إذا كان n عدد صحيح أكبر من 1 فإن n يمكن كتابته كحاصل ضرب أعداد أولية.

البرهان: نفرض $P(n)$ هو التقرير n يمكن أن تكتب كحاصل ضرب أعداد أولية.

خطوة الأساس: $P(2)$ تكون صادقة حيث أن 2 تكتب كحاصل ضرب عدد أولي واحد هو 2 نفسه.
خطوة الاستنتاج: فرض الاستنتاج هو الفرض بأن $P(j)$ يكون صادق لكل الأعداد الصحيحة الموجبة j حيث $j \leq k$ ، أي أن j يمكن أن تكتب كحاصل ضرب أعداد أولية كلما كان j عدد صحيح لايقل عن 2 ولا يزيد عن k. لإتمام خطوة الاستنتاج يجب أن نبين أن $P(k+1)$ تكون صادقة تحت هذا الفرض، أن $k+1$ يمكن أن تكتب كحاصل ضرب أعداد أولية. هناك حالتان، عندما تكون $k+1$ عدد أولي و عندما تكون $k+1$ عدد غير أولي. إذا كانت $k+1$ عدد أولي فإن $P(k+1)$ تكون محققة. إذا كانت $k+1$ عدد غير أولي فإنه يمكن كتابته كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين a و b حيث $2 \leq a \leq b < k+1$. من فروض الاستنتاج كل من a و b يمكن كتابته كحاصل ضرب أعداد أولية. لذلك، في هذه الحالة، $k+1$ يمكن أن تكتب كحاصل ضرب أعداد أولية، هذه الأعداد هي عوامل a و b .

تمارين ٤-١

١- أوجد صيغة لمجموع n حد الأولى من الأعداد الصحيحة الزوجية وباستخدام الاستنتاج الرياضي برهن صحة الصيغة التي حصلت عليها.

٢- استخدم الاستنتاج الرياضي لاثبات أن

$$3+3.5+3.5^2+\ldots+3.5^n=\frac{3\left(5^{n+1}-1\right)}{4}$$

حيثما كان n عدد صحيح غير سالب.

٣- نفرض $P(n)$ هي العبارة

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

لعدد صحيح موجب.

(أ) ماهو التقرير $P(1)$ ؟

(ب) بين أن $P(1)$ يكون صادق، استكمل خطوة الأساس في البرهان.

(ج) ماهي فروض الاستنتاج ؟
(د) اكمل خطوة الاستنتاج.

٤- باستخدام الاستنتاج الرياضي برهن أن

$$1.2+2.3+\ldots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)$$

حيثما كان n عدد صحيح موجب.

٥- برهن أن $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ حيثما كان n عدد صحيح موجب أكبر من 1.

٦- استخدم الاستنتاج في إثبات أن n^3+2n تقبل القسمة على 3، حيثما كان n عدد صحيح غير سالب.

٧- بين باستخدام الاستنتاج الرياضي أن n^5-n تقبل القسمة على 5، حيثما كان n عدد صحيح غير سالب.

٨- بين باستخدام الاستنتاج الرياضي أن n^2-1 تقبل القسمة على 8، حيثما كان n عدد صحيح موجب فردي.

٩- برهن أنه إذا كان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و $B_1, B_2, \ldots, B_n$ مجموعات بحيث $A_k \subseteq B_k$ لكل $k=1,2,3,\ldots,n$ ، فإن

(أ) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. (ب) $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} B_k$.

١٠- استخدم الاستنتاج الرياضي في إثبات أنه إذا كان $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U، فإن

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} \,.$$

١١- نفـرض $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$، حيـث a و b أعـداد حقيقيـة. بـين أن $A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$ لأي عدد صحيح موجب.

١٢- برهن أن المجموعة التي بها n عنصر لها $\frac{n(n-1)}{2}$ مجموعة جزئية تحتوي تحديدا عنصرين، لأي n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2.

