الباب الخامس
العـــد
Counting

التعداد Enumeration، وهو عد الاشياء التي لها صفات معينة، تعتبر جزءا هاما من التوافيق، والتي هي دراسة ترتيب الأشياء.

القواعد الأساسية في العد والتي سوف نتعرض لها بالدراسة يمكن أن تستخدم في حل تشكيلة واسعة من المسائل. على سبيل المثال يمكن إستخدام هذه القواعد لتعداد أرقام التليفونات المختلفة الممكنة، كلمات المرور المسموح على جهاز حاسب والأوامر المختلفة التي يمكن للمتسابقين الانتهاء منها.

أداة أخرى مهمة للتوافيق هي مبدأ برج الحمام. هذا المبدأ ينص على أنه عند وضع أشياء في صناديق وكان لدينا عدد الأشياء أكبر من عدد الصناديق فإنه يوجد صندوق يحتوي على الأقل شيئين.

يمكننا صياغة العديد من مسائل العد بدلالة ترتيبات من الاشياء في مجموعات مرتبة أو غير مرتبة. هذه الترتيبات، تسمى تباديل وتوافيق، تستخدم في كثير من مسائل العد. على سبيل المثال، نفرض أن 100 من الطلاب الأوائل في إمتحان تنافس فيه 2000 طالب مدعوون إلى حفلة. يمكننا عد المجموعات المحتملة من 100 طالب التي يمكن أن تدعى، تماما مثل الطرق التي يمنح بها 10 الجوائز الأولى.

العلاقات التكرارية والتي تكون، على سبيل المثال، على الصورة $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ يمكن استخدامها في مسائل العد الأكثر تعقيدا. أيضا العديد من مسائل العد يمكن حلها باستخدام صيغة متسلسلة قوى، تسمى الدالة المولدة، حيث معاملات قوى x تمثل حدود المتتابعة التي نرغب في إيجادها. بالإضافة إلى حل مسائل العد، يكون أيضا باستطاعتنا استخدام الدوال المولدة لحل العلاقات التكرارية وإثبات المتطابقات التركيبية. مسائل أخرى في العد يمكن حلها بمبدأ الإدراج والاستبعاد الذي يعد العناصر في اتحاد المجموعات. كل هذه الطرق للعد هي موضوع دراستنا في هذا الباب.

٥-١ مبادئ العد الأساسية

سوف نقدم مبدأين أساسيين للعد، قاعدة الضرب و قاعدة الجمع. ومن ثم نوضح كيف يمكن استخدامهما في حل مسائل العد المختلفة.

قاعدة الضرب The Product Rule. نفرض أن إجراء معين يمكن تقسيمه إلى تتابع لمهمتين. إذا كان يوجد عدد n_1 من الطرق لإنجاز المهمة الأولى و عدد n_2 من الطرق لإنجاز المهمة الثانية بعد إنجاز المهمة الأولى، إذن يوجد $n_1 n_2$ طريقة لعمل هذا الإجراء.

مثال ٥-١-١. المقاعد في قاعة احتفالات يمكن أن ترقم بحرف وعدد صحيح موجب لايزيد عن 100. ماهو أكبر عدد من المقاعد يمكن أن يرقم بطرق مختلفة ؟

الحل: إجراء ترقيم المقاعد يتكون من مهمتين، الأولى تعيين حرف واحد من بين 26 حرف لكل مقعد ثم بعد ذلك نعين لذلك المقعد واحد من الأعداد الصحيحة الممكنة والتي لاتزيد عن 100. قاعدة الضرب تبين أنه يوجد $26 \cdot 100 = 2600$ طريقة مختلفة لترقيم المقعد. لذلك أكبر عدد من المقاعد يمكن أن يرقم بطرق مختلفة هو 2600.

صورة موسعة من قاعدة الضرب تكون غالبا مفيدة. نفرض أن إجراء معين ينفذ بأداء المهام T_1 ، T_2، ...، T_m في تتابع. إذا كانت المهمة T_i يمكن أن تؤدى بـ n_i طريقة بعد أن تكون المهام T_1 ، T_2، ...و T_{i-1} قد أديت، فإنه يكون لدينا $n_1 n_2 \ldots n_m$ طريقة لإتمام هذا الإجراء. هذه الصورة من قاعدة الضرب يمكن أن تبرهن باستخدام الاستنتاج الرياضي من قاعدة الضرب لمهمتين.

مثال ٥-١-٢. كم سلسلة بتات مختلفة طولها سبعة ؟

الحل: كل واحدة من البتات السبعة يمكن أن تختار بطريقتين، حيث كل بت إما 0 أو 1. لذلك، قاعدة الضرب تبين أنه توجد $2^7 = 128$ سلسلة بتات مختلفة.

مثال ٥-١-٣. كم عدد لوحات الترخيص المختلفة المتاحة إذا كانت كل لوحة تحتوي متتابعة ثلاثة حروف تليها ثلاثة أرقام ؟

الحل: يوجد 26 اختيار للحروف الثلاثة وعشرة اختيارات للارقام الثلاثة. لذلك، من قاعدة الضرب يوجد عدد $26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10$ أي 17576000 لوحة مختلفة ممكنة.

مثال ٥-١-٤ عد الرواسم. كم راسم يوجد من مجموعة بها m عنصر إلى مجموعة بها n عنصر ؟

الحل: الراسم يناظر اختيار عنصر من n عنصر في النطاق المصاحب لكل عنصر من m عنصر في النطاق. لذلك، من قاعدة الضرب، يوجد عدد $n\cdot n \ldots \cdot n\ (m \text{ times}) = n^m$ راسم. على سبيل المثال، يوجد $5^3 = 125$ راسم مختلفة من مجموعة بها ثلاثة عناصر إلى مجموعة بها خمسة عناصر.

مثال ٥-١-٥ عد الرواسم الأحادية. كم راسم أحادى يوجد من مجموعة بها m عنصر إلى مجموعة بها n عنصر ؟

الحل: أولا، لاحظ أنه عندما $m > n$ لايوجد أي راسم أحادي من مجموعة بها m عنصر إلى مجموعة بها n عنصر. الآن نفرض أن $m \le n$. نفرض أن العناصر في النطاق هي $a_1, a_2, \ldots, a_m$. توجد n طريقة لاختيار قيمة الراسم عند a_1. حيث أن الراسم أحادي، قيمة الراسم عند a_2 يمكن أن تختار بطرق عددها $n-1$ (حيث أن القيمة المستخدمة مع a_1 لايمكن أن تستخدم مرة أخرى). على وجه العموم، يوجد $n-k+1$ طريقة لاختيار قيمة الراسم عند a_k. من قاعدة الضرب، يوجد $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$ راسم أحادى يوجد من مجموعة بها m عنصر إلى مجموعة بها n عنصر.

مثال ٥-١-٦. استخدم قاعدة الضرب لبيان أن عدد المجموعات الجزئية المختلفة من مجموعة منتهية S يساوي $2^{|S|}$.

الحل: نفرض S مجموعة منتهية. نكتب عناصر S في ترتيب معين. تذكر أنه يوجد تناظر أحادي بين المجموعات الجزئية من S وسلاسل البتات التي طولها $|S|$. المجموعة الجزئية من S تناظر سلسلة بتات يكون فيها 1 في الموضع رقم i إذا كان العنصر رقم i من عناصر المجموعة ينتمي

للمجموعة الجزئية، و 0 في هذا الموضع إذا كان غير ذلك. من قاعدة الضرب، يوجد $2^{|S|}$ سلسلة بتات من طول $|S|$. لذلك $|P(S)=2^{|S|}$.

قاعدة الجمع The Sum Rule. إذا كانت المهمة الأولى تؤدى في n_1 والمهمة الثانية في n_2 طريقة وإذا كانت هذه المهام لايمكن أن تؤدى في نفس الوقت، إذن توجد $n_1 + n_2$ طريقة يمكن أن تؤدى بها واحدة من هذه المهام.

مثال ٥-١-٧. نفرض أنه إما عضو هيئة تدريس في قسم الرياضيات أو طالب من تخصص الرياضيات يمكن أن يختار كممثل في لجنة الجامعة. كم طريقة مختلفة لاختيار ممثل في لجنة الجامعة إذا كان يوجد 37 عضو هيئة تدريس في قسم الرياضيات و 83 طالب تخصص الرياضيات ؟

الحل: المهمة الأولى، إختيار عضو هيئة تدريس من قسم الرياضيات، يمكن أن تتم في 37 طريقة. المهمة الثانية، اختيار طالب تخصص الرياضيات، يمكن أن تتم في 83 طريقة. من قاعدة الجمع يوجد $37+83=120$ طريقة ممكنة لاختيار هذا الممثل. يمكننا توسيع قاعدة الجمع لتشمل أكثر من مهمتين.

مثال ٥-١-٨. الطالب يمكن أن يختار مشروع حاسب واحد من واحدة من ثلاثة قوائم. القوائم الثلاث تحتوي 23 ، 15 و 19 مشروع متاح، على الترتيب. كم احتمال ممكن لاختيار مشروع من هذه المشاريع ؟

الحل: الطالب يمكن أن يختار مشروع من القائمة الأولي في 23 طريقة، من القائمة الثانية في 15 طريقة ومن القائمة الثالثة في 19 طريقة. لذلك، من قاعدة الجمع، يوجد $23+15+19=57$ احتمال لاختيار مشروع من هذه المشاريع.

مثال ٥-١-٩. كل مستخدم لنظام الحاسب يكون لديه كلمة مرور، والتي طولها من ستة إلى ثمانية مواضع حيث كل موضع يختار له من بين الحروف والأرقام. كل كلمة مرور يجب أن تحتوي على الأقل رقم واحد. كم يوجد كلمة مرور ممكنة ؟

الحل: نفرض P هو العدد الكلي لكلمات المرور الممكنة ونفرض أن P_6، P_7 و P_8 ترمز إلى عدد كلمات المرور التي طولها 6، 7 و 8، على الترتيب. من قاعدة الجمع $P=P_6+P_7+P_8$. سوف نوجد P_6، P_7 و

P_8. إيجاد P_6 مباشرة أمر صعب. لإيجاد P_6 يكون من الأيسر إيجاد عدد سلاسل الحروف والأرقام والتي طول كل منها ستة، بما فيها تلك التي ليس من بينها أرقام، ثم نطرح من هذا العدد عدد السلاسل التي ليس بها أرقام. من قاعدة الضرب، عدد السلاسل التي طولها ستة هو 36^6 (36 هي 26 حرف + 10 أرقام) وعدد السلاسل التي ليس فيها أرقام يكون 26^6 . لذلك

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2176782336 - 308915776 = 1867866560$$

بالمثل يمكن بيان أن $P_7 = 36^7 - 26^7 = 70332353920$

كذلك $P_8 = 36^8 - 26^8 = 2612282842880$

نتيجة لذلك يكون $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2684483063360$

مبدأ الادراج- الاستبعاد The Inclusion-Exclusion Principle

عندما يمكن تنفيذ مهمتين في آن واحد، لايمكننا استخدام قاعدة الجمع لعد عدد الطرق التي يمكن أن تنفذ بها واحدة من المهمتين. جمع عدد الطرق يؤدي إلى تكرار العد حيث أن عدد طرق تنفيذ المهمتين معا قد تم عده مرتين. لتصحيح عد عدد الطرق التي يمكن أن ينفذ بها إحدى المهمتين، نجمع عدد طرق تنفيذ كل مهمة ثم نطرح من الناتج عدد الطرق التي يمكن أن تنفذ بها المهمتين في آن واحد. هذا الأسلوب يسمى مبدأ الادراج - الاستبعاد .principle of inclusion – exclusion

مثال ٥ـ١ـ١٠. كم سلسلة بتات من طول ثمانية إما تبدأ ببت 1 أو تنتهي ببتين 00؟

الحل: المهمة الأولى، إنشاء سلسلة بتات ذات الطول ثمانية تبدأ ببت 1 ، يمكن أن تتم في $2^7 = 128$ طريقة. هذا ينتج من قاعدة الضرب حيث أن البت الأولى يمكن أن تختار بطريقة واحدة فقط وكل من السبعة الأخرى يمكن أن تختار بطريقتين. المهمة الثانية، إنشاء سلسلة بتات طولها ثمانية تنتهي ببتين 00، يمكن إتمامها في $2^6 = 64$ طريقة. وهذا ينتج من قاعدة الضرب حيث أن كل بت من الستة الأول يمكن أن تختار بطريقتين والاثنتين الأخيريتين يمكن اختيارهما بطريقة واحدة فقط. كلا المهمتين، إنشاء سلسلة بتات بطول

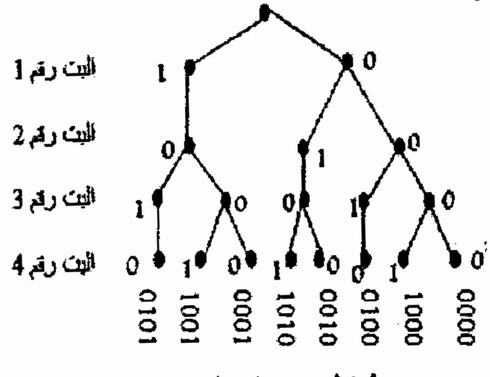
ثمانية تبدأ ببت 1 وتنتهي ببتين 00، يمكن أن تنفذ في $32 = 2^5$ طريقة، وهذا ينتج من قاعدة الضرب، حيث أن البت الأولى يمكن أن تختار بطريقة واحدة فقط، البتات التالية من الثانية حتى السادسة كل منها يمكن أن تختار بطريقتين والبتين الأخيرتين يمكن إختارهما بطريقة واحدة فقط. نتيجة لذلك، عدد سلاسل البتات التي طولها ثمانية وتبدأ ببت 1 أو تنتهي ببتين 00، والذي يساوي عدد طرق تنفيذ إما المهمة الأولى أو المهمة الثانية يساوي $128+64-32=160$.

مخططات الشجرة Tree diagrams

مسائل العد يمكن حلها باستخدام مخططات الأشجار. لاستخدام الشجرة في العد نستخدم الفروع لتمثل كل الاختيارات الممكنة. نمثل المخرجات المتوقعة بالاوراق.

مثال ٥-١-١١. كم سلسلة بتات من طول 4 لاتحتوي 1s مرتين متتاليتين؟

الحل:مخطط الشجرة في شكل ٥-١-١ يوضح كل سلاسل البتات من طول 4 لاتحتوي 1s مرتين متتاليتين. من الشكل نجد أن هناك ثمان سلاسل بتات من الطول 4 لاتحتوي 1 مكرر مرتين متتابعتين.

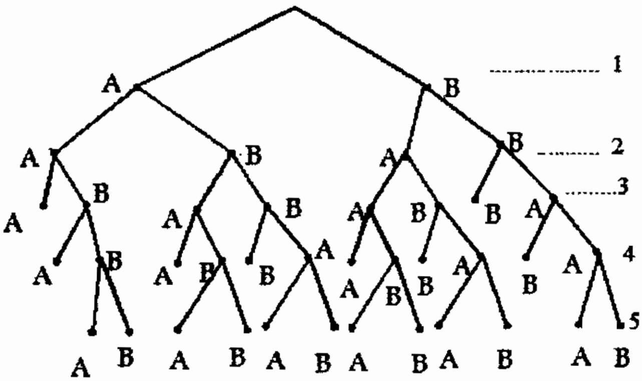


شكل ٥-١-١

مثال ٥-١-١٢. مباراة نهائية بين فريقين تتكون من خمسة أشواط. الفريق الذي يكسب ثلاثة أشواط أولا يكسب المباراة. بكم طريقة مختلفة يمكن أن تكون نتيجة المباراة ؟

الحل: مخطط الشجرة المبين في شكل ٥-١-٢ يوضح كل الطرق الممكنة لاقامة المباراة النهائية ويوضح الفائز في كل شوط. نلاحظ أنه توجد 20

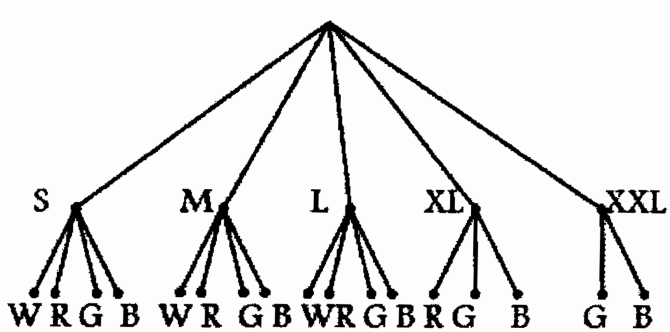
طريقة متوقعة لنتيجة المباراة . نرمز للفريق الأول بالرمز A والفريق الثاني بالرمز B.



