الباب السابع
التحويلات الخطية
Linear Transformations

تعتبر الدوال من الأشياء الهامة في دراسة التفاضل والتكامل، ولكن يبدو أنها فقدت في هذا المقرر حتى الآن. في دراستك للرياضيات الأكثر تقدما يكاد يكون من المستحيل الهروب من دراسة الدوال، إنها أساسية مثل المجموعات.

٧-١ التحويلات الخطية Linear Transformations

مبكرا، في الباب الأول، استهللنا تعريف الفضاء الاتجاهي بالتعليق بأن هذا التعريف هو واحد من أهم تعريفين في المقرر كله. هنا نأتي للثاني. أي ملخص سريع للجبر الخطي سوف يصف الموضوع على أنه تفاعلات التحويلات الخطية والفضاءات الاتجاهية.

تعريف ٧-١-١. التحويل الخطي linear transformation، هو دالة $T : U \to V$ تأخذ عناصر الفضاء الاتجاهي U (يسمى النطاق domain) إلى الفضاء الاتجاهي V (يسمى النطاق المصاحب codomain) بحيث يحقق الشرطين:

١- $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ لكل $u_1, u_2 \in U$.

٢- $T(\alpha U) = \alpha t(u)$ لكل $u \in U$ و $\alpha \in \mathbb{C}$.

الشرطان في تعريف التحويل الخطي تشعرنا بالخطية، أيا كان معناها. وبالعكس يمكن اتخاذ الشرطين لما تعنيه الخطية. حيث أن كل خاصية لفضاء اتجاهي يمكن اشتقاقها من جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي، كذلك خواص التحويلات الخطية تشتق من هاتين الخاصيتين المعرفتين. في حين أن هذين الشرطين يذكرانا بكيفية اختبار الفضاءات الجزئية، إلا أنهما تختلفان قليلا، لذلك ينبغي عدم الخلط بين الأمرين.

هنا كلمات عن التدوين. T هي اسم التحويل الخطي، وسوف يستخدم عندما نريد مناقشة الدالة ككل. $T(u)$ هي كيف نتحدث عن ناتج الدالة، هي متجه في V. عندما نكتب $T(x+y) = T(x) + T(y)$ ، إشارة الجمع في الطرف الأيسر هي عملية جمع المتجهات في الفضاء

الاتجاهي U، و x و y عناصر في U. إشارة الجمع في الطرف الأيمن هي عملية جمع المتجهات في V، حيث أن $T(x)$ و $T(y)$ عناصر في الفضاء الاتجاهي V. هاتين الحالتين من جمع المتجهات قد يختلفا على نطاق واسع.

مثال ٧-١-٢. نعرف الدالة $T:\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x_1+x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix}$$

ونختبر الشرطين

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2(x_1+y_1)+(x_3+y_3) \\ -4(x_2+y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (2x_1+x_3)+(2y_1+y_3) \\ -4x_2+(-4)y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1+x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2y_1+y_3 \\ -4y_2 \end{bmatrix} \\
&= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= T(x)+T(y)
\end{aligned}$$

كذلك

$$T(\alpha x)=T\left(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$$
$$=T\left(\begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\alpha x_3\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}2(\alpha x_1)+(\alpha x_3)\\-4(\alpha x_2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha(2x_1+x_3)\\\alpha(-4x_2)\end{bmatrix}$$
$$=\alpha\begin{bmatrix}2x_1+x_3\\-4x_2\end{bmatrix}$$
$$=\alpha T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$$
$$=\alpha T(x)$$

من التعريف، T تكون تحويل خطي.

مثال ٧-١-٣. نعرف $S:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ كما يلي

$$S\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4x_1+2x_2\\0\\x_1+3x_3-2\end{bmatrix}$$

هذه الدالة قد يبدو أنها خطية، ولكن نعتبر

$$3S\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=3\begin{bmatrix}8\\0\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\0\\24\end{bmatrix}$$

بينما

$$S\left(3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)=S\left(\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}24\\0\\28\end{bmatrix}$$

الشرط الثاني يفشل في حالة الاختيار $\alpha = 3$ و $x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$، ومن التعريف، S ليست تحويل خطي.

مثال ٧-١-٤. نعرف التحويل الخطي $T: P_3 \to M_{22}$ كما يلي

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix}a+b & a-2c\\ d & b-d\end{bmatrix}$$

نتحقق من الشرطين في تعريف التحويل الخطي

$$\begin{aligned}T(x+y) &= T((a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3)+(a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3))\\ &= T((a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2+(d_1+d_2)x^3)\\ &= \begin{bmatrix}(a_1+a_2)+(b_1+b_2) & (a_1+a_2)-2(c_1+c_2)\\ (d_1+d_2) & (b_1+b_2)-(d_1+d_2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(a_1+b_1)+(a_2+b_2) & (a_1-2c_1)+(a_2-2c_2)\\ d_1+d_2 & (b_1-d_1)+(b_2-d_2)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_1-2c_1\\ d_1 & b_1-d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2+b_2 & a_2-2c_2\\ d_2 & b_2-d_2\end{bmatrix}\\ &= T(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3)+T(a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3)\\ &= T(x)+T(y)\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}T(\alpha x) &= T(\alpha(a+bx+cx^2+dx^3))\\ &= T((\alpha a)+(\alpha b)x+(\alpha c)x^2+(\alpha d)x^3)\\ &= \begin{bmatrix}(\alpha a)+(\alpha b) & (\alpha a)-2(\alpha c)\\ \alpha d & (\alpha b)-(\alpha d)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha(a+b) & \alpha(a-2c) \\ \alpha d & \alpha(b-d) \end{bmatrix}$$
$$=\alpha\begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}$$
$$=\alpha T(a+bx+cx^2+dx^3)$$
$$=\alpha T(x)$$

ومن ثم من التعريف T يكون تحويل خطي.

مثال ٧-١-٥. نعرف الدالة $S:P_4 \to P_5$ كما يلي

$$S(p(x))=(x-2)p(x)$$

إذن

$$S(p(x)+q(x))=(x-2)(p(x)+q(x))$$
$$=(x-2)p(x)+(x-2)q(x)$$
$$=S(p(x))+S(q(x))$$
$$S(\alpha p(x))=(x-2)(\alpha p(x))=(x-2)\alpha p(x)$$
$$=\alpha(x-2)p(x)=\alpha S(p(x))$$

إذن من التعريف S تكون تحويل خطي.

التحويلات الخطية لها العديد من الخواص المدهشة والتي سوف نتعرض لها خلال الفصول القليلة القادمة. ومع ذلك كمقدمة نعطي النظرية التالية ونبرهنها لكي تستخدم مباشرة بعد ذلك.

نظرية ٧-١-٦. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي. إذن $T(0)=0$.

البرهان: المتجهين الصفريين في منطوق النظرية مختلفان. الأول من U بينما الثاني من V. في هذا البرهان سوف نعطي المتجه الصفري دليل لتسليط الضوء على الاختلاف. أيضا نميز بين المتجه الصفري والصفر القياسي.

$$T(0_U)=T(00_U)$$
$$=0T(0_U)$$
$$=0_V$$

المصفوفات والتحويلات الخطية

إذا أعطينا مصفوفة فإنه يمكننا بسرعة بناء تحويل خطي. نبدأ بمثال ثم نعطي نظرية.

