الباب السادس

الرسومات

Graphs

الرسم هو من التراكيب المتقطعة. يتكون الرسم من رؤوس ووصلات تربط بين الرؤوس. الرسومات يمكن استخدامها في حل كثير من المسائل الحياتية. باستخدام نماذج الرسومات، يمكننا تحديد ما إذا كان من الممكن السير في جميع الشوارع في مدينة دون السير في شارع مرتين، ويمكننا إيجاد عدد الألوان اللازم لتلوين مناطق خريطة. الرسومات يمكن أن تستخدم لتحديد ماإذا كان جهازي حاسب متصلين بوصلات إتصال باستخدام نماذج رسومات لشبكات الحاسب. الرسومات يمكن أن تستخدم لتحديد ماإذا كان دائرة يمكن تمثيلها بدائرة مستوية. الرسومات مع أوزان تعطى لوصلاتها يمكن أن تستخدم لحل مسائل مثل إيجاد أقصر مسار بين مدينتين على شبكة النقل.

٦-١ الرسومات ونماذج الرسومات Graphs and Graph Models

في هذا الفصل نقدم المفاهيم الأساسية في نظرية الرسومات ونعطي عددا من نماذج الرسومات المختلفة. نبدأ بتعريف الرسم.

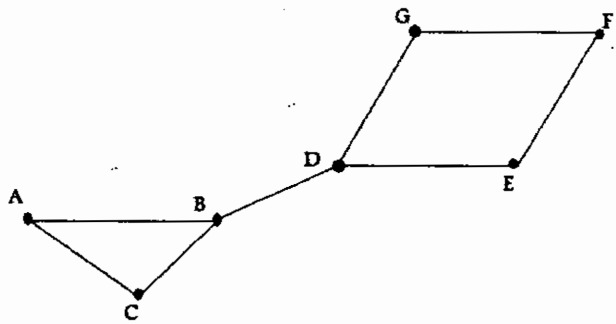
تعريف ٦-١-١. الرسم graph $G=(V,E)$ يتكون من V، مجموعة غير خالية من الرؤوس vertices (أو العقد nods) و E، مجموعة من الحواف (الوصلات) edges. كل حافة إما يكون لها رأس أو رأسين يرتبطان بها، تسمى نقاط النهاية endpoints.

الآن نفرض أن شبكة أنشئت لمراكز معلومات واتصالات تربط بين أجهزة حاسب. يمكن تمثيل وضع كل مركز معلومات بنقطة وكل وصلة اتصالات بخط، كما هو مبين في شكل ٦-١-١.

شبكة الحواسيب يمكن نمذجتها باستخدام رسم حيث الرؤوس في الشكل تمثل مراكز المعلومات والحواف تمثل وصلات الاتصال. بصفة عامة، نصور الرسم باستخدام نقاط تسمى رؤوس وقطع خطوط، وقد تكون منحنيات، تسمى حواف (جمع حافة) حيث نقاط النهاية لقطعة الخط الممثلة لحافة تكون هي النقاط الممثلة لنقطتي النهاية للحافة. عندما نرسم الرسم، على وجه العموم

نحاول رسم الحواف بحيث لاتكون متقاطعة. ومع ذلك، هذا ليس ضروريا لأن أي تصور باستخدام نقاط تمثل رؤوس وأي شكل من الربط بين الرؤوس يمكن استخدامه. في الحقيقة، يوجد بعض الرسومات لايمكن رسمها في المستوى بدون تقاطع الحواف. النقطة الرئيسة هو أن طريقة تصوير الرسومات اختيارية طالما أن الربط بين الرؤوس قد صور بطريقة صحيحة.

لاحظ أنه في الرسم الذي يمثل شبكة الحاسب كل حافة تربط بين رأسين مختلفين، أي لاتوجد حافة تربط الرأس بنفسه. علاوة على ذلك لايوجد حافتين مختلفتين تربطان نفس الرأسين. الرسم الذي فيه كل

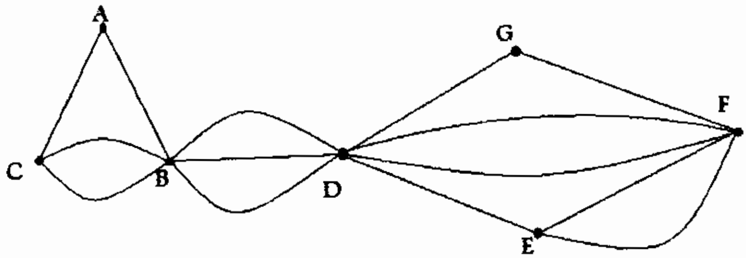


شكل ٦-١-١

حافة تربط رأسين مختلفين ولايوجد حافتين مختلفتين تربطان نفس الثنائي من الرؤوس يسمى **رسم بسيط** simple graph. لاحظ أنه في الرسم البسيط كل حافة يصاحبها ثنائي غير مرتب من الرؤوس، ولايوجد رأس آخر يصاحب نفس الحافة. نتيجة لذلك، عندما يكون هناك حافة في رسم بسيط تصاحب الثنائي من الرؤوس $\{u,v\}$، فإنه يمكننا أن نقول، بدون أي لبس محتمل، $\{u,v\}$ حافة في الرسم.

شبكة الحاسب قد تحتوي روابط متعددة بين مراكز المعلومات، كما هو مبين في شكل ٦-١-٢.

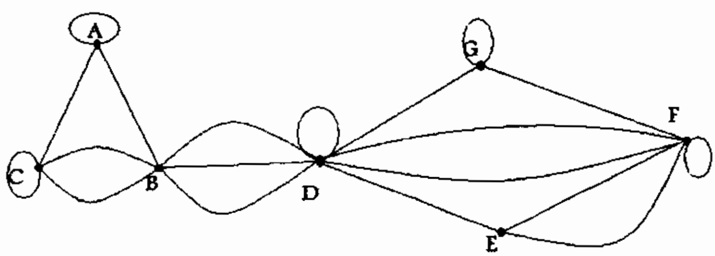
لنمذجة مثل هذه الشبكات نحتاج إلى رسم له أكثر من حافة تربط نفس الثنائي من الرؤوس. الرسومات التي تحتوي **حواف متعددة** multiple edges تربط بين نفس الثنائي من الرؤوس تسمى **رسومات متعددة** multigraphs



شكل ٦-١-٢

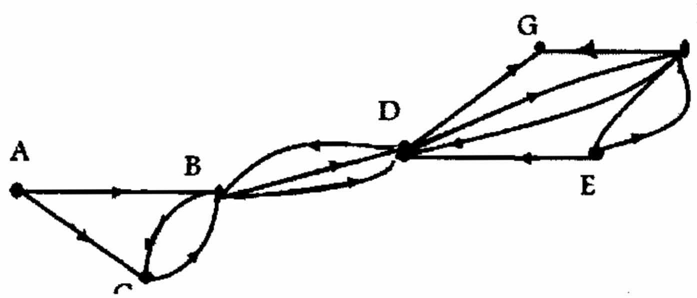
عندما يوجد m حافة مختلفة تصاحب نفس الثنائي غير المرتب من الرؤوس $\{u,v\}$، نقول أن $\{u,v\}$ حافة متعددة m مرة m multiplicity. أي أنه يمكن النظر إلى هذه المجموعة من الحواف على أنها m نسخة مختلفة من الحافة $\{u,v\}$.

أحيانا الروابط تربط مراكز المعلومات بنفسها. مثل الشبكة الموضحة في شكل ٦-١-٣ لنمذجة هذه الشبكة نحتاج ادخال حافة تربط الرأس بنفسة. مثل هذه الحافة تسمى **عروة** loop.



شكل ٦-١-٣

حتى الآن كل الرسومات التي قدمناها رسومات غير موجهة undirected graphs. حوافها أيضا تسمى غير موجهة. ومع ذلك لبناء نموذج رسم، قد نجد أنه من الضروري لوضع اتجاه للحواف في الرسم. فمثلا، في شبكة الحاسب، بعض الوصلات قد تعمل في اتجاه واحد. مثل هذه الشبكة مبين في شكل ٦-١-٤.



شكل ٦-١-٤

لنمذجة مثل هذه الشبكة نستخدم الرسم الموجه. كل حافة في الرسم الموجه يصاحبها ثنائي مرتب. تعريف الرسم الموجه المعطى هنا أكثر تعميما من الرسم الموجه لتمثيل علاقة.

تعريف ٦-١-١. الرسم الموجه directed graph (V, E) يتكون من مجموعة غير خالية من الرؤوس V ومجموعة موجهة من حواف (أو أقواس arcs) E. كل حافة موجهة يصاحبها ثنائي مرتب من الرؤوس. الحافة الموجهة التي يصاحبها الثنائي المرتب (u, v) يقال أنها تبدأ عند u وتنتهي عند v.

الرسم الموجه قد يحتوي عروة وقد يحتوي حواف موجهة متعددة تبدأ وتنتهي عند نفس الرؤوس. الرسم الموجه قد يحتوي حواف موجهة تربط الرأسين u و v في كلا الاتجاهين. لاحظ أننا نحصل على رسم موجه عندما نعين إتجاه لكل حافة في الرسم غير الموجه. عندما عندما يكون الرسم الموجه لايحتوي أي عروة ولا أي حافة متعددة فإنه يسمى **رسم موجه بسيط** simple directed graph.

في بعض شبكات الحاسب، قد توجد وصلات ربط متعددة بين مراكز المعلومات، كما هو موضح في شكل ٦-١-٤ الرسومات الموجهة التي قد تحتوي حواف موجهة متعددة من رأس إلى أخرى تسمى **رسومات متعددة موجهة** directed multigraphs.

في بعض النماذج قد نحتاج إلى رسم حيث بعض الحواف تكون غير موجهة بينما الأخري تكون موجهة. الرسم الذي يحتوي حواف موجهة وأخرى غير موجهة يسمى **رسم مختلط** mixed graph.

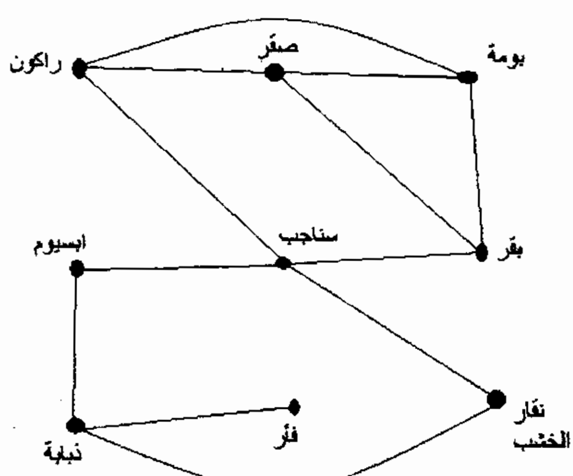
أحيانا سوف نستخدم اللفظ العام رسم كلفظ عام لوصف الرسومات سواء موجهة أو غير موجهة وسواء بها عروة أم لا أو بها حواف متعددة أم لا.

نماذج للرسومات Graph Models

الرسومات تستخدم على نطاق واسع من النماذج. سوف نذكر هنا بعض نماذج الرسومات من مجالات متعددة.

مثال ٦-١-٢. مكانة تداخل الرسومات في علم البيئة.الرسومات تستخدم في عديد من النماذج التي تنطوي على التقاطع بين العديد من أنواع الحيوانات المختلفة.

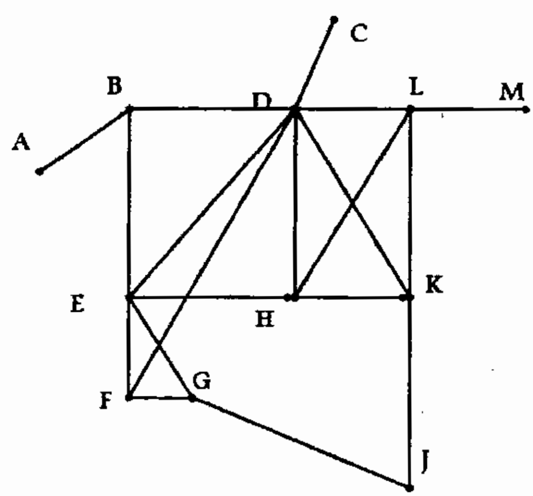
على سبيل المثال التداخل بين أنواع من الأحياء في نوعية الغذاء يمكن نمذجتها باستخدام رسومات التداخل. الرسم المبين في شكل ٥-١-٥ يبين التداخل بين بعض أنواع الأحياء في الغذاء. لذلك نجد أنه يحدث تنافس على الطعام بين البومة والصقر والراكون بينما لايحدث تنافس بين الصقر والفأر.



شكل ٦-١-٥

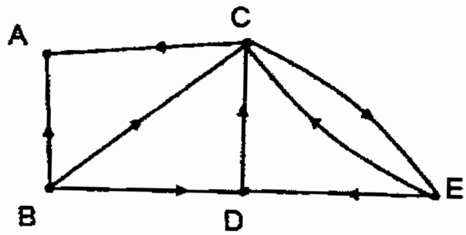
مثال ٦-١-٣. الرسومات يمكن استخدامها لنمذجة المحادثات الهاتفية التي تمت في شبكة، مثل الشبكة الهاتفية للمسافات الطويلة. على وجه الخصوص الرسومات المتعددة الموجهة يمكن أن تستخدم لنمذجة المحادثات حيث كل رقم تليفون يمثل برأس وكل محادثة هاتفية تمثل بحافة موجهة. الحافة التي تمثل محادثة تبدأ عند التليفون الذي بدأت منه المحادثة وتنتهي عند التليفون الذي تلقى المحادثة.

مثال ٦-١-٤. رسومات التعارف. يمكن استخدام نموذج رسم لتمثيل العلاقات المختلفة بين الأشخاص. فمثلا يمكن استخدام الرسم لتمثيل هل شخصين يعرف كل منهما الآخر. كل شخص في مجموعة من الناس يمثل برأس. الحافة غير الموجهة تستخدم لربط شخصين عندما يكون كل منهما يعرف الآخر. رسم تعارف صغير موضح في شكل ٥-١-٦ (حيث الحروف هي اختصارات لأسماء أشخاص)



شكل ٦-١-٦

مثال ٦-١-٥. رسم السيطرة. في دراسات سلوك مجموعة من البشر لوحظ أن شخص معين يمكنه التأثير على تفكير الآخرين. يمكن استخدام الرسم الموجه لإعطاء نموذج لهذا السلوك. شكل ٦-١-٧ يوضح رسم سيطرة صغير.

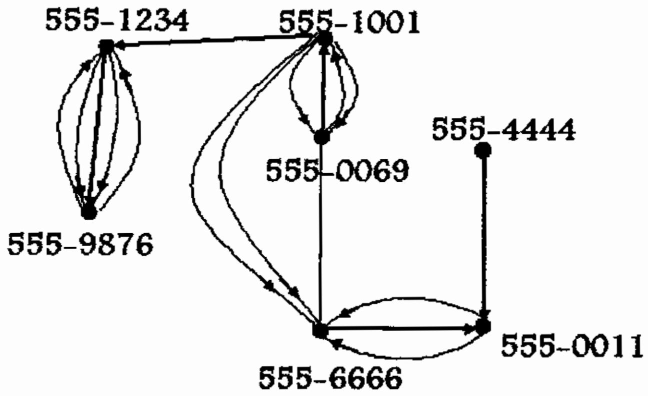


شكل ٦-١-٧

مثال ٦-١-٦. خطوط الطيران. هنا الرؤوس هي المطارات والحواف هي مسارات الطيران. يمكننا الاشارة إلى إتجاه الطيران عبر مسارات الطيران باستخدام رسم موجه. يمكننا استخدام أوزان لنقل المزيد من المعلومات. على سبيل المثال $w\ (i\ ,j\ )$ قد يكون المسافة بين المطار i والمطار j أو زمن الطيران بينهما، أو حتى أجرة النقل الجوي.

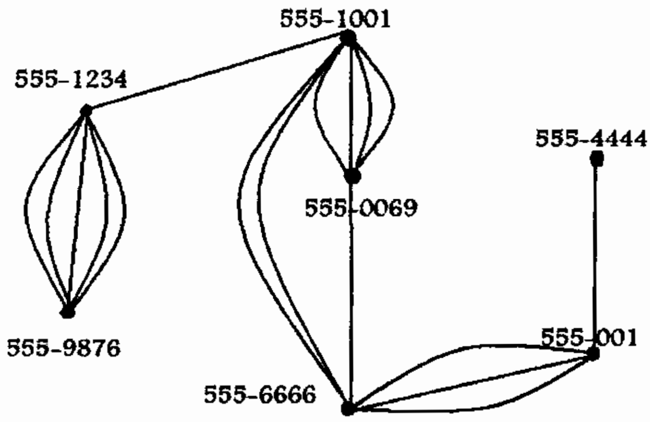
مثال ٦-١-٧. خرائط الطرق. الرسومات يمكن أن تستخدم لنمذجة خرائط الطرق. في مثل هذه النماذج، الرؤوس تمثل التقاطعات والحواف تمثل الطرق. الحواف غير الموجهة تمثل طرق الاتجاهين والحواف الموجهة تمثل طرق الاتجاه الواحد. طرق الاتجاهين تربط نفس التقاطعات.

مثال ٦-١-٨. الرسم يمكن استخدامه لعمل نموذج للاتصالات الهاتفية التي تتم في شبكة هاتف. على وجه الخصوص الرسم الموجه يمكن استخدامه حيث تمثل أرقام الهواتف برؤوس والاتصالات تمثل بحواف موجهة تبدأ من الهاتف الذي صدر منه الاتصال وتنتهي عند الرأس الذي استقبل هذا الاتصال. نحتاج إلى حواف موجهة لأن الاتجاه معتبر، كما نحتاج إلى حواف متعددة لأنه قد يحدث أكثر من اتصال بين نفس الهاتفين. شكل٦-١-٨ يمثل نموذج لشبكة اتصال صغيرة



شكل ٦-١-٨

عندما نهتم فقط بالمحادثات بيت أجهزة الهاتف دون اعتبار للمتصل أو المستقبل يكون الرسم في شكل ٦-١-٩ هو الذي يمثل هذه الشبكة.



شكل ٦-١-٩

مصطلحات الرسم

Graph Terminology and Special Types of Graphs

الآن نقدم بعض المفردات الأساسية في نظرية الرسومات. سوف نستخدم هذه المفردات لاحقا في هذا الفصل عندما نقوم بحل بعض المسائل من أنواع مختلفة.

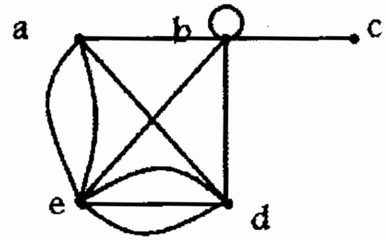
مصطلحات أساسية

أولا، نعطي بعض المصطلحات التي تصف الرؤوس والحواف في الرسومات غير الموجهة.