١٣- استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات أن المشتقة الأولى لـ x^n بالنسبة إلى x هي $n\,x^{n-1}$، لأي عدد صحيح موجب.

١٤- نفـرض A و B مـصفوفتان مربعتـان بحيـث $AB=BA$. بـين أن $AB^n=B^nA$ لكل عدد صحيح موجب.

١٥- نفرض m عدد صحيح موجب. استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات أنـه إذا كـان a و b عـددان صـحيحان بحيـث $a\equiv b \pmod{m}$، فـإن $a^k\equiv b^k \pmod{m}$، لأي عدد صحيح غير سالب k.

١٦- استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة العلاقة التالية لأي عدد صحيح موجب n $1^3+2^3+\ldots+n^3=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

١٧- استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة العلاقة التالية لأي عدد صحيح غير سالب n

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

١٨- استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة العلاقة التالية لأي عدد صحيح موجب n $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

١٩- استخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة العلاقة التالية لأي عدد صحيح غير سالب n $\quad 2-2\cdot 7+2\cdot 7^2-\ldots+2(-7)^n=\frac{1-(-7)^{n+1}}{4}$.

٢٠-(أ) أوجد صيغة للمجموع $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}$ وذلك باختبار قيم هذا المجموع لقيم n صغيرة

(ب) برهن على صحة الصيغة المقترحة في (أ).

٢١- نفرض $A_1,A_2,\ldots,A_n$ و B مجموعات. برهن أن

$$(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)\cup B$$
$$=(A_1\cup B)\cap(A_2\cup B)\cap\ldots\cap(A_n\cup B)$$

٢٢- نفرض $A_1,A_2,\ldots,A_n$ و B مجموعات. برهن أن

$$(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)\cap B$$
$$=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_n\cap B)$$

٢٣- نفرض $A_1,A_2,\ldots,A_n$ و B مجموعات. برهن أن

$$(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)-B$$
$$=(A_1-B)\cup(A_2-B)\cup\ldots\cup(A_n-B)$$

٤-٢ التعريفات الارتدادية والاستنتاج التراكيبي
Recursion definitions and structural induction

أحيانا يكون من الصعب تعريف شيء صراحة ، ومع ذلك قد يكون من السهل تعريف هذا الشيء بدلالة نفسه. هذه العملية تسمى الارتداد recursion. يمكننا استخدام الارتداد في تعريف المتتابعات، الدوال والمجموعات. متتابعة قوى العدد 2 تعطى بالصورة $a_n = 2^n$ ، $n = 0,1,2,3,\ldots$. ومع ذلك يمكن أيضا تعريف هذه المتتابعة بإعطاء الحد الأول في المتتابعة، $a_0 = 1$ ، وقاعدة لإيجاد حد في المتتابعة من الحدود السابقة له، مثلا، $a_{n+1} = 2a_n$ ، $n = 0,1,2,3,\ldots$. عندما نعرف متتابعة إرتداديا بتحديد كيفية إيجاد حد للمتتابعة من الحدود السابقة له، يمكننا استخدام الاستنتاج الرياضي لاثبات نتائج حول هذه المتتابعة.

التعريف الارتدادي للدوال

نستخدم خطوتين لتعريف دالة نطاقها الأعداد الصحيحة غير السالبة:

خطوة الأساس: نعين قيمة الدالة عند الصفر.

خطوة الارتداد: نعطي قاعدة لإيجاد قيمتها عند عدد صحيح من قيمتها عند أعداد صحيحة أصغر.

مثل هذا التعريف يسمى **تعريف إرتدادي** recursive أو **استنتاجي** inductive.

مثال ٤-٢-١. نفرض أن f معرفة ارتداديا كما يلي

$$f(0) = 3$$
$$f(n+1) = 2f(n) + 3$$

أوجد $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ و $f(4)$.