مثال ٧-١-٧. نفرض

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8 & 1\\ 2 & 0 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 3 & -7\end{bmatrix}$$

نعرف الدالة $P:\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ كما يلي

$$P(x)=Ax$$

لذلك نحن بصدد استخدام صديقنا القديم،تعريف ضرب مصفوفة في متجه، كطريقة لتحويل متجه من أربعة عناصر إلى متجه من ثلاثة عناصر. تطبيق هذا التعريف يسمح لنا بكتابة الصيغة المعرفة لـ P في صورة مختلفة قليلا

$$P(x)=Ax=\begin{bmatrix}3 & -1 & 8 & 1\\ 2 & 0 & 5 & -2\\ 1 & 1 & 3 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$=x_1\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}8\\ 5\\ 3\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -7\end{bmatrix}$$

لذلك عرفنا تأثير الدالة P كتأثير مركبات المتجه ككميات قياسية لتكون ناتج P على صورة تركيبة خطية من الأعمدة الأربعة للمصفوفة A، والتي هي عناصر في $\mathbb{C}^3$. يمكن إعادة ترتيب هذا التعبير باستخدام تعريف العمليات في $\mathbb{C}^3$

$$P(x)=Ax$$

$$=x_1\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}8\\ 5\\ 3\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -7\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8x_3 \\ 5x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_4 \\ -7x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 \end{bmatrix}$$

يمكنك تعريف هذا التعبير الأخير مثل الصورة التي في بعض الأمثلة السابقة (مثال ٧-١-٣). ولكن التعبير الذي يقول بأن ناتج التحويل الخطي هو تركيبة خطية من أعمدة A على الأرجح يكون طريقة أكثر فائدة في التفكير في الأمثلة من هذا النوع.

الآن نتحقق من أن P بالفعل تحويل خطي. هذا يكون بسيط من خواص المصفوفات

$$\begin{aligned} P(x+y) &= A(x+y) \\ &= Ax + Ay \\ &= P(x) + P(y) \end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned} P(\alpha x) &= A(\alpha x) \\ &= \alpha(Ax) \\ &= \alpha P(x) \end{aligned}$$

لذلك، من التعريف، P يكون تحويل خطي.

ومن ثم ضرب متجه في مصفوفة يحول المتجه المدخل إلى ناتج متجه، محتمل أن يختلف في الحجم، بإجراء تركيبة خطية. هذا التحويل يحدث بأسلوب خطي. هذه النظرة الدالية لضرب مصفوفة في متجه هي الأكثر أهمية في كيفية التفكير حول الجبر الخطي. هنا نظرية، برهانها قريب جدا من التحقق في المثال الأخير.

نظرية ٧-١-٨. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. نعرف $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ بالصورة $T(x) = Ax$. إذن T يكون تحويل خطي.

البرهان:

$$P(x+y) = A(x+y)$$

$$\begin{aligned} &= Ax + Ay \\ &= P(x) + P(y) \end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned} P(\alpha x) &= A(\alpha x) \\ &= \alpha(Ax) \\ &= \alpha P(x) \end{aligned}$$

لذلك، من التعريف، P يكون تحويل خطي.

لذلك نظرية ٧-١-٨ تعطينا طريقة سريعة لإنشاء تحويلات خطية. نختار مصفوفة A من الحجم $m \times n$، نعرف $T(x) = A(x)$ ونظرية ٧-١-٨ تخبرنا أن T يكون تحويل خطي من $\mathbb{C}^n$ إلى $\mathbb{C}^m$، بدون أي اختبارات أخرى.

يمكننا عكس ترتيب نظرية ٧-١-٨. إذا أعطينا تحويل خطي يمكن إيجاد المصفوفة.

مثال ٧-١-٩. نعرف الدالة $R : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ كما يلي

$$R\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}$$

يمكن التحقق من أن R تكون تحويل خطي بتطبيق التعريف ولكن بدلا عن ذلك نقوم بدلك التعبير لتحديد نواتج نموذجية للتعرف على الشكل المعروف لفصل التحويلات الخطية.

$$\begin{aligned} R\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 - 4x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ 5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ x_3 \\ -3x_3 \\ -4x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= x_1\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\5\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}4\\1\\-3\\-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&1&1\\-1&5&-3\\0&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

لذلك إذا عرفنا المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix}2&-3&4\\1&1&1\\-1&5&-3\\0&1&-4\end{bmatrix}$$

إذن $R(x)=B(x)$. من نظرية ٧-١-٨ نستطيع بسهولة تقرير أن R تكون تحويل خطي حيث أنها تأخذ الشكل الموصوف في فرض النظرية.

نظرية ٧-١-١٠. نفرض أن $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ تحويل خطي. إذن توجد مصفوفة A من الحجم $m\times n$ بحيث $T(x)=Ax$.

البرهان: خلاصة النظرية تقول أن مصفوفة معينة تكون موجودة. ما هو أحسن طريقة لإثبات وجود شيء ما بدلا عن بناءه بالفعل؟ لذلك البرهان سوف يكون إنشائيا والخطوات التي سوف نستخدمها في البرهان يمكن استخدامها في أمثلة معينة.

نفرض أن $e_1,e_2,e_3,\dots,e_n$ هي أعمدة مصفوفة الوحدة من الحجم n، I_n. نوجد تحويل خطي T حيث كل واحد من هذه المتجهات يكون مدخل، ونسجل النتيجة. بتعبير آخر، نعرف n متجه في $\mathbb{C}^m$، A_i، $1\le i\le n$، كما يلي

$$A_i=T(e_i)$$

ثم نجمع هذه المتجهات كأعمدة مصفوفة

$$A=[A_1\,|\,A_2\,|\,A_3\,|\dots|\,A_n]$$

هل A تحقق الخواص المطلوبة؟ أولا، واضح أن A من الحجم $m \times n$. إذن

$$\begin{aligned}
T(x) &= T(I_n x) \\
&= T([e_1 | e_2 | e_3 | \ldots | e_n]x) \\
&= T([x]_1 \mathrm{e}_1 + [x]_2 \mathrm{e}_2 + [x]_3 \mathrm{e}_3 + \ldots + [x]_n \mathrm{e}_n) \\
&= T([x]_1 \mathrm{e}_1) + T([x]_2 \mathrm{e}_2) + T([x]_3 \mathrm{e}_3) + \ldots + T([x]_n \mathrm{e}_n) \\
&= [x]_1 T(\mathrm{e}_1) + [x]_2 T(\mathrm{e}_2) + [x]_3 T(\mathrm{e}_3) + \ldots + [x]_n T(\mathrm{e}_n) \\
&= [x]_1 A_1 + [x]_2 A_2 + [x]_3 A_3 + \ldots + [x]_n A_n \\
&= Ax
\end{aligned}$$

كما هو مطلوب.

لذلك إذا قصرنا دراستنا للتحويلات الخطية إلى تلك التي كلا من نطاقها ونطاقها المصاحب مكونة من متجهات أعمدة، كل مصفوفة تؤدي إلى تحويل خطي من هذا النوع (نظرية ٧-١-٨)، بينما كل مثل هذا التحويل الخطي يؤدي إلى مصفوفة(نظرية ٧-١-١٠). ومن ثم المصفوفات والتحويلات الخطية بصفة أساسية هما نفس الشيء. المصفوفة A في نظرية ٧-١-١٠ تسمى **التمثيل المصفوفي** لـ T matrix representation.

ها نحن قد عرفنا تحويلات خطية لفضاءات اتجاهية أكثر تعميما من مجرد $\mathbb{C}^m$. هل يمكننا توسع هذا التناظر بين التحويلات الخطية والمصفوفات إلى فضاءات اتجاهية أكثر تعميما؟ نعم وهذا هو الموضوع الرئيسي في الباب الثامن. دعنا الآن نوضح نظرية ٧-١-١٠ بمثال.