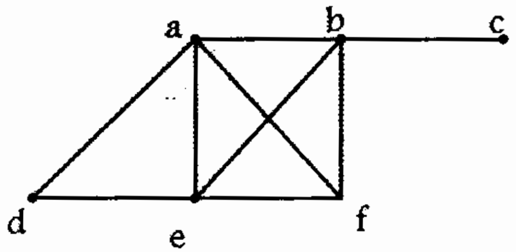
تعريف ٦-١-٩. الرأسان u و v في الرسم غير الموجة G يقال أنهما **متجاوران** adjacent في G إذا كان u و v نهايتين لحافة في G. إذا كانت الحافة e مصاحبة للرأسين u و v، يقال أن e تابعة incident للرأسين u و v. أيضا يقال أن الحافة e تربط connect الرأسين u و v.

تعريف ٦-١-١٠. **درجة** The degree رأس في رسم غير موجه هي عدد الحواف التابعة له، ماعدا العروة عن الرأس تحسب مرتين في درجة الرأس. درجة الرأس v يرمز لها بالرمز $\deg(v)$.

مثال ٦-١-١١. ماهي درجة كل من الرؤوس في الرسمين G و H المبينة في شكل ٦-١-١٠.



H



G

شكل ٦-١-١٠

الحـــل: فـــي G: $\deg(a)=\deg(b)=\deg(e)=4$ ، $\deg(c)=1$ ، $\deg(d)=2$ و $\deg(f)=3$. فـــي H: $\deg(a)=4$ ، $\deg(b)=6$ ، $\deg(c)=1$ ، $\deg(d)=5$ و $\deg(e)=6$.

الرأس من درجة صفر يسمى **معزول** isolated. من ذلك ينتج أن الرأس المعزول لايجاور أي رأس. الرأس يسمى **معلق** pendant إذا كانت درجته 1.

ما الذي يمكن أن نحصل عليه عند جمع درجات جميع الرؤوس في الرسم $G=(V,E)$ ؟ كل حافة تساهم بالعدد 2 في مجموع درجات الرؤوس حيث أن كل حافة تكون مجاورة لرأسين تحديدا. هذا يعني أن مجموع درجات كل الرؤوس يكون ضعف عدد الحواف. هذه النتيجة هي نظرية ٦-١-١٢.

نظرية ٦-١-١٢. نفرض $G=(V,E)$ رسم غير موجه عدد الحواف فيه e. إذن $2e=\sum_{v\in V}\deg(v)$.

مثال ٦-١-١٣. كم عدد الحواف في رسم به عشرة رؤوس كل منها من درجة ستة؟

الحل: مجموع درجات الرؤوس يساوي $6\cdot 10=60$ ، لذلك $2e=60$. إذن $e=30$.

نظرية ٦-١-١٢ تبين أن مجموع درجات الرؤوس في رسم غير موجه يكون زوجي. هذه الحقيقة البسيطة لها العديد من النتائج واحدة منها تعطى في نظرية ٦-١-١٤.

نظرية ٦-١-١٤. الرسم غير الموجه يكون له عدد زوجي من الرؤوس ذوات الدرجات الفردية.

البرهان: نفرض V_1 و V_2 هي مجموعات الرؤوس ذوات الدرجات الزوجية والفردية، على الترتيب، في الرسم غير الموجه $G=(V,E)$. إذن

$$2e=\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)$$

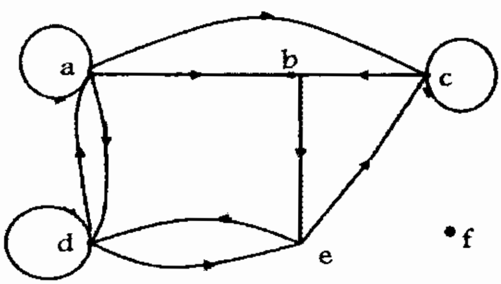
حيث أن $\deg(v)$ يكون عدد زوجي لكل $v \in V_1$، الحد الأول في الطرف الأيمن من المتطابقة الأخيرة يكون زوجي. علاوة على ذلك، مجموع الحدين في الطرف الأيمن يكون زوجي، حيث أن هذا المجموع يساوي $2e$. لذلك الحد الثاني من المجموع يكون زوجي. وحيث أن كل الحدود في هذا المجموع تكون فردية، يجب أن يوجد عدد زوجي من هذه الحدود. لذلك يوجد عدد زوجي من الرؤوس ذوات الدرجات الفردية.

تعريف ٦-١-١٥. عندما يكون (u,v) حافة في الرسم G بحواف موجهة، فإن u يسمى **مجاور إلى** v adjacent to v و v يسمى **مجاور من** u adjacent from. الرأس u يسمى رأس البداية initial vertex لـ (u,v) و v يسمى رأس النهاية (أو المنتهى) end vertex (terminal) لـ (u,v). رأس البداية ورأس النهاية للعروة هما نفس الشيء.

لأن الحواف في الرسم ذو الحواف الموجهة تكون ثنائيات مرتبة، تعريف درجة الرأس يمكن أن يعدل ليعكس عدد الحواف عند هذا الرأس باعتباره رأس بداية أو رأس نهاية.

تعريف ٦-١-١٦. في الرسم ذو الحواف الموجهة **درجة الدخول** in-degree للرأس v، ويرمز لها بالرمز $\deg^-(v)$، هي عدد الحواف التي لها v رأس نهاية. **درجة الخروج** للرأس v، يرمز لها بالرمز $\deg^+(v)$، هي عدد الحواف التي يكون لها v رأس بداية.

مثال ٦-١-١٧. أوجد درجة الدخول ودرجة الخروج لكل رأس في الرسم G ذو الحواف الموجهة المبين في شكل ٦-١-١١



شكل ٦-١-١١

الحل: درجات الدخول في الرسم G هي $\deg^-(a) = 2$ ، $\deg^-(b) = 2$ ، $\deg^-(c) = 3$ ، $\deg^-(d) = 3$ ، $\deg^-(e) = 2$ و $\deg^-(f) = 0$.
درجات الخروج هي $\deg^+(a) = 4$ ، $\deg^+(b) = 1$ ، $\deg^+(c) = 2$ ، $\deg^+(d) = 3$ ، $\deg^+(e) = 2$ و $\deg^+(f) = 0$.

حيث أن كل حافة لها رأس بداية ولها رأس نهاية، مجموع درجات الدخول ومجموع درجات الخروج لكل الرؤوس في رسم ذو حواف موجهة تكون هي نفس الشيء. كل من هذين المجموعين يساوي عدد الحواف في الرسم. هذه النتيجة تم صياغتها في النظرية التالية.

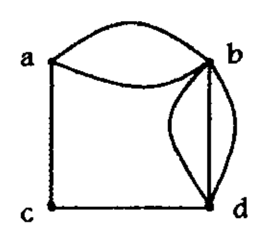
نظرية ٦-١-١٨. نفرض $G = (V, E)$ رسم ذا حواف موجهة. إذن

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E| .$$

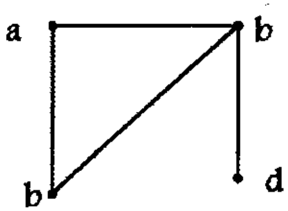
تمارين ٦-١

في التمارين ١-٤ ، حدد ما إذا كان الرسم المعطى بسيط، متعدد، موجه أو موجه متعدد.

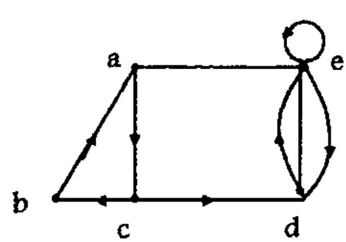
-١



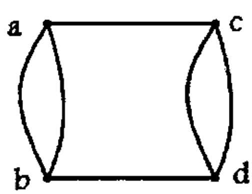
-٢



-٣



-٤



٥- ارسم رسم المكالمات الهاتفية لأرقام الهواتف 0011–555 ، 1221–555 ، 1333–555 ، 8888–555 ، 2222–555 ، 0091–555 و 1200–555 إذا كان يوجد ثلاث مكالمات من 0011–555 إلى 8888–555 ومكالمتين من 8888–555 إلى 0011–555 ومكالمتين من 2222–555 إلى 0091–555 ومكالمتين من 1221–555 إلى كل الأرقام الأخرى ومكالمة من 1333–555 إلى كل من 0011–555 ، 1221–555 و 1200–555.

٦- من أي نوع تكون الرسومات التي تستخدم لنمذجة نظام الطرق السريعة بين المدن الكبرى، حيث

(أ) توجد حافة بين الرؤوس التي تمثل المدن الكبرى إذا كان يوجد بينهم طريق سريع ؟

(ب) توجد حافة بين الرؤوس التي تمثل المدن الكبرى لكل طريق سريع بينهم ؟

٧- نفرض G رسم بسيط. بين أن العلاقة R على مجموعة رؤوس G حيث uRv إذا وفقط إذا كان يوجد حافة مصاحبة لـ $\{u,v\}$، تكون علاقة متماثلة وغير عاكسة.

٨- نفرض G رسم غير موجه له عروة عند كل رأس. بين أن العلاقة R على مجموعة رؤوس G حيث uRv إذا وفقط إذا كان يوجد حافة مصاحبة لـ $\{u,v\}$، تكون علاقة متماثلة و عاكسة.

٩- يعرف رسم **التقاطع** the intersection graph لتجمع من المجموعات $A_1,A_2,\ldots,A_n$ على أنه الرسم الذي له رأس لكل مجموعة من هذه المجموعات وحافة تربط الرؤوس الممثلة لمجموعتين من هذه المجموعات إذا تقاطع المجموعتين غير خالي. كون رسم التقاطع للتجمعات التالية:

(أ) $A_1=\{0,2,4,6,8\}$ ، $A_2=\{0,1,2,3,4\}$ ،

$A_3=\{1,3,5,7,9\}$ ، $A_4=\{5,6,7,8,9\}$ ، $A_5=\{0,1,8,9\}$.

(ب) $A_1=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0\}$ ، $A_2=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ ،
$A_3=\{\ldots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\ldots\}$ ،
$A_4=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$ ، $A_5=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$.

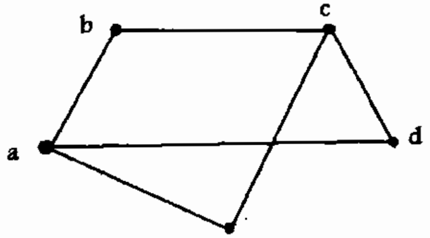
(ج) $A_1=\{x: x<0\}$ ، $A_2=\{x: -1<x<0\}$ ،
$A_3=\{x: 0<x<1\}$ ، $A_4=\{x: -1<x<1\}$ ،
$A_5=\{x: x>-1\}$ ، $A_6=\mathbb{R}$.

١٠- صف رسم يمثل هل كل شخص يعرف أسماء كل الأشخاص الآخرين في حفلة. هل الحواف تكون موجهة؟ هل مسموح بحواف متعددة؟ هل مسموح بوجود عروة؟

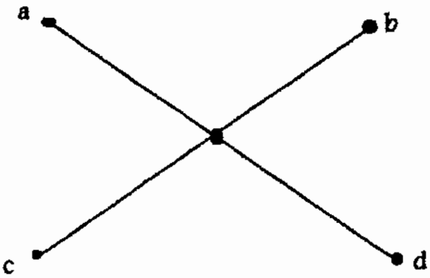
١١- ماهي درجات الدخول ودرجات الخروج للرؤوس في رسم الاتصالات الهاتفية الموصوف في مثال ٥-١-٨ ؟

١٢- **متتابعة الدرجات** الرسم degree sequence هي متتابعة تتكون من درجات رؤوس الرسم في ترتيب غير تزايدي. أوجد متتابعة الدرجات لكل رسم من الرسومات التالية

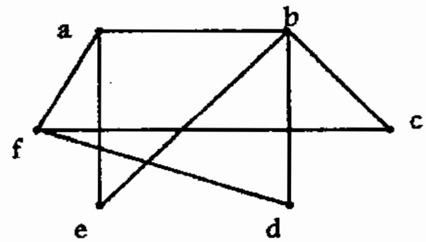
(أ)



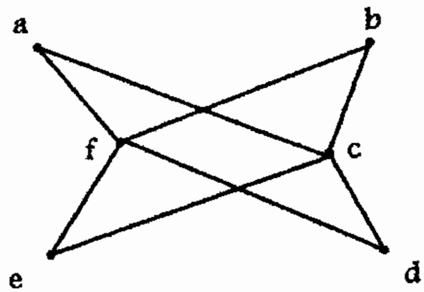
(ب)



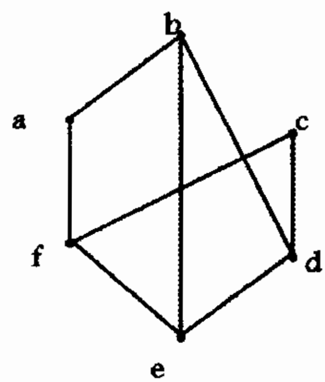
(ج)



(د)



(هـ)

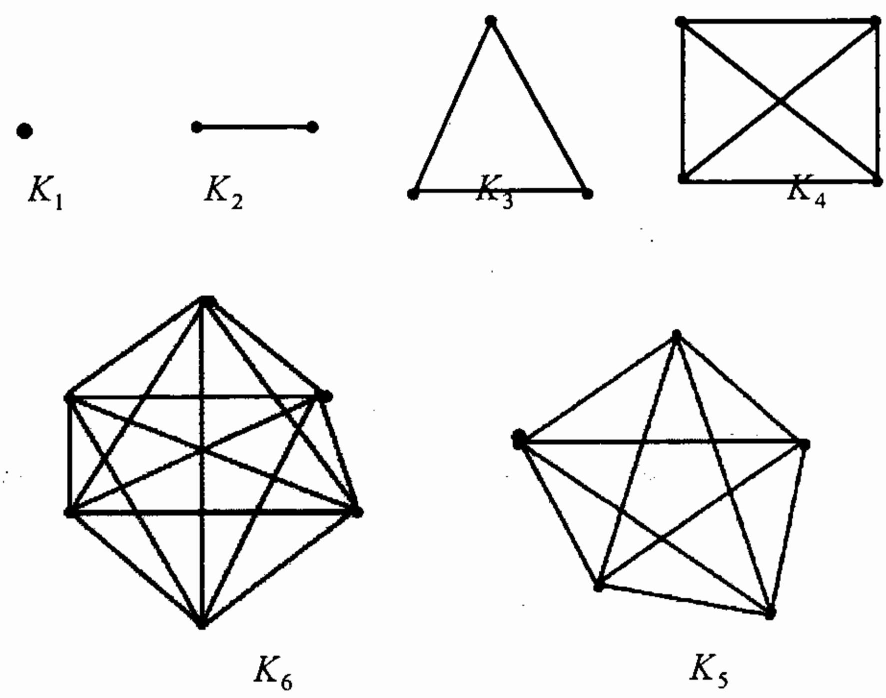


٦-٢ بعض الرسومات البسيطة الخاصة

Some Special Simple Graphs

سوف نقدم عدد من أنواع الرسومات الخاصة. هذه الرسومات غالبا تستخدم كأمثلة وتظهر في العديد من التطبيقات.

مثال ٦-٢-١. الرسم التام. **الرسم التام** Complete Graph على n رأس، يرمز له بالرمز K_n ، هو رسم بسيط بحيث يحتوي تحديدا على حافة واحدة بين كل ثنائي مختلف من الرؤوس. الرسومات K_n ، حيث $n = 1,2,3,4,5,6$ مبينة في شكل ٦-٢-١.



شكل ٦-٢-١

نظرية ٦-٢-٢. الرسم التام K_n يحتوي تحديدا $\frac{n(n-1)}{2}$ حافة.

البرهان: هذه النظرية يمكن برهانها بعدة براهين. سوف نورد هنا أربعة براهين.

البرهان الأول :باستخدام الاستنتاج الرياضي.

خطوة الأساس: الرسم التام من درجة 1 يحتوي رأس واحد وليس به حواف أي أن عدد الحواف يساوي $0=\frac{1(1-1)}{2}$. وهذا يحقق خطوة الأساس.

خطوة الاستنتاج: نفرض أن النظرية صحيحة عند $n=k$ ، أي أن الرسم التام K_k يحتوي تحديدا $\frac{k\,(k-1)}{2}$ حافة، ويجب أن نبين أن النظرية تكون صحيحة عند $n=k+1$. نفرض أن لدينا رسم تام من درجة $k+1$. نختار أحد رؤوسة وليكن x. بإزالة x وكل الحواف التابعة لها نحصل على رسم تام من درجة k. من فرض الاستنتاج هذا الرسم يحتوي تحديدا على $\frac{k\,(k-1)}{2}$ حافة. في الرسم الاصلي الرأس x يتبعه k حافة، حافة لكل رأس من الرؤوس الاخرى. لذلك العدد الكلي للحواف في الرسم التام من درجة $k+1$ يكون

$$\frac{k\,(k-1)}{2}+k=k\left(\frac{k-1}{2}+1\right)=\frac{k\,(k+1)}{2}=\frac{(k+1)\{(k+1)-1\}}{2}$$

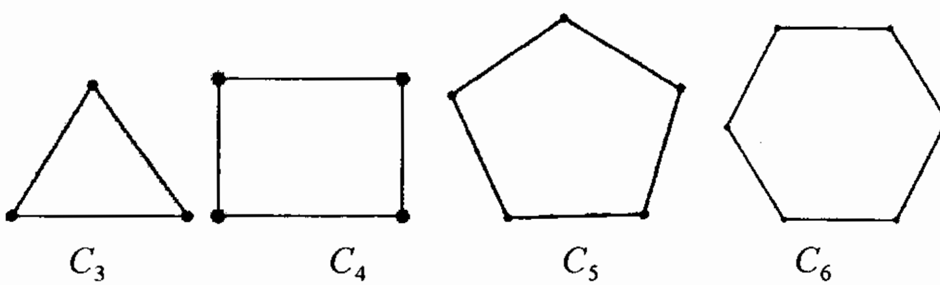
وهذا يكمل خطوة الاستنتاج. إذن النظرية تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب.

البرهان الثاني: نفرض أننا نرسم K_n بإضافة رأس في كل مرة. عندما نرسم الرأس الأولى، لانحتاج إلى حواف. عندما نرسم الرأس الثانية نحتاج إلى حافة تربط هذه الرأس بالرأس الموجودة فعلا. عندما نضيف الرأس الثالثة فإننا نحتاج إلى حافتين تربطان الرأس المضافة بالرأسين السابقين لها. وهكذا عندما نضيف الرأس رقم n فإننا نحتاج إلى $n-1$ حافة كل حافة تربط الرأس الجديد بأحد الرؤوس السابقة لها. لذلك عدد الحواف الكلي يكون $1+2+3+...+(n-1)$ وهذا العدد يساوي $\frac{n(n-1)}{2}$.

البرهان الثالث: في K_n كل رأس له درجة $n-1$. لذلك مجموع درجات كل الرؤوس يساوي $n(n-1)$. ولكن مجموع درجات الرؤوس يساوي $2e$ ، حيث e عدد الحواف. لذلك $2e = n(n-1)$ ومنها $e = \frac{n(n-1)}{2}$.