الحل: من التعريف الارتدادي ينتج أن

$$f(1) = 2f(0) + 3 = 2\cdot 3 + 3 = 9 \text{ ،}$$
$$f(2) = 2f(1) + 3 = 2\cdot 9 + 3 = 21 \text{ ،}$$
$$f(3) = 2f(2) + 3 = 2\cdot 21 + 3 = 45 \text{ ،}$$
$$f(4) = 2f(3) + 3 = 2\cdot 45 + 3 = 93 \text{ .}$$

العديد من الدوال يمكن دراستها باستخدام التعريف الارتدادي لها. دالة المضروب واحدة من هذه الدوال.

مثال ٤-٢-٢. أعط تعريف إرتدادي لدالة المضروب $F(n)=n!$.
الحل: يمكننا تعريف دالة المضروب بتعيين قيمة إبتدائية لهذه الدالة، ولتكن $F(0)=1$ ، ونعطي قاعدة لإيجاد $F(n+1)$ من $F(n)$. هذا نحصل عليه من ملاحظة أن $(n+1)!$ حسبت من $n!$ بالضرب في $n+1$. لذلك القاعدة المراد إيجادها تكون $F(n+1)=(n+1)F(n)$.

لتحديد قيمة لدالة المضروب، مثل $F(5)=5!$ ، من التعريف الارتدادي في مثال ٤-٢-٢ يكون من الضروري استخدام القاعدة التي تبين كيف يمكن التعبير عن $F(n)$، مرات متعددة. لذلك

$$\begin{aligned} F(5) &= 5F(4) = 5\cdot 4F(3) = 5\cdot 4\cdot 3F(2) \\ &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2F(1) = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1F(0) \\ &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

التعريف الارتدادي للدوال يكون تعريف جيد well defined. بمعنى أنه لأي عدد صحيح موجب، قيمة الدالة عند هذا العدد تحدد بدون غموض. وهذا يعني أنه إذا أعطينا عدد صحيح موجب فإنه يمكن استخدام الجزأين في التعريف الارتدادي لإيجاد قيمة الدالة عند هذا العدد لنحصل على نفس القيمة التي نحصل عليها بحساب قيمة الدالة عند هذا العدد بأي طريقة أخرى.

مثال ٤-٢-٣. أعط تعريف ارتدادي لـ a^n حيث a عدد حقيقي غير صفري و n عدد صحيح غير سالب.
الحل: التعريف الارتدادي يتكون من جزأين. أولا نعين a^0 ، وهي 1، بعد ذلك نوجد قاعدة لإيجاد a^{n+1} من a^n ، وهي $a^{n+1}=a\cdot a^n$ لكل $n=0,1,2,3,\ldots$.
هاتان المعادلتان تحددان a^n تحديدا وحيدا لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n.

مثال ٤-٢-٤. أعط تعريف إرتدادي لـ $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
الحل: الجزء الأول من التعريف الارتدادي هو

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$$

الجزء الثاني هو

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$$

تعريف ٤-٢-٥. أعداد فيبوناسي Fibonacci number

$$f_0, f_1, f_2, \ldots$$

تعرف بالمعادلات

$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ لكل $n = 2,3,4,\ldots$.

مثال ٤-٢-٦. أوجد أعداد فيبوناسي f_2 ، f_3 ، f_4 ، f_5 و f_6 .

الحل: حيث أن الجزء الأول من التعريف ينص على أن $f_0 = 1$ و $f_1 = 1$ ينتج أن

$$f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1 ،$$
$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 ،$$
$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 ،$$
$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 ،$$
$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8 .$$

يمكننا استخدام التعريف الارتدادي لأعداد فيبوناسي لإثبات العديد من الخواص لهذه الأعداد. واحدة من هذه الخواص لهذه الأعداد تعطى في المثال التالي:

مثال ٤-٢-٧. بين أنه كلما كانت $n \geq 3$ ، فإن

$$f_n > \alpha^{n-2} \qquad \text{حيث} \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

الحل: يمكننا استخدام الاستنتاج القوي لإثبات المتباينة. نفرض $P(n)$ هي العبارة $f_n > \alpha^{n-2}$. نريد إثبات أن $P(n)$ تكون صادقة لكل الأعداد الصحيحة التي أكبر من أو تساوي 3.