شكل ٥-١-٢

مثال ٥-١-١٣. نفرض أن مصنع ينتج نوعا من الثياب من خمسة مقاسات مختلفة S، M، L، XL و XXL ومن كل المقاسات ينتج أربعة ألوان مختلفة أبيض W، أحمر R، أخضر G و أسود B ماعدا XL ينتج منه فقط أحمر وأخضر وأسود و XXL ينتج منه فقط أخضر وأسود. ماهو أصغر عدد يمكن أن يشتريه أحد التجار حتى يكون لديه جميع الألوان وجميع المقاسات.

الحل: مخطط الشجرة في شكل ٥-١-٣ يوضح كل الثنائيات الممكنة من الالوان والأحجام. من الشكل ينتج أن عدد القطع التي يجب شراؤها هو 17 قطعة مختلفة.



شكل ٥-١-٣

يمكننا إعادة صياغة مبدأ الادراج-الاستبعاد بدلالة المجموعات. نفرض A_1 ، A_2 مجموعتان ونفرض أن T_1 هي مهمة اختيار عنصر من A_1 و

T_2 هي مهمة اختيار عنصر من A_2 . يوجد $|A_1|$ طريقة لتنفيذ المهمة T_1 و $|A_2|$ طريقة لتنفيذ المهمة T_2. عدد طرق تنفيذ إما T_1 أو T_2 هو مجموع عدد طرق تنفيذ T_1 وعدد طرق تنفيذ T_2، مطروحا منه عدد طرق تنفيذ T_1 و T_2 معا. حيث أنه يوجد $|A_1 \cup A_2|$ طريقة لتنفيذ إما T_1 أو T_2 و يوجد $|A_1 \cap A_2|$ طريقة لتنفيذ T_1 و T_2 معا، نحصل على
$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

مبدأ برج الحمام The Pigeonhole Principle

إذا وضع عدد $k+1$ من الأشياء في k صندوق، فإنه يوجد صندوق على الأقل يحتوي إثنين أو أكثر من هذه الأشياء.

البرهان: نفرض أن أي من الصناديق التي عددها k لايحتوي أكثر من شئ واحد. إذن مجموع الأشياء التي في الصناديق يكون على الأكثر k. وهذا تناقض، حيث أنه يوجد عدد $k+1$ من الاشياء.

مثال ٥-١-١٤. من بين أي مجموعة مكونة من 367 شخص، يجب أن يوجد شخصان على الأقل لهما نفس يوم الميلاد، لأنه يوجد فقط 366 إحتمال ممكن ليوم الميلاد.

مثال ٥-١-١٥. من بين مجموعة مكونة من 27 كلمة باللغة الانجليزية، يجب أن يوجد عل الأقل كلمتين تبدآن بنفس الحرف، حيث أن عدد حروف اللغة الانجليزية 26 فقط.

مثال ٥-١-١٦. كم طالب يجب أن يكون في الفصل لكي يتفق طالبان في نفس التقدير في الامتحان النهائي، إذا كانت التقديرات تتراوح من 0 إلى 100 نقطة والنقاط كلها أعداد صحيحة ؟

الحل: يوجد 101 تقدير ممكن في الامتحان النهائي. مبدأ برج الحمام يوضح أنه من بين 102 طالب يجب أن يحصل طالبان، على الأقل، على نفس التقدير في الامتحان النهائي.

مبدأ برج الحمام المعمم

The Generalized Pigeonhole Principle

إذا كان لدينا N من الأشياء وضعت في k من الصناديق، فإنه يوجد على الأقل صندوق يحتوي عل الأقل $\left\lceil N/k \right\rceil$ من الأشياء.

البرهان: نفرض أن أي من الصناديق لايحتوي أكثر من $\left\lceil N/k \right\rceil - 1$ من الأشياء. إذن العدد الكلي للأشياء يكون على الأكثر

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

وهذا تناقض حيث أن عدد الأشياء N.

هناك نوع مشترك من المسائل يسأل عن العدد الأصغر للأشياء بحيث على الأقل r من هذه الأشياء يجب أن يكون في واحد من k صندوق عندما توزع هذه الأشياء على الصناديق. عندما يكون لدينا N من الأشياء، مبدأ برج الحمام المعمم يخبرنا أنه يجب أن يوجد على الأقل r من الأشياء في أحد الصناديق طالما كان $\left\lceil N/k \right\rceil \geq r$. أصغر عدد صحيح N بحيث $N/k > r-1$، أي $N = k(r-1)+1$، يكون هو أصغر عدد صحيح يحقق المتباينة $\left\lceil N/k \right\rceil \geq r$. هل قيمة أصغر من N يمكن أن تكفي؟ الإجابة بالنفي، لأنه إذا كان لدينا $k(r-1)$ من الأشياء، نستطيع وضع $r-1$ منها في كل واحد من الصناديق التي عددها k بحيث لايوجد صندوق يحتوي على الأقل r من الأشياء.

مثال ٥-١-١٧. من بين 100 من الأشخاص يوجد على الأقل $9 = \left\lceil 100/12 \right\rceil$ شخص مولودون في نفس الشهر.

مثال ٥-١-١٨. ماهو أصغر عدد من الطلاب مطلوب في فصل الرياضيات المتقطعة ليتأكد أن ستة على الأقل منهم يحصلون على نفس المعدل، إذا كانت المعدلات الممكنة خمسة هي A، B، C، D و F ؟

الحل: أصغر عدد من الطلاب مطلوب في فصل الرياضيات المتقطعة ليتأكد أن ستة على الأقل منهم يحصلون على نفس المعدل هو أصغر عدد N بحيث $\left\lceil N/5 \right\rceil = 6$. أصغر عدد صحيح هو $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$. إذا كان يوجد 25 طالب فقط فإنه من الممكن أن يحصل كل خمسة على نفس المعدل ولايوجد طالب سادس يحصل على نفس المعدل. لذلك 26 هو العدد الأصغر مطلوب للتأكد من أن ستة على الأقل منهم يحصلون على نفس المعدل.

تمارين ٥-١

١- يوجد 18 طالب تخصص رياضيات و 325 تخصص علوم حاسب في إحدى الكليات.

(أ) بكم طريقة يمكن إختيار ممثلين إثنين بحيث يكون أحدهما تخصص رياضيات والآخر تخصص علوم حاسب ؟

(ب) بكم طريقة يمكن إختيار ممثل واحد بحيث يكون إما تخصص رياضيات أو تخصص علوم حاسب ؟

٢- إختبار إختيار متعدد مكون من عشرة أسئلة. يوجد أربعة إختيارات متاحة في كل سؤال.

(أ) بكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب عن أسئلة الاختبار بفرض أنه أجاب عنها جميعا ؟

(ب) بكم طريقة يمكن للطالب أن يجيب عن أسئلة الاختبار بفرض أنه ترك الاجابة عن بعض الاسئلة ؟

٣- كم اسم مختصر مكون من ثلاثة حروف يمكن أن يكون لشخص ؟

٤- كم اسم مختصر مكون من ثلاثة حروف يمكن أن يكون لشخص بشرط عدم تكرار أي حرف ؟

٥- كم سلسلة بتات يمكن تكوينها من طول ستة أو أقل ؟

٦- كم سلسلة بتات يمكن تكوينها من طول لايزيد عن n، حيث n عدد صحيح موجب، بحيث تكون جميع البتات 1 ؟

٧- كم سلسلة بتات من طول عشرة تبدأ وتنتهي بالبت 1؟

٨- كم سلسلة حروف من طول أربعة أو أقل؟

٩- كم سلسلة من ثلاثة أرقام عشرية بحيث
(أ) لاتحتوي نفس الرقم ثلاث مرات؟
(ب) تبدأ برقم فردي؟
(ج) تحتوي تحديدا الرقم 4 مرتين؟

١٠- كم راسم أحادي من مجموعة بها خمسة عناصر إلى مجموعة عدد عناصرها
(أ) أربعة. (ب) خمسة (ج) ستة. (د) سبعة.

١١- بين أن أي مجموعة من ستة فصول، كل فصل يعقد لقاءا منتظما مرة اسبوعيا في يوم معين من الاسبوع، يجب أن يوجد أثنين يلتقيا في نفس اليوم، بفرض أن أي من الفصول لايعقد في يومين في نهاية الاسبوع.

١٢- بين أنه إذا كان يوجد 30 طالب في الفصل، فإنه على الأقل إثنين منهم تبدأ أسمائهم بنفس الحرف.

١٣- بين أنه من بين مجموعة من خمسة أعداد صحيحة (ليست بالضرورة متتابعة)، يوجد على الأقل إثنين لهما نفس الباقي عند القسمة على 4.

١٤- (أ) بين أنه إذا تم اختيار خمسة أعداد صحيحة من بين الأعداد الثمانية الصحيحة الموجبة الأولى، فإنه يجب أن يوجد زوج من هذه الأعداد مجموعهما يساوي تسعة.
(ب) هل الخلاصة في (أ) تكون محققة إذا اخترنا أربعة أعداد صحيحة بدلا عن خمسة؟

١٥- شبكة أجهزة حاسب تتكون من ستة أجهزة كل جهاز موصل مباشرة مع 0 أو أكثر من الأجهزة الأخرى. بين أنه يوجد على الأقل جهازين في الشبكة يكونا موصلين بنفس العدد من الأجهزة الأخرى.(إرشاد: 0 و 5 لايمكن أن يحدثا معا).

١٦- نفرض f راسم من S إلى T، حيث S و T مجموعتان منتهيتان و $m=\left\lceil |S| / |T| \right\rceil$. بين أنه يوجد على الأقل m عنصر من S لها نفس الصورة في T. أي أنه يوجد عناصر مختلفة $s_1,s_2,\ldots,s_m$ في S بحيث $f(s_1)=f(s_2)=\ldots=f(s_m)$.

٥-٢ التباديل والتوافيق Permutations and Combinations

العديد من مسائل العد يمكن حلها بإيجاد عدد طرق ترتيب عدد معين من عناصر مختلفة في مجموعة من حجم محدد، حيث ترتيب العناصر غير معتبر. العديد من المسائل الاخرى يمكن حلها بإيجاد عدد الطرق لاختيار عدد مخصوص من العناصر من مجموعة من حجم مخصوص، حيث ترتيب العناصر غير معتبر. كمثال، بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة طلاب من مجموعة من خمسة طلاب للوقوف على الخط للتصوير ؟ كم لجنة مختلفة من ثلاثة طلاب يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة طلاب؟ في هذا الفصل سوف نوضح بالتفصيل طرق إجابة أسئلة من هذا النوع.

التباديل Permutations

نبدأ بإجابة السؤال الأول الذي وضع في مقدمة هذا الجزء، وكل الأسئلة ذات الصلة.

مثال ٥-٢-١. بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة طلاب من مجموعة من خمسة طلاب للوقوف في خط للتصوير ؟ بكم طريقة يمكن ترتيب كل الطلاب الخمسة للوقوف في خط للتصوير ؟

الحل: أولا، لاحظ أن الترتيب في اختيار الطلاب غير معتبر. يوجد خمسة طرق لاختيار الطالب الأول للوقوف على بداية الخط. مجرد اختيار هذا الطالب، توجد أربعة طرق لاختيار الطالب الثاني في الخط. بعد اختيار الطالبين الأول والثاني، توجد ثلاث طرق لاختيار الطالب الثالث في الخط. من قاعدة الضرب، يوجد $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ طريقة لاختيار ثلاثة طلاب من مجموعة مكونة من خمسة طلاب في خط للتصوير.

لترتيب كل الطلاب الخمسة في خط للتصوير، نختار الطالب الأول بخمسة طرق، الثاني بأربعة طرق، الثالث بثلاثة طرق، الرابع بطريقتان والخامس بطريقة واحدة. نتيجة لذلك يوجد $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ طريقة لترتيب الطلاب الخمسة في خط للتصوير.

مثال ٥-٢-١ يوضح كيف يمكن عد الترتيبات المرتبة لأشياء مختلفة. هذا يقودنا إلى بعض المصطلحات.

التبديلة permutation لمجموعة من الأشياء المختلفة هو تنظيم مرتب لهذه الأشياء. نحن نهتم الآن بالتنظيم المرتب لبعض عناصر مجموعة.

التنظيم المرتب لـ r عنصر من مجموعة يسمى تبديلة طولها r r- permutation.

مثال ٥-٢-٢.نفرض $S=\{1,2,3\}$. التنظيم المرتب $3,1,2$ يكون تبديلة لـ S. التنظيم المرتب $3,2$ يكون تبديلة طولها 2 لـ S .

عدد التبديلات التي طولها r لمجموعة من n عنصر يرمز لها بالرمز $P(n,r)$. يمكننا إيجاد $P(n,r)$ باستخدام قاعدة الضرب.

مثال ٥-٢-٣. نفرض $S=\{a,b,c\}$. التبديلات التي طولها 2 لـ S هي a,b ، a,c ، b,a ، b,c ، c,a و c,b . نتيجة لذلك يوجد ستة تبديلات طولها 2 لهذه المجموعة التي بها ثلاثة عناصر. لبيان أنه يوجد دائما ستة تبديلات طولها 2 لمجموعة بها ثلاثة عناصر، لاحظ أنه يوجد ثلاث طرق لاختيار العنصر الأول في التنظيم وطريقتان لاختيار العنصر الثاني في التنظيم لأنه يجب أن يختلف عن العنصر الأول. من قاعدة الضرب، ينتج أن $P(3,2)=3\cdot 2=6$.

نظرية ٥-٢-٤. إذا كان n عدد صحيح موجب وكان r عدد صحيح بحيث $1\le r\le n$، فإنه يوجد

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

تبديلة طولها r لمجموعة بها n عنصر مختلفة.

البرهان: سوف نستخدم قاعدة الضرب لاثبات أن هذه الصيغة تكون صحيحة. العنصر الأول من التبديلة يمكن أن يختار في n طريقة لأنه يوجد n عنصر في المجموعة. يوجد $n-1$ طريقة لاختيار العنصر الثاني في التبديلة، لأنه يتبقى $n-1$ عنصر في المجموعة بعد استخدام العنصر المختار للموضع الأول. بالمثل يوجد $n-2$ طريقة لاختيار العنصر الثالث، وهكذا حتى نصل إلى أنه يوجد تحديدا $n-(r-1)=n-r+1$ طريقة لاختيار العنصررقم r . نتيجة لذلك، باستخدام قاعدة الضرب، يوجد عدد

$$n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

تبديلة طولها r.

لاحظ أن $P(n,0)=1$ كلما كان n عدد صحيح غير سالب لأنه يوجد على وجه التحديد طريقة واحدة لترتيب صفر من العناصر. أي أنه توجد قائمة واحدة ليس بها عناصر، وهي القائمة الخالية.

نتيجة ٥-٢-٥. إذا كان n و r عددان صحيحان بحيث $0 \le r \le n$ فإن

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

البرهان: عندما يكون n و r عددان صحيحان بحيث $0 \le r \le n$، من نظرية ٥-٢-٤ نحصل على

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)...(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

لأن $1=\frac{n!}{n!}=\frac{n}{(n-0)!}$ كلما كان n عدد صحيح غير سالب ، نجد أن الصيغة $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ أيضا تتحقق عندما $r=0$.

من نظرية ٧-٢-٤ نجد أنه إذا كانت n عدد صحيح موجب فإن $P(n,n)=n!$.

مثال ٥-٢-٦. كم طريقة توجد لاختيار فائز الجائزة الأولى ، فائز الجائزة الثانية وفائز الجائزة الثالثة من بين 100 شخص مختلفين دخلوا سحب المسابقة ؟

الحل: حيث أنه من المهم معرفة أي شخص يكسب أي جائزة، عدد طرق اختيار الثلاثة الذين يفوزون بالجوائز الثلاث هو عدد الاختيارات المرتبة لثلاثة عناصر من 100 عنصر أي عدد التبديلات التي طولها 3 لمجموعة بها 100 عنصر. نتيجة لذلك الاجابة تكون $P(100,3)=100\cdot 99\cdot 98=970,200$.