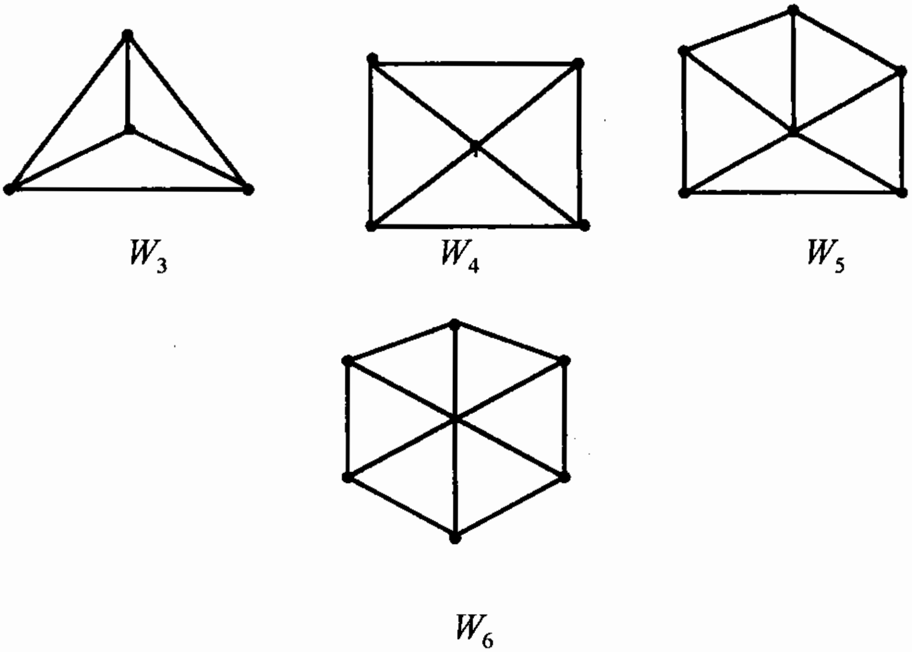
البرهان الرابع: عدد الحواف في K_n يساوي عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصرين من مجموعة بها n عنصر، وهذا يساوي $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

مثال ٦-٢-٣ الدورات. **الدورة** The cycle C_n ، $n \geq 3$ تتكون من n رأس v_1 ، v_2 ، v_3 ، ... ، v_n والحواف $\{v_1, v_2\}$ ، $\{v_2, v_3\}$ ، ... ، $\{v_{n-1}, v_n\}$ و $\{v_n, v_1\}$. الدورات C_3 ، C_4 ، C_5 و C_6 مبينة في شكل ٦-٢-٢.



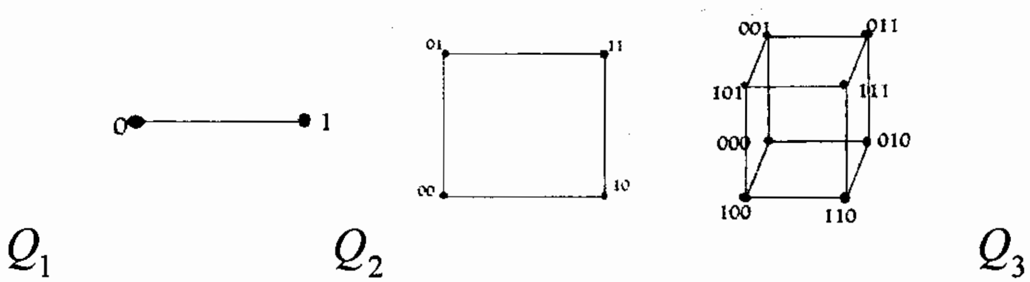
شكل ٦-٢-٢

مثال ٦-٢-٤ العجلات. نحصل على **العجلة** W_n wheel عندما نضيف رأس إضافية إلى الدورة C_n ، لـ $n \geq 3$ ثم نصل هذه الرأس الجديدة بكل الرؤوس في C_n بحواف جديدة. العجلات W_3 ، W_4 ، W_5 و W_6 مبينة في شكل ٦-٢-٣.



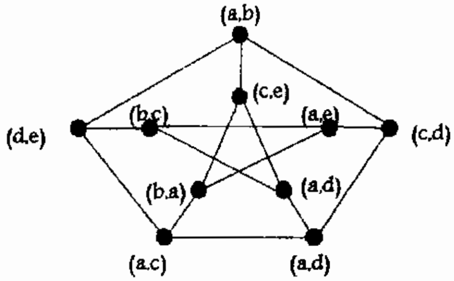
شكل ٦-٢-٣

مثال ٦-٢-٥ المكعب النوني. المكعب النوني n-Cube ، يرمز له بالرمز Q_n، هو الرسم الذي له الرؤوس التي تمثل سلاسل البتات من الطول n. الرأسان يكونا متجاوران إذا وفقط إذا كان سلسلتا البتات اللتان تمثلاهما تختلفان تحديدا في موضع واحد. الرسومات Q_1 ، Q_2 و Q_3 موضحة في شكل ٦-٢-٤.



شكل ٦-٢-٤

تعريف. رسم بيترسن Petrsen graph هو رسم بسيط رؤوسه هي المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من مجموعة بها خمسة عناصر وحوافه هي أزواج المجموعات المنفصلة ذوات العنصرين.
رسم بيترسن يحتوي دورتين منفصلتين طول كل منهما 5.



شكل ٦-٢-٤
رسم بيترسن

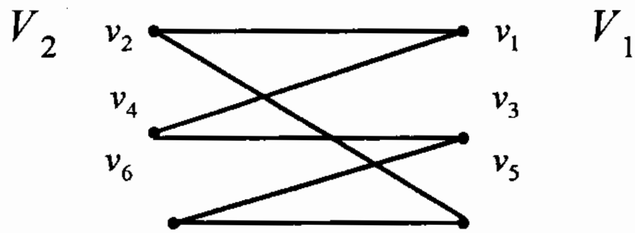
الرسومات المنقسمة (ذات القسمين) Bipartite Graphs

أحيانا يكون للرسم خاصية أن مجموعة الرؤوس يمكن تقسيمها إلى مجموعتين منفصلتين بحيث كل حافة تربط رأس من المجموعة الأولى مع رأس من المجموعة الثانية.

تعريف ٦-٢-٦. الرسم البسيط G يسمى **ثنائي الانقسام** (ذو قسمين) bipartite إذا أمكن تقسيم مجموعة الرؤوس للرسم إلى مجموعتين منفصلتين V_1 و V_2 بحيث كل حافة في الرسم تربط رأس من V_1 مع رأس من V_2 (وبالتالي لاتوجد حافة في G تربط رأسين من مجموعة واحدة V_1 أو V_2).
عندما يتحقق هذا الشرط فإن الثنائي (V_1,V_2) يسمى **تجزيء ثنائي** bipartition لمجموعة الرؤوس V في G.

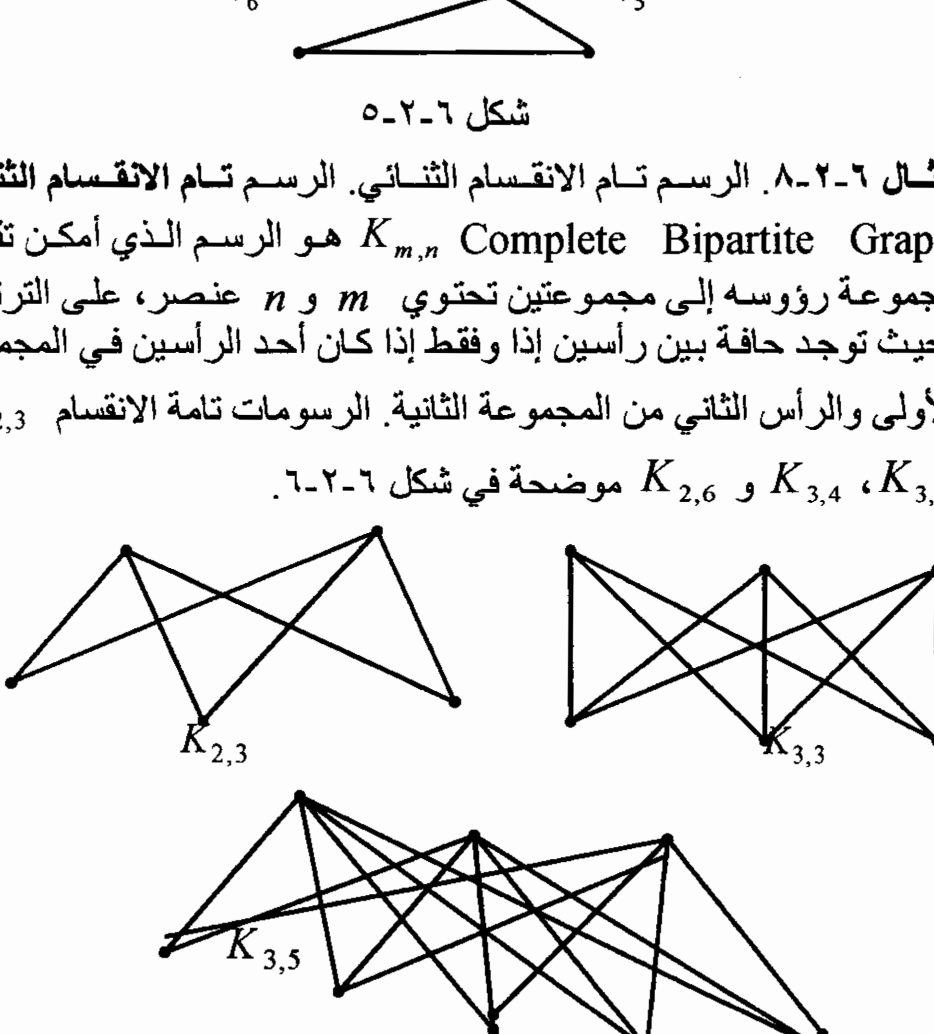
مثال ٦-٢-٧. C_6 يكون ثنائي الانقسام كما هو مبين في شكل ٦-٢-٥ حيث أن مجموعة الرؤوس في C_6 يمكن تجزيئها إلى مجموعتين

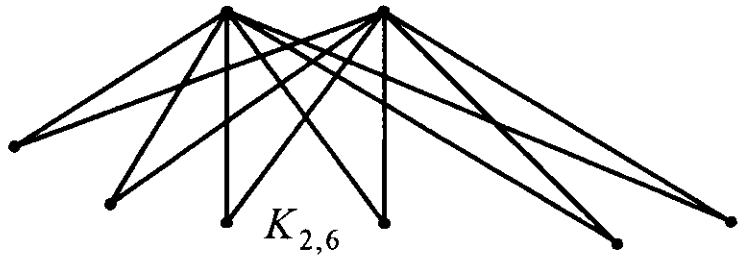
$V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ و $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ وكل حافة في C_6 تربط رأس من V_1 ورأس من V_2.



شكل ٦-٢-٥

مثال ٦-٢-٨. الرسم تام الانقسام الثنائي. الرسم **تام الانقسام الثنائي** Complete Bipartite Graph $K_{m,n}$ هو الرسم الذي أمكن تقسيم مجموعة رؤوسه إلى مجموعتين تحتوي m و n عنصر، على الترتيب، بحيث توجد حافة بين رأسين إذا وفقط إذا كان أحد الرأسين في المجموعة الأولى والرأس الثاني من المجموعة الثانية. الرسومات تامة الانقسام $K_{2,3}$، $K_{3,3}$، $K_{3,4}$ و $K_{2,6}$ موضحة في شكل ٦-٢-٦.

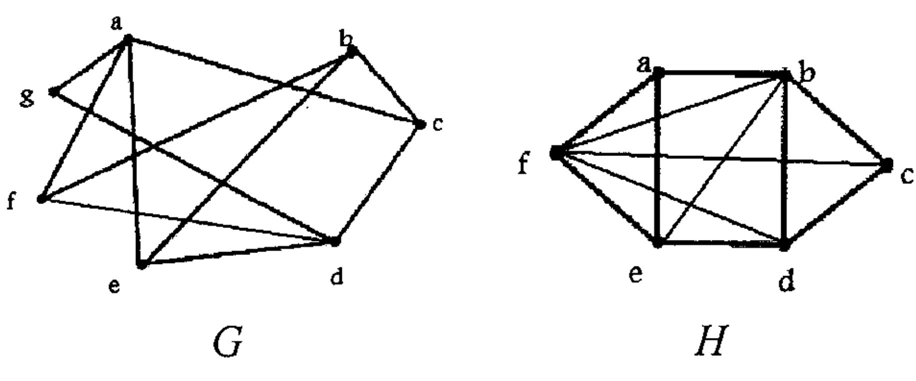




شكل ٦-٢-٦

مثـال ٦-٢-٩. K_3 لـيس ثنـائي الانقسام. لبيـان ذلـك، لاحـظ أنـه إذا قـسمنا مجموعة رؤوس K_3 إلى مجموعتين منفصلتين، فإن إحدى هذه المجموعات يجب أن تحتوي رأسين. إذا كان الرسم ثنائي الانقسام ، فإن هذان الرأسان لايمكن أن يرتبطا بحافة، ولكن في K_3 كل رأس يرتبط مع الرأس الآخر بحافة.

مثال ٦-٢-١٠. هل الرسمين G و H المبينين في شكل ٦-٢-٧ منقسمين؟



شكل ٦-٢-٧

الحل: الرسم G ثنائي الانقسام لأن مجموعة رؤوسه هي اتحاد مجموعتين منفصلتين $\{a,b,d\}$ و $\{c,e,f,g\}$ وكل حافة تربط رأس من إحدى هاتين المجموعتين برأس من المجموعة الأخرى. الرسم H ليس منقسم لأن مجموعة رؤوسه لايمكن تجزيئها إلى مجموعتين جزئيتين بحيث أن كل حافة تربط رأس من إحدى المجموعتين برأس من المجموعة الأخرى.

النظرية التالية تعطينا قاعدة مفيدة لتحديد ماإذا كان الرسم ثنائي الانقسام.

نظرية ٦-٢-١١. الرسم البسيط يكون منقسم إذا وفقط إذا كان من الممكن تعيين واحد من لونين مختلفين لكل رأس في الرسم بحيث أن أي رأسين متجاورين لايعين لهما نفس اللون.

البرهان: نفرض أن $G=(V,E)$ رسم بسيط ثنائي الانقسام. إذن $V=V_1\cup V_2$، حيث V_1 و V_2 مجموعتين منفصلتين وكل حافة في E تربط رأس من V_1 ورأس من V_2. إذا عينا لون واحد لكل رأس من V_1 ولون آخر لكل رأس من V_2، فإنه لايوجد رأسان متجاوران يعين لهما نفس اللون.

من جهة أخري نفرض أنه من الممكن تعيين ألوان لرؤوس الرسم باستخدام لونين على وجه التحديد بحيث لايعين لرأسين متجاورين نفس اللون. نفرض V_1 مجموعة الرؤوس التي تعين لها اللون الأول و V_2 مجموعة الرؤوس التي تعين لها اللون الثاني، إذن V_1 و V_2 تكونا مجموعتان منفصلتان و $V=V_1\cup V_2$. علاوة على ذلك، كل حافة تربط رأس من V_1 ورأس من V_2 لأن أي رأسان متجاوران لايكونا سويا في V_1 أو في V_2. نتيجة لذلك G يكون ثنائي الانقسام.

في الرسم G أكبر درجة للرؤوس يرمز لها بالرمز $\Delta(G)$ وأصغر درجة يرمز لها بالرمز $\delta(G)$. G يكون منتظم إذا كان $\Delta(G)=\delta(G)$. إذا كانت k هي الدرجة المشتركة لكل الرؤوس فإن الرسم يكون منتظم من درجة k.

نتيجة ٦-٢-١٢. في الرسم G يكون $\delta(G)\le\frac{2|E|}{|V|}\le\Delta(G)$.

نتيجة ٦-٢-١٣. في الرسم المنتظم من درجة k والذي يحتوي n رأس يكون يوجد $\frac{nk}{2}$ حافة.

مبرهنة ٦-٢-١٤. إذا كانت $k>0$ فإن الرسم المنتظم من درجة k ثنائي الانقسام يكون له نفس عدد الرؤوس في كل مجموعة جزئية من مجموعتي التجزئة.

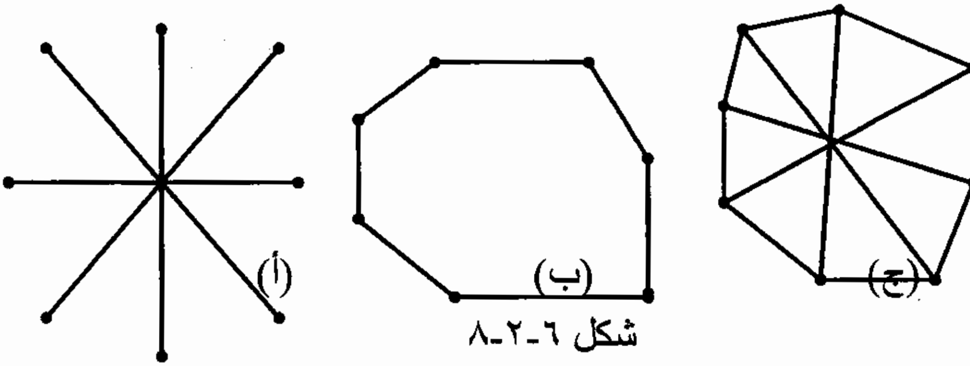
البرهان: نفرض G رسم منتظم من درجة k ونفرض أن X و Y هما مجموعتي التجزئة لرؤوس الرسم. عدد الحواف التي نهايتها في X يساوي $e(G)=k\,|X|$. عدد الحواف التي نهايتها في Y يساوي $e(G)=k\,|Y|$. لذلك $k\,|X|=k\,|Y|$ ومنها ينتج أن $|X|=|Y|$ عندما $k>0$.

سوف نبين كيف تستخدم الأنواع الخاصة من الرسومات كنماذج لتبادل المعلومات.

مثال ٦-٢-١٥ الشبكات المحلية. مختلف الحواسيب في مبنى، مثل الحواسيب الصغيرة والحواسيب الشخصية، كذلك الأجهزة الطرفية كالطابعات يمكن ربطها باستخدام شبكات محلية. بعض هذه الشبكات يوضع على شكل نجمي star topology حيث يتم ربط كل الأجهزة بجهاز التحكم المركزي. الشبكات المحلية يمكن تمثيلها برسم تام التقسيم الثنائي $K_{1,n}$ كما هو مبين في شكل ٦-٢-٨ (أ). الرسائل ترسل من جهاز إلى جهاز عبر جهاز التحكم المركزي.

شبكات محلية أخرى توضع على شكل حلقي ring topology حيث كل جهاز يرتبط تحديدا بجهازين آخرين. الشبكات المحلية ذات الشكل الحلقي تم نمذجتها باستخدام الدورات، C_n ، كما هو مبين في شكل ٦-٢-٨ (ب). الرسائل ترسل من جهاز إلى جهاز عبر دائرة حتى تصل إلى الجهاز المطلوب وصول الرسالة إليه.

أخيرا، بعض الشبكات المحلية تستخدم خليط من الشكلين. الرسائل قد ترسل حول الحلقة، أو خلال الجهاز المركزي. هذا التكرار يجعل الثقة في الشبكة أكبر. الشبكات المحلية بهذا التكرار يمكن نمذجتها باستخدام العجلات W_n كما هو موضح في شكل ٦-٢-٨ (ج).