مثال ٧-١-١١. نفرض أن $S: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ معرف كما يلي

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ 4x_2 \end{bmatrix}$$

إذن

$$C_1 = S(e_1) = S\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\1\\9\\0\end{bmatrix}$$

$$C_2 = S(e_2) = S\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\4\end{bmatrix}$$

$$C_3 = S(e_3) = S\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}5\\1\\5\\0\end{bmatrix}$$

نعرف

$$C = [C_1 | C_2 | C_3] = \begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\1 & 1 & 1\\9 & -2 & 5\\0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

نظرية ٧-١-١٠ تضمن أن $S(x) = C\,x$.

كتمرين توضيحي، نفرض $z = \begin{bmatrix}2\\-3\\3\end{bmatrix}$ ونحسب $S(z)$ بطريقتين مختلفتين. أولا نعود إلى تعريف S ونحسب $S(z)$ مباشرة. ومن ثم نكون ضرب مصفوفة في متجه Cz. في كلا الحالتين سوف تحصل على المتجه $S(z) = \begin{bmatrix}27\\2\\39\\-12\end{bmatrix}$.

التحويلات الخطية والتراكيب الخطية

التفاعل بين التحويلات الخطية والتراكيب الخطية يقع في القلب في العديد من النظريات الهامة في الجبر الخطي. النظرية التالية توضح

جوهر هذا. البرهان ليس عميقا، النتيجة بالكاد مدهشة ولكن سوف يتم الرجوع إليها كثيرا. لقد مرت علينا بالفعل مناسبة لتوظيفها، في برهان نظرية ٧-١-١٠ . هذه النظرية تقول أنه يمكن إسقاط التحويلات الخطية إلى تراكيب خطية .

نظرية ٧-١-١٢. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي و $u_1,u_2,u_3,\dots,u_t$ متجهات من U و $a_1,a_2,a_3,\dots,a_t$ كميات قياسية من $\mathbb{C}$. إذن

$$\begin{aligned}T(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\dots+a_tu_t)\\ =a_1T(u_1)+a_2T(u_2)+a_3T(u_3)+\dots+a_tT(u_t)\end{aligned}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}T(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\dots+a_tu_t)\\ =T(a_1u_1)+T(a_2u_2)+T(a_3u_3)+\dots+T(a_tu_t)\\ =a_1T(u_1)+a_2T(u_2)+a_3T(u_3)+\dots+a_tT(u_t)\end{aligned}$$

بعض المقررات، خاصة المتقدمة منها، تأخذ الخلاصة في نظرية ٧-١-١٢ كتعريف للتحويل الخطي. هذا يكون لدية الرغبة في اعتباره شرط واحد بدلا من شرطين.

النظرية التالية تقول أنه يكفي معرفة كيف يتصرف التحويل الخطي مع المدخلات لأي أساس للنطاق، وكل المخرجات الأخرى توصف بتراكيب خطية من هذه القيم القليلة.

نظرية ٧-١-١٣. نفرض أن U فضاء اتجاهي بأساس $B=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ والفضاء الاتجاهي V يحتوي المتجهات $v_1,v_2,v_3,\dots,v_n$ (والتي قد لا تكون مختلفة). إذن يوجد تحويل خطي وحيد، T ، بحيث $T(u_i)=v_i$ ، $1\le i\le n$.

البرهان: لإثبات وجود T، نكون دالة ونبرهن على أنها تحويل خطي. نفرض أن $w\in U$ عنصر اختياري في النطاق. من نظرية ٤-٣-١٠ توجد كميات قياسية وحيدة $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ بحيث

$$w=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\dots+a_nu_n$$

ومن ثم نعرف الدالة T كما يلي

$$T(w) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n$$

من الواضح أن T تسلك كما هو مطلوب للمدخلات n من B. حيث أن الكميات القياسية المقدمة بنظرية ٤-٣-١٠ تكون وحيدة، لا يوجد أي غموض في هذا التعريف، و T مؤهلة كدالة بنطاق U ونطاق مصاحب V (أي أن T معرفة جيدا). ولكن هل T تكون تحويل خطي كما هو مطلوب؟

نفرض $x \in U$ عنصر آخر من النطاق ونفرض أن الكميات القياسية التي نحصل عليها من نظرية ٤-٣-١٠ (بالنسبة إلى B) هي $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. إذن

$$\begin{aligned}
T(w+x) &= T(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n + b_1u_1 + \ldots + b_nu_n) \\
&= T((a_1+b_1)u_1 + \ldots + (a_n+b_n)u_n) \\
&= (a_1+b_1)v_1 + \ldots + (a_n+b_n)v_n \\
&= a_1v_1 + \ldots + a_nv_n + b_1v_1 + \ldots + b_nv_n \\
&= T(w) + T(x)
\end{aligned}$$

نفرض $\alpha \in \mathbb{C}$ أي قياسي. إذن

$$\begin{aligned}
T(\alpha w) &= T(\alpha(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots + a_nu_n)) \\
&= T(\alpha a_1u_1 + \alpha a_2u_2 + \alpha a_3u_3 + \ldots + \alpha a_nu_n) \\
&= \alpha a_1v_1 + \alpha a_2v_2 + \alpha a_3v_3 + \ldots + \alpha a_nv_n \\
&= \alpha(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n) \\
&= \alpha T(w)
\end{aligned}$$

ومن ثم، من تعريف ٧-١-١، T يكون تحويل خطي.

هل T يكون وحيد؟ نفرض أنه يوجد تحويل خطي آخر $S: U \to V$ بحيث أن $S(u_i) = v_i$، $1 \le i \le n$. أيضا نفرض أن $w \in U$ تمثل عنصر اختياري في U ونفرض أن $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ هي الكميات القياسية الناتجة بنظرية ٤-٣-١٠ (بالنسبة إلى B). إذن

$$\begin{aligned}
T(w) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots + a_nu_n) \\
&= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + a_3T(u_3) + \ldots + a_nT(u_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_nv_n \\
&= a_1S(u_1) + a_2S(u_2) + a_3S(u_3) + \ldots + a_nS(u_n) \\
&= S(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots + a_nu_n) \\
&= S(w)
\end{aligned}$$

أي أن نواتج T و S تكون متساوية لكل المدخلات، وهو ما يعني أنهما دالتان متساويتان، $S = T$. ومن ثم T يكون وحيد.

لاحظ أن منطوق نظرية ٧-١-١٣ ينص على وجود تحويل خطي له خواص معينة، بينما البرهان يبين لنا على وجه التحديد كيفية تعريف التحويل الخطي المطلوب. المثالين التاليين يبينان كيفية حساب قيم التحويل الخطي التي تنشأ بهذه الطريقة.

مثال ٧-١-١٤. اعتبر التحويل الخطي $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ الذي يتطلب أن يكون له القيم الثلاث التالية

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$$

حيث أن

$$B = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

يكون أساس لـ $\mathbb{C}^3$ (نظرية ٤-٤-٢)، يوجد تحويل خطي وحيد T يسلك هذا الطريق (نظرية ٧-١-١٣). كيف نحسب قيم T؟ نعتبر المدخل

$$w = \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} = (2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

إذن

$$T(w) = (2)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13\\-10\end{bmatrix}$$

كذلك

$$x=\begin{bmatrix}5\\2\\-3\end{bmatrix}=(5)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

لذلك

$$T(x)=(5)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\13\end{bmatrix}$$

أي قيمة أخرى لـ T يمكن حسابها بنفس الطريقة. لذلك بدلا من إعطاء صيغة لمخرجات T، المتطلب أن T تسلك بطريقة معينة للمدخلات المختارة من أساس للنطاق، تكون كافية تماما مثل الصيغة لحساب أي قيمة للدالة.