مثال ٥-٢-٧. نفرض أنه يوجد ثمان عدّائين في سباق. الفائز الأول يحصل على ميدالية ذهبية، المركز الثاني يحصل على ميدالية فضية و الفائز الثالث يحصل على الميدالية البرونزية. كم طريقة مختلفة توجد

لمنح هذه الميداليات، إذا كانت جميع الاحتمالات لنتيجة السباق كلها متكافئة ودون أية قيود ؟

الحل: عدد الطرق المختلفة لمنح الميداليات هو عدد التبديلات التي طولها 3 لمجموعة عدد عناصرها 8. لذلك، يوجد $P(8,3)=8\cdot 7\cdot 6=336$ طريقة ممكنة لمنح الميداليات.

مثال ٥-٢-٨. كم تبديلة للحروف ABCDEFGH تحتوي السلسلة ABC ؟

الحل: حيث أن الحروف ABC يجب أن تحدث ككتلة واحدة، يمكننا إيجاد الإجابة بإيجاد عدد التبديلات لـ ستة أشياء، وهي ABC ، D، E، F، G و H. وحيث أن هذه الأشياء تحدث في أي ترتيب، يوجد $6!=720$ تبديلة للحروف ABCDEFGH بحيث تظهر السلسلة ABC ككتلة واحدة.

التوافيق Combinations

الآن ندير اهتمامنا إلى عد الاختيارات غير المرتبة للأشياء.

مثال ٥-٢-٩. كم لجنة مختلفة من ثلاثة طلاب يمكن تشكيلها من مجموعة من أربعة طلاب ؟

الحل: لإجابة هذا السؤال، نحتاج فقط لإيجاد عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من مجموعة بها أربعة عناصر، لأن أختيار ثلاثة طلاب هو تماما مثل اختيار واحد من الطلاب الأربعة ليترك من المجموعة. هذا يعني أنه يوجد أربعة طرق لتكوين لجنة مكونة من ثلاثة طلاب من مجموعة بها أربعة طلاب حيث ترتيب اختيار الطلاب غير معتبر.

مثال ٥-٢-٨ يوضح أن العديد من مسائل العد يمكن حلها بإيجاد عدد المجموعات الجزئية من حجم معين من مجموعة بها n عنصر، حيث n عدد صحيح موجب.

توفيق-r من عناصر مجموعة r-combination هو اختيار غير مرتب لعدد r من العنصر من المجموعة. لذلك توفيق-r من العناصر هو ببساطة مجموعة جزئية، من المجموعة، تحتوي r عنصر.

مثال ٥-٢-١٠. نفرض S هي المجموعة $\{1,2,3,4\}$. إذن $\{1,3,4\}$ توفيق-3 لعناصر من S.

عدد توفيق-r من عناصر مجموعة بها n عنصر مختلفة يرمز له بالرمز $C(n,r)$. لاحظ أن $C(n,r)$ أيضا يرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ وتسمى **معاملات ذات الحدين** binomial coefficient.

مثال ٥-٢-١١. نلاحظ أن $C(4,2)=6$ لأن توفيق-2 من $\{a,b,c,d\}$ هو المجموعات الجزئية الست $\{a,c\}$، $\{a,d\}$، $\{b,c\}$، $\{b,d\}$ و $\{c,d\}$.

يمكننا تحديد عدد توفيق-r لمجموعة من n عنصر باستخدام صيغة عدد التباديل التي طولها r للمجموعة.

نظرية ٥-٢-١٢. عدد توفيق-r لمجموعة بها n عنصر، حيث n عدد صحيح غير سالب و r عدد صحيح بحيث $0\le r\le n$، يساوي

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

البرهان: التبديلات التي طولها r للمجموعة يمكن الحصول عليها بتكوين $C(n,r)$ توفيق-r للمجموعة ثم ترتيب العناصر في كل توفيق-r ، والتي يمكن أن تتم بـ $P(r,r)$ طريقة. نتيجة لذلك

$$P(n,r)=C(n,r)P(r,r)$$

وهذا يؤدي إلى $C(n,r)$

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{P(r,r)}=\frac{n!(r-r)!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لـ $C(n,r)$ في نظرية ٥-٢-١١، نحصل على

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

نتيجة لذلك، لحساب $C(n,r)$ يمكن حذف كل الحدود في المضروب الأكبر في البسط من البسط والمقام، ومن ثم بضرب كل الحدود التي لم تحذف في البسط ثم نقسم على المضروب الصغير في المقام.

مثال ٥-٢-١٣. بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من خمس طلاب من فصل به 52 طالب ؟ أيضا بكم طريقة يمكن اختيار 47 طالب من هذا الفصل علما بأن جميع الطلاب لهم نفس الفرصة في الاختيار في الحالتين ؟

الحل: حيث ترتيب اختيار الطلاب من هذا الفصل غير مهم فإنه يوجد

$$C(52,5)=\frac{52!}{5!\ 47!}$$

طريقة مختلفة لتشكيل لجنة من خمسة طلاب.

لحساب $C(52,5)$ أولا نقسم البسط والمقام على $47!$ لنحصل على

$$C(52,5)=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

هذا التعبير يمكن حسابه كمايلي

$$\begin{aligned}C(52,5)&=\frac{52}{2}\cdot\frac{51}{3}\cdot\frac{50}{5}\cdot\frac{49}{1}\cdot\frac{48}{4}\\&=26\cdot 17\cdot 10\cdot 49\cdot 12\\&=2,598,960\end{aligned}$$

تبعا لذلك يوجد 2,598,960 لجنة مختلفة يمكن تكوينها من خمس طلاب من فصل به 52 طالب.

لاحظ أنه يوجد

$$C(52,47)=\frac{52!}{47!\ 5!}$$

طريقة مختلفة لاختيار 47 طالب من 52 طالب في الفصل. نحن لانحتاج لحساب هذه القيمة لأن $C(52,47)=C(52,5)$. من ذلك ينتج أنه يوجد 2,598,960 طريقة لاختيار 47 طالب من هذا الفصل.

في مثال ٥-٢-١٣ لاحظنا أن $C(52,47)=C(52,5)$. هذه حالة خاصة من متطابقة مفيدة في عدد توافيق-r من مجموعة معطاة وذلك في النتيجة التالية:

نتيجة ٥-٢-١٤. نفرض n و r عددان صحيحان غير سالبان بحيث $r\le n$. إذن $C(n,r)=C(n,n-r)$.

البرهان: من نظرية ٧-٢-١١ ينتج أن

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

و

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

لذلك $C(n,r)=C(n,n-r)$.

مثال ٥-٢-١٥. كم طريقة توجد لاختيار خمس لاعبين من فريق تنس مكون من عشرة لاعبين للقيام برحلة لعمل مباراة في مدرسة أخرى ؟

الحل: الاجابة تعطى بعدد توافيق-5 لمجموعة بها عشرة عناصر. من نظرية ٥-٢-١٢ مثل هذا العدد من التوافيق يكون

$$C(10,5)=\frac{10!}{5!\,5!}=252$$

مثال ٥-٢-١٦. مجموعة من 30 شخص تم تدريبهم كرواد فضاء للذهاب في أول رحلة للمريخ. كم طريقة توجد لاختيار طاقم من ستة أفراد للذهاب في هذه الرحلة (على افتراض أن جميع أفراد الطاقم لهم نفس الوظيفة) ؟

الحل: عدد طرق اختيار طاقم من ستة أفراد من مجموعة بها 30 شخص هو عدد توافيق-6 لمجموعة بها 30 عنصر، لأن ترتيب اختيار هؤلاء الأشخاص غير معتبر. من نظرية ٥-٢-١٢، عدد مثل هذه التوافيق يكون

$$C(30,6)=\frac{30!}{6!\,24!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=593{,}775$$

مثال ٥-٢-١٧. كم سلسلة بتات من طول n تحتوي تحديدا عدد r من البت 1.

الحل: وضع r من البت 1 في سلسلة بتات من طول n يكون توافيق-r للمجموعة $\{1,2,3,\ldots,n\}$. لذلك يوجد $C(n,r)$ سلسلة بتات من طول n تحتوي تحديدا عدد r من البت 1.

مثال ٥-٢-١٨. نفرض أنه يوجد تسعة أعضاء هيئة تدريس في قسم الرياضيات وأحد عشر عضوا في قسم علوم الحاسب. كم طريقة توجد لتشكيل لجنة لعمل دورة في الرياضيات المتقطعة لمعلمي المرحلة الثانوية، إذا كانت اللجنة تتكون من ثلاثة أعضاء هيئة تدريس من قسم الرياضيات وأربعة من قسم علوم الحاسب ؟ من قاعدة الضرب، الإجابة هو حاصل ضرب عدد توافيق-3 لمجموعة بها تسعة عناصر و عدد توافيق-4 لمجموعة بها أحد عشر عنصرا. من نظرية ٧-٢-١١، عدد طرق اختيار اللجنة يكون

$$C(9,3)\cdot C(11,4)=\frac{9!}{3!\ 6!}\cdot\frac{11!}{4!\ 7!}=84\cdot 330=27,720$$

مثال ٥-٢-١٩. يؤدي طالب إمتحان في مادة ما، الإمتحاد مكون من عشرة أسئلة على مجموعتين مطلوب أن يجب على سبعة منها.

(أ) إذا كان المطلوب أن يجيب الطالب على سبعة أسئلة بدون أية شروط، فإن الطالب يمكن الإجابة على الامتحان في $C(10,7)=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!3!}=120$ طريقة.

(ب) إذا كان يجب على الطالب الإجابة عن ثلاثة أسئلة من المجموعة الأولى وأربعة من المجموعة الثانية، فإنه يوجد $C(5,3)=\frac{5!}{3!2!}=10$ طريقة للإجابة عن ثلاثة أسئلة من المجموعة الأولى و $C(5,4)=\frac{5!}{4!1!}=5$ طريقة للإجابة عن ثلاثة أسئلة من المجموعة الثانية. من قاعدة الضرب يوجد $10\cdot 5=50$ طريقة للإجابة عن ثلاثة أسئلة من المجموعة الأولى وأربعة من المجموعة الثانية.

(ج) إذا كان نظام الامتحان يشير إلى أن الطالب يجب أن يجيب عن ثلاثة أسئلة على الأقل من المجموعة الأولى، فإنه توجد ثلاث حالات:

(i) الطالب يجيب عن ثلاثة أسئلة من المجموعة الأولى وأربعة من المجموعة الثانية، من قاعدة الضرب توجد $C(5,3)C(5,4)=10\cdot 5=50$ طريقة .

(ii) الطالب يجيب عن أربعة أسئلة من المجموعة الأولى وثلاثة من المجموعة الثانية، من قاعدة الضرب توجد $C(5,4)C(5,3)=5\cdot 10=50$ طريقة.

(iii) الطالب يجيب عن خمسة أسئلة من المجموعة الأولى وسؤالين من المجموعة الثانية، من قاعدة الضرب توجد $C(5,5)C(5,2)=1\cdot 10=10$ طريقة.
بضم الحالات الثلاث ومن قاعدة الجمع يمكن للطالب الإجابة عن الامتحان في $50+50+10=110$ طريقة.

التباديل والتوافيق المعممة

Generalized Permutations and Combinations

في عديد من مسائل العد يمكن للعناصر المستخدمة أن تتكرر. على سبيل المثال الحرف أو الرقم العشري يمكن استخدامه أكثر من مرة في لوحات السيارات، على عكس مسائل العد التي درست في الجزء السابق من هذا الفصل، حيث اعتبرنا فقط التباديل والتوافيق حيث العناصر المستخدمة يمكن أن تستخدم مرة واحدة على الأكثر. في هذا الجزء سوف نبين كيف يمكن حل مسائل العد عندما تكون العناصر يمكن أن تستخدم أكثر من مرة.

التباديل مع التكرار

حساب عدد التباديل عندما يكون تكرار العناصر مسموح به يمكن إيجاده باستخدام قاعدة الضرب، كما يتضح من المثالي:

مثال ٥-٢-٢٠. كم سلسلة من الطول r يمكن تشكيلها من حروف اللغة الانجليزية؟

الحل: حيث أن عدد حروف اللغة الانجليزية هو 26، من قاعدة الضرب ولأن كل حرف يمكن أن يستخدم أي عدد من المرات فإنه يوجد 26^r سلسلة من الطول r.

نظرية ٥-٢-٢١. عدد التبديلات من الطول r لمجموعة بها n عنصر عندما يكون تكرار العناصر مسموح به يساوي n^r.

البرهان: توجد n طريقة لاختيار عنصر في المجموعة لكل موضع في التبديلة التي طولها r عندما يكون تكرار العناصر مسموح به، لأنه في كل اختيار كل العناصر تكون متاحة. لذلك من قاعدة الضرب، عدد التبديلات التي طولها r يكون n^r عندما يكون تكرار العناصر مسموح به.

التوافيق مع التكرار

مثال ٥-٢-٢٢. كم طريقة توجد لاختيار أربع قطع فاكهة من صندوق يحتوي تفاح، برتقال وموز إذا كان ترتيب اختيار القطع غير معتبر، فقط المعتبر هو نوع الفاكهة، علما بأن الصندوق يحتوي أربع قطع على الأقل من كل نوع من أنواع الفاكهة الثلاث ؟

الحل: لحل هذه المسألة نسرد الطرق الممكن لاختيار أربع قطع من الفاكهة.

تفاح	4	-	-	3	3	1	-	1	-	2	2	-	2	1	1
برتقال	-	4	-	1	-	3	3	-	1	2	-	2	1	2	1
موز	-	-	4	-	1	-	1	3	3	-	2	2	1	1	2

الحل هو عدد توفيق-4 مع السماح بالتكرار من مجموعة بها ثلاث عناصر {تفاح، برتقال، موز}.

لحل مسائل العدمن هذا النوع الأكثر تعقيدا، نحتاج إلى طريقة عامة لعد توفيق-r لمجموعة بها n عنصر.

نظريـــة ٥-٢-٢٣. توجـد $C(n+r-1,r)=C(n+r-1,n-1)$ توفيق-r لمجموعة بها n عنصر مع السماح بتكرار العناصر.

البرهان: كل توفيق-r لمجموعة بها n عنصر مع السماح بتكرار العناصر يمكن تمثيلها بـ $n-1$ شرطة و r نجمة. الـ $n-1$ شرطة تستخدم لتكوين n خلية مختلفة، الخلية رقم i تحتوي نجمة واحدة لكل مرة يستخدم فيها العنصر رقم i من المجموعة في التوفيقة. على سبيل المثال توفيق-6 لمجموعة بها أربعة عناصر يمثل بثلاث شرطات وست نجوم. هنا ***||*|** تمثل توفيق-6 تحتوي تحديدا إثنين من العنصر الأول، واحد من العنصر الثاني، لاشيء من العنصر الثالث وثلاثة من العنصر الرابع.

كما رأينا كل قائمة مختلفة تحتوي $n-1$ شرطة و r نجمة تناظر توفيق-r لمجموعة بها n عنصر مع السماح بتكرار العناصر. عدد هذه القوائم يكون $C(n+r-1,r)$ لأن كل قائمة تناظر اختيار لـ r موضع لوضع نجوم فيها من بين $n-1+r$ موضع تحتوي r نجمة و $n-1$ شَرطة.

مثال ٥-٢-٢٤. في طريق عودتهم من ميدان التدريب، توقف سبعة رجال عند مطعم لشراء وجبات سريعة. المطعم أخبرهم بأن عنده يوجد أربعة أصناف لحم بقري، دجاج، سمك و سمان. كم عدد المشتويات الممكن إذا كان كل واحد من الرجال السبعة اشترى وجبة واحدة من أحد هذه الأصناف؟

الحل: نفرض أن a، b، c و d تمثل اللحم والدجاج والسمك والسمان على الترتيب. الآن نحن نهتم كم عدد المشتروات من كل نوع وليس بترتيب الشراء. الجدول التالي يعطي بعض المشتروات الممكنة

أ	ب
a,a,b,b,c,c,d	$**\|**\|**\|*$
a,a,a,a,b,c,d	$****\|*\|*\|*$
a,a,a,a,a,a,d	$******\|\|\|*$
b,c,c,d,d,d,d	$\|*\|**\|****$
c,c,c,c,c,d,d	$\|\|*****\|**$
c,c,c,c,c,c,c	$\|\|*******\|$
d,d,d,d,d,d,d	$\|\|\|*******$

في العمود (ب) * على يسار | تمثل a، وكل * بين الشرطة الأولى والثانية تمثل b وكل * بين الشرطة الثانية والثالثة تمثل c وكل * على يمين الشرطة الأخيرة تمثل d.