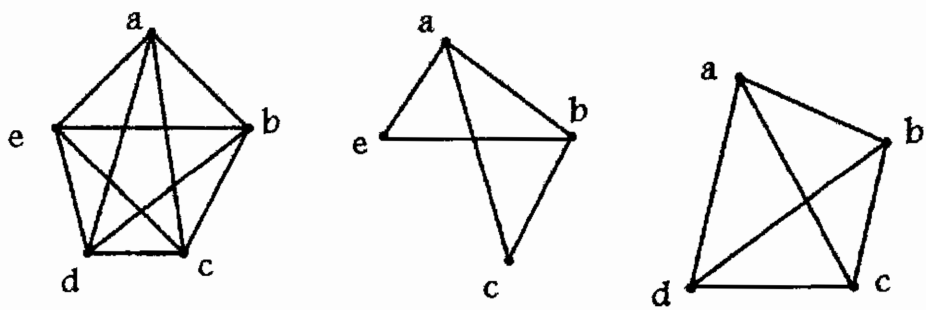


شكل ٦-٢-٨

الرسم الجزئي

تعريف ٦-٢-١٦. **الرسم الجزئي** subgraph من الرسم $G=(V,E)$ هو رسم $H=(W,F)$ حيث $W\subseteq V$ و $F\subseteq E$.

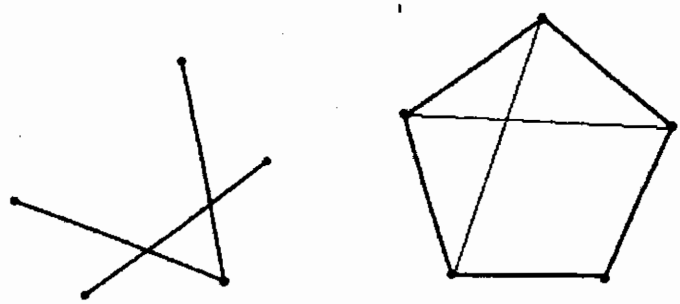
مثال ٦-٢-١٧. الرسم G المعطى في شكل ٦-٢-٩ يكون رسم جزئي من K_5 .



شكل ٦-٢-٩(رسم جزئي من K_5)

تعريف ٦-٢-١٨. إذا كان H رسم جزئي من G فإن مكملة H في G complement، يرمز لها بالرمز $\overline{H}(G)$ ، هي الرسم الجزئي $G-E(H)$، أي أن حواف H حذفت من G، حيث $E(H)$ هي حواف H. إذا كان H رسم بسيط به n رأس فإن $\overline{H}$ مكملة H، تكون هي مكملة H في K_n. من ذلك ينتج أن $V(\overline{H})=V(H)$.

مثال ٦-٢-١٩. في شكل ٦-٢-١٠ رسم ومكملته



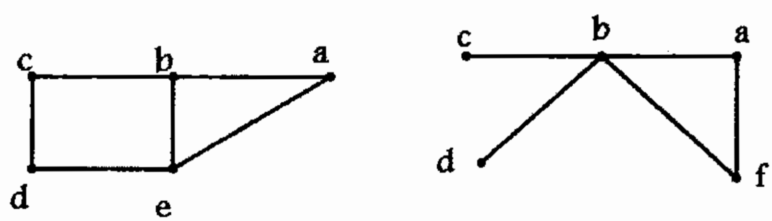
شكل ٦-٢-١٠

رسم ومكملته

تعريف ٦-٢-٢٠. اتحاد union رسمين بسيطين $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$، يرمز له بالرمز $G_1 \cap G_2$ هو الرسم البسيط (V, E) حيث $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$.

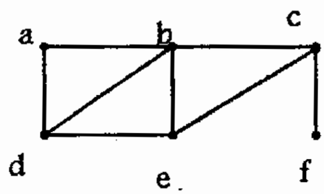
بنفس الطريقة يمكن تعريف تقاطع الرسمين $G_1 \cap G_2$.

مثال ٦-٢-٢١. أوجد اتحاد الرسمين G_1 و G_2 المبينين في شكل ٦-٢-١٠



G_2 شكل ٦-٢-١١ G_1

الحل. مجموعة رؤوس الاتحاد $G_1 \cup G_2$ هي اتحاد مجموعتي الرؤوس في الرسمين، أي $\{a, b, c, d, e, f\}$. مجموعة الحواف هي اتحاد مجموعتي الحواف للرسمين. الاتحاد هو المبين في شكل ٦-٢-١٢.



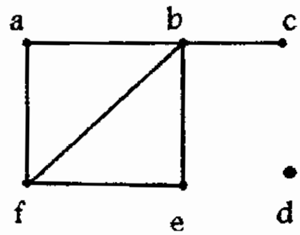
$G_1 \cup G_2$

شكل ٦-٢-١٢

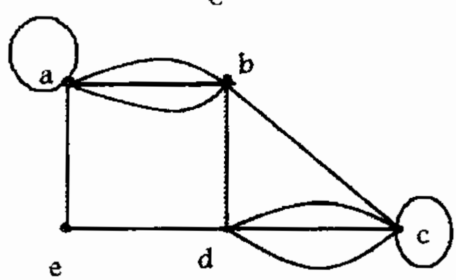
تمارين ٦-٢

١- أوجد عدد الرؤوس، عدد الحواف ودرجة كل رأس في الرسم غير الموجه المعطى. حدد النقاط المعزولة والنقاط المعلقة.

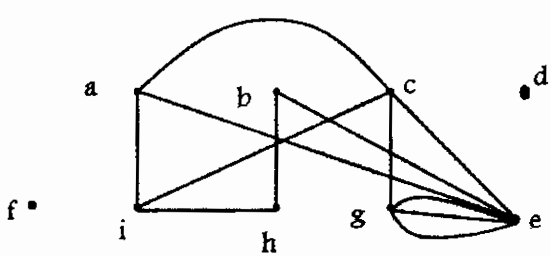
(أ)



(ب)



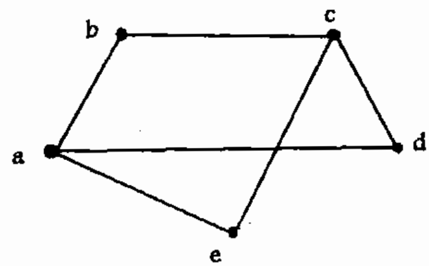
(ج)



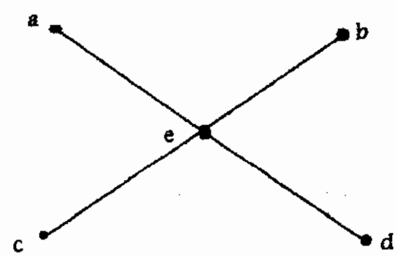
٢- أوجد مجموع درجات الرؤوس للرسم في تمرين 1 وتحقق من أنه ضعف عدد الحواف في الرسم.

٣- حدد ما إذا كان الرسم منقسم في كل من الرسومات التالية

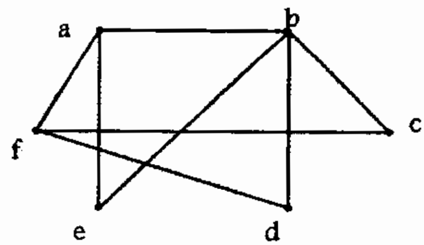
(أ)



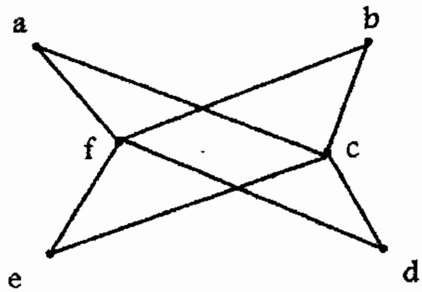
(ب)



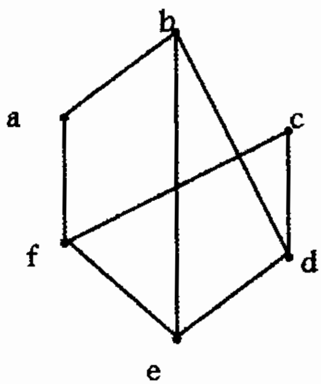
(ج)



(د)



(هـ)



٤- هل يوجد رسم بسيط له ستة رؤوس درجاتها كالتالي

(أ) $0, 1, 2, 3, 4, 5$. (ب) $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(ج) $2, 2, 2, 2, 2, 2$. (د) $3, 2, 3, 2, 3, 2$.

(هـ) $3, 2, 2, 2, 2, 3$. (و) $1, 1, 1, 1, 1, 1$.

(ز) $3, 3, 3, 3, 3, 5$. (ح) $1, 2, 3, 4, 5, 5$.

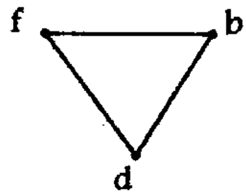
٥- الرسم البسيط يسمى منتظم regular إذا كانت جميع رؤوس الرسم لها نفس الدرجة. لأي قيمة من قيم n الرسم التالي يكون منتظم ؟

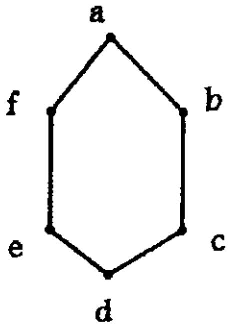
(أ) K_n . (ب) C_n . (ج) W_n .

٦- لأي قيم لـ m و n الرسم $K_{m,n}$ يكون منتظم ؟

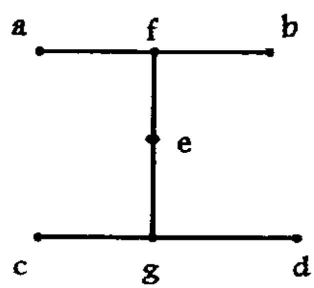
٧- أوجد اتحاد كل زوج من الرسوم البسيطة التالية:

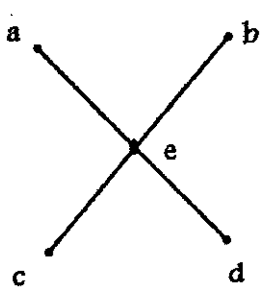
(أ)



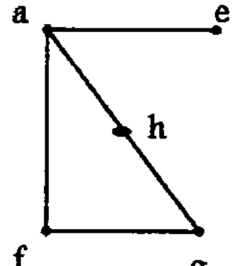


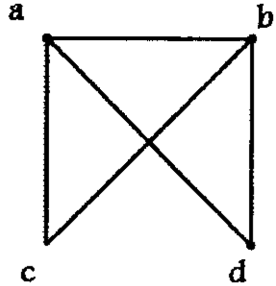
(ب)





(ج)





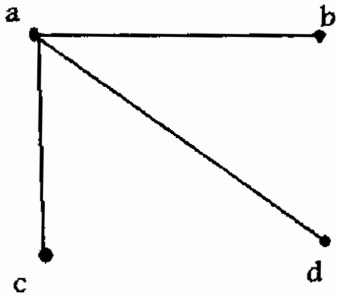
٨- بين أنه في الرسم البسيط الذي له على الأقل رأسين، يجب أن يكون له رأسين من نفس الدرجة.

٩- ارسم الرسومات التالية:

(أ) K_7.   (ب) $K_{1,8}$.   (ج) $K_{4,4}$.

(ج) C_7.   (د) W_7.   (هـ) Q_4.

١٠- ارسم كل الرسوم الجزئية من الرسم



١١- نفرض G رسم به عدد v رأس و e حافة. نفرض M هو أعلى درجة لرؤوس G، ونفرض m أقل درجة لرؤوس G. بين أن

(أ) $2 e/v \geq m$.   (ب) $2 e/v \leq M$.

١٢- **مكمل** الرسم البسيط G يرمز له بالرمز $\overline{G}$ هو رسم له نفس رؤوس G. الرأسان يكونا متجاوران في $\overline{G}$ إذا وفقط إذا كانا غير متجاوران في G. صف كل من الرسوم التالية.

(أ) $\overline{K_n}$.   (ب) $\overline{K_{m,n}}$.   (ج) $\overline{C_n}$.   (د) $\overline{Q_n}$.

١٣- ارسم رسم له ستة رؤوس وعشرة حواف.

١٤- اوجد كل الرسومات المختلفة التي من خمسة رؤوس وحافتان. ماذا عن ثلاث حواف؟ ماهو أكبر عدد من الحواف لرسم به خمسة رؤوس؟

١٥- نفرض أن G رسم به v رأس و e حافة و $e = v - 1$. برهن أن G يحتوي رأس من درجة 0 أو 1.

١٦- لكل من المتتابعات التالية أوجد الرسم الذي رؤوسه لها هذه الدرجات (إن وجد). إن لم يوجد رسم يمثل أي من هذه المتتابعات وضح السبب.

(أ) 3,2,2,1. (ب) 3,3,1,1.

(ج) 4,1,1,1,1. (د) 3,3,2,2,1,1.

(هـ) 7,3,3,3,2,2. (و) 2,2,2,1,1.

(ز) 5,4,4,2,2,2. (ح) 5,5,5,2,2,2,2,2,1.

١٧- أوجد كل الرسوم المختلفة التي لها

(أ) 6 رؤوس و 15 حافة.

(ب) 6 رؤوس و 14 حافة.

(ج) 6 رؤوس و 13 حافة.

١٨- ماهي أصغر قيمة لـ n حتى يكون K_n به 1000 حافة ؟

١٩- هل يوجد رسم منقسم به عشرة رؤوس ومنتظم من درجة 3؟ إذا لم يكن وضح لماذا ؟

٢٠- كم رسم جزئي على الأقل له رأس واحدة من K_2 ؟

٢١- كم رسم جزئي على الأقل له رأس واحدة من K_3 ؟

٢٢- كم رسم جزئي على الأقل له رأس واحدة من W_3 ؟

٦-٣ تمثيل الرسومات وتماثل الرسومات

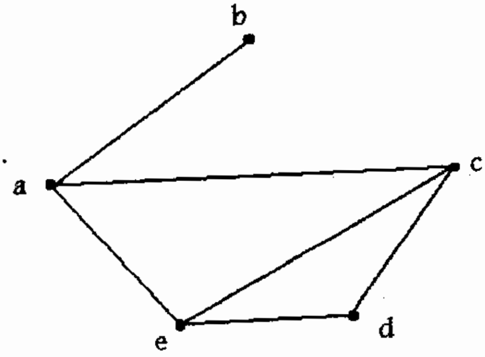
Graphs Representing and Graph Isomorphism

يوجد العديد من الطرق المفيدة لتمثيل الرسومات. في التعامل مع الرسومات يكون من المفيد أن نكون قادرين على اختيار التمثيل الأكثر ملائمة. في هذا الفصل سوف نوضح كيفية تمثيل الرسومات بطرق مختلفة عديدة.

تمثيل الرسومات

طريقة لتمثيل الرسم الذي ليس به حواف متعددة وهي سرد كل حواف هذا الرسم. طريقة أخرى وهي استخدام **قائمة التجاور**، والتي تعين الرؤوس التي تجاور كل رأس في الرسم.

مثال ٦-٣-١. استخدم قائمة التجاور لوصف الرسم البسيط المبين في شكل ٦-٣-١.



شكل ٦-٣-١

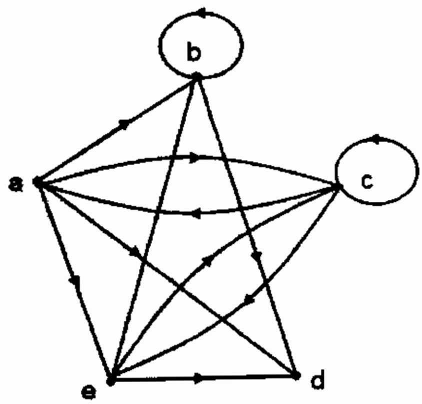
الحل: نكتب كل الرؤوس المجاورة لكل رأس من رؤوس الرسم كما هو مبين في جدول ٦-٣-١.

الرأس	الرؤوس المجاورة
a	b، c، e
b	a
c	a، d، e

d	c، e
e	a، c، d

جدول ٦-٣-١

مثال ٦-٣-٢. مثل الرسم الموجه المبين في شكل ٦-٣-٢ بكتابة كل الرؤوس التي هي رؤوس نهاية للحواف التي تبدأ عند كل رأس من رؤوس الرسم



شكل ٦-٣-٢

الحل: جدول ٦-٣-٢ يمثل الرسم الموجه المبين في شكل ٦-٣-٢.

الرأس الابتدائي	رؤوس النهاية
a	b، c، d، e
b	b، d
c	a، c، e
d	
e	b، c، d

جدول ٦-٣-٢

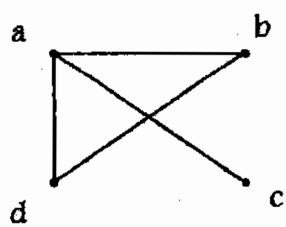
مصفوفات التجاور

نوعان من المصفوفات يستخدمان عادة لتمثيل الرسومات سوف نقدمهما هنا. إحدى هاتين المصفوفتين توضع على أساس تجاور الرؤوس، والأخرى وضعت على أساس تأثير الرؤوس والحواف.

نفرض أن $G=(V,E)$ رسم بسيط حيث $|V|=n$. نفرض أن رؤوس G رتبت في صورة اختيارية كما يلي $v_1, v_2, \ldots, v_n$. **مصفوفة التجاور** adjacency matrix A للرسم G، بالنسبة لهذا الترتيب للرؤوس، هي مصفوفة 0-1 مربعة من درجة n حيث العنصر رقم (i,j) يكون 1 عندما يكون v_i و v_j متجاوران، ويكون 0 إذا لم يكونا متجاوران. بتعبير آخر إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة التجاور فإن

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \text{ is an edge of } G\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

مثال ٦-٣-٣. استخدم مصفوفة التجاور لتمثيل الرسم



الحل: نرتب الرؤوس بالصورة a, b, c, d. المصفوفة التي تمثل هذا الرسم تكون

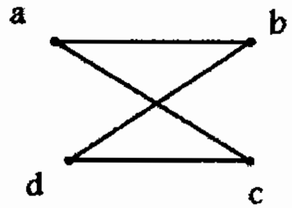
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ٦-٣-٤. أرسم الرسم الذي له مصفوفة التجاور

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

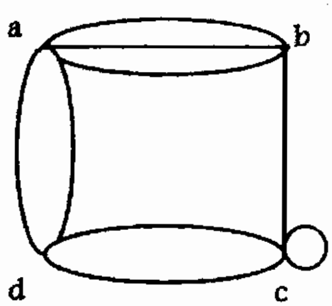
بالنسبة لترتيب الرؤوس بالصورة a, b, c, d .

الحل: الرسم الممثل بمصفوفة التجاور المعطاة يكون



مصفوفة التجاور يمكن أن تستخدم أيضا لتمثيل الرسوم غير الموجهة والتي بها حواف متعددة.