مثال ٧-١-١٥. نعتبر التحويل الخطي $R:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ بالقيم الثلاث

$$R\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}\qquad R\left(\begin{bmatrix}-1\\5\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}\qquad R\left(\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

يمكننا التحقق من أن

$$D=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\5\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}\right\}$$

تكون أساس لـ $\mathbb{C}^3$ (ضع المتجهات كأعمدة في مصفوفة مربعة وتحقق من أنها غير شاذة، نظرية ٤-٤-٩). من نظرية ٧-١-١٣ نعلم أنه يوجد تحويل خطي وحيد R بهذه المخرجات الخاصة الثلاث. ومع ذلك نحتاج للعمل بجدية قليلة لكي نجعل متجه مدخل في صورة تركيبة خطية من متجهات D.

على سبيل المثال، نعتبر

$$y=\begin{bmatrix}8\\-3\\5\end{bmatrix}$$

إذن يجب أولا أن نكتب y كتركيبة خطية من المتجهات في D ونحل في الكميات القياسية المجهولة لنصل إلى

$$y=\begin{bmatrix}8\\-3\\5\end{bmatrix}=(3)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}-1\\5\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}$$

إذن برهان نظرية ٧-١-١٣ يعطينا

$$R(y)=(3)\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\-8\end{bmatrix}$$

أي قيمة أخرى لـ R يمكن حسابها بنفس الأسلوب.

هنا مثال ثالث لتحويل خطي معرف بتأثيره على أساس.

مثال ٧-١-١٦. المجموعة

$W=\{p(x)\in P_3 : p(1)=0, p(3)=0\}$ تكون فضاء جزئي من الفضاء الاتجاهي لكثيرات الحدود P_3. هذا الفضاء الجزئي له $C=\{3-4x+x^2, 12-13x+x^3\}$ كأساس (تحقق من ذلك).

نفرض أننا اعتبرنا التحويل الخطي $S : P_3 \to M_{22}$ بالقيم

$$S(3-4x+x^2)=\begin{bmatrix}1&-3\\2&0\end{bmatrix},\ S(12-13x+x^3)=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

من نظرية ٧-١-١٣ نعلم أنه يوجد تحويل خطي وحيد بهذه القيم.

لتوضيح عينة للحسابات لـ S، نعتبر $q(x)=9-6x-5x^2+2x^3$.

تحقق من أن $q(x)$ عنصر في W ومن ثم أوجد الكميات القياسية اللازمة لكتابتها كتركيبة خطية من متجهات الأساس في C.

لأن

$$\begin{aligned}q(x)&=9-6x-5x^2+2x^3\\&=(-5)(3-4x+x^2)+(2)(12-13x+x^3)\end{aligned}$$

برهان نظرية ٧-١-١٣ يعطي

$$S(q)=(-5)\begin{bmatrix}1&-3\\2&0\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&17\\-8&0\end{bmatrix}$$

وكل المخرجات الأخرى لـ S يمكن حسابها بنفس السلوك. كل مخرج لـ S سوف يكون صفر في الصف الثاني والعمود الثاني.

بصورة غير رسمية، يمكننا وصف نظرية ٧-١-١٣ بقولنا أنه يكفينا معرفة ماذا يفعل التحويل الخطي للأساس (للنطاق).

الصور العكسية

تعريف الدالة تتطلب أنه لكل مدخل في النطاق يوجد تحديدا مخرج واحد في النطاق المصاحب. ومع هذا، التناظر ليس له نفس السلوك في الاتجاه العكسي. المخرج من النطاق المصاحب يمكن أن يكون له أكثر من مدخل مختلفة من النطاق التي يرسلها التحويل الخطي إلى هذا المخرج، أو قد لا يوجد مدخلات على الإطلاق يرسلها التحويل الخطي لهذا المخرج لصياغة هذه المناقشة لهذه السمة للتحويلات الخطية نعرف الصورة العكسية.

تعريف ٧-١-١٧. نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي. لكل v، نعرف **الصورة العكسية** pre-image لـ v على أنها المجموعة الجزئية من U المعطاة كما يلي

$$T^{-1}(v) = \{u \in U : T(u) = v\}$$

بتعبير آخر $T^{-1}(v)$ هي مجموعة كل المتجهات في النطاق U التي ترسل إلى v.

مثال ٧-١-١٨. نعرف التحويل الخطي

$$T : \mathbb{C}^3 \to M_{22}, \quad T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & 2a+2b+c \\ 3a+b+c & -2a-6b-2c \end{bmatrix}$$

يمكننا حساب الصورة العكسية لكل عنصر في النطاق المصاحب M_{22}. نختار

$$v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in M_{22}$$

ليس لأي سبب خاص. ما هو $T^{-1}(v)$؟ نفرض $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in T^{-1}(v)$.

الشرط $T(u) = v$ يصبح

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = v = T(u) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 - u_2 & 2u_1 + 2u_2 + u_3 \\ 3u_1 + u_2 + u_3 & -2u_1 - 6u_2 - 2u_3 \end{bmatrix}$$

باستخدام تساوي المصفوفات نحصل على نظام من أربع معادلات في المتغيرات الثلاثة u_1 ، u_2 و u_3 بمصفوفة موسعة يمكن اختزالها صفيا

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نتعرف على هذا النظام بأن له عدد لانهائي من الحلول توصف بمتغير حر واحد u_3. بمجرد الحصول على الصورة الاتجاهية للحلول، يمكننا وصف الصورة العكسية بدقة كما يلي

$$T^{-1}(v) = \{u \in \mathbb{C}^3 : T(u) = v\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} : u_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}u_3,\ u_2 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}u_3\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} \frac{5}{4} - \frac{1}{4}u_3 \\ -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}u_3 \\ u_3 \end{bmatrix} : u_3 \in \mathbb{C}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} : u_3 \in \mathbb{C}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

السطر الأخير هو مجرد طريقة مقترحة لوصف المجموعة في السطر السابق له. يمكنك إنشاء ثلاثة أو أربعة متجهات في الصورة العكسية، وحساب T مع كل منها. هل النتيجة كما تتوقع.

الآن نحسب صورة عكسية أخرى. نختار

$$v=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\in M_{22}$$

ما هو $T^{-1}(v)$؟ نفرض $u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}\in T^{-1}(v)$. الشرط $T(u)=v$ يصبح

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=v=T(u)=T\left(\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}u_1-u_2 & 2u_1+2u_2+u_3\\ 3u_1+u_2+u_3 & -2u_1-6u_2-2u_3\end{bmatrix}$$

باستخدام تساوي المصفوفات نحصل على نظام من أربع معادلات في المتغيرات الثلاثة u_1 ، u_2 و u_3 بمصفوفة موسعة يمكن اختزالها صفيا

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -6 & -2 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

نتعرف على هذا النظام بأنه غير متوافق. لذلك لا يوجد u يكون عنصر في $T^{-1}(v)$. ومن ثم

$$T^{-1}(v)=\phi$$

الصورة العكسية هي مجرد مجموعة، هي ليست أبدا فضاء جزئي من U . سوف نصف خواصها فيما سوف يلي، وسوف تكون مركز الفكرة الأساسية في هذا الباب.

تحويل خطي جديد من تحويل خطي قديم

يمكننا تركيب تحويلات خطية بطرق طبيعية لإنشاء تحويلات خطية جديدة. ومن ثم سوف نعرف هذه التركيبات ثم نبرهن أنه في الواقع تظل تحويلات خطية.