في العمود (ب) في الجدول نعد كل الترتيبات الممكنة للرموز العشرة التي تتكون من سبعة من $*$'s و ثلاثة من |'s، لذلك عدد الطرق الممكنة المختلفة للعمود (أ) تكون

$$C(10,7)=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=120$$

مثال ٥-٢-٢٥. محل لبيع الفطائر عنده أربعة أنواع من الفطائر. بكم طريقة يمكن اختيار ست فطائر؟ بفرض اعتبار نوع الفطائر فقط وليس ترتيب اختيار الفطائر.

الحل: عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ست فطائر يكون هو عدد توفيق-6 من مجموعة بها أربعة عناصر. من نظرية ٥-٢-٢٢ هذا يساوي $C(9,6)=C(9,3)=\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=84$.

مثال ٥-٢-٢٦. كم حل للمعادلة $x_1+x_2+x_3=11$ حيث x_1، x_2، x_3 أعداد صحيحة غير سالبة.

الحل: لاحظ أن أي حل للمعادلة يناظر طريقة اختيار 11 عنصر من مجموعة بها ثلاثة عناصر بحيث يكون x_1 من النوع الأول و x_2 من النوع الثاني و x_3 من النوع الثالث. لذلك عدد الحلول يكون هو عدد توفيق-11 من مجموعة بها ثلاث عناصر مع السماح بتكرار العناصر. إذن من نظرية ٥-٢-٢٣، يوجد عدد

$C(3+11-1,11)=C(13,11)=\frac{13\cdot12}{1\cdot2}=78$ حل.

عدد الحلول لهذه المعادلة يمكن أيضا إيجادة عندما تكون المتغيرات تخضع لبعض القيود. على سبيل المثال، يمكننا إيجاد عدد حلول المعادلة عندما تكون المتغيرات أعداد صحيحة بحيث $x_1\geq1$، $x_2\geq2$ و $x_3\geq3$. حل المعادلة تحت هذه القيود يناظر اختيار 11 عنصرا من مجموعة بها ثلاثة عناصر بحيث يكون x_1 من نوع 1 و x_2 من نوع 2 و x_3 من نوع 3 ، حيث بالإضافة إلى ذلك، على الأقل عنصر واحد من النوع 1 وعنصرين من النوع 2 وثلاثة عناصر من النوع 3. لذلك نختار عنصر من النوع 1 وعنصرين من النوع 2 وثلاثة عناصر من النوع 3 ثم بعد ذلك نختار خمسة عناصر إضافية. من نظرية ٥-٢-٢٣ ، يمكن أن يتم ذلك في $C(3+5-1,5)=C(7,5)=C(7,2)=21$ طريقة.

التباديل لأشياء غير مميزة

بعض العناصر يمكن أن تكون غير مميزة في مسائل العد، نعتبر المثال التالي:

مثال ٥-٢-٢٧. كم سلسلة مختلفة يمكن تكوينها بإعادة ترتيب حروف الكلمة SUCCESS؟

الحل: حيث أن بعض حروف كلمة SUCCESS هي نفسها، الإجابة لا تكون هي عدد التباديل لسبعة حروف. هذه الكلمة تحتوي ثلاثة من S's و إثنين من C's و U واحدة و E واحدة. لتحديد عدد السلاسل المختلفة التي يمكن تكوينها بإعادة ترتيب حروف هذه الكلمة، أولا نلاحظ أن ثلاثة من S's يمكن أن توضع بين المواضع السبعة في $C(7,3)$ طريقة تاركة أربعة مواضع متاحة. لذلك إثنين من C,s يمكن أن يوضعا في $C(4,2)$ طريقة، تاركة موضعين متاحين. لذلك U يمكن أن توضع في $C(2,1)$ طريقة، تاركة موضع واحد متاح. هذا الموضع يوضع فيه E في $C(1,1)$ طريقة . من قاعدة الضرب، عدد السلاسل يكون

$$C(7,3)C(4,2)C(2,1)C(1,1)=\frac{7!}{3!4!}\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{1!1!}\frac{1!}{1!0!}$$
$$=\frac{7!}{3!2!1!1!}=420$$

بنفس أسلوب المناقشة في المثال السابق يمكننا إثبات الانظرية التالية.

نظرية ٥-٢-٢٨. عدد التباديل المختلفة لـ n من الأشياء حيث يوجد n_1 من الأشياء المتماثلة من نوع 1 و n_2 من الأشياء المتماثلة (غير المتمايزة) من نوع 2، ... و n_k من الأشياء المتماثلة من نوع k يكون

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

البرهان: الـ n_1 شيء من النوع 1 يمكن أن توضع في n موضع في $C(n,n_1)$ طريقة، تاركة $n-n_1$ موضع متاح. بعد ذلك n_2 من الأشياء من نوع 2 يمكن أن توضع في $C(n-n_1,n_2)$ طريقة، تاركة $n-n_1-n_2$ موضع متاح، ...، أخيرا n_k من الأشياء من نوع k يمكن أن توضع في $C(n-n_1-n_2-...-n_{k-1},n_k)$. من قاعدة الضرب، عدد التباديل يكون

$$C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)C(n-n_1-n_2,n_3)...$$
$$C(n-n_1-n_2-...-n_{k-1},n_k)$$
$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot...$$

$$\frac{n-n_1-n_2-...-n_{k-1}}{n_k\,!0!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k\,!}$$

معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients

نظريـة ذات الحـدين تعطـي معـاملات مفكـوك قـوى تعبيـرات ذات حدين. مثال ٥-٢-٢٩ يوضح لماذا تكون هذه النظرية محققة.

مثـال ٥-٢-٢٩. مفكـوك $(x+y)^3$ يمكـن الحـصول عليـه باسـتخدام المنطــق التــوافيقي بــدلا عــن ضــرب ثلاثــة حــدود. عنــدما نفــك $(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$، كل حواصل ضـرب حد من القـوس الأول مـع حـد من القـوس الثـاني مـع حد مـن القـوس الثـالـث يـتم جمعها. تظهر حدود على الصورة x^3 ، x^2y ، xy^2 و y^3. للحصول على الحد في الصـورة x^3 ، يجب أن نختار x من كل قوس، وهذا يمكن تنفيذه بطريقة واحدة فقط. لذلك الحد x^3 في المفكوك يكون معاملـه 1. للحصول على الحد على الصورة x^2y ، يجب أن نختـار x من اثنين من الأقواس الثلاثة (ومن ثم y من القوس الثالث). لذلك عدد تكرار هذا الحد هو عـدد توافيـق-2 لمجموعـة من ثلاثـة أشياء، أي $\binom{3}{2}$. بالمثـل، تكرار الحد على الصورة xy^2 هو عدد اختيار واحد من الأقواس الثلاثة لنحصل على x (ومن ثم y من كل من القوسين الآخرين). وهذا يمكن تنفيذه بعدد $\binom{3}{1}$ من الطرق. أخيرا الطريقة الوحيدة للحصول على الحد على الصورة y^3 ، أن نختار y من كل قوس من الأقواس الثلاثة. نتيجة لذلك نحصل على

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=(x+y)(x+y)(x+y)\\&=(xx+xy+yx+yy)(x+y)\end{aligned}$$

$$= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx$$
$$+ yxy + yyx + yyy$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

نظرية ذات الحدين

الآن نعطي صياغة نظرية ذات الحدين.

نظرية ٥-٢-٣٠. نفرض x و y متغيران و n عدد صحيح غير سالب. إذن

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

البرهان: سوف نعطي برهانا توافيقيا. حدود الضرب عندما يفك تكون في الصورة $x^{n-j}y^j$ حيث $j = 0,1,2,3,\dots,n$. لحساب عدد الحدود على الصورة $x^{n-j}y^j$، لاحظ أنه للحصول على مثل هذا الحد يكون من الضروري اختيار x عدد $n-j$ مرة من الأقواس التي عددها n (ومن ثم الحدود الأخرى من الضرب والتي عددها j يكون كل منها y). لذلك معامل $x^{n-j}y^j$ يكون $\binom{n}{n-j}$ والذي يساوي $\binom{n}{j}$. وهذا يبرهن النظرية.

نتيجة ٥-٢-٣١. نفرض n عدد صحيح غير سالب. إذن

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

نتيجة ٥-٢-٣٢. نفرض n عدد صحيح غير سالب. إذن

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

وهذه النتيجة يمكن صياغتها بصورة أخري

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

نتيجة ٥-٢-٣٣. نفرض n عدد صحيح غير سالب. إذن

$$.\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$$

نظرية ٥-٢-٣٤ (متطابقة باسكال). نفرض n و k عددان صحيحان موجبان بحيث $n\geq k$. إذن

$$.\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

البرهان: نفرض أن T مجموعة بها $n+1$ عنصر. نفرض a عنصر في T و $S=T-\{a\}$. لاحظ أنه يوجد $\binom{n+1}{k}$ مجموعة جزئية من T تحتوي k عنصر. ومع ذلك مجموعة جزئية من T ذات k عنصر إما تحتوي a مع $k-1$ عنصر من S، أو تحتوي k عنصر من S ولاتحتوي a. حيث أنه يوجد $\binom{n}{k-1}$ مجموعة جزئية من S بها $k-1$ عنصر، يوجد $\binom{n}{k-1}$ مجموعة جزئية من T بها k عنصر ولاتحتوي a، حيث أنه يوجد $\binom{n}{k}$ مجموعة جزئية من S بها k عنصر. نتيجة لذلك $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$.

ملاحظة ٥-٢-٣٥. متطابقة باسكال، مع الشرط الابتدائي $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ لكل الأعداد الصحيحة n، يمكن استخدامها بالتتابع لتعريف معاملات ذات الحدين. هذا التعريف التتابعي يكون مفيد في

توافيق معاملات ذات الحدين حيث فقط جمع الاعداد الصحيحة هو الذي نحتاج استخدامه في هذا التعريف التتابعي.

مثلث باسكال

متطابقة باسكال هي الاساس للترتيب الهندسي لمعاملات ذات الحدين في مثلث (يسمى مثالث باسكال) كما هو مبين بالشكل.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

من متطابقة باسكال

$$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=\binom{7}{5}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}
$$

الصف رقم n في المثلث يتكون من معاملات ذات الحدين $\binom{n}{k}$، $k=0,1,2,\dots,n$. هذا المثلث يسمى مثلث باسكال Pascal's triangle.

بعض المتطابقات لمعاملات ذات الحدين

نظرية ٥-٢-٣٦. نفرض m ، n و r أعداد صحيحة غير سالبة حيث r لاتزيد عن n أو لاتزيد عن k. إذن

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

البرهان: نفرض أنه يوجد m مفردة في مجموعة و n مفردة في مجموعة أخرى. إذن العدد الكلي لطرق اختيار r عنصر من اتحاد المجموعتين يكون $\binom{m+n}{r}$. طريقة أخرى لاختيار r عنصر من اتحاد المجموعتين هو اختيار k عنصر من المجموعة الأولى وبعد ذلك نختار $r-k$ من المجموعة الثانية حيث k عدد صحيح بحيث $0\le k\le r$. هذا يمكن أن يتم في $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ طريقة، باستخدام قاعدة الضرب. لذلك، العدد الكلي لاختيار r عنصر من الاتحاد يكون أيضا $\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$.

نتيجة ٥-٢-٣٧. إذا كان n عدد صحيح غير سالب، فإن
$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}.$$

البرهان: $$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{r-k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}.$$

نظرية ٥-٢-٣٨. عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$ حيث $x_i>0$ لكل i يساوي عدد طرق توزيع r كرة متماثلة على n صندوق مرقم بحيث توضع على الأقل كرة واحدة في كل صندوق. أي تساوي
$$=C(n-1+(r-n),r-n)=C(r-1,r-n)$$
$$=C(r-1,n-1)$$

نظرية ٥-٢-٣٩. عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$ يساوي عدد طرق توزيع r كرة متماثلة على n صندوق مرقم يساوي عدد الأعداد الثنائية التي بها $n-1$ من 1's و r من 0's يساوي
$$C(n-1+r,r)=C(n-1+r,n-1)=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

مثال ٥-٢-٤٠. أوجد عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمتباينة
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 19$$

الحل: السؤال هنا يكون عن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة لعدد 20 معادلة $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=k$ حيث k يمكن أن تأخذ أي عدد صحيح من 0 إلى 19.

يمكن حل هذا المثال بتكرار تطبيق نظرية... لذلك الحل هو أنه يوجد عدد
$$C(5-1+0,4)+C(5-1+1,4)+\ldots+C(5-1+19,4)$$
من الحلول.

مثال ٥-٢-٤١. كم تبديلة طولها 10 من المجموعة $\{3a,4b,2c,1d\}$؟

الحل: نفرض x هو عدد التباديل. إذن يوجد $3!x$ إذا استبدلنا $a's$ بـ a_1,a_2,a_3. بالمثل يوجد $(4!)(3!x)$ إذا استبدلنا $b's$ بـ b_1,b_2,b_3,b_4. بالاستمرار يوجد لدينا $(2!)(4!)(3!x)$ تبديلة إذا استبدلنا $c's$ بـ c_1,c_2. ولكن عندئذ يكون لدينا $10!$ تبديلة. لذلك

$(2!)(4!)(3!x)=10!$. أي أن $x=\frac{10!}{2!4!3!}=12600$.

الآن نعطي حل بديل: لاحظ أنه يوجد لدينا عشرة حروف منها ثلاثة متماثلة $(a's)$ و أربعة متماثلة $(b's)$ واثنان متماثلان $(c's)$ وواحد d. لذلك لدينا عشرة مواضع تملأ بهذه الحروف ، من المواضع العشرة نختار ثلاثة لـ $a's$ ومن ثم السبعة الباقية نختار منها أربعة لـ $b's$ ومن ثم المواضع الثلاث الباقية نختار منها موضعين لـ $c's$ وأخيرا الموضع المتبقي يكون لـ d. وهذا يمكن أن يتم بعدد طرق يساوي

$$C(10,3)C(7,4)C(3,2)C(1,1)$$
$$=\frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{1!}{1!0!}=\frac{10!}{3!4!2!1!}$$

نظرية ٥-٢-٤٢. عدد التبديلات من طول n بتكرارات $q_1,q_2,...,q_t$ يساوي

$$P(n;q_1,q_2,...,q_t)=\frac{n!}{q_1!q_2!...q_t!}$$

مثال ٥-٢-٤٣. بكم طريقة يمكن توزيع 23 كتاب على خمسة طلاب بحيث أن اثنين من الطلاب يحصل كل منهما على أربعة كتب والطلاب الثلاثة الآخرون يحصل كل واحد منهم على خمسة كتب؟

الحل: لاختيار طالبين كل طالب يحصل على أربعة كتب يوجد $C(5,2)$ طريقة، لكل اختيار يمكن توزيع 23 في $P(23;4,4,5,5,5)$. لذلك عدد الطرق المطلوب يكون

$C(5,2)P(23;4,4,5,5,5)=C(5,2)\frac{23!}{4!4!5!5!5!}$.

التجزيء المرتب لمجموعة Ordered Partition

التجزيء المرتب للمجموعة S هو تجزيء للمجموعة S ولكن يوجد ترتيب معين للمجموعات الجزئية. لذلك المتعدد t المرتب من

المجموعات $(A_1,A_2,...,A_t)$ يكون تجزيء مرتب من t جزء لـ S إذا كانت المجموعات $A_1,A_2,...,A_t$ تكون تجزيء للمجموعة S.

مثال ٥-٢-٤٤. $A_1=\{a,b\}$، $A_2=\{c\}$، $A_3=\{d\}$ يكون تجزيء من 3 أجزاء للمجموعة $S=\{a,b,c,d\}$. بينما (A_1,A_2,A_3)، (A_2,A_1,A_3)، (A_2,A_3,A_1)، (A_3,A_2,A_1)، (A_3,A_1,A_2)، (A_1,A_3,A_2) تكون ستة تجزيئات مرتبة للمجموعة S باستخدام نفس هذه المجموعات الجزئية الثلاث. بالطبع توجد تجزيئات أخرى مرتبة من ثلاثة أجزاء للمجموعة S، سبيل المثال $B_1=\{a,c\}$، $B_2=\{b\}$، $B_3=\{d\}$.

التجزيء المرتب للمجموعة S من النوع $(q_1,q_2,...,q_t)$ يقصد به تجزيء مرتب $(A_1,A_2,...,A_t)$ للمجموعة S حيث $|A_i|=q_i$ لكل i. حيث أن S بها n عنصر يجب أن يكون $n=q_1+q_2+...+q_t$.

مثال ٥-٢-٤٥: أكتب كل التجزيئات المرتبة للمجموعة $S=\{a,b,c,d\}$ من النوع $(1,1,2)$.