مثال ٦-٣-٥. استخدم مصفوفة تجاور لتمثيل الرسم المتعدد



الحل: باستخدام الترتيب a, b, c, d للرؤوس، تكون مصفوفة التجاور هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

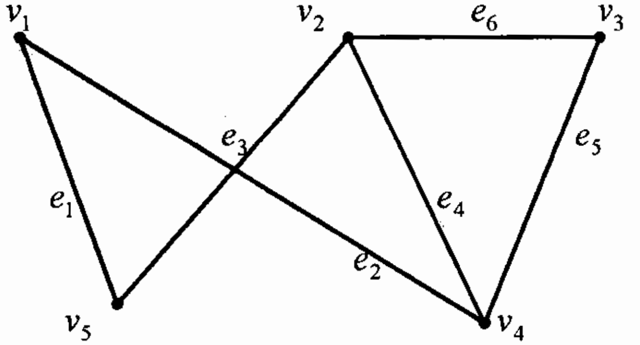
واضح أن مصفوفة التجاور للرسم المتعدد ليست مصفوفة 0-1 ولكن تحتوي على عناصر اكبر من 1 مثلا 2 أو 3 وهذا يتوقف على عدد الحواف بين نفس الثنائي من الرؤوس.

مصفوفات التبعية Incidence Matrices

طريقة أخرى تستخدم عادة لتمثيل الرسومات وهي استخدام **مصفوفات التبعية** incidence matrices. نفرض $G=(V,E)$ رسم غير موجه ونفرض أن $v_1,v_2,\dots,v_n$ هي رؤوس و $e_1,e_2,\dots,e_m$ هي حواف G. مصفوفة التبعية بالنسبة لهذا الترتيب لـ V و E هي مصفوفة $M=[m_{ij}]$ من درجة $n\times m$ ، حيث

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{عندما تكون الحافة } e_j \text{ تابعة للرأس } v_i\\ 0 & \text{غير ذلك}\end{cases}$$

مثال ٦-٣-٦. مثل الرسم التالي بمصفوفة تبعية



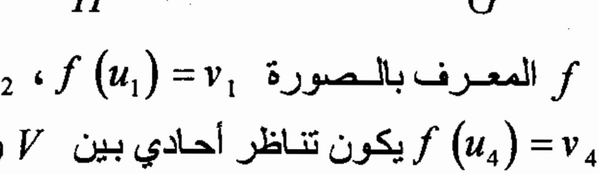
الحل: مصفوفة التبعية تكون

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

تماثل الرسومات Isomorphism of Graphs

تعريف ٦-٣-٧. الرسمان البسيطان $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ يقال أنهما **متماثلان** isomorphic إذا وجد راسم تناظر أحادي من V_1 إلى V_2 له الخاصية أن a و b يكونا متجاوران في G_1 إذا وفقط إذا كان $f(a)$ و $f(b)$ متجاوران في G_2، لكل a و b في V_1. مثل هذا الراسم يسمى تماثل isomorphism.

مثال ٦-٣-٨. بين أن الرسمان $G=(V,E)$ و $H=(W,F)$ متماثلان.



H G

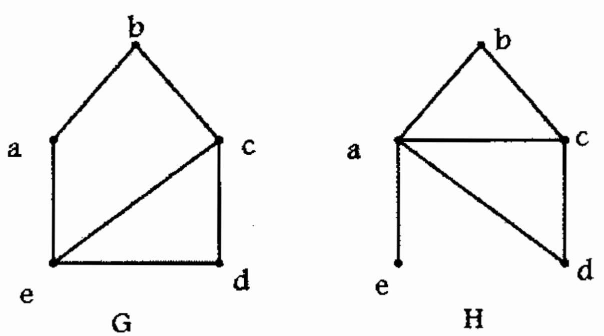
الحل: الراسم f المعرف بالصورة $f(u_1)=v_1$، $f(u_2)=v_2$، $f(u_3)=v_3$ و $f(u_4)=v_4$ يكون تناظر أحادي بين V و W. لبيان أن هذا التناظر يحافظ على التجاور، لاحظ أن الرؤوس المتجاورة في G هي u_1 و u_2؛ u_2 و u_3؛ u_3 و u_4؛ u_4 و u_1. وكل من الثنائيات $f(u_1)=v_1$ و $f(u_2)=v_2$ ؛ $f(u_2)=v_2$ و $f(u_3)=v_3$ ؛

$f(u_3)=v_3$ و $f(u_4)=v_4$ ؛ $f(u_4)=v_4$ و $f(u_1)=v_1$ تكـــــون متجاورة في H.

غالبا يكون من الصعب تحديد ما إذا كان رسمان بسيطان متماثلان. يوجد $n!$ تناظر أحادي بين رؤوس رسمين بسيطين يحتوي كل منهما عدد n رأس. واختبار كل من هذه التناظرات لمعرفة ما إذا كان يحافظ على التجاور أم لا هو أمر ليس عمليا خاصة إذا كانت n عدد كبير.

ومع ذلك يمكننا غالبا بيان أن رسمين بسيطين يكونا غير متماثلين ببيان أنهما لا يشتركان في خاصية تتحقق لكل الرسومات البسيطة المتماثلة. مثل هذه الخاصية تسمى خاصية **لاتغيرية** invariant بالنسبة لتماثل الرسومات البسيطة. على سبيل المثال، الرسومات البسيطة المتماثلة يجب أن يكون لها نفس العدد من الرؤوس، ونفس العدد من الحواف. إضافة إلى ذلك درجات الرؤوس في الرسومات البسيطة المتماثلة يجب أن تكون متساوية. بمعنى أن الرأس v من درجة d في G يجب أن يناظر الرأس $f(v)$ من درجة d في H. حيث أن الرأس w في G يكون مجاور للرأس v إذا وفقط إذا كان $f(v)$ و $f(w)$ متجاوران في H.

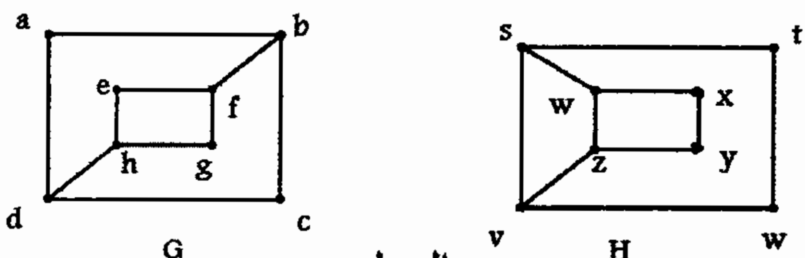
مثال ٦-٣-٩. بين أن الرسمان التاليان غير متماثلان.



الحل: الرسمان G ، H كل منهما به خمسة رؤوس وست حواف. ومع ذلك، H فيه رأس من درجة 1، وهي e ، بينما G ليس فيه رأس من درجة 1. من ذلك ينتج أن G ، H غير متماثلان.

عدد الرؤوس، عدد الحواف، ودرجات الرؤوس كلها كميات لاتغيرية تحت تأثير التماثل. إذا اختلفت هذه الكميات في رسمين بسيطين، فإن هذان الرسمان لايمكن أن يكونا متماثلين. ومع ذلك، عندما تتساوى هذه الكميات اللاتغيرية فليس بالضرورة أن يكون هذان الرسمان متماثلان. لاتوجد مجموعة من اللامتغيرات معروفة حتى الآن يمكن استخدامها لتحديد ما إذا كان الرسمان متماثلان.

مثال ٦-٣-١٠. حدد ما إذا كانت الرسمان التاليان متماثلان.



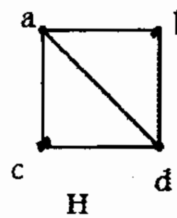
الحــل.

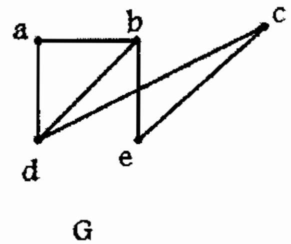
الرسمان G و H كل منهما به ثمانية رؤوس وعشر حواف. كذلك كل منهما له أربعة رؤوس من درجة 2 وأربعة رؤوس من درجة 3. حيث أن هذه الكميات اللاتغيرية اتفقت في الرسمين فإنه يمكن أن يكون هناك تصور بأن الرسمين متماثلين. ومع ذلك فالرسمان غير متماثلان. لبيان ذلك، لاحظ أنه لأن $\deg(a)=2$ في G، a يجب أن تناظر إما t، w، x أو y في H، حيث أن هذه هي الرؤوس من درجة 2 في H. ولكن كل من هذه الرؤوس في H تجاور رأس من درجة 2 في H ، وهذا ليس صحيحا بالنسبة إلى a في G.

خاصية ٦-٣-١١. علاقة التماثل بين الرسومات تكون علاقة تكافؤ على مجموعة كل الرسومات البسيطة.

تمارين ٦-٣

١- استخدم مصفوفة التجاور لتمثيل الرسم المعطى





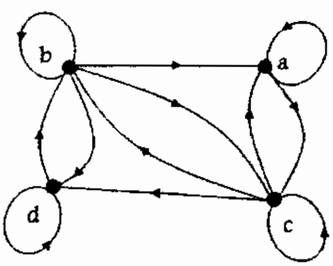
٢- أرسم الرسم المناظر لمصفوفة التجاور المعطاة

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (ب) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

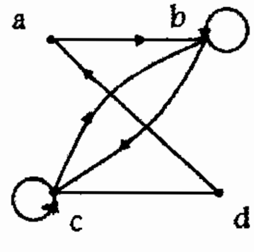
(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

٣- أوجد مصفوفة التجاور للرسم الموجه المتعدد

(أ)



(ب)



٤- استخدم القائمة لتمثيل الرسم الموجه في تمرين ٣.

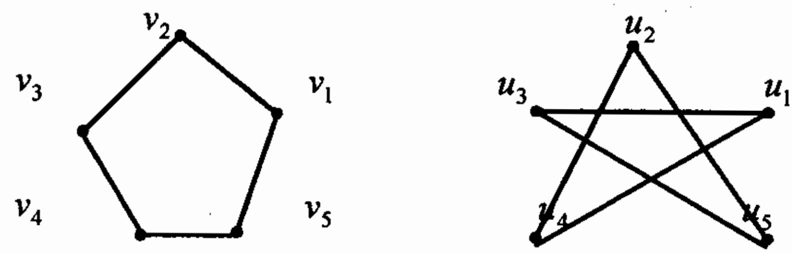
٥- مثل كل من الرسومات التالية بمصفوفة تجاور.

(أ) K_4.   (ب) $K_{1,4}$.   (ج) $K_{2,3}$.

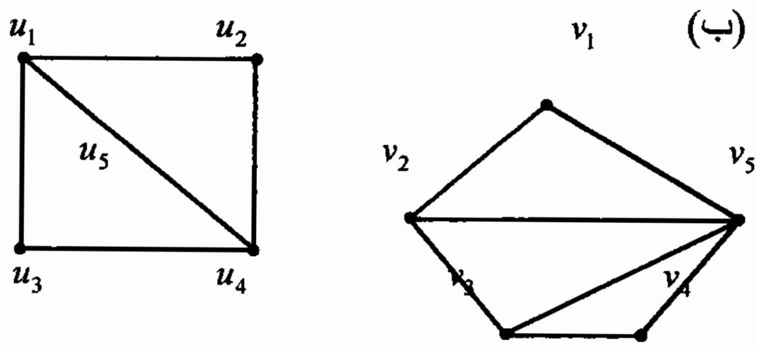
(د) C_4.   (هـ) W_4.   (و) Q_3.

٦- حدد ما إذا كان الرسمان متماثلان

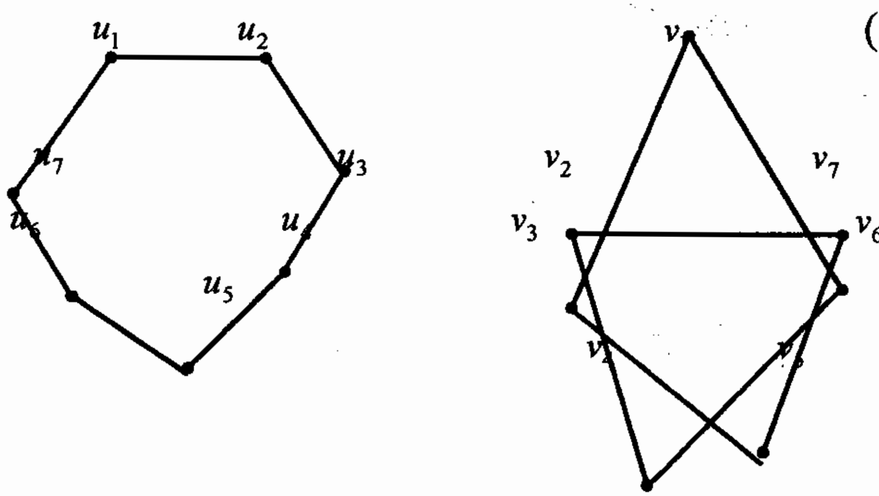
(أ)



(ب)



(ج)



٦-٤ الترابط والرسومات المستوية

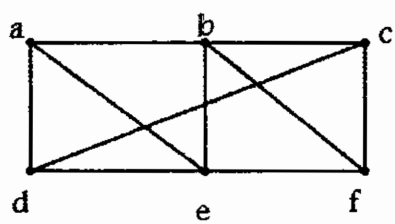
Connectivity and Planar Graphs

العديد من المسائل يمكن نمذجتها بمسار يتكون بالانتقال على طول الحواف في رسم. على سبيل المثال، مسألة تحديد ما إذا كانت رسالة مرسلة بين جهازي حاسب باستخدام وصلات بينية يمكن دراستها باستخدام نموذج رسم.

تعريف ٦-٤-١. نفرض n عدد صحيح غير سالب و G رسم غير موجه. **المسار** الذي طوله path of length n من u إلى v في G هو متتابعة تتكون من n حافة $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$، حيث $v_0 = u$ و $v_n = v$. المسار الذي طوله صفر يسمى المسار الخالي (التافه) trivial path وهو الذي يتكون من رأس واحدة بدون حواف.

عندما يكون الرسم بسيط، نرمز للمسار بمتتابعة رؤوسه $v_1, v_2, \ldots, v_n$. المسار يكون **دورة** circuit إذا كان $u = v$ وطوله أكبر من الصفر. المسار أو الدورة يكون **بسيط** simple إذا كان لايحتوي نفس الحافة أكثر من مرة.

مثال ٦-٤-٢. في الرسم البسيط في شكل ٦-٤-١



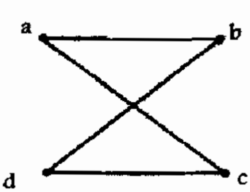
شكل ٦-٤-١

a, d, c, f مسار بسيط طوله 4. ولكن d, e, c, a ليس مسار، حيث أن $\{e,c\}$ ليست حافة. لاحظ أن b, c, f, e, b دورة طولها 4. المسار a,b,e,d,a,b الذي طوله 5، ليس بسيط حيث أنه يحتوي الحافة $\{a,b\}$ مرتين.

نظرية ٦-٤-٣. نفرض G رسم بمصفوفة تجاور A بالنسبة لترتيب الرؤوس $v_1,v_2,...,v_n$. عدد المسارات المختلفة التي طولها r بين v_i و v_j ، حيث r عدد صحيح موجب ، تساوي العنصر رقم $(i\,,j)$ في المصفوفة A^r.

البرهان: سوف نبرهن النظرية باستخدام الاستنتاج الرياضي. نفرض G رسم بمصفوفة تجاور A (نفرض ترتيب الرؤوس هو $v_1,v_2,...,v_n$). عدد المسارات من v_i إلى v_j بطول 1 هو العنصر رقم $(i\,,j)$ في A ، لأن هذا العنصر هو عدد الحواف من v_i إلى v_j. نفرض أن العنصر $(i\,,j)$ في A^r هو عدد المسارات المختلفة بطول r من v_i إلى v_j، هذا هو فرض الاستنتاج. وحيث أن $A^{r+1}=A^rA$، العنصر رقم $(i\,,j)$ في A^{r+1} يساوي $b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+...+b_{in}a_{nj}$ حيث b_{ik} هو العنصر رقم $(i\,,k)$ في A^r. من فرض الاستنتاج b_{ik} هو عدد المسارات بطول r من v_i إلى v_k. المسار الذي طوله $r+1$ من v_i إلى v_j يتكون من المسار الذي طوله r من v_i إلى رأس بيني v_k وحافة من v_k إلى v_j. من قاعدة الضرب في العد، مثل هذه المسارات هو حاصل ضرب عدد المسارات التي طولها r من v_i إلى v_k ، وهو b_{ik}، مع عدد الحواف من v_k إلى v_j ، وهو a_{kj}. عندما نجمع كل حواصل الضرب هذه لكل الرؤوس البينية v_k، نحصل على النتيجة المطلوبة.

مثال ٦-٤-٥. كم مسار طوله 4 من a إلى d في الرسم البسيط G في شكل ٦-٤-٢.



شكل ٦-٤-٢

الحل: مصفوفة التجاور للرسم G بترتيب الرؤوس a,b,c,d هي

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

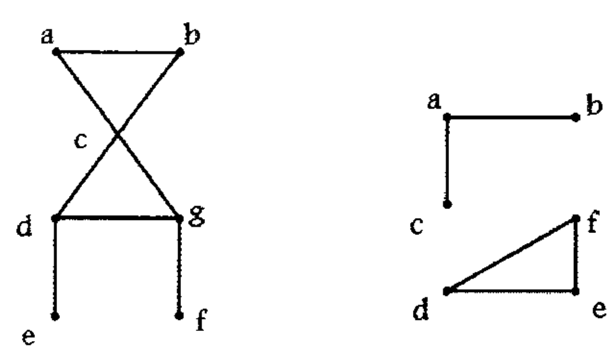
إذن عدد المسارات من a إلى d التي طولها 4 هو العنصر رقم $(1,4)$ في المصفوفة A^4. وحيث أن

$$A^4=\begin{bmatrix}8&0&0&8\\0&8&8&0\\0&8&8&0\\8&0&0&8\end{bmatrix}$$

إذن عدد المسارات يساوي 8. هذه المسارات هي a,b,a,b,d؛ a,b,a,c,d؛ a,b,d,b,d؛ a,b,d,c,d؛ a,c,a,b,d؛ a,c,a,c,d؛ a,c,d,b,d؛ a,c,d,c,d.

تعريف ٦-٤-٥. الرسم غير الموجه يسمى **مترابط** connected إذا كان يوجد مسار بين كل زوج من رؤوسه المختلفة.

مثال ٦-٤-٦ . في شكل ٦-٤-٣، الرسم G_1 يكون مترابط. ولكن الرسم G_2 غير مترابط. حيث في G_2 لايوجد مسار بين الرأسين a و e.