خطوة الأساس: أولا نلاحظ أن

$f_3 = 2 > \alpha$ ، $f_4 = 3 > \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha^2$.

لذلك $P(3)$ و $P(4)$ تكون محققة.

خطوة الاستنتاج: نفرض أن $P(j)$ محققة، أي أن $f_j > \alpha^{j-2}$ ، لكل الأعداد الصحيحة j بحيث $3 \le j \le k$ و $k \ge 4$. يجب ان نبين $P(k+1)$ تكون صادقة، أي أن $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$.

حيث أن α حل للمعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ ، ينتج أن $\alpha^2 = \alpha + 1$. لذلك

$$\alpha^{k-1} = \alpha^2 \cdot \alpha^{k-3} = (\alpha+1)\alpha^{k-3}$$
$$= \alpha \cdot \alpha^{k-3} + 1 \cdot \alpha^{k-3} = \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3}$$

من فروض الاستنتاج إذا كان $k \ge 4$ فإن

$$f_{k-1} > \alpha^{k-3} \text{ و } f_k > \alpha^{k-2}$$

لذلك

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} > \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} = \alpha^{k-1}.$$

ومن ثم تكون $P(k+1)$ صادقة وهذا يكمل البرهان.

ملاحظة ٤-٢-٨. خطوة الاستنتاج تبين أنه كلما كان $k \ge 4$ فإن $P(k+1)$ تنتج من الفرض بأن $P(j)$ تكون صادقة لكل $3 \le j \le k$. لذلك خطوة الاستنتاج لا تبين أن $P(3) \to P(4)$. لذلك أثبتنا صحة $P(4)$ منفصلة.

التعريفات الارتدادية للمجموعات والتراكيب

فيما مضى وضحنا كيفية تعريف الدوال إرتداديا. الآن نوجه انتباهنا إلى كيفية تعريف المجموعات إرتداديا. كما في حالة الدوال، تعريف المجموعات إرتداديا يكون من جزأين، خطوة الأساس وخطوة الارتداد. في خطوة الأساس نعطي تجمع ابتدائي initial من العناصر. في خطوة الارتداد نعطي قاعدة تكون عنصر جديد من عناصر المجموعة التي بالفعل أصبحت معروفة لدينا. التعريف بالارتداد قد يحتوي أيضا قاعدة الاستبعاد والتي تؤكد أن التعريف الارتدادي للمجموعة لايحتوي أي شيئ

غير تلك العناصر التي تم تعيينها من خطوة الأساس أو التي تم توليدها بتطبيق خطوة الارتداد.

مثال ٤-٢-٩. نعتبر المجموعة الجزئية S من الأعداد الصحيحة المعرفة باالصورة

خطوة الأساس: $3 \in S$.

خطوة الارتداد: إذا كان $x \in S$ و $y \in S$ فإن $x + y \in S$.

العناصر الجديدة التي توجد في S هي 3 من خطوة الأساس، $6 = 3 + 3$ بأول تطبيق لخطوة الارتداد، $9 = 3 + 6 = 6 + 3$ و $12 = 6 + 6$ في التطبيق الثاني لخطوة الارتداد، وهكذا. سوف نبين لاحقا أن S هي مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة مضاعفات 3.

التعريفات الارتدادية تلعب دورا هاما في دراسة السلاسل.

تعريف ٤-٢-١٠. المجموعة $\sum^*$ من السلاسل على مجموعة رموز $\sum$ يمكن تعريفها ارتداديا كما يلي

خطوة الأساس: $\lambda \in \sum^*$ ، حيث λ هي السلسلة الخالية التي لاتحتوي أي رمز.