تعريف ٧-١-١٩. مجموع تحويلين خطيين. نفرض أن $T:U\to V$ و $S:U\to V$ تحويلان خطيان بنفس النطاق والنطاق المصاحب. إذن **مجموع** sum التحويلين هو الدالة $T+S:U\to V$ التي تعرف مخرجاتها كما يلي

$$(T+S)(u)=T(u)+S(u)$$

لاحظ أن علامة الجمع الأولى في التعريف هي العملية المعرفة، بينما العلامة الثانية فهي جمع المتجهات في V. جمع المتجهات في U سوف يظهر في برهان أن $T+S$ يكون تحويل خطي. تعريف ٧-١-١٩ يعطينا فقط دالة.

نظرية ٧-١-٢٠. نفرض أن $T:U\to V$ و $S:U\to V$ تحويلان خطيان بنفس النطاق والنطاق المصاحب. إذن $T+S:U\to V$ يكون تحويل خطي.

البرهان: ببساطة نتحقق من تعريف التحويل الخطي.

$$\begin{aligned}(T+S)(x+y)&=T(x+y)+S(x+y)\\&=T(x)+T(y)+S(x)+S(y)\\&=T(x)+S(x)+T(y)+S(y)\\&=(T+S)(x)+(T+S)(y)\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}(T+S)(\alpha x)&=T(\alpha x)+S(\alpha x)\\&=\alpha T(x)+\alpha S(x)\\&=\alpha(T(x)+S(x))\\&=\alpha(T+S)(x)\end{aligned}$$

مثال ٧-١-٢١. نفرض أن $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ و $S:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ معرفان كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1-4x_2 \\ 5x_1+2x_2 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 4x_1-x_2 \\ x_1+3x_2 \\ -7x_1+5x_2 \end{bmatrix}$$

إذن من تعريف ٧-١-١٩ يكون

$$(T+S)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)+S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1-4x_2 \\ 5x_1+2x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4x_1-x_2 \\ x_1+3x_2 \\ -7x_1+5x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5x_1+x_2 \\ 4x_1-x_2 \\ -2x_1+7x_2 \end{bmatrix}$$

ومن نظرية ٧-١-٢٠ $T+S$ يكون تحويل خطي من $\mathbb{C}^2$ إلى $\mathbb{C}^3$.

تعريف ٧-١-٢٢. ضرب تحويل خطي في قياسي. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي و $\alpha\in\mathbb{C}$ قياسي. **المضاعف القياسي** scalar multiple هو الدالة $\alpha T:U\to V$ التي تعرف مخرجاتها بالصورة

$$(\alpha T)(u)=\alpha T(u)$$

نظرية ٧-١-٢٣. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي و $\alpha\in\mathbb{C}$ قياسي. إذن $(\alpha T):U\to V$ يكون تحويل خطي.

البرهان: المطلوب هو تحقيق الشرطين في تعريف ٧-١-١

$$\begin{aligned}(\alpha T)(x+y)&=\alpha(T(x+y))\\&=\alpha(T(x)+T(y))\\&=\alpha T(x)+\alpha T(y)\\&=(\alpha T)(x)+(\alpha T)(y)\end{aligned}$$

أيضا

$$\begin{aligned}(\alpha T)(\beta x)&=\alpha T(\beta x)\\&=\alpha(\beta T(x))\\&=(\alpha\beta)T(x)\\&=(\beta\alpha)T(x)\\&=\beta(\alpha T(x))\\&=\beta((\alpha T)(x))\end{aligned}$$

مثال ٧-١-٢٤. نفرض أن $T:\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ معرف بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+2x_4 \\ x_1+5x_2-3x_3+x_4 \\ -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4 \end{bmatrix}$$

على سبيل المثل نأخذ $\alpha=2$ ، من التعريف يكون

$$\alpha T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)=2T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3+2x_4 \\ x_1+5x_2-3x_3+x_4 \\ -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4 \\ 2x_1+10x_2-6x_3+2x_4 \\ -4x_1+6x_2-8x_3+4x_4 \end{bmatrix}$$

ومن نظرية ٧-١-٢٣، $2T$ يكون أيضا تحويل خطي.

الآن لنتصور أنه لدينا فضاءين اتجاهيين U و V ، وجمعنا كل التحويلات الخطية الممكنة من U إلى V في مجموعة وسميناها $LT(U,V)$. تعريف ٧-١-١٩ وتعريف ٧-١-٢٢ يخبرانا عن كيفية جمع والضرب في قياسي لعناصر من $LT(U,V)$. نظرية ٧-١-٢٠ ونظرية ٧-١-٢٣ تخبرانا بأن الدوال الناتجة تكون تحويلات خطية والتي أيضا تكون في $LT(U,V)$. عجيب، يبدو وكأنه فضاء اتجاهي! مجموعة من الأشياء، جمع وضرب في قياسي. لماذا لا؟

نظرية ٧-١-٢٥. نفرض أن U و V فضاءين اتجاهيين. إذن مجموعة كل التحويلات الخطية من U إلى V ، $LT(U,V)$، تكون فضاء اتجاهي حيث العمليات هي المعطاة في تعريف ٧-١-١٩ وتعريف ٧-١-٢٢.

البرهان: نظرية ٧-١-٢٠ ونظرية ٧-١-٢٣ تعطي خاصيتين من الخواص العشرة في تعريف الفضاء الاتجاهي . ومع ذلك نحتاج إلى التحقق من بقية الخواص الثمانية. في الواقع البراهين مباشرة وتعتمد

على أشياء واضحة، أو تستنتج من الأسئلة عن نفس خاصية الفضاء الاتجاهي في الفضاء الاتجاهي V.

المتجه الصفري له اهتمام خاص. ما هو التحويل الخطي الذي إذا أضيف إلى أي تحويل خطي، يحافظ على الثاني بدون تغيير؟ الإجابة $Z:U\to V$ المعرف بالصورة $Z(u)=0_V$ لكل $u\in U$. لاحظ كيف أننا لا نحتاج إلى معرفة أي خواص عن U و V لكي نقوم بتعريف Z.

تعريف ٧-١-٢٦. تحصيل تحويلين خطيين. نفرض أن $T:U\to V$ و $S:V\to W$ تحويلان خطيان. إذن **تحصيل** S و T composition هو الدالة $(S\circ T):U\to W$ التي تعرف مخرجاتها كما يلي

$$(S\circ T)(u)=S(T(u))$$

إذا أعطينا T و S تحويلين خطيين فيكون من الجيد معرفة أن $S\circ T$ يكون أيضا تحويل خطي.

نظرية ٧-١-٢٧. نفرض أن $T:U\to V$ و $S:V\to W$ تحويلان خطيان. إذن $(S\circ T):U\to W$ يكون تحويل خطي.

البرهان: نتحقق من الخاصيتين في تعريف التحويل الخطي.

$$\begin{aligned}(S\circ T)(x+y)&=S(T(x+y))\\&=S(T(x)+T(y))\\&=(S\circ T)(x)+(S\circ T)(y)\end{aligned}$$

أيضا

$$\begin{aligned}(S\circ T)(\alpha x)&=S(T(\alpha x))\\&=S(\alpha T(x))\\&=\alpha S(T(x))\\&=\alpha(S\circ T)(x)\end{aligned}$$

مثال ٧-١-٢٨. نفرض أن $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^4$ و $S:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ معرفان كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1-4x_2 \\ 5x_1+2x_2 \\ 6x_1-3x_2 \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x_1-x_2+x_3-x_4 \\ 5x_1-3x_2+8x_3-2x_4 \\ -4x_1+3x_2-4x_3+5x_4 \end{bmatrix}$$

إذن من تعريف ٧-١-٢٦

$$(S\circ T)\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=S\left(T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)\right)=S\left(\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1-4x_2 \\ 5x_1+2x_2 \\ 6x_1-3x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} 2(x_1+2x_2)-(3x_1-4x_2)+(5x_1+2x_2)-(6x_1-3x_2) \\ 5(x_1+2x_2)-3(3x_1-4x_2)+8(5x_1+2x_2)-2(6x_1-3x_2) \\ -4(x_1+2x_2)+3(3x_1-4x_2)-4(5x_1+2x_2)+5(6x_1-3x_2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2x_1+13x_2 \\ 24x_1+44x_2 \\ 15x_1-43x_2 \end{bmatrix}$$

من نظرية ٧-١-٢٧، $S\circ T$ يكون تحويل خطي من $\mathbb{C}^2$ إلى $\mathbb{C}^3$.