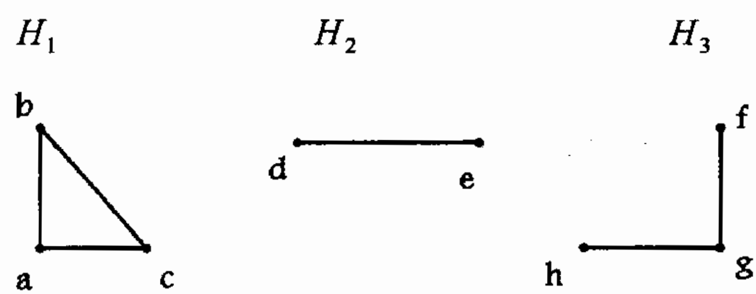
G_1 **شكل ٦-٤-٣** G_2

نظرية ٦-٤-٧. في الرسم المترابط غير الموجه، يوجد مسار بسيط بين كل زوج من رؤوسه المختلفة.

البرهان: نفرض u و v رأسين مختلفين في الرسم المترابط غير الموجه $G=(V,E)$. حيث أن G مترابط، يوجد على الأقل مسار من u إلى v. نفرض $v_0, v_1, \ldots, v_n$ متتابعة رؤوس مسار من أقصر طول، حيث $v_0 = u$ و $v_n = v$. هذا المسار من أقصر طول يكون بسيط. لبيان ذلك، نفرض أنه ليس بسيط. إذن $v_i = v_j$ لبعض i و j حيث $0 \le i \le j$. هذا يعني أنه يوجد مسار من u إلى v من طول أقصر بمتتابعة رؤوس $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, \ldots, v_n$ نحصل عليها بحذف الحواف المناظرة لمتتابعة الرؤوس $v_i, \ldots, v_{j-1}$.

الرسم غير المترابط يكون اتحاد لرسمين جزئيين أو أكثر، كل زوج منها ليس بينهما رأس مشترك. هذه الرسومات الجزئية المنفصلة تسمى **المركبات المترابطة** connected components للرسم.

مثال ٦-٤-٨. ماهي المركبات المترابطة للرسم H في شكل ٦-٤-٤ ؟



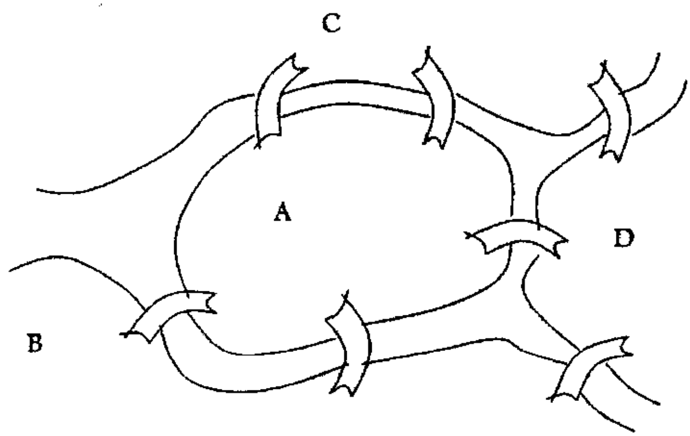
شكل ٦-٤-٤ الرسم H

الحل: الرسم H هو اتحاد الرسومات الجزئية الثلاثة H_1، H_2 و H_3. هذه الرسومات الجزئية الثلاث هي الركبات المترابطة لـ H.

أحيانا إزالة رأس وكل الحواف التابعة له تنتج رسم جزئي به مركبات مترابطة أكثر من الرسم الأصلي، مثل هذه الرؤوس تسمى **رؤوس قطع** cut vertices. إزالة رأس قطع من رسم مترابط ينتج رسم جزئي غير مترابط. بالمثل الحافة التي إزالتها تنتج رسم به مركبات مترابطة أكثر من الرسم الأصلي تسمى **حافة قطع** cut edge (أو قنطرة bridg).

مسارات أويلر Euler Pathes

مدينة كونجسبيرج (حاليا كالييننجراد في جمهورية روسيا) كانت مقسمة إلى أربعة مناطق بفعل فرعي نهر بريجل. هذه المناطق الأربع تشمل منطقتين على ضفتي النهر وجزيرة ومنطقة بين فرعي النهر. في القرن الثامن عشر تم بناء سبع جسور (قناطر) تربط هذه المناطق الأربع. شكل ٥-٤-٥ يصور هذه المناطق والجسور.

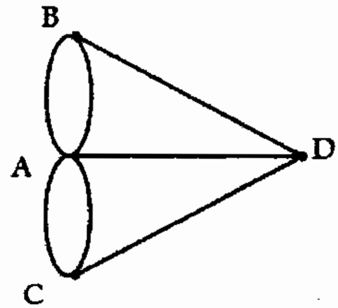


شكل ٦-٤-٥

سكان المدينة كانوا يمشون مسافات طويلة، في الاجازات، للتنقل بين مناطق المدينة عبر الجسور. تساءلوا عن امكانية ان تبدأ الرحلة من مكان ما في المدينة بحيث يتم السفر خلال كل هذه الجسور دون المرور على أي جسر أكثر من مرة والعودة إلى نقطة البداية.

عالم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر قام بحل هذه المسألة. الحل الذي وضعه أويلر ونشر في عام ١٧٣٦، قد يكون هو أول استخدام لنظرية الرسومات. أويلر درس هذه المسألة باستخدام رسم متعدد حصل عليه عندما

مثل المناطق الأربعة برؤوس والجسور بحواف. هذا الرسم المتعدد هو المعطى في شكل ٦-٤-٦.



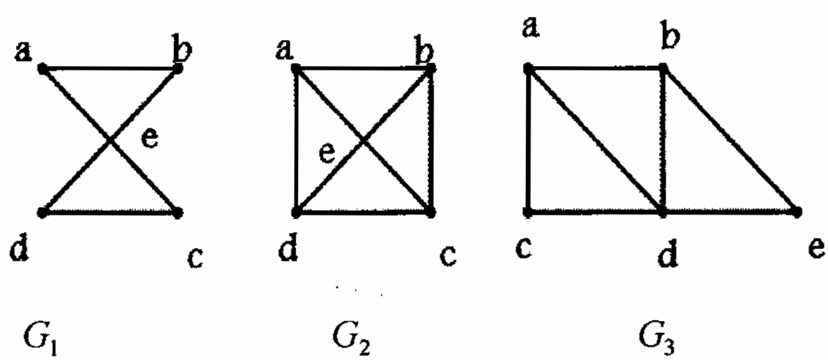
شكل ٦-٤-٦

مسألة السفر عبر كل الجسور بدون عبور أي جسر أكثر من مرة يمكن إعادة صياغتها بدلالة هذا النموذج. السؤال يصبح: هل توجد دورة بسيطة في هذا الرسم المتعدد تحتوي كل الحواف ؟

تعريف ٦-٤-٩. **دورة أويلر** Euler Circuit في رسم G هي دورة بسيطة تحتوي كل حافة في G. **مسار أويلر** Euler path في G هو مسار بسيط يحتوي كل حافة في G.

الأمثلة التالية توضح مفهوم دورة ومسار أويلر.

مثال ٦-٤-١٠. أي من الرسوم غير الموجهة المبينة في شكل ٦-٤-٧ تحتوي على دورة أويلر ؟ تلك التي لاتحتوي دورة أويلر أي منها يحتوي مسار أويلر؟



شكل ٦-٤-٧

الحل: الرسم G_1 يحتوي دورة أويلر، a, e, c, d, e, b, a مثلا. الرسمين G_2 و G_3 أي منهما لايحتوي دورة أويلر. ومع ذلك G_3 يحتوي مسار أويلر ، a, c, d, e, b, d, a, b مثلا. الرسم G_2 لايحتوي حتى مسار أويلر.

يوجد معيار بسيط لتحديد ما إذا كان الرسم المتعدد المترابط يحتوي دورة أويلر أو مسار أويلر. أويلر اكتشف هذا المعيار عندما قام بحل مسألة قناطر كونجسبيرج الشهيرة.

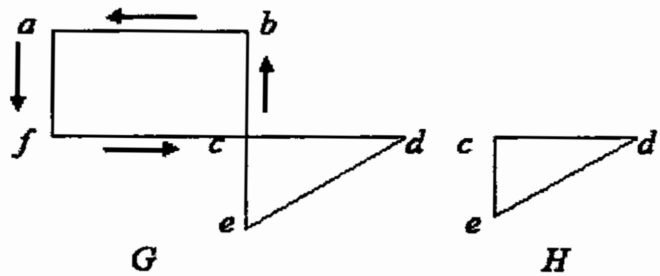
متى يمكننا القول أن الرسم المتعدد المترابط له دورة أويلر ؟ الذي سوف نوضحه هو أن كل رأس يجب أن يكون من درجة زوجية. لبيان ذلك، لاحظ أولا أن دورة أويلر تبدأ عند رأس a وتستمر مع حافة تتبع بـ a ولتكن $\{a,b\}$. الحافة $\{a,b\}$ تؤثر بمقدار 1 في درجة a. كل مرة الدورة تمر على رأس فإنها تؤثر في درجة هذا الرأس بمقدار 2 ، لأن الدورة تصل إلى الرأس عن طريق حافة تابعة لها وتغادر عن طريق حافة أخرى. أخيرا الدورة تنتهي من حيث بدأت لتؤثر في درجة a بمقدار 1 مرة ثانية. لذلك a يجب أن تكون زوجية، لأن الدورة تؤثر في درجة a بمقدار 1 عند مغادرة a وبمقدار 1 عند الوصول إلى a مرة أخرى. كذلك درجة أي رأس تكون زوجية لأن الدورة تؤثر بمقدار 2 في درجة الرأس في كل مرة تمر فيها على الرأس (1 عند الوصول للرأس و 1 عند مغادرة الرأس). من ذلك نستنتج أن الرسم المترابط إذا كان به دورة أويلر فإن رؤوسه يجب أن تكون من درجات زوجية.

هل هذا الشرط الضروري لوجود دورة أويلر أيضا يكون كافي ؟ بمعنى إذا كان لدينا رسم مترابط وكل رؤوسه من درجات زوجية فهل يجب أن توجد به دورة أويلر؟ هذا السؤال يمكن الإجابة عليه باستخدام الطرق الإنشائية للبرهان.

نفرض أن G رسم مترابط متعدد به على الأقل رأسين وأن درجة كل رأس من رؤوسه عدد زوجي. سوف نكون دورة بسيطة تبدأ عند رأس اختياري a في G. نفرض أن $x_0 = a$. نختار، بصورة اختيارية، الحافة $\{x_0,x_1\}$ التي تتبع a، وهذا ممكن لأن الرسم مترابط. نستمر في بناء مسار بسيط

$$\{x_0,x_1\},\{x_1,x_2\},\dots,\{x_{n-1},x_n\}$$

بإضافة حواف إلى المسار حتى لا نستطيع إضافة حواف أخرى إلى المسار. هذا يحدث عندما نصل إلى الرأس التي جميع الحواف التابعة لها قد أضيفت إلى المسار. على سبيل المثال، الرسم G في شكل ٦-٤-٨ نبدأ عند a ونختار على التوالي الحواف $\{a,f\},\{f,c\},\{c,b\},\{b,a\}$



شكل ٦-٤-٨

المسار الذي أنشأناه يجب أن ينتهي لأن الرسم به عدد منتهي من الحواف، لذلك نتفق على أننا نصل إلى الرأس التي عندها لا يمكن إضافة أي حافة جديدة للمسار. المسار بدأ عند a بحافة على الصورة $\{a,x\}$، وسوف نوضح أنه لابد أن ينتهي عند a بحافة على الصورة $\{y,a\}$. لبيان ذلك، لاحظ أن كل مرة المسار يمر برأس لها درجة زوجية، يستخدم حافة واحدة للوصول إلى هذه الرأس، ولأن الدرجة زوجية، يجب أن يتبقى حافة أخرى على الأقل يغادر منها المسار هذه الرأس. علاوة على ذلك كل مرة يدخل ويغادر المسار رأس من درجة زوجية يوجد عدد زوجي من الحواف تابعة لهذا الرأس لم تستخدم في هذا المسار. نتيجة لذلك كل مرة يدخل المسار إلى رأس غير a يجب مغادرتها. هذا يعني أن المسار يجب أن ينتهي فقط عند a. بعد ذلك، لاحظ أن المسار الذي أنشأناه قد يستخدم جميع الحواف في الرسم وقد يترك بعضها إذا رجعنا إلى a قبل أن نستخدم جميع الحواف. دورة أويلر تكون أنشئت إذا كان جميع الحواف قد استخدمت، وإلا نعتبر الرسم الجزئي H الذي نحصل عليه من G بحذف كل الحواف التي استخدمت بالفعل في المسار والرؤوس التي لا تتبع أي من الحواف الموجودة. عندما نحذف الدورة a,f,c,b,a من الرسم في شكل ٦-٤-٨ نحصل على الرسم الجزئي H.

لأن G مترابط H يكون له على الأقل رأس مشتركة مع الدورة التي تم حذفها. نفرض أن w مثل هذه الرأس. كل رأس في H من درجة زوجية. ابتداء من w، نكون مسار بسيط في H باختيار الحواف كلما أمكن ذلك، كما فعلنا في G. هذا المسار يجب أن ينتهي عند w. على سبيل المثال في شكل ٦-٤-٨ c,d,e,c مسار في H. بعد ذلك نكون دورة في G بربط الدورة في H بالدورة الأصلية في G (وهذا ممكن لأن w رأس في هذه الدورة). عندما نفعل ذلك في الرسم في شكل ٦-٤-٨ نحصل على الدورة a,f,c,d,e,c,b,a.

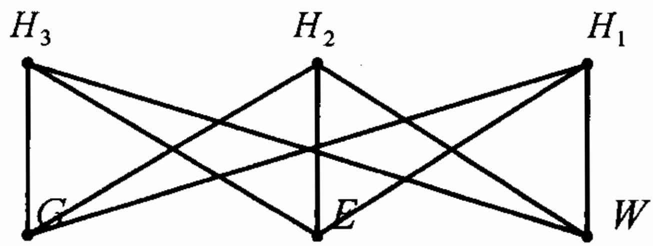
نستمر في هذه العملية حتى نستخدم جميع الحواف. هذه تنتج دورة أويلر. عملية الإنشاء هذه وضحت أنه في الرسم المترابط المتعدد إذا كانت جميع رؤوسه من درجات زوجية فإن الرسم يحتوي دورة أويلر.

من المناقشة السابقة يمكننا صياغة النظرية التالية:

نظرية ٦-٤-١١. الرسم المتعدد يكون له دورة أويلر إذا وفقط إذا كان كل رأس من رؤوسه له درجة عدد زوجي.

الرسومات المستوية Planar Graphs

نتعبر مسألة توصيل ثلاث خدمات منفصلة، الماء (W)، الكهرباء (E) و الغاز (G) لثلاثة منازل H_1 ، H_2 و H_3 كما هو مبين في شكل ٦-٤-٩.



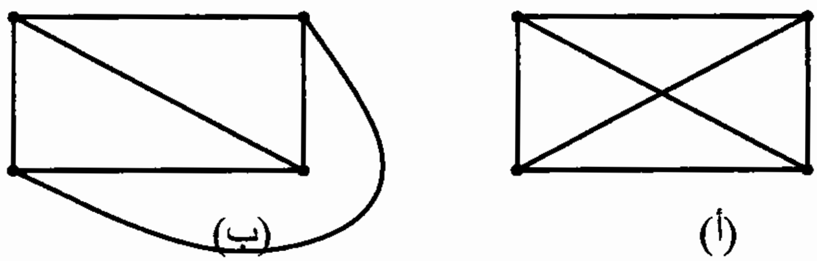
شكل ٦-٤-٩

هل من الممكن توصيل الخدمات لهذه المنازل بحيث لايكون أي تقاطع في الوصلات ؟ هذه المسألة يمكن نمذجتها باستخدام الرسم تام الانقسام $K_{3,3}$.

السؤال الأصلي يمكن تحويله إلى: هل يمكن رسم $K_{3,3}$ في المستوى بحيث لايتقاطع أي حافتان من حوافة ؟

تعريف ٦-٤-١٢. الرسم يسمى **رسم مستوي planar** إذا أمكن رسمه في المستوى بحيث لايتقاطع أي حافتان من حوافه.

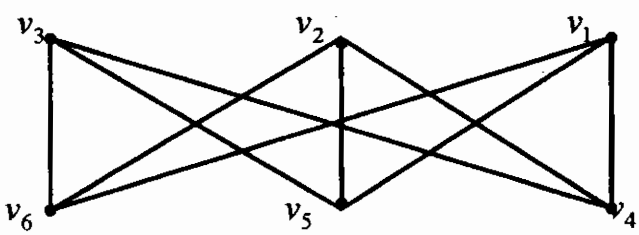
مثال ٦-٤-١٣. مع أن الرسم التام ذو الرؤوس الأربعة K_4 عادة يصور بتقاطع حافتين كما في شكل ٦-٤-١٠ (أ)، إلا أنه يمكن أيضا رسمه بدون تقاطع حوافه كما هو مبين في شكل ٦-٤-١٠ (ب). لذلك K_4 يكون رسم مستوي.



(ب) (أ)

شكل ٦-٤-١٠

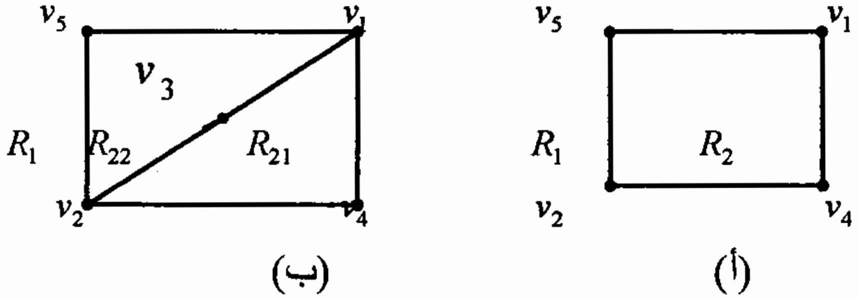
مثال ٦-٤-١٤. هل $K_{3,3}$ المبين في شكل ٦-٤-١١ يكون مستوي ؟



شكل ٦-٤-١١

الحل: نحاول رسم $K_{3,3}$ في المستوى بدون تقاطع حوافه. الآن نبين كيف. في أي تمثيل مستوي للرسم $K_{3,3}$ الرأسين v_1 و v_2 يجب أن يرتبطا إلى كل من الرأسين v_4 و v_5. هذه الحواف الأربع تكون منحنى مغلق يقسم المستوى إلى منطقتين R_1 و R_2 كما هو مبين في شكل ٦-٤-١٢ (أ). الرأس v_3 يكون إما في R_1 أو R_2. عندما يكون v_3 في R_2، داخل المنحنى المغلق، الحواف

بين v_3 و v_4 وبين v_3 و v_5 تقسم R_2 إلى منطقتين جزئيتين R_{22} و R_{21} كما هو مبين في شكل ٦-٤-١٢ (ب)



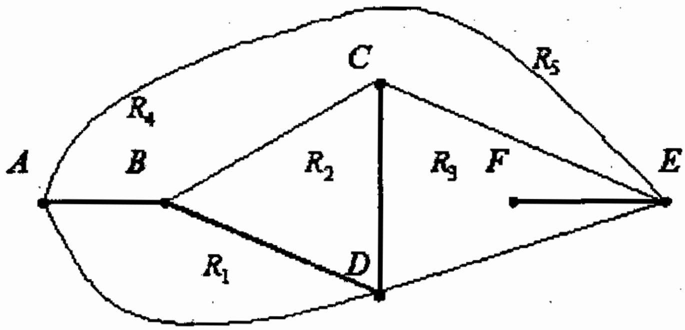
شكل ٦-٤-١٢

لاحظ الآن أنه لاتوجد طريقة لوضع الرأس الأخير v_6 بدون أن يحدث تقاطع. حيث، إذا وضعت v_6 في R_1، فإن الحافة بين v_6 و v_3 لايمكن رسمها بدون تقاطع. إذا وضعت v_6 في R_{21}، فإن الحافة بين v_6 و v_5 لايمكن رسمها بدون تقاطع. إذا وضعت v_6 في R_{22}، فإن الحافة بين v_6 و v_4 لايمكن رسمها بدون تقاطع.