الحل: $\{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}$، $\{\{b\},\{a\},\{c,d\}\}$، $\{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}$، $\{\{c\},\{a\},\{b,d\}\}$، $\{\{b\},\{d\},\{a,c\}\}$، $\{\{d\},\{b\},\{a,c\}\}$، $\{\{c\},\{d\},\{a,b\}\}$، $\{\{d\},\{c\},\{a,b\}\}$.

نظرية ٥-٢-٤٦. عدد التجزيئات المرتبة للمجموعة S من النوع $(q_1,q_2,...,q_t)$ يساوي

$$P(n;q_1,q_2,...,q_t)=\frac{n!}{q_1!q_2!..q!}$$

حيث $|S|=n$.

البرهان: باختيار q_1 عنصر تشغل المجموعة الجزئية الأولى في $C(n,q_1)$ طريقة و q_2 عنصر للمجموعة الجزئية الثانية في

$C(n-q_1,q_2)$ طريقة ... وهكذا. إذن عدد التجزيئات من النوع $(q_1,q_2,...,q_t)$ يكون

$$C(n,q_1)C(n-q_1,q_2)...$$
$$C(n-q_1-q_2-...-q_{t-1},q_t)$$

وهذا يساوي $P(n;q_1,q_2,...,q_t)$.

بتطبيق هذه النظرية على المثال السابق حيث $q_1=q_2=1$، $q_3=2$، $n=4$، يوجد $\frac{4!}{2!1!1!}=12$.

مثال ٥-٢-٤٧. (أ) بكم طريقة يمكن توزيع 14 رجل على 6 فرق حيث الفريق الأول يحتوي 3 أعضاء والفريق الثاني عضوين والفريق الثالث 3 أعضاء والفرق الرابع والخامس والسادس عضوين.

الحل: عدد الطرق يساوي

$$P(14;3,2,3,2,2,2)=\frac{14!}{3!2!3!2!2!2!}=30030$$

(ب) بكم طريقة 12 من الـ 14 رجل يمكن توزيعهم إلى ثلاثة فرق $(3,5,4)$؟

الحل: أولا نوجد عدد طرق إختيار 12 من 14. هذا العدد يساوي $C(14,12)$. بعد ذلك نوجد عدد التجزيئات من النوع $(3,5,4)$. لذلك يوجد $C(14,12)\frac{12!}{3!5!4!}$.

نظرية عديدات الحدود The Multinomial Theorem

مجموع شيئين غير متماثلين x_1+x_2 يعطي ثنائية الحدود، مجموع ثلاثة أشياء غير متماثلة يعطي ثلاثية الحدود. على وجه العموم مجموع t شيء غير متماثلة $x_1+x_2+...+x_t$ يكون عديدة حدود multinomial.

نظرية ذات الحدين تزودنا بصيغة للمقدار $(x_1+x_2)^n$ عندما تكون n عدد صحيح موجب. هذه الصيغة يمكن توسيعها لتعطي صيغة لقوى ثلاثية الحدود $(x_1+x_2+x_3)^n$، بصورة أعم، لقوى عديدة

الحدود $(x_1+x_2+...+x_t)^n$. في هذه النظرية، معاملات ذات الحدين تستبدل بالأعداد

$$P(n;q_1,q_2,...,q_t)=\frac{n!}{q_1!q_2!..q_t!}$$

حيث $q_1,q_2,...,q_t$ أعداد صحيحة غير سالبة بحيث $n=q_1+q_2+...+q_t$. من المناسب تسمية هذه الأعداد معاملات عديدات الحدود ونرمز لها بالرمز $\binom{n}{q_1,q_2,...,q_t}$.

نذكر أن هذه تعطي عدد التجزيئات المرتبة لمجموعة من n عنصر من النوع $(q_1,q_2,...,q_t)$.

نظرية ٥-٢-٤٨. (نظرية عديدات الحدود). نفرض n عدد صحيح موجب. لكل $x_1,x_2,...,x_t$ يكون

$$(x_1,x_2,...,x_t)^n$$
$$=\sum P(n;q_1,q_2,...,q_t)x_1^{q_1}x_2^{q_2}..x_t^{q_t}$$

حيث المجموع يمتد على كل المجموعات من الأعداد الصحيحة غير السالبة $q_1,q_2,...,q_t$ حيث $n=q_1+q_2+...+q_t$. لذلك يوجد $C(n+t-1,n)$ حد في مفكوك $(x_1,x_2,...,x_t)^n$.

البرهان: معاملات $x_1^{q_1}x_2^{q_2}..x_t^{q_t}$ هي عدد الطرق لترتيب n حرف $\{q_1x_1,q_2x_2,...,q_tx_t\}$، لذلك تكون $P(n;q_1,q_2,...,q_t)$.

عدد الحدود يعين كما يلي: كل حد على الصورة $x_1^{q_1}x_2^{q_2}..x_t^{q_t}$ هو اختيار لـ n شيء مع التكرار من t نوع مختلف. لذلك يوجد $C(n+t-1,n)$ طريقة لعمل ذلك.

مثال ٥-٢-٤٩. (أ) في $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$ معامل $x_1^2x_3x_4^3x_5^4$ يكون $P(10;2,0,1,3,4)=\frac{10!}{2!0!1!3!4!}=12600$.
في هذا المفكوك يوجد $C(10+5-1,10)=C(14,10)=1001$ حد.

(ب) في $(2x-3y+5z)^8$ نفرض أن $x_1=2x$ ، $x_2=-3y$ و $x_3=5z$ ، ومن ثم معاملات $x_1^3x_2^3x_3^2$ تكون $P(8;3,3,2)=560$.
لذلك معاملات $x^3y^3z^2$ تكون

$$2^3(-3)^3(5)^2P(8;3,3,2)=(2^3)(-3)^3(5^2)(650)$$

نتيجة ٥-٢-٥٠. لأي عدد صحيح موجب t يكون

$$t^n=\sum P(n;q_1,q_2,...,q_t)$$

حيث المجموع يمتد على كل المجموعات من الأعداد الصحيحة غير السالبة $q_1,q_2,...,q_t$ حيث $q_1+q_2+...+q_t=n$.

البرهان: بوضع $x_1=x_2=...=x_t=1$ في نظرية ٥-٢-٤٨.

تمارين ٥-٢

١- أكتب كل التبديلات للمجموعة $\{a,b,c\}$.

٢- كم تبديلة مختلفة توجد للمجموعة $\{a,b,c,e,f,g\}$ ؟

٣- كم تبديلة مختلفة توجد للمجموعة $\{a,b,c,e,f,g\}$ تنتهي بـ a؟

٤- نفرض $S=\{1,2,3,4,5\}$

(أ) أكتب كل التبديلات لـ S.

(ب) أكتب كل التبديلات التي طولها 3 لـ S.

(ج) أكتب كل توافيق-3 لـ S.

٥- أوجد قيم كل من الكميات التالية

(أ) $P(8,1)$. (ب) $P(8,5)$. (ج) $P(8,8)$.

(د) $P(10,9)$. (هـ) $C(5,1)$. (و) $C(5,3)$.

(ز) $C(8,4)$. (ح) $C(8,8)$. (ط) $C(8,0)$.

٦- أوجد عدد التبديلات التي طولها 5 للمجموعة التي بها تسعة عناصر.

٧- كم تبديلة للحروف ABCDEFGH تحتوي

(أ) السلسلة ED ؟

(ب) السلسلة CDE ؟

(ج) السلسلتان BA و FGH ؟

(د) السلاسل AB، DE و GF ؟
(هـ) السلسلتان CAB و BED ؟
(و) السلسلتان BCA و ABF.
(ز) السلسلتان ABC و CDE.

٩- في فصل الرياضيات المتقطعة يوجد ثلاثة عشر طالبا منهم ثلاث بنات. كم طريقة توجد لتشكيل فريق من أحد عشر طالبا بشرط أن يكون منهم على الأقل بنت واحدة ؟

١٠- في قسم الرياضيات يوجد تسعة رجال وسبع نساء. كم عدد الطرق لاختيارلجنة من خمسة أعضاء من القسم بشرط أن تحتوي اللجنة على رجل واحد على الأقل وامرأة واحدة على الأقل ؟

١١- أوجد مفكوك $(x+y)^4$.
(أ) باستخدام المنطق التوافيقي كما في مثال ٥-٢-٢٦.
(ب) باستخدام نظرية ذات الحدين.

١٢- أوجد مفكوك $(x+y)^5$.
(أ) باستخدام المنطق التوافيقي كما في مثال ٥-٢-٢٦.
(ب) باستخدام نظرية ذات الحدين.

١٣- أوجد مفكوك $(x+y)^6$.

١٤- ماهو معامل x^7 في $(1+x)^{11}$ ؟

١٥- ماهو معامل x^9 في $(2-x)^{19}$ ؟

١٦- ماهو معامل x^8y^9 في مفكوك $(3x+2y)^{17}$ ؟

١٧- الصف في مثلث باسكال الذي يحتوي معاملات ذات الحدين $\binom{10}{k}$، $0\le k\le 10$، هو:

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

استخدم متطابقة باسكال لاستنتاج الصف التالي لهذا الصف في مثلث باسكال.

١٨- بين أنه إذا كان n و k عددان صحيحان موجبان، فإن

$$\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1} / k$$

استخدم هذه المتطابقة في اعطاء تعريف إرتدادي لمعاملات ذات الحدين.

١٩- بين أنه إذا كان n عدد صحيح موجب، فإن

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

(أ) باستخدام مناقشة توافيقية.

(ب) بالمعالجة الجبرية.

٢٠- بين أن المجموعة غير الخالية يكون لها نفس عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي عدد زوجي من العناصر مثل المجموعات الجزئية التي تحتوي عدد فردي من العناصر.

٥-٣ طرق متقدمة في العد Advanced counting techniques

في الفصلين السابقين درسنا بعض الطرق التي يمكن استخدامها في العد. ولكن العديد من مسائل العد يصعب حلها باستخدام الطرق التي تمت دراستها. في هذا الفصل سوف نقدم طرقا متقدمة لحل العديد من مسائل العد الأكثر تعقيدا.

العلاقات التكرارية Recurrence relations

عدد البكتريا في مستعمرة يتضاعف كل ساعة. إذا بدأت المستعمرة بعدد خمس من البكتريا، كم عدد البكتريا سوف يوجد بعد n ساعة؟ لحل هذه المسألة، نفرض أن a_n ترمز إلى عدد البكتريا في نهاية n ساعة. حيث أن عدد البكتريا يتضاعف كل ساعة، العلاقة $a_n = 2a_{n-1}$ تكون محققة كلما كان n عدد صحيح موجب. هذه العلاقة مع الشرط الابتدائي $a_0 = 5$ تحدد a_n تحديدا وحيدا لكل الأعداد الصحيحة غير السالبة n. يمكننا إيجاد صيغة لـ a_n من هذه المعلومات. بعض مسائل العد يمكن حلها بإيجاد علاقة، تسمى علاقة تكرارية، بين حدود متتابعة، كما فعلنا في مسألة البكتريا.

رأينا في الباب الرابع كيفية تعريف متتابعة إرتداديا. نذكر هنا أن التعريف الارتدادي يعين حد ابتدائي أو أكثر وقاعدة لتحديد حدود تالية من الحدود السابقة لها. هذه القاعدة تسمى علاقة تكرارية. مثل هذه العلاقات يمكن استخدامها لدراسة وحل مسائل العد.

تعريف ٥-٣-١. العلاقة التكرارية recurrence relation للمتتابعة $\{a_n\}$ هي معادلة تعبر عن a_n بدلالة حد أو أكثر من حدود المتتابعة السابقة له، والتي هي $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ لكل عدد صحيح n بحيث $n \geq n_0$ ، حيث n_0 عدد صحيح غير سالب. المتتابعة تسمى **حل** للعلاقة التكرارية إذا كانت حدودها تحقق العلاقة التكرارية.

هناك ارتباط هام بين الارتداد والعلاقة التكرارية سوف نستكشفه لاحقا في هذا الباب.

خوارزمية الارتداد تزودنا بحل لمسألة من الحجم n بدلالة حدود الحلول لواحد أو أكثر لهذه المسألة من حجم أصغر. نتيجة لذلك عندما نحلل تعقيد خوارزمية الارتداد نحصل على علاقة تكرارية التي تعبر

عن عدد العمليات اللازمة لحل مسألة من الحجم n بدلالة عدد العمليات اللازمة لحل مسألة لواحد أو أكثر من حجم أقل.

مثال ٥-٣-٢. نفرض $\{a_n\}$ هي المتتابعة التي تحقق العلاقة التكرارية $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ، $n = 2,3,4,\ldots$ ونفرض أن $a_0 = 3$ و $a_1 = 5$. ماهي a_2 و a_3 ؟

الحل: من العلاقة التكرارية نجد أن

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2 \text{ و } a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$$

يمكننا إيجاد a_4 و a_5 وأي حد تالي بنفس الطريقة.

مثال ٥-٣-٣. حدد ما إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$، حيث $a_n = 3n$ لكل عدد صحيح غير سالب n، تكون حل للعلاقة التكرارية $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ لكل $n = 2,3,4,\ldots$. أجب نفس السؤال حيث $a_n = 2^n$ و $a_n = 5$.

الحل: نفرض أن $a_n = 3n$ لكل عدد صحيح غير سالب n. إذن لكل $n \geq 2$ نجد أن

$$\begin{aligned} 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2[3(n-1)] - 3(n-2) \\ &= 3n = a_n \end{aligned}$$

لذلك $\{a_n\}$ ، حيث $a_n = 3n$ تكون حل للعلاقة التكرارية.

نفرض أن $a_n = 2^n$ لكل عدد صحيح غير سالب n. لاحظ أن $a_0 = 1$ ، $a_1 = 2$ و $a_2 = 4$.

لأن $2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \neq a_2$، نجد أن $\{a_n\}$، حيث $a_n = 2^n$، ليست حلا للعلاقة التكرارية.

نفرض أن $a_n = 5$ لكل عدد صحيح غير سالب n. إذن لكل $n \geq 2$ نجد أن $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5 = a_n$

لذلك $\{a_n\}$، حيث $a_n = 5$، تكون حلا للعلاقة التكرارية.

الشروط الابتدائية initial conditions للمتتابعة تعين الحدود التي تسبق أول حد تكون فيه العلاقة التكرارية مفعلة. على سبيل المثال في مثال ٥-٣-٣، $a_0 = 3$ و $a_1 = 5$ هي الشروط الابتدائية.

العلاقة التكرارية والشروط الابتدائية تحدد المتتابعة تحديدا وحيدا. ذلك لأن العلاقة التكرارية مع الشروط الابتدائية تعطي تعريف ارتدادي للمتتابعة. أي حد في المتتابعة يمكن إيجاده من الشروط الابتدائية واستخدام العلاقة التكرارية العدد الكافي من المرات. ومع ذلك توجد طريقة أفضل لحساب حدود متتابعة معينة معرفة بعلاقة تكرارية وشروط ابتدائية. هذه الطرق سوف تناقش في هذا الفصل والفصل التالي.

النمذجة بالعلاقات التكرارية

Modeling with recurrence relations

يمكننا استخدام العلاقات التكرارية لنمذجة العديد من المسائل في مجالات مختلفة.

مثال ٥-٣-٤. مدينة بها 10,000 شخص. معدل الزيادة السكانية في المدينة 11 % سنويا. كم عدد سكان المدينة بعد ثلاثون عاما ؟

الحل: لحل مثل هذه المسألة، نفرض أن P_n ترمز إلى تعداد السكان بعد n عام. حيث أن تعداد السكان بعد n عام تساوي تعداد السكان بعد $n-1$ عام مضافا إليها الزيادة في السكان في العام رقم n، نجد أن المتتابعة $\{P_n\}$ تحقق العلاقة التكرارية $P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1}$. الشروط الابتدائية هي $P_0 = 10,000$.

يمكننا استخدام الاسلوب التكراري لإيجاد صيغة لـ P_n. لاحظ أن

$$P_1 = (1.11)P_0$$

$$P_2 = (1.11)P_1 = (1.11)^2 P_0$$

$$P_3 = (1.11)P_2 = (1.11)^3 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_n = (1.11)P_{n-1} = (1.11)^n P_0$$

عندما نعوض بالشرط الابتدائي $P_0 = 10,000$ نحصل على الصيغة

$$P_n = (1.11)^n 10,000$$

يمكننا استخدام الاستنتاج الرياضي لإثبات صحة هذه العلاقة.