خطوة الارتداد: إذا كانت $w \in \sum^*$ و $x \in \sum$ فإن $wx \in \sum^*$.

خطوة الأساس في التعريف الارتدادي للسلسلة تقول أن السلسلة الخالية تنتمي إلى $\sum^*$. خطوة الارتداد تنص على أن سلسلة جديدة تنتج بإضافة رمز من $\sum$ إلى نهاية سلسلة من $\sum^*$. كل تطبيق لخطوة الارتداد يتم بها إنتاج سلسلة تحتوي رمز جديد.

مثال ٤-٢-١١. إذا كانت $\sum = \{0,1\}$ ، السلاسل التي توجد في $\sum^*$ ، مجموعة كل سلاسل البتات، هي λ يتعين أن تكون في $\sum^*$ من خطوة الأساس، 0 و 1 تكون مع أول تطبيق لخطوة الارتداد، 00، 01، 10 و 11 تكون خلال التطبيق الثاني لخطوت الارتداد، وهكذا.

التعريفات الارتدادية يمكن أن تستخدم لتعريف عمليات أو دوال على عناصر المجموعات المعرفة ارتداديا.

تعريف ٤-٢-١٢. السلسلتان يمكن تركيبهما بعملية **التسلسل** concatenation. نفرض $\sum$ مجموعة الرموز و $\sum^*$ مجموعة

السلاسل المكونة من رموز من $\sum$. يمكننا تعريف التسلسل لسلسلتين ويرمز لها بالرمز (٠) إرتداديا كما يلي:

خطوة الأساس: إذا كان $w \in \sum^*$ فإن $w \cdot \lambda = w$ حيث λ هي السلسلة الخالية.

خطوة الارتداد: إذا كان $w_1 \in \sum^*$ و $w_2 \in \sum^*$ و $x \in \sum$ فإن

$$w_1 \cdot (w_2 x) = (w_1 \cdot w_2)x$$

عملية تسلسل السلسلتان w_1 و w_2 غالبا تكتب $w_1 w_2$ بدلا عن $w_1 \cdot w_2$. بتكرار تطبيق التعريف الارتدادي، ينتج أن تسلسل السلسلتان w_1 و w_2 يتكون من الرموز في w_1 تتبعها الرموز في w_2. على سبيل المثال تسلسل $w_1 = abra$ و $w_2 = cadabra$ يكون $w_1 w_2 = aracadabra$.

مثال ٤-٢-١٣. أعط تعريف ارتدادي لطول السلسلة w، $l(w)$.

الحل: يمكن تعريف طول السلسلة كمايلي

$$l(\lambda) = 0$$

إذا كان $x \in \sum$ و $w \in \sum^*$، $l(wx) = l(w) + 1$.

مثال ٤-٢-١٤. صيغ التقارير المركبة جيدة الصياغة.

يمكننا تعريف مجموعة صيغ التقاير المركبة جيدة الصياغة التي تشمل على T، F، متغيرات تقارير، وعمليات ربط منطقية من المجموعة $\{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

خطوة الأساس: T، F و S، حيث S متغير تقرير، كلها جيدة الصياغة.

خطوة الارتداد: إذا كان E و G صيغ جيدة الصياغة، فإن $\sim E$، $E \wedge G$، $E \vee G$، $E \rightarrow G$ و $E \leftrightarrow G$ كلها تكون صيغ جيدة الصياغة.

على سبيل المثال، من خطوة الأساس نعلم أن T، F، p و q كلها مصاغة جيدا، حيث p و q متغيرات تقارير. كتطبيق أولي لخطوة الارتداد، $p \vee q$، $p \rightarrow F$، $F \rightarrow q$ و $q \wedge F$ كلها تكون جيدة

الصياغة. كتطبيق ثاني لخطوة الارتداد نحصل على $q \vee (p \vee q)$، $(p \vee q) \to (q \wedge F)$ و $(p \to F) \to T$ كلها جيدة الصياغة. في حين أن $p \sim \wedge q$، $pq \wedge$ و $\sim \wedge pq$ كلها ليست جيدة الصياغة.