مناقشة مماثلة يمكن استخدامها عندما تكون v_3 في R_1.

مثال ٦-٤-١٤ يحل مسألة الخدمات والمنازل.الاجابه هي لايمكن توصيل هذه الخدمات الثلاث إلى المنازل الثلاثة في المستوى بدون تقاطع.

التمثيل المستوي لرسم يقسم المستوى إلى عدة مناطق. على سبيل المثال، الرسم الذي له ستة رؤوس وتسع حواف المبين في شكل ٦-٤-١٣ يقسم المستوى إلى خمس مناطق.



شكل ٦-٤-١٣

لاحظ أن حدود أي منطقة في التمثيل المستوي لرسم تتكون من حواف.
درجة المنطقة R degree of a region، وتكتب $\deg(R)$، هي طول الدورة أو المسار البسيط المغلق الذي يحدد R.

نظرية ٦-٤-١٥. مجموع درجات المناطق في تمثيل مستوي لرسم تساوي ضعف عدد الحواف.

لاحظ أن كل حافة إما أن تكون حدود لمنطقتين أو تكون محتواه داخل منطقة وسوف تساهم مرتين في أي مسار بسيط عبر حدود المنطقة.

درجات المناطق في شكل ٦-٤-١٣ هي $\deg(R_1) = 3$، $\deg(R_2) = 3$، $\deg(R_3) = 5$، $\deg(R_4) = 4$ و $\deg(R_5) = 3$. مجموع الدرجات هو 18، وهو ضعف عدد الحواف، كما هو متوقع.

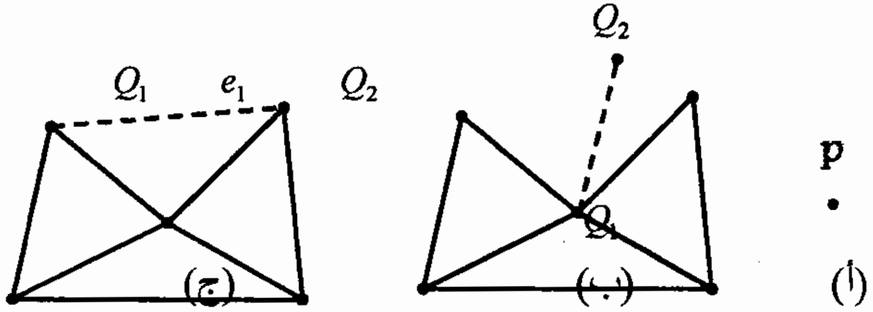
نظرية ٦-٤-١٦.صيغة أويلر Euler's Formula

صيغة أويلر تربط بين عدد الرؤوس v وعدد الحواف e وعدد المناطق r لأي رسم مترابط مستوي بسيط. صيغة أويلر هي

$$v - e + r = 2$$

لبرهان صيغة أويلر، نفرض M رسم مستوي بسيط. ونفرض أن M يتكون من رأس منفرد واحد p كما هو مبين في شكل ٦-٤-١٤ (أ). إذن $v = 1$، $e = 0$ و $r = 1$. لذلك، في هذه الحالة $v - e + r = 2$ وإلا، إذا كانت M تحتوي أكثر من رأس فإنه يمكن بناؤها من رأس منفرد بإحدى طريقتي البناء

(1) إضافة رأس جديد Q_2 وربطه بالرأس الموجودة Q_1 بأي حافة لاتقطع أي من الحواف الموجودة كما هو مبين في شكل ٦-٤-١٤ (ب).

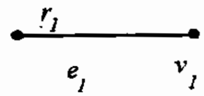


شكل ٦-٤-١٤

(2) ربط رأسين موجودين Q_1 و Q_2 بحافة لاتقطع أي من الحواف الموجودة كما هو مبين في شكل ٦-٤-١٤ (ج).

العملية الأولى لاتغير من قيمة $v-e+r$، لأن كلا من v و e زادت بمقدار 1، ولكن عدد المناطق r لم يتغير. العملية الثانية أيضا لاتغير قيمة $v-e+r$، لأن v لم تتغير، e زادت بمقدار 1 ويمكن بيان أن r أيضا زادت بمقدار 1. طبقا لذلك، M يجب أن يكون لها نفس القيمة لـ $v-e+r$ مثل الرسم البسيط المستوي المكون من رأس منفردة، أي $v-e+r=2$ وهذا يبرهن النظرية.

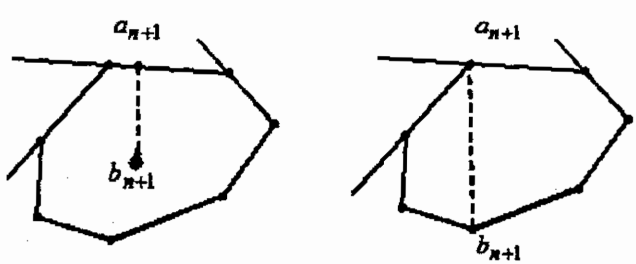
برهان آخر: يمكن برهان صيغة أويلر باستخدام الاستنتاج الرياضي. سوف نبرهن النظرية بإنشاء متتابعة من الرسوم الجزئية $G_1,G_2,...,G_n=G$ بتتابع إضافة حافة في كل مرحلة، هذا يتم بالعريف الاستنتاجي التالي. نختار حافة من G لنحصل عل G_1. نحصل على G_n من G_{n-1} بإضافة حافة تابعة لرأس موجودة بالفعل في G_{n-1} ونضيف الرأس الأخرى إذا لم تكن موجودة. نفرض r_n، e_n و v_n تمثل عدد المناطق، الحواف والرؤوس في التمثيل المستوي للرسم G_n. البرهان الآن يتم بالاستنتاج.



العلاقــة $r_1 = e_1 - v_1 + 2$ تكــون صــحيحة لـــ G_1 لأنــه يوجــد $e_1 = 1$، $v_1 = 2$ و $r_1 = 1$.

نفـرض أن $r_n = e_n - v_n + 2$، نفـرض $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ التـي أضـيفت إلـى G_n لتعطي G_{n+1}. يوجد احتمالان ، الحالة الأولى أن كلا من الرأسين a_{n+1} و b_{n+1} موجود فعلا في G_n. هذان الرأسان يجب أن يكونـا عل حد مشترك لمنطقة R. تبعا لذلك $v_{n+1} = v_n$، $e_{n+1} = e_n + 1$ و $r_{n+1} = r_n + 1$. لذلك كل طرف من الصيغة زاد بمقدار 1، ومن ثم الصيغة تظل صحيحة. بتعبير آخر $r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$.

الحالة الثانية، أحد الرأسين للحافة الجديدة غير موجود في G_n. نفرض اننا أضفنا b_{n+1}. إضافي هذه الحافة لاينتج عنه منطقة جديدة لأن b_{n+1} يجب أن تكون في منطقة حيث a_{n+1} على حدودها. تبعا لذلك $r_{n+1} = r_n$. علاوة على ذلـك $e_{n+1} = e_n + 1$ و $v_{n+1} = v_n + 1$. وفـي هـذه الحالـة أيـضا الـصيغة تظل صحيحة أي أن $r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$. وهذا يكمل البرهان.



نفرض G رسم متعدد مستوي مترابط له ثلاثة رؤوس أو أكثر، إذن G لن يكون K_1 أو K_2. نفرض M تمثيل مستوي لـ G. ليس من الصعب بيان أن: (1) أي منطقة في M يمكن أن تكون من درجة 1 إذا وفقط إذا كانت حـدودها عـروة، و (2) أي منطقة فـي M يمكـن أن تكـون مـن درجـة 2 إذا وفقط إذا كانت حدودها تتكون من حـافتين متعددتين. طبقا لذلك، إذا كـان G

رسم بسيط، فإن درجة أي منطقة في G يجب أن تكون ثلاثة أو أكبر. هذه الملاحظة مع صيغة أويلر تستخدم لبرهان النتيجة التالية للرسومات المستوية.

نظرية ٦-٤-١٧. نفرض G رسم مترابط مستوي به v رأس و e حافة حيث $v \geq 3$. إذن $e \leq 3v-6$.

لاحظ أن هذه النظرية ليست صحيحة لـ K_1 ، حيث $v=1$ و $e=0$ وليست صحيحة لـ K_2 ، حيث $v=2$ و $e=1$.

البرهان: نفرض r عدد المناطق في التمثيل المستوي لـ G. من صيغة اويلر

$$v-e+r=2$$

الآن مجموع درجات المناطق يساوي $2e$ وذلك من نظرية ٦-٤-١٥ ولكن كل منطقة لها درجة ثلاثة أو أكثر، لذلك $2e \geq 3r$ ومنها $r \leq \frac{2e}{3}$.

بالتعويض في صيغة أويلر نحصل على

$$2=v-e+r \leq v-e+\frac{2e}{3}$$

أو

$$2 \leq v-\frac{e}{3}$$

لذلك $6 \leq 3v-e$ وهذه هي النتيجة المطلوبة.

نظرية ٦-٤-١٨. الرسم التام K_n يكون مستوي إذا وفقط إذا كان $n \leq 4$.

البرهان: نستخدم في البرهان نظرية ٦-٤-١٧. إذا كانت $n>4$ ، $n=5$ مثلا، فإن عدد الرؤوس يساوي 5 وعدد الحواف يساوي 10 وتكون المتباينة $6 \leq 3v-e$ غير محققة لهذا الرسم لأن $e=10$ و $3v-e=5$.

سبق أن بينا أن $K_{3,3}$ ليس مستوي، لاحظ أن الرسم به ستة رؤوس وتسع حواف، هذا يعني أن المتباينة $e=9 \leq 12=3\cdot 6-6$ محققة.

نتيجة لذلك، حقيقة أن المتباينة $e \leq 3v - 6$ تكون محققة هذا لا يؤدي إلى أن الرسم يكون مستوي. ومع ذلك النتيجة التالية من نظرية ٦-٤-١٤ يمكن استخدامها لبيان أن $K_{3,3}$ ليس مستوي.

نتيجة ٦-٤-١٩. إذا كان G رسم بسيط مستوي له e حافة و v رأس حيث $v \geq 3$ وليس به دورات من الطول 3 فإن $e \leq 2v - 4$.

برهان هذه النتيجة مشابه لبرهان نظرية ٦-٤-١٧ ما عدا في هذه الحالة حقيقة أنه لايوجد دورة طولها 3 يؤدي إلى أن أي منطقة درجتها لن تقل عن 4.

مثال ٦-٤-٢٠. استخدم نتيجة ٦-٤-١٩ لبيان أن $K_{3,3}$ ليس مستوي.

الحل: حيث أن $K_{3,3}$ لا يحتوي دورات طولها 3 يمكن استخدام نتيجة ٦-٤-١٩، $K_{3,3}$ به ستة رؤوس وتسع حواف، $e = 9$ و $2v - 4 = 8$. من نتيجة ٦-٤-١٩ $K_{3,3}$ ليس مستوي.

نتيجة ٦-٤-٢١. كل رسم مستوي تكون له رأس من درجة 5 أو أقل.

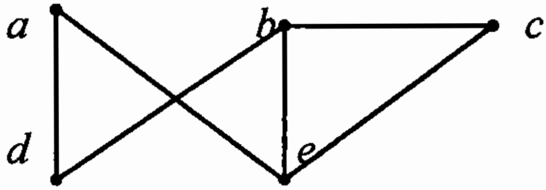
البرهان: نفرض أن G رسم مستوي وجميع رؤوسة من درجة أكبر من أوتساوي 6. إذن مجموع درجات هذا الرسم تكون أكبر من أوتساوي $6v$. ولكن مجموع درجات الرؤوس يساوي ضعف عدد الحواف، أي $2e$. لذلك $2e \geq 6v$ أو $e \geq 3v$ وهذا يناقض العلاقة $e \leq 3v - 6$.

تمارين ٦-٤

١- هل قائمة الرؤوس المعطاة تكون مسار في الرسم التالي ؟ أي من المسارات يكون بسيط ؟ وأيها يكون دورة ؟ ماهو طول كل مسار؟

(أ) a, e, a, d, b, c, a.   (ب) a, e, b, c, b .

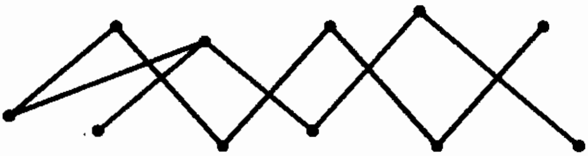
(ج) e, b, a, d, b, e .   (د) c, b, d, a, e, c.



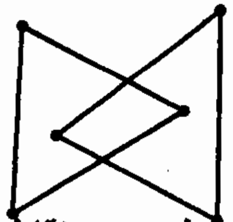
٢- حدد ماإذا كان الرسم المعطى مترابط

(أ)

(ب)

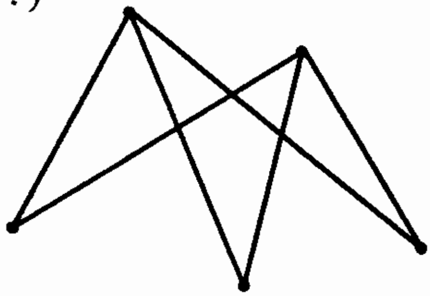


(ج)

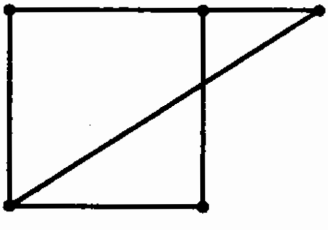


٣- ارسم الرسم المستوي المعطى بدون تقاطعات

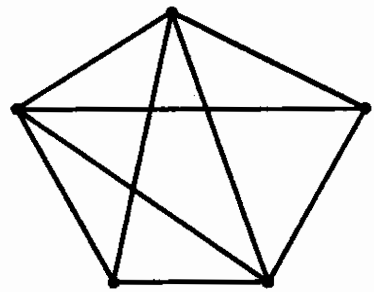
(أ)



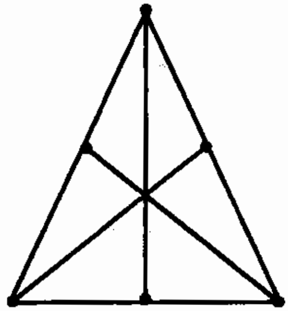
(ب)



(ج)

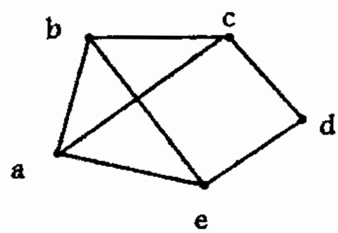


(د)

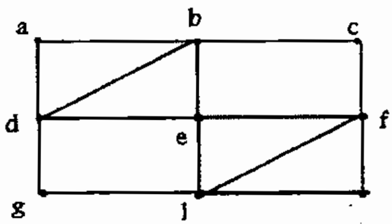


٤- حدد هل الرسم المعطى يحتوي دورة أويلر. كون هذه الدورة إذا كانت موجودة. إذا لم تكن موجودة دورة هل يوجد مسار أويلر، كون هذا المسار إذا وجد.

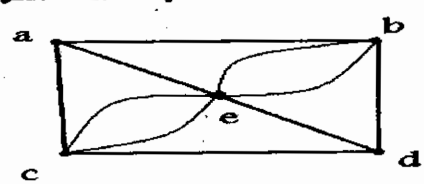
(أ)



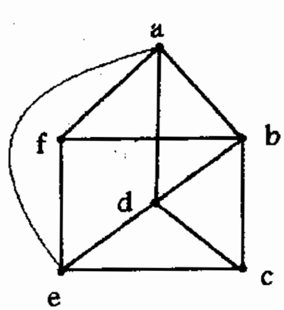
(ب)



(ج)



(د)

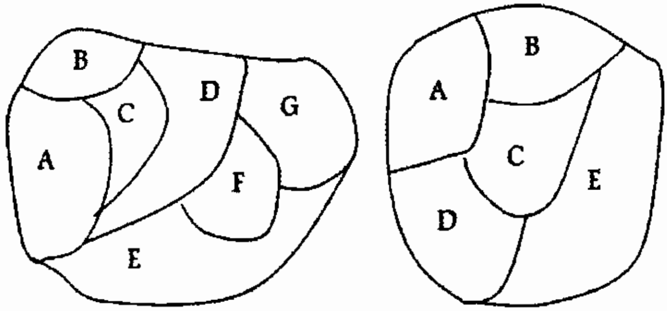


٦-٥ تلوين الرسومات Graph Coloring

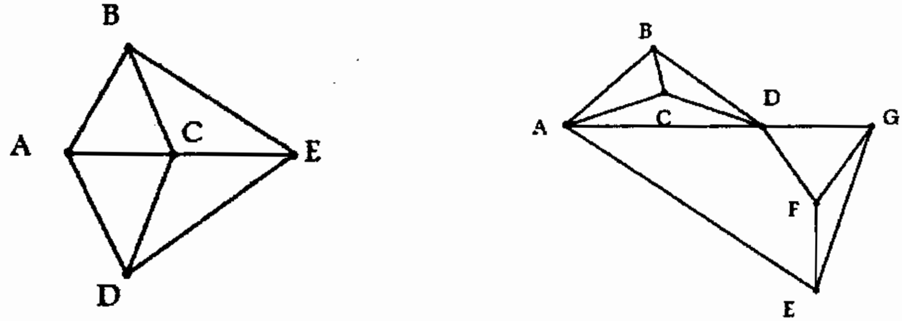
مسائل تتعلق بتلوين خرائط المناطق، مثل خرائط أجزاء من العالم، أنتجت العديد من النتائج في نظرية الرسومات. عندما تلون خريطة، فإن منطقتين تشتركان في حدود تم التعارف على تلوينهما بألوان مختلفة. إحدى الطرق للتأكيد على أن منطقتان متجاورتان لايكون لهما نفس اللون هو استخدام لون لكل منطقة. ومع ذلك، هذا غير فعال،لأننا قد نحتاج إلى عدد كبير من الألوان التي بالتأكيد سوف يكون بينها ألوان متشابهة، وللخرائط التي بها مناطق عديدة يكون من الصعب التمييز بين الألوان المتشابهة. بدلا عن ذلك عدد قليل من الالوان سوف يستخدم كلما كان ذلك ممكنا. الآن نعتبر مسألة تحديد أصغر عدد من الألوان يمكن استخدامه لتلوين خريطة بحيث أن المناطق المتجاورة لايكون لها نفس اللون.