الآن نفرض أن $P_n = (1.11)^n 10,000$، إذن من العلاقة التكرارية ومن فروض الاستنتاج نجد أن

$$P_{n+1} = (1.11)P_n = (1.11)(1.11)^n 10,000$$
$$= (1.11)^{n+1} 10,000$$

وهذا يبين أن الصيغة الصريحة لـ P_n تكون صحيحة.

بالتعويض عن $n = 30$ نجد أنه بعد 30 عام تعداد السكان

$$P_{30} = (1.11)^{30} 10,000 = 228,922.97$$

مثال ٥-٣-٥. زوج من الأرانب الشباب (واحد من كل جنس) وضع في جزيرة. زوج الأرانب لا يتناسل حتى يتم شهرين، بعد أن يتم شهران كل زوج من الأرانب ينتج زوجا آخر. أوجد علاقة تكرارية لعدد أزواج الأرانب في الجزيرة بعد n شهر بفرض أن أي من الأرانب لم يمت.

الحل: نرمز لعدد أزواج الأرانب بعد n شهر بالرمز f_n . سوف نبين أن f_n ، $n = 1,2,3,...$ هي حدود متتابعة فيبوناسي.

تعداد الأرانب يمكن نمذجته باستخدام علاقة تكرارية. في نهاية الشهر الأول عدد الأزواج في الجزيرة يكون $f_1 = 1$. لأن هذا الزوج لايتناسل خلال الشهر الثاني فإن $f_2 = 1$. لإيجاد عدد أزواج الأرانب في الجزيرة بعد n شهر، نضيف العدد في الشهر السابق، f_{n-1} وعدد الأزواج المولودة حديثا والتي تساوي f_{n-2} ، لأن كل زوج جديد يأتي من زوج عمره شهران على الأقل. نتيجة لذلك $\{f_n\}$ تحقق العلاقة التكرارية

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{لكل} \quad n \ge 3$$

مع الشروط الابتدائية $f_1 = 1$ و $f_2 = 1$.

وحيث أن هذه العلاقة التكرارية مع الشروط الابتدائية تحدد هذه المتتابعة تحديدا وحيدا، فإن عدد أزواج الأرانب على الجزيرة بعد n شهر يعطى من عدد فيبوناسي رقم n.

مثال ٥-٣-٦. أوجد العلاقة التكرارية وأعط شروط ابتدائية لعدد سلاسل البتات من الطول n التي لاتحتوي صفرين متتاليين. كم عدد مثل هذه السلاسل من الطول 5؟

الحل: نفرض a_n عدد سلاسل البتات من الطول n التي لاتحتوي صفرين متتاليين. للحصول على علاقة تكرارية لـ $\{a_n\}$، لاحظ أنه من قاعدة الجمع، عدد سلاسل البتات من الطول n التي لاتحتوي صفرين متتاليين تساوي عدد سلاسل البتات التي تنتهي بصفر بالإضافة إلى عدد سلاسل البتات التي تنتهي بـ 1. نفرض أن $n \geq 3$، لذلك السلسلة تحتوي على الأقل ثلاث بتات.

سلاسل البتات من الطول n التي تنتهي بـ 1 والتي لاتحتوي صفرين متتاليين هي تماما سلاسل البتات من الطول $n-1$ التي لاتحتوي صفرين متتاليين وأضيف إليها 1 في النهاية. لذلك يوجد a_{n-1} من هذه السلاسل.

سلاسل البتات من الطول n التي تنتهي بـ 0 والتي لاتحتوي صفرين متتاليين يكون بها 1 في البت رقم $n-1$. من ذلك ينتج أن سلاسل البتات من الطول n التي تنتهي بـ 0 والتي لاتحتوي صفرين متتاليين هي تماما سلاسل البتات من الطول $n-2$ التي لاتحتوي صفرين متتاليين وأضيف إليها 10 في النهاية. تبعا لذلك يوجد a_{n-2} من مثل هذه السلاسل. من ذلك نستنتج أن

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{لقيم} \quad n \geq 3.$$

الشروط الابتدائية هي $a_1 = 2$ لأن كل السلاسل من الطول 1 هي 0 و 1 لاتحتوي صفرين متتاليين، و $a_2 = 3$ لأن السلاسل من الطول 2 هي 11، 10 و 01.

للحصول على a_5 نستخدم العلاقة التكرارية ثلاث مرات

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$$
$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$$

ملاحظة ٥-٣-٧. لاحظ أن $\{a_n\}$ تحقق العلاقة التكرارية مثل متتابعة فيبوناسي. لأن $a_1 = f_3$ و $a_2 = f_4$ ينتج أن $a_n = f_{n+2}$.

مثال ٥-٣-٨. نظام الحاسب يعتبر السلاسل من الارقام العشرية (الأرقام $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$) كلمات شفرة صحيحة إذا كانت تحتوي عدد زوجي من الرقم 0. على سبيل المثال 1230407869 تكون كلمة شفرة صحيحة بينما 120987045608 لاتكون كلمة شفرة صحيحة. نفرض a_n هو عدد كلمات الشفرة الصحيحة من الطول n (أي تحتوي n رقم) . أوجد علاقة تكرارية لـ a_n.

الحل: لاحظ أن $a_1 = 9$ ، لأنه يوجد عشرة سلاسل عشرية بطول 1، واحدة منها فقط السلسلة 0، غير صحيحة. العلاقة التكرارية يمكن أن تشتق هذه المتتابعة باعتبار كيفية الحصول على سلسلة عشرية صحيحة بطول n من سلسلة عشرية صحيحة بطول $n-1$. توجد طريقتان لتكوين سلسلة عشرية صحيحة بطول n من سلسلة عشرية صحيحة بطول أقل.

الأولى، يمكن الحصول على سلسلة عشرية صحيحة بطول n بتزويد سلسلة عشرية صحيحة بطول $n-1$ برقم غير الصفر. هذا يمكن أن يتم في تسعة طرق. لذلك السلسلة الصحيحة بطول n يمكن تكوينها في $9a_{n-1}$ طريقة.

الثانية، السلسلة الصحيحة بطول n يمكن تكوينها بتزويد 0 للسلسلة غير الصحيحة التي طولها $n-1$. ولأنه يوجد 10^{n-1} سلسلة من طول $n-1$ و a_{n-1} سلسلة صحيحة، إذن يوجد $10^{n-1} - a_{n-1}$ سلسلة صحيحة طولها n نحصل عليها بتزويد سلسلة غير صحيحة طولها $n-1$ بالرقم 0.

وحيث أن كل السلاسل الصحيحة بطول n حصلنا عليها بإحدى هاتين الطريقتين، من ذلك ينتج أنه يوجد

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

سلسلة صحيحة بطول n.

مثال ٥-٣-٩. أوجد علاقة تكرارية لـ C_n (عدد طرق وضع الأقواس لبيان كيفية ترتيب حاصل ضرب $n+1$ عدد، $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$).

على سبيل المثال، $C_3 = 5$ ، لأنه توجد خمسة طرق لوضع الأقواس لحاصل ضرب x_0, x_1, x_2, x_3 لتحديد ترتيب الضرب، هذه الطرق هي $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$، $((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3$ ، $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$ ، $x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$ ، و $x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$.

الحل: لإيجاد علاقة تكرارية لـ C_n، نلاحظ أنه مهما وضعنا أقواس في حاصل الضرب $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ فإن عملية واحدة ". " سوف تظل خارج الأقواس، وهي آخر عملية ضرب يتم إجراؤها. هذه العملية الأخيرة تظهر بين إثنين من الـ $n+1$ عدد، ليكن بين x_k و x_{k+1} . يوجد $C_k C_{n-k-1}$ طريقة لوضع الأقواس لتحديد ترتيب الضرب لـ $n+1$ عدد عندما تكون العملية الأخيرة بين x_k و x_{k+1}، لأنه يوجد C_k طريقة لوضع الأقواس في حاصل الضرب $x_0, x_1, x_2, ..., x_k$ و C_{n-k-1} طريقة لوضع الأقواس في حاصل الضرب $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ لتحديد ترتيب الضرب. ولأن هذه العملية الأخيرة يمكن أن تظهر بين أي إثنين من الاعداد الـ $n+1$ فإن

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + ... + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

لاحظ أن الشروط الابتدائية هي $C_0 = 1$ و $C_1 = 1$.

تمارين ٥-٣

١- أوجد الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة المعرفة بالعلاقة التكرارية والشروط الابتدائية في كل ممايأتي.

(أ) $a_n = 6a_{n-1}$ ، $a_0 = 2$.

(ب) $a_n = a_{n-1}^2$ ، $a_1 = 2$.

(ج) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$ ، $a_0 = 1, a_1 = 2$.

(د) $a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2}$ ، $a_0 = 1, a_1 = 1$.

(هـ) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ ، $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$.

٢- نفرض $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$ لقيم $n = 0,1,2,...$.

(أ) أوجد a_0 ، a_1 ، a_2 ، a_3 و a_4 .

(ب) بين أن $a_2 = 5a_1 - 6a_0$ ، $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ ، $a_4 = 5a_3 - 6a_2$.

(ج) بين أن $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ لكل $n \geq 2$.

٣- لكل من المتتابعات التالية أوجد علاقة تكرارية تحقق المتتابعة (الحل ليس وحيد)

(أ) $a_n = 3$. (ب) $a_n = 2n$.

(ج) $a_n = 2n + 3$. (د) $a_n = 5^n$.

(هـ) $a_n = n^2$. (و) $a_n = n^2 + n$.

٤- بين أن المتتابعة $\{a_n\}$ تكون حل للعلاقة التكرارية $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9$ إذا كان

(أ) $a_n = -n + 2$.

(ب) $a_n = 5(-1)^n - n + 2$.

(ج) $a_n = 3(-1)^n + 2^n - n + 2$.

(د) $a_n = 7 \cdot 2^n - n + 2$.

٥- أوجد حل لكل العلاقات التكرارية مع الشروط الابتدائية المعطاة.

(أ) $a_n = 3a_{n-1}$، $a_0 = 2$.

(ب) $a_n = a_{n-1} + 2$، $a_0 = 3$.

(ج) $a_n = a_{n-1} + n$، $a_0 = 1$.

(د) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$، $a_0 = 4$.

(هـ) $a_n = 2a_{n-1}$، $a_0 = 1$.

(و) $a_n = 3a_{n-1} + 1$، $a_0 = 1$.

(ز) $a_n = na_{n-1}$، $a_0 = 5$.

(ح) $a_n = 2na_{n-1}$، $a_0 = 1$.

٦- نفرض أن تعداد سكان العالم في عام 2002 م كان 6.2 مليار ومعدل النمو 1.3 % سنويا.

(أ) كون علاقة تكرارية لتعداد سكان العالم لـ n عام بعد عام 2002.

(ب) أوجد الصيغة الصريحة لتعداد السكان n عام بعد عام 2002.

(ج) ماهو تعداد السكان في عام 2022؟

٧- مصنع ينتج سيارات رياضية معينة بمعدل متزايد. إذا كان في الشهر الأول أنتج المصنع سيارة واحدة وفي الشهر الثاني سيارتين وهكذا، مع إنتاج n سيارة في الشهر رقم n.

(أ) ضع علاقة تكرارية لعدد السيارات المنتجة في الشهور الـ n الأولى.

(ب) كم سيارة تم انتاجها في العام الأول؟

(ج) أوجد صيغة صريحة لعدد السيارات المنتجة في الشهور الـ n الأولى .

٨- (أ) أوجد علاقة تكرارية لعدد سلاسل البتات من الطول n التي تحتوي زوج من الأصفار المتتالية.

(ب) ما هو الشرط الابتدائي؟

(ج) كم عدد السلاسل من الطول 7 التي تحتوي صفرين متتاليين؟

٩- (أ) أوجد علاقة تكرارية لعدد سلاسل البتات من الطول n التي لا تحتوي ثلاثة أصفار متتالية.

(ب) ما هو الشرط الابتدائي؟

(ج) كم عدد السلاسل من الطول 7 التي لا تحتوي ثلاثة أصفار متتالية؟

١٠- (أ) أوجد علاقة تكرارية لعدد سلاسل البتات من الطول n التي تحتوي ثلاثة أصفار متتالية.

(ب) ما هو الشرط الابتدائي؟

(ج) كم عدد السلاسل من الطول 7 التي تحتوي ثلاثة أصفار متتالية؟

٥-٤ الادراج-الاستبعاد Inclusion-Exclusion

في فصل الرياضيات المتقطعة يوجد 30 فتاة و 50 طالب بالفرقة الثانية. كم طالب في الفصل يكون إما فتاة أو طالب في الفرقة الثانية؟ هذا السؤال لايمكن الإجابة عليه إلا إذا كانت هناك معلومات إضافية . جمع عدد الفتيات في الفصل وعدد طلاب الفرقة الثانية المتواجدون في الفصل قد لايعطي الإجابة الصحيحة، لأن طلاب الفرقة الثانية المتواجدون في الفصل من البنات قد تم عده مرتين. هذه الملاحظة تبين أن عدد الطلاب المتواجدون في الفصل الذين هم فتيات أو طلاب الفرقة الثانية مطروحا منه عدد طلاب الفرقة الثانية البنات المتواجدون في الفصل يكون هو الإجابة الصحيحة لهذا السؤال. طريقة لحل مثل هذه المسائل من العد تم دراستها في الفصل ٥-١ في هذا الفصل سوف نقوم بتعميم هذه الطريقة لاستخدامها في إيجاد عدد المجموعات في اتحاد أكثر من مجموعتين.

مبدأ الادراج-الاستبعاد

كم عنصر في اتحاد مجموعتين منتهيتين؟ في فصل ٥-١ بينا أن عدد العناصر في اتحاد A و B هو مجموع عدد العناصر في كل منهما مطروحا منه عدد عناصر تقاطعهما، أي أن

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

هنا نعطي مثال لمزيد من التوضيح.

مثال ٥-٤-١. نفرض n و d عددان صحيحان موجبان. كم عدد صحيح لايزيد عن n يقبل القسمة على d ؟

الحل: الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على d تكون على الصورة kd، حيث k عدد صحيح موجب. عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقبل القسمة على d ولا تزيد عن n تساوي عدد الأعداد الصحيحة k بحيث $0 < dk \le n$، أي $0 < k \le \frac{n}{d}$. لذلك $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ هو عدد الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على d ولا تزيد عن n.

مثال ٥-٤-٢. كم عدد صحيح لا يزيد عن 1000 يقبل القسمة على 7 أو 11؟

الحل: نفرض A ترمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة التي لا تزيد عن 1000 وتقبل القسمة على 7 و B ترمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة التي لا تزيد عن 1000 وتقبل القسمة على 11. إذن $A \cup B$ تكون هي

مجموعة الأعداد الصحيحة التي لا تزيد عن 1000 وتقبل القسمة على 7 أو 11 و $A \cap B$ تكون هي مجموعة الأعداد الصحيحة التي لا تزيد عن 1000 وتقبل القسمة على كل من 7 و 11.

من المثال السابق نجد أنه من بين الأعداد الصحيحة التي لا تزيد عن 1000 يوجد $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor$ عدد صحيح يقبل القسمة على 7 و $\left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor$ عدد صحيح يقبل القسمة على 11. وحيث أن 7 و 11 أوليان نسبيا، الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على كل من 7 و 11 هي التي تقبل القسمة على $7 \cdot 11$. لذلك يوجد $\left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor$ عدد صحيح لا يزيد عن 1000 يقبل القسمة على كل من 7 و 11 .

إذن

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 = 220\end{aligned}$$

مثال ٥-٤-٣. نفرض أنه يوجد بكلية العلوم 1807 طالب في أحد الأعوام، منهم 453 درسوا مقرر في الحاسب الآلي و 567 درسوا مقرر في الرياضيات المتقطعة و 299 درسوا مقررات في الرياضيات المتقطعة وفي الحاسب الآلي. كم طالب لم يدرس مقرر لا في الحاسب الآلي ولا في الرياضيات المتقطعة.

الحل: لإيجاد عدد الطلاب الذين لم يدرسوا مقررا لا في الحاسب الآلي ولا الرياضيات المتقطعة ، نطرح عدد الطلاب الذين درسوا مقررا في الحاسب الآلي أو مقررا في الرياضيات المتقطعة من عدد الطلاب الكلي.

نفرض A هو مجموعة الطلاب الذين درسوا مقررا في الحاسب الآلي، B مجموعة الطلاب الذين درسوا مقررا في الرياضيات المتقطعة ، إذن

$|A| = 453$ ، $|B| = 567$ و $|A \cap B| = 299$.