الاستنتاج التراكيبي Structural Induction

لإثبات النتائج حول المجموعات المعرفة إرتداديا، عادة نستخدم بعض صيغ الاستنتاج الرياضي. المثال التالي يوضح لنا الربط بين المجموعات المعرفة إرتداديا والاستنتاج الرياضي.

مثال ٤-٢-١٥ بين أن المجموعة المعرفة في مثال ٤-٢-٩ بتعيين $3 \in S$، وإذا كان $x \in S$ و $y \in S$ فإن $x + y \in S$ تكون هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة مضاعفات 3.

الحل: نفرض A هي مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقبل القسمة على 3. لإثبات أن $A = S$ يجب أن نبين أن $A \subseteq S$ و $S \subseteq A$. لإثبات أن $A \subseteq S$، نبين أن كل عدد صحيح موجب يقبل القسمة على 3 ينتمي إلى S. سوف نستخدم الاستنتاج الرياضي لإثبات ذلك.

نفرض أن $P(n)$ هي التقرير $3n \in S$. خطوة الأساس محققة لأنه من الجزء الأول من التعريف الارتدادي لـ S، $3 \cdot 1 = 3 \in S$.

لتطبيق خطوة الاستنتاج، نفرض أن $P(k)$ صحيحة، أي أن $3k \in S$. وحيث أن $3k \in S$ و $3 \in S$، ينتج أن $3k + 3 = 3(k+1) \in S$، وذلك من الجزء الثاني من التعريف الارتدادي.

لإثبات أن $S \subseteq A$ نستخدم التعريف الارتدادي لـ S.

أولا، خطوة الأساس للتعريف تعين $3 \in S$. ولأن $3 = 3 \cdot 1$، كل العناصر التي تعين في S من هذه الخطوة تقبل القسمة على 3 وبالتالي تكون في A. لإتمام البرهان يجب بيان أن كل الأعداد الصحيحة في S المولدة باستخدام الجزء الثاني من التعريف الارتدادي تكون في A. هذا يتم ببيان $x + y \in A$ كلما كان $x, y \in S$ وأيضا بفرض انها في A. إذا كان x و y كلاهما في A ينتج أن $3 | x$ و $3 | y$. لذلك $3 | (x + y)$، وهذا يكمل البرهان.

في مثال ٤-٢-١٥ استخدمنا الاستنتاج الرياضي على مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة والتعريف الارتدادي لإثبات نتيجة حول مجموعة معرفة ارتداديا. ومع ذلك يمكن استخدام صورة أكثر ملائمة للاستنتاج الرياضي تسمى الاستنتاج التراكيبي structural induction. البرهان باستخدام الاستنتاج التراكيبي يتكون من جزأين:
خطوة الأساس: نبين أن النتيجة تكون محققة لكل العناصر المعينة في خطوة الأساس للتعريف الارتدادي لكي تكون في المجموعة.
خطوة الاستنتاج: نبين أنه إذا كانت العبارة صحيحة لكل العناصر المستخدمة لإنشاء عناصر جديدة في خطوة الارتداد فإن النتيجة تكون صحيحة لهذه العناصر الجديدة .

مثال ٤-٢-١٦. استخدم الاستنتاج التراكيبي لإثبات أن $l(xy)=l(x)l(y)$، حيث x و y تنتمي إلى $\sum^*$، مجموعة كل السلاسل على مجموعة الرموز $\sum$.