هنا تمرين مثير للاهتمام من شأنه أن يبشر بنتيجة هامة فيما بعد.

في مثال ٧-١-٢٨ أحسب (بمعلومية نظرية ٧-١-١٠) مصفوفات T، S و $T+S$. هل ترى علاقة بين هذه المصفوفات الثلاث؟

في مثال ٧-١-٢٨ أحسب (بمعلومية نظرية ٧-١-١٠) مصفوفات T و $2T$. هل ترى علاقة بين هاتين المصفوفتين؟

هنا السؤال الصعب. في مثال ٧-١-٢٨ أحسب (بمعلومية نظرية ٧-١-١٠) مصفوفات T، S و $S\circ T$. هل ترى علاقة بين هذه المصفوفات الثلاث؟

تمارين ٧ـ١

١ـ هل الدالة التالية تكون تحويل خطي؟ لماذا؟

$$T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,\qquad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3x_1-x_2+x_3 \\ 8x_2-6 \end{bmatrix}$$

٢ـ حدد التمثيل المصفوفي للتحويل الخطي S، حيث

$$S:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3,\qquad S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3x_1+5x_2 \\ 8x_1-3x_2 \\ -4x_1 \end{bmatrix}$$

٣ـ أوجد التمثيل المصفوفي للتحويل الخطي

$$T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4,\qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3x+2y+z \\ x+y+z \\ x-3y \\ 2x+3y+z \end{bmatrix}$$

٤ـ نعرف الدالة

$$T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,\qquad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x_1-x_2+5x_3 \\ -4x_1+2x_2-10x_3 \end{bmatrix}$$

برهن على أن T يكون تحويل خطي.

٥ـ برهن على أن الدالة التالية تكون تحويل خطي

$$T:P_2 \to \mathbb{C}^2,\qquad T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} 2a-b \\ b+c \end{bmatrix}$$

٦ـ نعرف التحويل الخطي

$$T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,\qquad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x_1-x_2+5x_3 \\ -4x_1+2x_2-10x_3 \end{bmatrix}$$

أحسب الصور العكسية $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ و $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}\right)$.

٧ـ للتحويل الخطي

$$S:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-2b-c \\ 3a-b+2c \\ a+b+2c \end{bmatrix}$$

أحسب الصور العكسية $S^{-1}\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right)$ و $S^{-1}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

٨- إذا كـــــان $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ يحقـــــق $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ فأوجد $T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

٩- إذا كـــــان $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ يحقـــــق $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ فأوجد التمثيل المصفوفي لـ T.

١٠- نعرف $T:P_3 \to P_2$ بالصورة

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = b+2cx+3dx^2$$

أوجد الصورة العكسية للمتجه الصفري. هل هذا التحويل الخطي يبدو مألوف؟

١١- نعرف التحويلين الخطيين $T:\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ و $S:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ كما يلي

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1-2x_2+3x_3 \\ 5x_1+4x_2+2x_3 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 \\ 2x_1 + x_3 + 7x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

باستخدام برهان نظرية ٧-١-١٠ أحسب التمثيلات المصفوفية للتحويلات الخطية الثلاثة T، S و $S \circ T$.

٧-٢ التحويلات الخطية الأحادية

Injective Linear Transformations

هناك خاصيتين أساسيتين للدوال. الأولى الأحادية والثانية الفوقية. وحيث أن التحويلات الخطية هي في الأصل دوال، فإن بعض التحويلات الخطية قد يكون له إحدى هاتين الخاصيتين أو كلاهما. في هذا الفصل سوف نعرف التحويل الخطي الأحادي ونحلل النتائج المترتبة على ذلك. في الفصل التالي سوف نفعل نفس الشيء مع خاصية الفوقية. في الفصل الأخير من هذا الباب سوف ننظر ما الذي يحدث عندما يكون التحويل الخطي له الخاصيتين في آن واحد.

تعريف ٧-٢-١. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. إذن T يكون **أحادي** injective إذا كان، $T(x)=T(y)$ يؤدي إلى $x=y$.

بتعبير آخر، المكافئ العكسي، التحويل الخطي T يكون أحادي إذا كان $x\neq y$ يؤدي إلى $T(x)\neq T(y)$.

أمثلة على التحويلات الخطية الأحادية

مثال ٧-٢-٢. نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5$ حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -2x_1+3x_2+3x_3-6x_4+3x_5\\ -16x_1+9x_2+12x_3-28x_4+28x_5\\ -19x_1+7x_2+14x_3-32x_4+37x_5\\ -21x_1+9x_2+15x_3-35x_4+39x_5\\ -9x_1+5x_2+7x_3-16x_4+16x_5\end{bmatrix}$$

لاحظ أنه إذا كان

$$x=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\2\\4\end{bmatrix}\qquad\qquad y=\begin{bmatrix}4\\7\\0\\5\\7\end{bmatrix}$$

فإن

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\2\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\55\\72\\77\\31\end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix}4\\7\\0\\5\\7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\55\\72\\77\\31\end{bmatrix}$$

لذلك يوجد متجهين في النطاق $x \neq y$ ومع ذلك $T(x)=T(y)$. إذن T ليس أحادي.

مثال ٧-٢-٣. نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ حيث

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-65x_1+128x_2+10x_3-262x_4+40x_5\\36x_1-73x_2-x_3+151x_4-16x_5\\-44x_1+88x_2+5x_3-180x_4+24x_5\\34x_1-68x_2-3x_3+140x_4-18x_5\\12x_1-24x_2-x_3+49x_4-5x_5\end{bmatrix}$$

لإثبات أن T أحادي، يجب أن نبين أنه إذا فرضنا أن $T(x)=T(y)$ فلا بد أن نصل إلى الخلاصة أن $x=y$. الآن نبرهن ذلك

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=T(x)-T(y)=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\right)-T\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-65x_1+128x_2+10x_3-262x_4+40x_5\\36x_1-73x_2-x_3+151x_4-16x_5\\-44x_1+88x_2+5x_3-180x_4+24x_5\\34x_1-68x_2-3x_3+140x_4-18x_5\\12x_1-24x_2-x_3+49x_4-5x_5\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}-65y_1+128y_2+10y_3-262y_4+40y_5\\36y_1-73y_2-y_3+151y_4-16y_5\\-44y_1+88y_2+5y_3-180y_4+24y_5\\34y_1-68y_2-3y_3+140y_4-18y_5\\12y_1-24y_2-y_3+49y_4-5y_5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -65(x_1-y_1)+128(x_2-y_2)+10(x_3-y_3)-262(x_4-y_4)+40(x_5-y_5) \\ 36(x_1-y_1)-73(x_2-y_2)-(x_3-y_3)+151(x_4-y_4)-16(x_5-y_5) \\ -44(x_1-y_1)+88(x_2-y_2)+5(x_3-y_3)-180(x_4-y_4)+24(x_5-y_5) \\ 34(x_1-y_1)-68(x_2-y_2)-3(x_3-y_3)+140(x_4-y_4)-18(x_5-y_5) \\ 12(x_1-y_1)-24(x_2-y_2)-(x_3-y_3)+49(x_4-y_4)-5(x_5-y_5) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -65 & 128 & 10 & -262 & 40 \\ 36 & -73 & -1 & 151 & -16 \\ -44 & 88 & 5 & -180 & 24 \\ 34 & -68 & -3 & 140 & -18 \\ 12 & -24 & -1 & 49 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ x_3-y_3 \\ x_4-y_4 \\ x_5-y_5 \end{bmatrix}$$