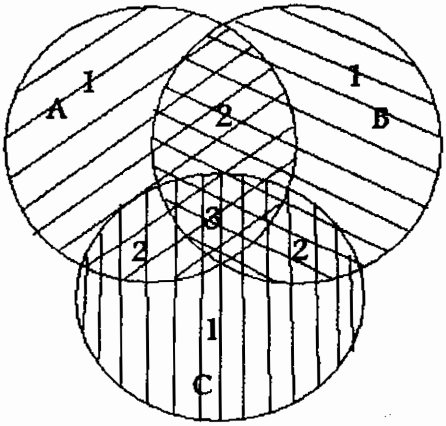
عدد الطلاب الذين درسوا مقررا في الحاسب الآلي أومقررا في الرياضيات المتقطعة يساوي

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 453 + 567 - 299 = 721\end{aligned}$$

نتيجة لذلك يوجد $1807 - 721 = 1086$ طالب لم يدرسوا مقررا في الحاسب الآلي أو في الرياضيات المتقطعة.

الآن نبدأ في تقديم صيغة لعدد العناصر في اتحاد عدد منتهي من المجموعات. الصيغة التي سوف نقدمها تسمى مبدأ الادراج-الاستبعاد.

قبل أن نعتبر اتحاد n مجموعة حيث n أي عدد صحيح، نشتق صيغة لعدد العناصر في اتحاد ثلاث مجموعات A ، B و C. لتكوين هذه الصيغة، لاحظ أن $|A|+|B|+|C|$ تعد كل العناصر التي تنتمي لمجموعة واحدة مرة واحدة وتعد العناصر التي تنتمي لمجموعتين مرتين وتعد العناصر التي تنتمي لكل المجموعات الثلاث ثلاث مرات. هذا موضح في شكل ٥-٤-١



شكل٥-٤-١

لإزالة العدد الزائد للعناصر نطرح عدد العناصر في التقاطع لكل زوج من المجموعات الثلاث، لنحصل على

$$|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|$$

هذا التعبير يظل يعد العناصر التي تحدث في مجموعة واحدة مرة واحدة. العناصر التي تنتمي إلى مجموعتين أيضا تظل تعد مرة واحدة لأن هذه العناصر سوف تحدث في أحد التقاطعات الثلاث لأزواج المجموعات مرتين. ومع ذلك العناصر التي تحدث في كل المجموعات الثلاث سوف لاتعد في هذا التعبير، لأن هذه العناصر تحدث في التقاطعات الثلاث

لمجموعتين. بسبب عدم العد هذا، نضيف عدد العناصر الموجودة في تقاطع كل المجموعات الثلاث. لذلك

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C| \\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\ &\quad +|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

مثال ٥-٤-٤. في إحدى الكليات الجامعية درس 1232 طالب مقرر في التفاضل ودرس879 طالب مقرر في الجبر ودرس 114 طالب مقرر في الحاسب الآلي. علاوة على ذلك يوجد 103 طالب كل منهم درس مقرر التفاضل ومقرر الجبر و 23 طالب درس كل منهم مقرر الجبر ومقرر الحاسب الآلي و 14 طالب درس كل منهم مقرر التفاضل ومقرر الحاسب الآلي. إذا كان 2093 طالب درس كل منهم مقرر واحد على الأقل من المقررات الثلاثة، كم طالب درس المقررات الثلاثة مجتمعة ؟

الحل: نفرض نفرض A ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين درسوا مقرر التفاضل، B ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين درسوا مقرر الجبر و C ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين درسوا مقرر الحاسب الآلي. إذن

$|A|=1232$ ، $|B|=879$ ، $|C|=114$، $|A\cap B|=103$،
$|B\cap C|=23$، $|A\cap C|=14$، $|A\cup B\cup C|=2092$.

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C| \\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C| \\ &\quad +|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

نحصل على $|A\cap B\cap C|=7$.

إذن يوجد سبعة طلاب درس كل منهم المقررات الثلاث مجتمعة.

الآن نقدم صياغة لمبدأ الادراج-الاستبعاد، والذي يعطينا عدد العناصر في اتحاد عدد منتهي لمجموعات منتهية.

نظرية ٥-٤-٥. (مبدأ الادراج-الاستبعاد). نفرض $A_1,A_2,\ldots,A_n$ مجموعات، إذن

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k|-\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

البرهان: سوف نبرهن هذه الصيغة ببيان أن كل عنصر في الاتحاد يتم عده مرة واحدة فقط في الطرف الأيمن للمعادلة.

نفرض a عنصر في r مجموعة على وجه التحديد $A_1, A_2, \ldots, A_r$ حيث $1 \le r \le n$. هذا العنصر يتم عده $C(r,1)$ مرة في $\sum|A_i|$ ويتم عده $C(r,2)$ مرة في $\sum|A_i \cap A_j|$. بصورة عامة، يتم عده $C(r,m)$ مرة في المجموع الذي يحتوي m من المجموعات A_i.

لذلك هذا العنصر يتم عده تحديدا

$$C(r,1)-C(r,2)+C(r,3)-\ldots+(-1)^{r+1}C(r,r)$$

مرة بالتعبير الذي في الطرف الأيمن من هذه المعادلة.

الآن هدفنا حساب هذه الكمية. من نتيجة ٧-٢-١٣

$$C(r,0)-C(r,1)+C(r,2)-\ldots+(-1)^{r+1}C(r,r)=0$$

لذلك

$$1=C(r,0)=C(r,1)-C(r,2)+\ldots$$
$$+(-1)^{r+1}C(r,r)$$

ومن ثم كل عنصر في الاتحاد يعد مرة واحدة تحديدا بواسطة هذا التعبير في الطرف الأيمن للمعادلة. وهذا يبرهن مبدأ الادراج-الاستبعاد.

مثال ٥-٤-٦. أوجد صيغة لعدد عناصر اتحاد أربع مجموعات.

الحل: من مبدأ الادراج-الاستبعاد،

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|$$
$$-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_1 \cap A_4|-|A_2 \cap A_3|$$
$$-|A_2 \cap A_4|-|A_3 \cap A_4|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$+|A_2 \cap A_3 \cap A_4|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

لاحظ أن هذه الصيغة تحتوي 15 حد مختلف وهي عدد المجموعات الجزئية غير الخالية من $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$.

تطبيقات مبدأ الادراج-الاستبعاد

العديد من مسائل العد يمكن حلها باستخدام مبدأ الادراج-الاستبعاد. على سبيل المثال، يمكننا استخدام هذا المبدأ في إيجاد عدد الأعداد الأولية التي أقل من عدد صحيح موجب، كذلك عدد الرواسم الفوقية من مجموعة منتهية إلى أخرى.

صورة بديلة للادراج-الاستبعاد

هنالك صورة بديلة لمبدأ الادراج-الاستبعاد تكون مفيدة خاصة في مسائل السؤال عن عدد العناصر في مجموعة التي لاتحقق أي من الخواص $P_1,P_2,\ldots,P_n$.

نفرض A_i هي مجموعة جزئية تحتوي العناصر التي لها الخاصية P_i. عدد العناصر التي تحقق كل الخواص $P_{i_1},P_{i_2},\ldots,P_{i_k}$ يرمز لها بالرمز $N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_k})$. بكتابة هذه الكمية بدلالة المجموعات يكون

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}|=N(P_{i_1}P_{i_2}\ldots P_{i_k})$$

إذا رمزنا لعدد العناصر الذي لايحقق أي من الخواص $P_1,P_2,\ldots,P_n$ بالرمز $N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_n})$ وإذا كان عدد عناصر المجموعة هو N فإن

$$N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_n})=N-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|$$

من مبدأ الادراج الاستبعاد، نجد أن

$$\begin{aligned}N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\ldots\overline{P_n})=N&-\sum_{1\le i\le n}N(P_i)+\sum_{1\le i<j\le n}N(P_iP_j)\\&-\sum_{1\le i<j<k\le n}N(P_iP_jP_k)+\ldots+\\&+(-1)^nN(P_1P_2\ldots P_n)\end{aligned}$$

مثال ٥-٤-٧. حدد عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n حيث $1\le n\le 100$، التي لا تقبل القسمة على 2، 3 أو 5.

الحل: هنا $S=\{1,2,3,...,100\}$ و $N=100$. لكل $n\in S$، نفرض أن n تحقق

(أ) الشرط P_1 إذا كانت n تقبل القسمة على 2.

(ب) الشرط P_2 إذا كانت n تقبل القسمة على 3.

(ج) الشرط P_3 إذا كانت n تقبل القسمة على 5.

إذن الإجابة تكون $N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3})$.

الآن

$$N(P_1)=\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor=50$$
$$N(P_2)=\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor=33$$
$$N(P_3)=\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor=20$$
$$N(P_1P_2)=\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor=16$$
$$N(P_1P_3)=\left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor=10$$
$$N(P_2P_3)=\left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor=6$$
$$N(P_1P_2P_3)=\left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor=3$$

بتطبيق مبدأ الادراج-الاستبعاد نحصل على

$$N(\overline{P_1}\,\overline{P_2}\,\overline{P_3})=N-[50+33+20]+[16+10+6]-3=26$$

مثال ٥-٤-٨. كم عدد حلول المعادلة $x_1+x_2+x_3=11$ حيث x_1,x_2,x_3 أعداد صحيحة غير سالبة تحقق المتباينات $x_1\le 3$، $x_2\le 4$، $x_3\le 6$؟

الحل: نفرض أن الحلول لها الخاصية P_1 إذا كان $x_1>3$ ، الخاصية P_2 إذا كان $x_2>4$ والخاصية P_3 إذا كان $x_3>6$. عدد الحلول التي تحقق المتباينات $x_1\le 3$، $x_2\le 4$، $x_3\le 6$ يكون

$$N(\overline{P_1P_2P_3})=N-N(P_1)-N(P)_2-N(P_3)$$
$$+N(P_1P_2)-N(P_1P_3)-N(P_2P_3)$$

$$-N(P_1P_2P_3)$$

باستخدام اسلوب الحل في مثال ٥-٢-٢٥ نجد أن

العدد الكلي للحلول $N = C(3+11-1,11) = 78$

عدد الحلول حيث $x_1 \ge 4$

$$N(P_1) = C(3+7-1,7) = C(9,7) = 36$$

عدد الحلول حيث $x_2 \ge 5$

$$N(P_2) = C(3+6-1,6) = C(8,6) = 28$$

عدد الحلول حيث $x_3 \ge 7$ يكون

$$N(P_3) = C(3+4-1,4) = C(6,4) = 15$$

عدد الحلول حيث $x_1 \ge 4$ و $x_2 \ge 5$

$$N(P_1P_2) = C(3+2-1,2) = C(4,2) = 6$$

عدد الحلول حيث $x_1 \ge 4$ و $x_3 \ge 7$

$$N(P_1P_3) = C(3+0-1,0) = 1$$

عدد الحلول حيث $x_2 \ge 5$ و $x_3 \ge 7$

$$N(P_2P_3) = 0$$

عدد الحلول حيث $x_1 \ge 4$، $x_2 \ge 5$ و $x_3 \ge 7$

$$N(P_1P_2P_3) = 0$$

بالتعويض في صيغة $N(\overline{P_1P_2P_3})$ نحصل على عدد الحلول بحيث $x_1 \le 3$، $x_2 \le 4$ و $x_3 \le 6$ يكون

$$N(\overline{P_1P_2P_3}) = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

مثال ٥-٤-٩. بكم طريقة يمكن ترتيب حروف اللغة لانجليزية الستة والعشرون بحيث لايحدث أي من المقاطع car، dog، pun أو byte ؟

الحل: نفرض أن S ترمز إلى مجموعة كل التبديلات على 26 حرف. إذن $|S| = 26!$. لكل $1 \le i \le 4$ ، التبديلة في S يقال أنها تحقق C_i إذا كانت التبديلة تحتوي car، dog، pun أو byte، على الترتيب. لكي نحسب $N(C_1)$، نعد الطرق التي يمكن أن ترتب بها الرموز

$$car, b, d, e, f, \ldots, p, q, r, \ldots, x, y, z$$

لـذلك $N(C_1) = 24!$. بالمثـل $N(C_2) = N(C_3) = 24!$. بينمـا $N(C_4) = 23!$.

بالنسبة إلى $N(C_1C_2)$، نحن نتعامل مع 22 رمز

$$car, dog, b, e, f, h, i, \ldots, m, n, p, q, s, t, \ldots, x, y, z$$

لـذلك $N(C_1C_2) = 22!$. بالمثـل $N(C_1C_3) = N(C_2C_3) = 22!$ و $N(C_iC_4) = 21!$ لكل $i \neq 4$.

علاوة على ذلك $N(C_1C_2C_3) = 20!$ ، $N(C_iC_jC_4) = 19!$ لكل $1 \le i < j \le 3$. وأخيرا $N(C_1C_2C_3C_4) = 17!$.

لذلك عدد التباديل في S التي لاتحتوي أي من هذه المقاطع يكون

$$N(\overline{C_1C_2C_3C_4}) = 26! - [3(24!) + 23!] + [3(22!) + 3(21!)] - [20! + 3(19!)] + 17!$$

تمارين ٥-٤

١- كم عنصر يكون في $A \cup B$ إذا كان A بها 12 عنصر و B بها 18 عنصر، علما بأن

(أ) $A \cap B = \phi$ ؟ (ب) $|A \cap B| = 1$ ؟

(ج) $|A \cap B| = 6$ ؟ (د) $A \subseteq B$ ؟

٢- أوجد عدد العناصر في $A \cup B \cup C$ إذا كان يوجد 100 عنصر في كل مجموعة بالإضافة إلى

(أ) المجموعات منفصلة ثنائيا.

(ب) يوجد 50 عنصر مشترك بين كل زوج من المجموعات الثلاث ولايوجد عناصر مشتركة بين المجموعات الثلاث.

(ج) يوجد 50 عنصر مشترك بين كل زوج من المجموعات الثلاث و 25 عنصر مشترك بين المجموعات الثلاث.

(د) المجموعات متساوية.

٣- أوجد عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لاتزيد عن 100 وتقبل القسمة على 5 أو 7.

٤- كم عدد العناصر في اتحاد أربع مجموعات إذا كان كل مجموعة بها 100 عنصر وكل زوج من المجموعات يشترك في 50 عنصر وكل ثلاث مجموعات تشترك في 25 عنصر وتوجد خمسة عناصر تشترك فيها كل المجموعات الأربع ؟

٥- كم عدد صحيح بين 5 و 31

(أ) تقبل القسمة على 3 ؟ ماهي هذه الأعداد ؟

(ب) تقبل القسمة على 4 ؟ ماهي هذه الأعداد ؟

(ج) تقبل القسمة على 3 و 4 ؟ ماهي هذه الأعداد ؟

٦- كم عدد صحيح موجب بين 50 و 100

(أ) تقبل القسمة على 7 ؟ ماهي هذه الأعداد؟

(ب) تقبل القسمة عل 11؟ ماهي هذه الأعداد؟

(ج) تقبل القسمة على كل من 7 و 11؟ ماهي هذه الأعداد؟

٥-٥ الدوال المولدة Generating functions

تستخدم الدوال المولدة لتمثيل متتابعات بصورة فعالة باعتبار حدود المتتابعة كمعاملات لقوى متغير x في صورة متسلسلة قوى. الدوال المولدة يمكن استخدامها لحل أنواع مختلفة من مسائل العد. أيضا يمكن استخدام الدوال المولدة لحل العلاقات التكرارية بتحويل العلاقة التكرارية من حدود متتابعة إلى معادلة تحتوي دالة مولدة. هذه المعادلة يمكن أن تحل لإيجاد صيغة مغلقة للدالة المولدة. من هذه الصيغة المغلقة يمكن إيجاد معاملات متسلسلة القوى للدالة المولدة. الدالة المولدة أيضا يمكن استخدامها لحل متطابقات التوافيق.

تعريف ٥-٥-١. **الدالة المولدة** generating function للمتتابعة $a_0, a_1, ..., a_k, ...$ من الأعداد الحقيقية هي متسلسلة لانهائية

$$G(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

الدالة المولدة للمتتابعة $\{a_k\}$ في هذا التعريف أحيانا تسمى الدالة المولدة العادية للمتتابعة $\{a_k\}$ تمييزا لها عن الأنواع الأخرى من الدوال المولدة.

مثال ٥-٥-٢. الدالة المولدة للمتتابعة $\{a_k\}$ حيث $a_k = 3$، $a_k = k+1$ و $a_k = 2^k$ هي $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$، $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$، $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$، على الترتيب.