الرسومات المناظرة

كل خريطة في المستوى يمكن تمثيلها برسم. لوضع هذا التناظر، كل منطقة في الخريطة تمثل برأس. توجد حافة تربط رأسين إذا كان المنطقتين اللتين يمثلهما هذان الرأسان يشتركان في الحدود. المنطقتان اللتان تتماسان فقط في نقطة واحدة لاتعتبران متجاورتان. الرسم الناتج يسمى **الرسم المناظر** dual graph للخريطة. بنفس الطريقة التي اعتبرنا بها رسومات مناظرة للخرائط، واضح أن أي خريطة في المستوى لها رسم مناظر مستوي. شكل ٦-٥-٢. يظهر الرسومات المناظرة للخرائط المبينة في شكل ٦-٥-١.



شكل ٦-٥-١



شكل ٦-٥-٢

مسألة تلوين المناطق في خريطة تكافئ مسألة تلوين رؤوس الرسم المناظر بحيث لايلون رأسان متجاوران في هذا الرسم بنفس اللون.

التلوين والعدد اللوني

تعريف ٦-٥-١. عملية **تلوين** coloring of رسم بسيط هو تعيين لون لكل رأس في الرسم بحيث أن أي رأسين متجاورين لايعين لهما نفس اللون. الرسم G يسمى **تلويني من درجة k** k-colorable إذا كان يمكن تعيين لون لكل رأس من رؤوس الرسم من بين k لون بحيث أن الرأس المجاور يأخذ لون مخالف. أقل عدد من الألوان اللازم لتلوين رسم يسمى **العدد اللوني (التلويني)** chromatic number لهذا الرسم.

مثال ٦-٥-٢. ماهو العدد التلويني للرسم K_n؟

الحل: تلوين K_n يمكن أن يتم باستخدام n لون مختلف حيث يتم تلوين كل رأس بلون مختلف. هل يوجد عدد أقل من الألوان يمكن به تلوين K_n؟ الإجابة بالنفي. حيث أنه لايمكن تلوين رأسين متجاورين بنفس اللون، ولأن كل رأسين في K_n يكونا متجاورين. لذلك العدد التلويني لـ K_n يساوي n.
لاحظ أن K_n لايكون مستوي عنما تكون $n \geq 5$.

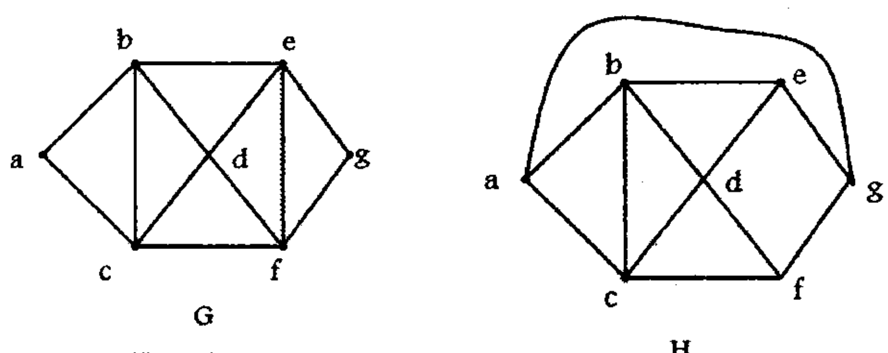
مثال ٦-٥-٣. ماهو العدد التلويني للرسم $K_{m,n}$؟

الحل: قد يبدو أن العدد التلويني يعتمد على m و n ، ولكن من نظرية ٦-٢-١١، لونان فقط يكونا مطلوبين ، لأن $K_{m,n}$ رسم منقسم.

نظرية ٦-٥-٤ الرسم الذي أكبر قيمة لدرجات رؤوسه k يكون تلويني من درجة $k+1$.

البرهان: باستخدام الاستنتاج الرياضي على عدد رؤوس الرسم والتي نفرض أنها n. نفرض أن $p(n)$ هو التقرير أن الرسم الذي به n رأس الحد الأعلى لدرجات رؤوسه k يكون تلويني من درجة $k+1$. عندما $n=1$، الرسم الذي به رأس واحدة يكون الحد الأعلى لدرجات رأسه 0 وتلويني من درجة 1. لذلك $p(1)$ تكون صحيحة. الآن نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونفرض أن G رسم به $n+1$ رأس والحد الأعلى لدرجات رؤوسه هو k. نحذف رأس v من الرسم لنحصل على رسم G' به n رأس الحد الأعلى لدرجات رؤوسه هو k. إذن G' يكون تلويني من درجة $k+1$ وذلك من الفرض. بإعادة الرأس v مرة أخرى ونعين لها لون يختلف عن ألوان كل الرؤوس المجاورة لها، وحيث أن درجة v لاتزيد عن k فإن الرسم G يكون تلويني من درجة $k+1$.

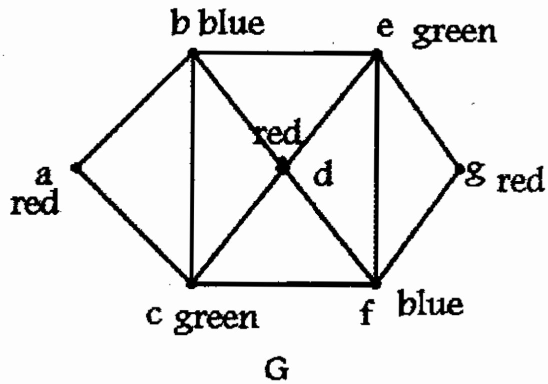
مثال ٦-٥-٥. ماهو العدد اللوني للرسمان G و H المبينان في شكل ٦-٥-٣؟



شكل ٦-٥-٣

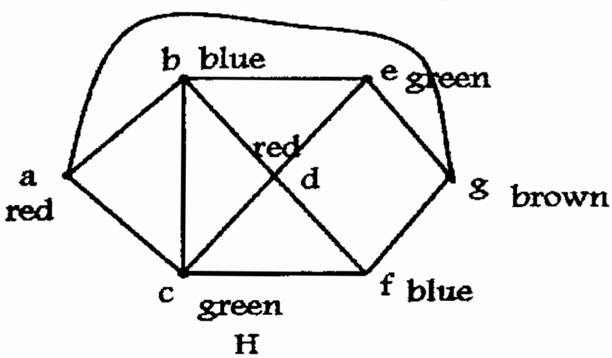
الحل:العدد التلويني للرسم G يكون على الأقل 3، حيث أن الرؤوس a، b و c يجب أن يعين لها ألوان مختلفة. لبيان ما إذا كانت G يمكن أن تلون بثلاثة ألوان، نعين اللون الأحمر لـ a ، الأزرق لـ b و الأخضر لـ c. إذن d يجب

أن تلون بالأحمر لأنها مجاورة لكل من b و c. علاوة على ذلك، e يجب أن تلون بالأخضر و f يجب أن تلون بالأزرق. أخيرا g يجب أن تلون بالأحمر. شكل ٦-٥-٥ يظهر مثل هذا التلوين.



شكل ٦-٥-٥

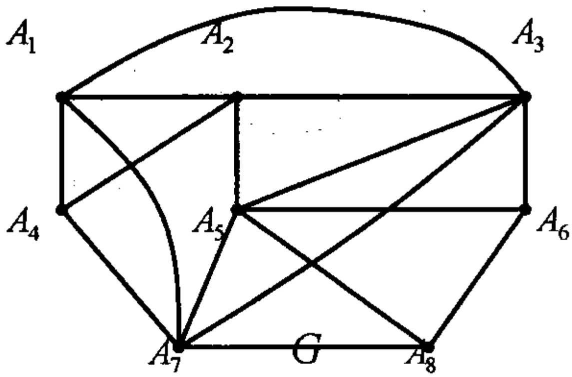
الرسم H ينتج من الرسم G بإضافة حافة تربط الرأسين a و g. أي محاولة لتلوين H باستخدام ثلاثة ألوان يجب أن تتبع نفس التفكير كما استخدم في تلوين G، ماعدا المرحلة الأخيرة، عندما تكون كل الرؤوس عدا g تم تلوينها. حيث أن g تجاور(في H) رؤوس ملونة باللون الأحمر، الأزرق والأخضر، فإننا نحتاج إلى لون رابع، ليكن البني. لذلك H لها عدد تلويني يساوي 4. شكل ٦-٥-٦ يظهر مثل هذا التلوين.



شكل ٦-٥-٦

الآن نعطي خوارزمية لتلوين رسم G، تسمى خوارزمية WP . أولا نرتب رؤوس G ترتيبا تناقصيا حسب درجة الرأس. بعد ذلك نستخدم اللون الأول لتلوين الرأس الأول ولتلوين، بشكل تتابعي، كل رأس لايجاور الرأس الملون سلفا بنفس اللون. نكرر هذه العملية باستخدام اللون الثاني، وهكذا حتى يتم تلوين كل الرؤوس.

نستخدم هذه الخوارزمية لتلوين الرسم G المعطى في شكل ٦-٥-٧



شكل ٦-٥-٧

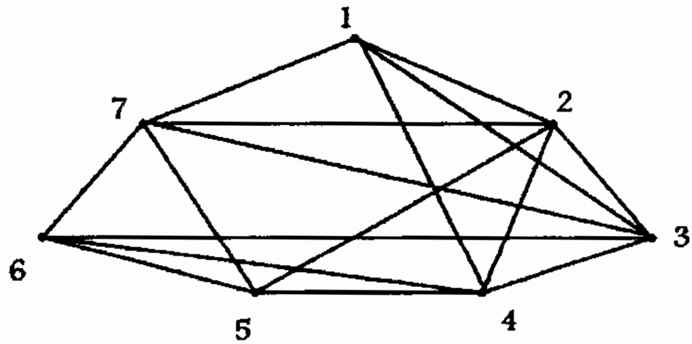
بترتيب الرؤوس حسب الدرجة تناقصيا نحصل على المتتابعة(من اليسار إلى اليمين) $A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8$. اللون الأول يستخدم لتلوين الرأسين A_5 و A_1. اللون الثاني يستخدم لتلوين الرؤوس A_3، A_4 و A_8. اللون الثالث يستخدم لتلوين الرؤوس A_7، A_2 و A_6. لذلك G يكون قابل للتلوين بثلاثة ألوان. لاحظ أن G غير قابل للتلوين بلونين فقط، حيث أن A_1، A_2 و A_3 يجب أن تلون بألوان مختلفة. طبقا لذلك العدد التلويني لـ G يساوي 3.

تلوين الرسومات له العديد من التطبيقات التي تشتمل على جدولة وتعيينات. المثال التالي واحد من هذه التطبيقات.

مثال ٦-٥-٦. كيف يمكن جدولة الامتحان النهائي في الجامعة بحيث لايكون هناك طالب له امتحانان في نفس الوقت ؟

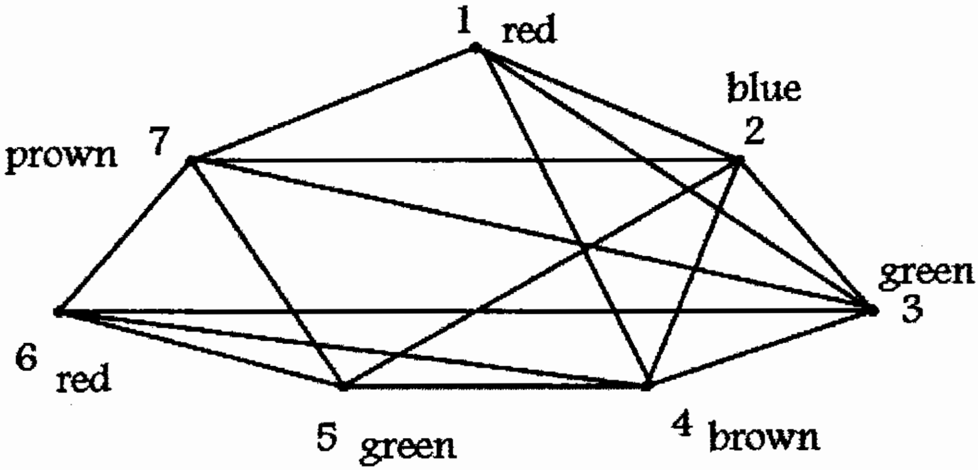
الحل: مسألة الجدولة يمكن حلها باستخدام نموذج الرسم، حيث الرؤوس تمثل المقررات الدراسية وتوجد حافة بين رأسين إذا كان هناك طالب يشترك في المقررين الممثلين بهذين الرأسين. كل زمن مخصص لامتحان نهائي يمثل بلون مختلف. جدولة الامتحان تناظر تلوين الرسم المصاحب.

على سبيل المثال، نفرض أنه يوجد سبعة امتحانات نهائية مطلوب جدولتها. نفرض أن المقررات الدراسية تم ترقيمها من 1 إلى 7. نفرض أن الثنائيات التالية من المقررات لها طلاب مشتركون فيها $(1, 2), (1, 3),$ $(1,4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7)$ و $(6, 7)$. شكل ٥-٥-٨ يوضح الرسم المصاحب لهذه المجموعة. الجدولة تتكون من تلوين هذا الرسم.



شكل ٦-٥-٨

حيث أن العدد التلويني لهذا الرسم هو 4، يكون مطلوب أربعة أوقات للامتحان . تلوين الرسم باستخدام أربعة ألوان والجدول المصاحب مبينان في شكل ٦-٥-٩.



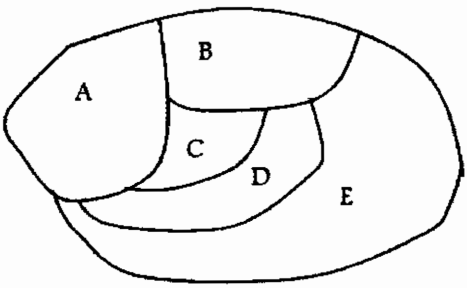
زمن الامتحان	المقررات
I	1,6
II	2
III	3,5
IV	4,7

شكل ٦-٥-٩

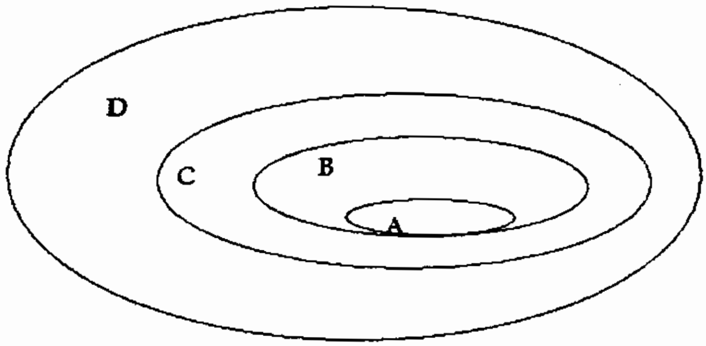
تمارين ٦-٥

١- كون الرسم المناظر للخريطة المبينة بالشكل. أوجد عدد الألوان اللازمة لتلوين الخريطة بحيث لايتم تلوين منطقتين متجاورتين بنفس اللون

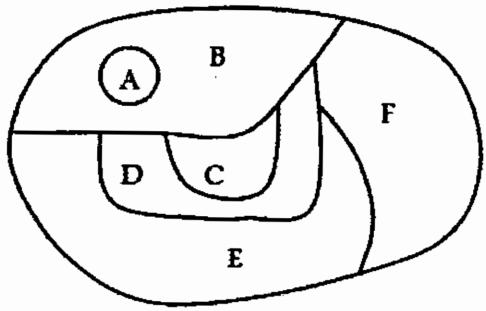
(أ)



(ب)

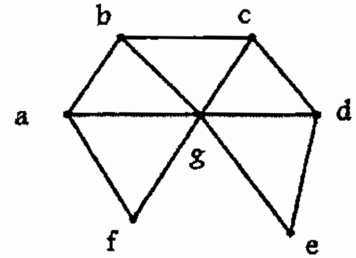


(ج)

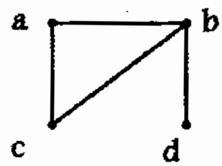


٢ـ أوجد العدد التلويني للرسم المعطي

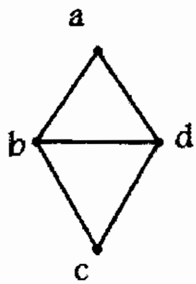
(أ)



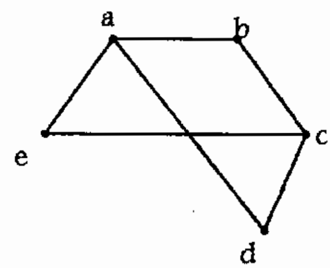
(ب)



(ج)



(د)



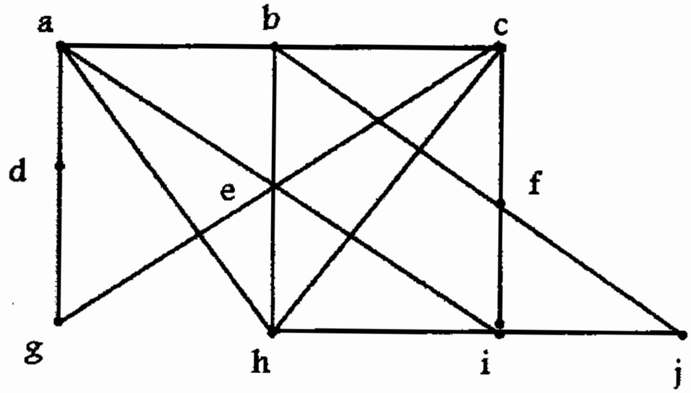
٣- للرسومات المعطاة في تمرين 2 قرر ما إذا كان من الممكن تقليل العدد التلويني بإزالة رأس واحدة وكل الحواف التابعة له.

٤- كون جدول الامتحان النهائي للمقررات الدراسية Math 115 ، Math 116 ،Math 185 ،Math 195 ،CS 101 ، CS 102، CS 273 و CS 473 باستخدام أقل عدد من أوقات الامتحان المختلفة، إذا علم أنه لايوجد طلاب مشتركون في كل من Math 115 و CS 273 أو كل من Math 116 و CS 473 أو كل من Math 195 و CS 101 أو كل من Math 195 و CS 102 أو كل من Math 115 و Math 116، أو Math 115 و Math 185 أو كل من Math 185 و Math 195 ولكن يوجد طلاب مشتركون في كل الثنائيات الأخرى من المقررات.

٥- بين أن الرسم البسيط الذي عدده التلويني 2 يكون منقسم.

٦- بين أن العدد التلويني للرسم المترابط المنقسم يساوي 2.

٧- استخدم خوارزمية WP لانشاء تلوين للرسم



٨- ماهو أقل عدد من الألوان يلزم لتلوين مسار طوله n إذا كان $n > 1$ ؟

٩- ماهو العدد التلويني للعجلة W_5 ؟ ماهو العدد التلوني للعجلة W_n إذا كانت n عدد فردي ، عدد زوجي.

١٠- ماهو العدد التلويني للرسم K_n؟ ما هو العدد التلويني للدورة C_n لقيم $n = 3,4,5,6$؟