الآن لدينا نظام متجانس من خمس معادلات في خمسة متغيرات ($x_i - y_i$) ومن ثم نختزل مصفوفة المعاملات إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذلك الحل الوحيد يكون هو الحل الصفري

$$x_1-y_1=0,\quad x_2-y_2=0,\quad x_3-y_3=0,$$
$$x_4-y_4=0,\quad x_5-y_5=0$$

ومن ذلك نستنتج أن $x=y$ ويكون T أحادي.

مثال ٧-٢-٤. نعتبر التحويل الخطي $T:P_3\to M_{22}$ المعرف كما يلي

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}$$

لبيان أن هذا التحويل الخطي يكون أحادي نبدأ بفرض أن كثيرتي حدود تعطيان نفس المصفوفة كمخرج.

$$T(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3)=T(a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3)$$

إذن

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= T(a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3) - T(a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3)$$
$$= T((a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3) - (a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3))$$
$$= T((a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)x^2 + (d_1 - d_2)x^3)$$
$$= \begin{bmatrix} (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) & (a_1 - a_2) - 2(c_1 - c_2) \\ (d_1 - d_2) & (b_1 - b_2) - (d_1 - d_2) \end{bmatrix}$$

تساوي المصفوفات يؤدي إلى نظام متجانس من معادلات في المتغيرات $(a_1 - a_2)$ ، $(b_1 - b_2)$، $(c_1 - c_2)$ و $(d_1 - d_2)$

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = 0$$
$$(a_1 - a_2) - 2(c_1 - c_2) = 0$$
$$(d_1 - d_2) = 0$$
$$(b_1 - b_2) - (d_1 - d_2) = 0$$

هذا النظام من المعادلات يمكن إعادة كتابته على الصورة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_1 - a_2) \\ (b_1 - b_2) \\ (c_1 - c_2) \\ (d_1 - d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن مصفوفة المعاملات غير شاذة (تحقق)، الحل الوحيد يكون هو الحل التافه، أي أن

$a_1 - a_2 = 0$ ، $b_1 - b_2 = 0$، $c_1 - c_2 = 0$ و $d_1 - d_2 = 0$

ومن ثم

$a_1 = a_2$ ، $b_1 = b_2$، $c_1 = c_2$ و $d_1 = d_2$

إذن المدخلات تكون كثيرتي حدود متساويتين، ومن ثم، من تعريف ٧-٢-١، T يكون أحادي.

نواة التحويل الخطي

للتحويل الخطي $T : U \to V$، النواة تكون مجموعة جزئية من النطاق U. هي مجموعة المدخلات التي يرسلها التحويل إلى المتجه

الصفري في النطاق المصاحب. النواة يكون لها بعض العلاقات الطبيعية مع فضاء الصفرية لمصفوفة، ومن ثم سوف نحتفظ بنفس المصطلحات.

تعريف ٧-٢-٥. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. **نواة** T kernel هي المجموعة

$$K(T)=\{u\in U: T(u)=0\}$$

لاحظ أن نواة T هي مجرد الصورة العكسية للمتجه الصفري، $T^{-1}(0)$.

مثال ٧-٢-٦. نعتبر التحويل الخطي

$$T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^5,\quad T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x_1+x_2-3x_3\\-x_1+2x_2-4x_3\\x_1+x_2+x_3\\2x_1+3x_2+x_3\\x_1+2x_3\end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر $\mathbb{C}^3$ التي تنتمي إلى $K(T)$، نوجد تلك المتجهات u بحيث $T(u)=0$،

$$T(u)=0$$

$$\begin{bmatrix}-x_1+x_2-3x_3\\-x_1+2x_2-4x_3\\x_1+x_2+x_3\\2x_1+3x_2+x_3\\x_1+2x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

تساوي المتجهين يؤدي إلى خمس معادلات متجانسة في المتغيرات x_i

$$-x_1+x_2-3x_3=0$$
$$-x_1+2x_2-4x_3=0$$
$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$2x_1+3x_2+x_3=0$$
$$x_1+2x_3=0$$

باختزال مصفوفة المعاملات صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نواة T هي مجموعة حلول هذا النظام من المعادلات والتي يمكن، من نظرية ٢-٤-١٧، التعبير عنها كما يلي

$$K(T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

نعلم أن المجموعة المولدة بمجموعة متجهات تكون فضاء جزئي، ومن ثم النواة التي أوجدناها في مثال ٧-٢-٦ تكون أيضا فضاء جزئي. هذه ليست مصادفة، ولكن نواة التحويل الخطي دائما تكون فضاء جزئي.

نظرية ٧-٢-٧. نفرض أن $T: U \to V$ تحويل خطي. إذن نواة T، $K(T)$، تكون فضاء جزئي.

البرهان: يمكننا تطبيق الأجزاء الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣ . أولا $T(0_U) = 0_V$، من نظرية ٧-١-٦، لذلك $0_U \in K(T)$ وتكون النواة مجموعة غير خالية.

الآن نفرض أن $x, y \in K(T)$، هل $x + y \in K(T)$؟

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x) + T(y) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $x + y \in K(T)$. إذن جمع المتجهات مغلقة على $K(T)$.

نفرض أن $x \in K(T)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. هل $\alpha x \in K(T)$؟

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= \alpha T(x) \\ &= \alpha 0 = 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $\alpha x \in K(T)$ وتكون $K(T)$ مغلقة بالنسبة للضرب في قياسي. ومن ثم $K(T)$ تكون فضاء جزئي من U.

مثال ٧-٢-٨. نعتبر التحويل الخطي

$$T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^5, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر $\mathbb{C}^3$ التي تنتمي إلى $K(T)$، نوجد تلك المتجهات u بحيث $T(u)=0$،

$$T(u)=0$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تساوي المتجهين يؤدي إلى خمس معادلات متجانسة في المتغيرات x_i

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

باختزال مصفوفة المعاملات صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نواة T هي مجموعة حلول هذا النظام المتجانس من المعادلات، والتي ببساطة هي الحل التافه $u=0$. لذلك

$$K(T)=\{0\}$$

نظرية ٧-٢-٩. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي و $v\in V$. إذا كانت الصورة العكسية $T^{-1}(v)$ غير خالية، و $u\in T^{-1}(v)$ إذن

$$T^{-1}(v)=\{u+z:z\in K(T)\}=u+K(T)$$

البرهان: نفرض $M=\{u+z:z\in K(T)\}$. أولا نبين أن $M\subseteq T^{-1}(v)$. نفرض أن $w\in M$ ، لذلك w يكون على الصورة $w=u+z$ حيث $z\in K(T)$. إذن

$$\begin{aligned} T(w)&=T(u+z)=T(u)+T(z)\\ &=v+0=v \end{aligned}$$

والذي يعني أن w يكون عنصر في الصورة العكسية لـ v، $w\in T^{-1}(v)$.