يمكننا تعريف دوال مولدة لمتتابعات لانهائية من الأعداد الحقيقية وذلك بتوسيع المتتابعة المنتهية $a_0, a_1, ..., a_n$ إلى متتابعة لانهائية، بوضع $a_{n+1} = 0$، $a_{n+2} = 0$، وهكذا. الدالة المولدة $G(x)$ للمتتابعة المنتهية $\{a_n\}$ تكون كثيرة حدود من درجة n لأنه لايوجد حد على الصورة $a_j x^j$ لقيم $j > n$. أي أن

$$G(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

مثال ٥-٥-٣. ماهي الدالة المولدة للمتتابعة $1,1,1,1,1,1$ ؟
الحل: الدالة المولدة هي $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$. ولكن $\frac{x^6-1}{x-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ عندما $x\neq 1$. لذلك $G(x)=\frac{x^6-1}{x-1}$ تكون هي الدالة المولدة للمتتابعة $1,1,1,1,1,1$.
مثال ٥-٥-٤. نفرض m عدد صحيح موجب و نفرض $a_k=C(m,k)$ لقيم $k=0,1,2,\ldots,m$. ماهي الدالة المولدة للمتتابعة $a_0,a_1,\ldots,a_m$ ؟
الحل: الدالة المولدة لهذه المتتابعة هي

$$G(x)$$
$$=C(m,0)+C(m,1)x+C(m,2)x^2+\ldots+C(m,m)x^m$$

من نظرية ذات الحدين نجد أن $G(x)=(1+x)^m$.

حقائق مفيدة حول متسلسلة القوى

عندما نستخدم الدوال المولدة لحل مسائل العد، عادة نعتبرها صورة متسلسلة قوى. سوف نهمل السؤال عن تقارب هذه المتسلسلة. ومع ذلك عند تطبيق بعض النتائج من حساب التفاضل يكون أحيانا من المهم اعتبار لأي x تكون المتسلسلة تقاربية.
الآن سوف نعطي بعض الحقائق المهمة حول المتسلسلات اللانهائية التي سوف نستخدمها عند التعامل مع الدوال المولدة.
مثال ٥-٥-٥. الدالة $f(x)=\frac{1}{1-x}$ هي الدالة المولدة للمتتابعة $1,1,1,1,\ldots$، لأن $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$ لقيم $|x|<1$.
مثال ٥-٥-٦. الدالة $f(x)=\frac{1}{1-ax}$ هي الدالة المولدة للمتتابعة $1,a,a^2,a^3,\ldots$ لأن $\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+\ldots$ عندما $|ax|<1$ أي $|x|<\frac{1}{|a|}$ لـ $a\neq 0$.

نظريــــــــــــــة ٥-٥-٧. نفــــــــــرض $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ و $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. إذن

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$$

و

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_{k-j}\right)x^k$$

مثال ٥-٥-٨. نفرض $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. استخدم مثال ٥-٥-٦ لإيجاد $a_0,a_1,a_2,\ldots$ في مفكوك $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

الحل: من مثـال ٥-٥-٦ نجد أن $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$، من نظريـة ٥-٥-٧

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} 1\right)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

ملاحظـة ٥-٥-٩. هـذه النتيجـة يمكـن أيـضا الحـصول عليهـا بالتفاضـل. إجـراء التفاضـل عمليـة مفيـدة لإنتـاج متطابقـات جديـدة مـن متطابقـات موجودة للدوال المولدة. قبل استخدام الدوال المولدة لحل عديد من مسائل العد المهمة، نحتاج إلى تطبيق نظرية ذات الحدين للأسس غير الموجبة.

تعريف ٥-٥-١٠. نفرض u عدد حقيقي و k عدد صحيح غير سـالب. **معاملات ذات الحدين الموسعة** $\binom{u}{k}$ تعرف كما يلي:

$$\binom{u}{k}=\begin{cases} u(u-1)\ldots(u-k+1)/k! & \text{if} \quad k>0 \\ 1 & \text{if} \quad k=0 \end{cases}$$

مثـال ٥ـ٥ـ١١. أوجـد قـيم معـاملات ذات الحـدين الموسـعة $\binom{-2}{3}$ و $\binom{\frac{1}{2}}{3}$.

الحل:

$$\binom{-2}{3}=\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}=-4$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}=(\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{2})/6=\frac{1}{16}$$

المثال التالي يزودنا بصيغة مفيدة عندما يكون العدد العلوي في معاملات ذات الحدين الموسعة سالب.

مثـال ٥ـ٥ـ١٢. عنـدما يكـون العـدد العلـوي فـي معامـل ذات الحـدين الموسعة عدد صحيح سالب فإنه يمكن التعبير عن معامل ذات الحدين الموسعة بدلالة معملات ذات الحدين العادية. لبيان ذلك لاحظ أن

$$\binom{-n}{r}=\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-\mathrm{n}-\mathrm{r}+1)}{r!}$$

$$=\frac{(-1)^r\,n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

$$=\frac{(-1)^r\,(n+r-1)\ldots(n+r-2)\ldots n}{r!}$$

$$=\frac{(-1)^r\,(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

$$=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}=(-1)^r C(n+r-1,r)$$

الآن نعطي نظرية ذات الحدين الموسعة.

نظرية ٥ـ٥ـ١٣ (نظرية ذات الحدين الموسعة). نفرض x عدد حقيقي و $|x|<1$ و نفرض u عدد حقيقي. إذن

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

عندما تكون u عدد صحيح موجب فإن نظرية ذات الحدين الموسعة تؤول إلى نظرية ذات الحدين العادية.

مثال ٥-٥-١٤. أوجد الدالة المولدة لـ $(1+x)^{-n}$ و $(1-x)^{-n}$، حيث n عدد صحيح موجب، مستخدما نظرية ذات الحدين الموسعة.

الحل: من نظرية ذات الحدين الموسعة

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

باستخدام مثال ٥-٥-١٢ الذي يعطينا صيغة بسيطة لـ $\binom{-n}{k}$ نحصل على

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C(n+k-1,k) x^k$$

بوضع $-x$ بدلا عن x نجد أن

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k) x^k$$

الجدول التالي يعطي بعض الدوال المولدة المفيدة

الدالة المولدة $G(x)$	المتتابعة a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^k$ $=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots+x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) a^k x^k$ $1+C(n,1)ax+C(n,2)a^2x^2+\ldots+a^nx^n$	$C(n,k)a^k$

$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk}$ $=1+C(n,1)x^r+C(n,2)x^{2r}+\ldots+x^{nr}$	$\begin{cases} C(n,\frac{k}{r}) & \text{if } r\mid k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+\ldots+x^n$	$\begin{cases} 1 & \text{if } k\le n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+\ldots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1+ax+a^2x^2+\ldots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1+x^r+x^{2r}+\ldots$	$\begin{cases} 1 & \text{if } r\mid k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ $=1+2x+3x^2+\ldots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$ $=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots$	$C(n+k-1)$ $=C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k$ $=1-C(n,1)x+C(n,2)x^2-\ldots$	$(-1)^k C(n+k-1)$ $=(-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k$ $=1+C(n,1)ax+C(n,2)a^2x^2+\ldots$	$C(n+k-1)a^k$ $=C(n+k-1,n-1)a^k$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\frac{1}{k!}$
$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

جدول ٥-٥-١

مسائل العد والدوال المولدة

الدوال المولدة يمكن استخدامها لحل عدد كبير من مسائل العد كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال ٥-٥-١٥. أوجد عدد حلول المعادلة $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ حيث e_1, e_2, e_3 أعداد صحيحة غير سالبة و $2 \le e_1 \le 5$، $3 \le e_2 \le 6$ و $4 \le e_3 \le 7$.

الحل: عدد الحلول مع الشروط المعطاة يكون هو معامل x^{17} في مفكوك
$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$
هذا ينتج بسبب أننا نحصل على الحد x^{17} في حاصل الضرب باختيار حد من المجموع الأول x^{e_1} وحد من المجموع الثاني x^{e_2} وحد من المجموع الثالث x^{e_3} ، حيث الأسس e_1, e_2, e_3 تحقق المعادلة $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ والشروط المعطاة.

ليس من الصعب بيان أن معامل x^{17} هنا هو 3. لذلك يوجد ثلاث حلول.

مثال ٥-٥-١٦ . بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع ثمان قطع حلوى متطابقة على ثلاثة أطفال مختلفين إذا كان كل طفل يأخذ على الأقل قطعتين وعلى الأكثر 4 قطع؟

الحل: حيث أن كل طفل يأخذ على الأقل قطعتين ولايأخذ أكثر من أربعة، لكل طفل يوجد معامل يساوي $(x^2 + x^3 + x^4)$ في الدالة المولدة

للمتتابعة $\{c_n\}$ ، حيث c_n هي عدد طرق توزيع n قطعة حلوى. ولأنه يوجد ثلاثة أطفال فإن هذه الدالة المولدة تكون $(x^2+x^3+x^4)^3$. نحتاج إلى معامل x^8 في هذا المقدار. السبب في ذلك أن الحد x^8 في المفكوك يناظر الطرق التي يمكن بها اختيار ثلاثة حدود ، حد من كل معامل. علاوة على ذلك الحد من العامل الأول والعامل الثاني والعامل الثالث هي أعداد قطع الحلوى التي يحصل عليها الطفل الأول والطفل الثاني والطفل الثالث، على الترتيب. الحسابات توضح أن هذا المعامل يساوي 6. أي أنه توجد ستة طرق مختلفة لتوزيع ثمان قطع حلوى متطابقة على ثلاثة أطفال مختلفين بحيث أن كل طفل يأخذ على الأقل قطعتين وعلى الأكثر 4 قطع.

مثال ٥-٥-١٧. كم عدد حلول المعادلة $c_1+c_2+c_3+c_4=25$، إذا كان $c_i \geq 0$ لكل $1 \leq i \leq 4$.

الحل: هذا السؤال يمكن طرحة بصورة بديلة، بكم طريقة يمكننا توزيع 25 قطعة حلوى متطابقة على أربعة أطفال. بالنسبة لكل طفل، الامكانية يمكن أن توصف بكثيرة الحدود $1+x+x^2+...+x^{25}$. وتكون الإجابة عن هذا السؤال هي معامل x^{25} في الدالة المولدة $f(x)=(1+x+x^2+...+x^{25})^4$.

استخدام الدوال المولدة لحل العلاقات التكرارية

يمكننا إيجاد حل للعلاقات التكرارية وشروطها الابتدائية بإيجاد صيغة صريحة للدالة المولدة المصاحبة.

مثال ٥-٥-١٨. حل العلاقة التكرارية $a_k=3a_{k-1}$ لقيم $k=1,2,3,...$ والشرط الابتدائي $a_0=2$.

الحل: نفرض $G(x)$ هي الدالة المولدة للمتتابعة $\{a_k\}$، أي أن $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. لاحظ أن

$$xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$$

باستخدام العلاقة التكرارية نجد أن

$$G(x)-3xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-3\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$$
$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k$$
$$=2$$

وذلك لأن $a_0=2$ و $a_k=3a_{k-1}$. لذلك

$$G(x)-3xG(x)=(1-3x)G(x)=2$$

بحل المعادلة في $G(x)$ نحصل على $G(x)=\frac{2}{1-3x}$.

باستخدام المتطابقة $\frac{1}{1-ax}=\sum_{k=0}^{\infty}a^kx^k$ (من الجدول) نجد أن

$$G(x)=2\sum_{k=0}^{\infty}3^kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot3^kx^k$$

نتيجة لذلك يكون $a_k=2\cdot3^k$.

مثال ٥-٥-١٩. نفرض أن كلمة شفرة صحيحة مكونة من n رقم في رمز عشري يتكون من عدد زوجي من الأصفار. نفرض a_n ترمز إلى عدد كلمات الشفرة من طول n الصحيحة. في مثال ٥-٣-٨ بينا أن المتتابعة $\{a_k\}$ تحقق العلاقة التكرارية $a_n=8a_{n-1}+10^{n-1}$ والشرط الابتدائي $a_1=9$. استخدم الدالة المولدة لإيجاد صيغة صريحة لـ a_n.

الحل: لكي يكون عملنا باستخدام الدالة المولدة أيسر، نوسع هذه المتتابعة بوضع $a_0=1$. عندما نعين هذه القيمة لـ a_0 وباستخدام العلاقة التكرارية، نحصل على $a_1=8a_0+10^0=8+1=9$، وهو مايتوافق مع الشرط الابتدائي الأصلي.

بضرب طرفي العلاقة التكرارية في x^n نحصل على

$$a_nx^n=8a_{n-1}x^n+10^{n-1}x^n$$

نفـــرض $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ هـــي الدالـــة المولـــدة للمتتابعـــة $a_0,a_1,a_2,...$. إذن

$$\begin{aligned}
G(x)-1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n-1}^{\infty} (8a_{n-1}x^n + 10^{n-1}x^n) \\
&= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1}x^{n-1} \\
&= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n \\
&= 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}
\end{aligned}$$

حيث استخدمنا مثال ٥-٥-٦ في إيجاد المجموع الثاني. لذلك

$$G(x)-1 = 8xG(x) + \frac{x}{1-10x}$$

بحل هذه المعادلة في $G(x)$ نحصل على

$$G(x) = \frac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$$

بتجزيء الطرف الأيمن باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8x} + \frac{1}{1-10x}\right)$$

باستخدام مثـال ٥-٥-٦ (مرة مع $a=8$ ومرة مع $a=10$) نحصل على

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(8^n + 10^n)x^n
\end{aligned}$$

نتيجة لذلك يكون $a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n)$.

إثبات متطابقات باستخدام الدالة المولدة

تعرفنا على كيفية الحصول على بعض المتطابقات في التوافيق باستخدام البـراهين التوافيقيـة. الآن سـوف نبـين كيفيـة برهـان هـذه المتطابقـات باستخدام الدوال المولدة.

مثال ٥-٥-٢٠. استخدم الدوال المولدة لإثبات أن

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$$

كلما كان n عدد صحيح موجب.

الحل: أولا نلاحظ أنـه مـن نظريـة ذات الحـدين $C(2n,n)$ هو معامـل x^n في مفكوك $(1+x)^{2n}$. ومع ذلك، أيضا يكون

$$(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2$$
$$= [C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,n)x^n]^2$$

معامل x^n في هذا التعبير يكون

$$C(n,0)C(n,n) + C(n,1)C(n,n-1) + C(n,2)C(n,n-2) + \ldots + C(n,n)C(n,0)$$

وهذا يساوي $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$ لأن $C(n,n-k) = C(n,k)$.

وحيث أن كلا من $C(2n,n)$ و $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$ هو معامل x^n في مفكوك $(1+x)^{2n}$، لابد أن يكونا متساويان.

تمارين ٥ـ٥

١- أوجد صيغة مغلقة للدالة المولدة لكل من المتتابعات التالية

(أ) $0,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,\ldots$.

(ب) $0,0,0,1,1,1,1,1,1,\ldots$.

(ج) $0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots$.

(د) $2,4,8,16,32,64,128,256,\ldots$.

(هـ) $\binom{7}{0},\binom{7}{1},\binom{7}{2},\ldots,\binom{7}{7},0,0,0,0,\ldots$.

(و) $2,-2,2,-2,2,-2,2,-2,\ldots$.

(ز) $1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,\ldots$.

(ح) $0,0,0,1,2,3,4,\ldots$.

٢- لكل من الدوال المولدة التالية، أوجد صيغة مغلقة للمتتابعة التي تحددها.

(أ) $(3x-4)^3$.　　(ب) $(x^3+1)^3$.

(ج) $\frac{1}{1-5x}$.　　(د) $\frac{x^3}{1+3x}$.

(هـ) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$.　　(و) $(x^2+1)^3$.

(ز) $(3x-1)^3$.　　(ح) $\frac{1+x^3}{(1+x)^3}$.

٣- أوجد معامل x^{10} في متسلسلة القوى للدوال التالية

(أ) $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)^3$.

(ب) $(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\ldots)^3$.

٤- أوجد معامل x^9 في متسلسلة القوى للدوال التالية

(أ) $(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)^3$.

(ب) $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+\ldots)^3$.

(ج) $(1+x+x^2)^3$.

٥- إذا كانت $G(x)$ هي الدالة المولدة للمتابعة $\{a_k\}$، ما هي الدالة المولدة للمتتابعة في الحالات التالية:

(أ) $0,0,0,a_3,a_4,a_5,...$.

(ب) $a_0,0,a_1,0,a_2,0,...$.

(ج) $0,0,0,0,a_0,a_1,a_2,...$.

(د) $a_0,2a_1,8a_2,16a_4,...$.