الحل: سوف نؤسس البرهان على التعريف الارتدادي للمجموعة $\sum^*$ وتعريف طول السلسلة الذي سبق بيانهما في تعريف ٤-٢-١٠ و مثال ٤-٢-١٣.
خطوة الأساس: لإكمال خطوة الأساس يجب أن نبين أن $P(\lambda)$ تكون محققة. أي يجب أن نبين أن $l(x\lambda)=l(x)+l(\lambda)$، لكل $x\in\sum^*$. وحيث أن $l(x\lambda)=l(x)+0=l(x)+l(\lambda)$ لكل سلسلة x، ينتج أن $P(\lambda)$ تكون محققة.
خطوة الاستنتاج: لإكمال خطوة الاستنتاج، نفرض أن $P(y)$ تكون محققة ونبين أن $P(ay)$ تكون محققة كلما كانت $a\in\sum$. ما نحتاج إلى بيانه هو أن $l(xya)=l(x)+l(ya)$ لكل $a\in\sum$. لبيان ذلك، لاحظ أنه من التعريف الارتدادي لـ $l(w)$،

$$l(ya)=l(y)+1 \quad ، l(xya)=l(xy)+1$$

ومن فرض الاستنتاج $l(xy)=l(x)+l(y)$.
من ذلك ينتج أن

$$l(xya)=l(x)+l(y)+1=l(x)+l(ya)$$

تمارين ٤-٢

١- أوجد $f(1)$، $f(2)$، $f(3)$ و $f(4)$ إذا كانت $f(n)$ معرفة ارتداديا بـ $f(0)=1$ ولكل $n=0,1,2,...$

(أ) $f(n+1)=f(n)+2$. (ب) $f(n+1)=3f(n)$.

(ج) $f(n+1)=2^{f(n)}$.

(د) $f(n+1)=f(n)^2+f(n)+1$.

٢- حدد ما إذا كانت التعريفات المعطاة تعريفات ارتدادية صحيحة للدالة f من مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة. إذا كانت f معرفة جيدا، أوجد صيغة لـ $f(n)$ عندما تكون n عدد صحيح غير سالب وبرهن أن هذه الصيغة تكون محققة.

(أ) $f(0)=0$، $f(n)=2f(n-2)$ لكل $n\ge 1$.

(ب) $f(0)=1$، $f(n)=f(n-1)-1$ لكل $n\ge 1$.

(ج) $f(0)=2$، $f(1)=3$، $f(n)=f(n-1)-1$ لكل $n\ge 2$.

(د) $f(0)=1$، $f(1)=2$، $f(n)=2f(n-2)$ لكل $n\ge 2$.

(هـ) $f(0)=1$، $f(n)=3f(n-1)$ إذا كانت n عدد فردي، لكل $n\ge 1$ و $f(n)=9f(n-2)$ إذا كانت n عدد زوجي و $n\ge 2$.

٣- أعط تعريف ارتدادي للمتتابعة $\{a_n\}$، $n=1,2,3,...$، إذا كان

(أ) $a_n=4n-2$. (ب) $a_n=1+(-1)^n$.

(ج) $a_n=n(n+1)$. (د) $a_n=n^2$.

٤- إذا كان f_n هو عدد فيبوناسي النوني فبرهن أن

(أ) $\sum_{i=0}^{n} f_i^2=f_n\times f_{n+1}$. حيث n عدد صحيح غير سالب.

(ب) $f_1+f_3+...+f_{2n-1}=f_{2n}$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

٥- نفرض F هي الدالة بحيث $F(n)$ تكون هي مجموع n عدد صحيح موجب الأولى. أعط تعريف إرتدادي لـ $F(n)$.

٦- أعط تعريف إرتدادي لـ $P_m(n)$، حاصل ضرب العدد الصحيح m و العدد الصحيح غير السالب.

٧- أعط تعريف إرتدادي لما يلي

(أ) مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

(ب) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تتآلف مع 2 بمعيار 3.

(ج) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تقبل القسمة على 5.