للاتجاه العكسي نفرض أن $x\in T^{-1}(v)$. إذن

$$\begin{aligned} T(x-u)&=T(x)-T(u)\\ &=v-v=0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن $x-u$ يكون عنصر في نواة T، $K(T)$. لذلك يوجد متجه $z\in K(T)$ بحيث $z=x-u$ ومنها نحصل على $x=u+z$ ومن ثم $x\in M$. لذلك $T^{-1}(v)\subseteq M$ وهذا يبين أن $M=T^{-1}(v)$، كما هو مطلوب.

النظرية التالية تعطينا علاقة خاصية الأحادية للتحويل الخطي بحجم نواته.

نظرية ٧-٢-١٠. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. إذن T يكون أحادي إذا وفقط إذا كان نواته تافهة، $K(T)=\{0\}$.

البرهان: نفرض أن T أحادي. حيث أن النواة تكون فضاء جزئي (نظرية ٧-٢-٧)، إذن $\{0\}\subseteq K(T)$. الآن نفرض أن $x\in K(T)$. إذن

$$T(x)=0=T(0)$$

وحيث أن T أحادي، نستنتج أن $x=0$. لذلك $K(T)\subseteq\{0\}$ ومن ثم $K(T)=\{0\}$.

في الاتجاه الآخر، نفرض أن $K(T)=\{0\}$، ونحاول إثبات أن T يكون أحادي. نفرض أن $T(x)=T(y)$. إذن

$$\begin{aligned} T(x-y) &= T(x)-T(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذلك $x-y \in K(T)$، ومن الفرض يكون $x-y=0$. إذن

$$y = y+0 = y+(x-y) = x$$

ومن ثم T يكون أحادي.

مثال ٧-٢-١١. الآن نعود مرة أخرى إلى مثال ٧-٢-٢ . في ذلك المثال، بينا أن التحويل الخطي المعطى ليس أحاديا ببيان أنه يوجد متجهين عند استخدامها لحساب التحويل الخطي نحصل على نفس المخرج. فقط من أين يأتي هذين المتجهين؟

المفتاح هو المتجه

$$z = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الذي يمكن التحقق من أنه عنصر في $K(T)$. نختار عشوائيا متجه x ونحسب $y=x+z$. إذن

$$\begin{aligned} T(y) &= T(x+z) \\ &= T(x)+T(z) && \text{(من تعريف التحول الخطي)} \\ &= T(x)+0 && \text{(لأن } z \in K(T)\text{)} \\ &= T(x) && \text{(من خاصية } 0\text{)} \end{aligned}$$

كلما كانت نواة التحويل الخطي غير تافهة، يمكننا توظيف هذه الخاصية لاستنتاج أن التحويل الخطي ليس أحادي. للتحويلات الخطية الأحادية، النواة تكون تافهة واختيارنا الوحيد لـ z يكون هو المتجه الصفري، والذي لا يساعدنا في إنشاء مدخلين مختلفين لـ T بحيث ينتجان نفس مخارج متطابقة.

مثال ٧-٢-١٢. في مثال ٧-٢-٦ ، نواة التحويل الخطي كانت

$$\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

وهي فضاء جزئي من $\mathbb{C}^3$ له البعد 1. وحيث أن النواة ليست تافهة، فإنه من نظرية ٧-٢-١٠، التحويل الخطي T يكون ليس أحادي.

مثال ٧-٢-١٣. في مثال ٧-٢-٨ بينا أن نواة التحويل الخطي تكون تافهة. إذن من نظرية ٧-٢-١٠، التحويل الخطي يكون أحادي.

التحويلات الخطية الأحادية والاستقلال الخطي

يوجد ربط بين التحويلات الخطية الأحادية والمجموعات المستقلة خطيا والذي سوف نبينه بدقة في النظريتين التاليتين. ولكن يمكننا أن نشعر بهذا الربط عندما نفكر كيف تعرف كل خاصية. مجموعة المتجهات تكون مستقلة خطيا إذا كانت علاقة الارتباط الخطي الوحيدة التي يمكن تعريفها عليها هي العلاقة التافهة. التحويل الخطي يكون أحادي إذا وفقط إذا كان الطريقة الوحيدة لمتجهين مدخلين بأن ينتجا نفس المخرج هو الطريقة التافهة، عندما يكون المتجهان المدخلان متساويان.

نظرية ٧-٢-١٤. نفرض أن $T: U \to V$ تحويل خطي أحادي وأن

$$S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_t\}$$

مجموعة جزئية من U مستقلة خطيا. إذن

$$R = \{T(u_1), T(u_2), T(u_3), \ldots, T(u_t)\}$$

تكون مجموعة جزئية من V مستقلة خطيا.

البرهان: نبدأ بعلاقة ارتباط خطي على R

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3) + \ldots + \alpha_t T(u_t) = 0$$

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_t u_t) = 0$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_t u_t \in K(T)$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_t u_t \in \{0\}$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_t u_t = 0$$

وحيث أن هذه علاقة ارتباط خطي على المجموعة المستقلة خطيا S، نستنتج أن $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \ldots,\ \alpha_t = 0$ وهذا يبرهن أن R تكون مستقلة خطيا.

نظرية ٧-٢-١٥. نفرض أن $T: U \to V$ تحويل خطي وأن

$$B = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$$

أساس لـ U. إذن T يكون أحادي إذا وفقط إذا كان

$$C = \{T(u_1), T(u_2), T(u_3), \ldots, T(u_m)\}$$

مجموعة مستقلة خطيا في V.

البرهان: نفرض أن T أحادي. حيث أن B أساس، من تعريف الأساس، B تكون مستقلة خطيا. من نظرية ٧-٢-١٤ C تكون مجموعة جزئية من V مستقلة خطيا.

من جهة أخرى، نفرض أن C مستقلة خطيا. لإثبات أن T أحادي سوف نبرهن أن نواة T تكون تافهة. نفرض أن $u \in K(T)$. باعتباره عنصر في U ، u يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر الأساس بصورة وحيدة. لذلك توجد كميات قياسية وحيدة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ بحيث

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_m u_m$$

إذن

$$\begin{aligned} 0 &= T(u) \\ &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_m u_m) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3) + \ldots + \alpha_m T(u_m) \end{aligned}$$

هذه علاقة ارتباط خطي على مجموعة مستقلة خطيا C. لذلك الكميات القياسية كلها تكون أصفار $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$. إذن

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_m u_m \\ &= 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \ldots + 0u_m \\ &= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

حيث أن u متجه اختياري من $K(T)$ ، فإن $K(T)=\{0\}$ ومن نظرية ٧-٢-١٠، T يكون أحادي.

التحويلات الخطية الأحادية والبعد

نظرية ٧-٢-١٦. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي أحادي. إذن $\dim(U)\le\dim(V)$.

البرهان: على العكس نفرض أن $m=\dim(U)>\dim(V)=t$. نفرض B أساس لـ U، والتي من ثم تحتوي m متجه. بتطبيق T على كل عنصر من B نحصل على مجموعة جزئية C من V. من نظرية ٧-٢-١٥ ، C تكون مستقلة خطيا، ومن ثم يجب أن تحتوي على m متجه مختلفة. ومن ثم نكون وجدنا مجموعة من m متجه مستقلة خطيا من V، فراغ اتجاهي بعده t و $m>t$. وهذا تناقض، لذلك الفرض يكون خاطئ ومن ثم $\dim(U)\le\dim(V)$.

مثال ٧-٢-١٧. نعتبر التحويل الخطي $T:M_{23}\to\mathbb{C}^4$ حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+2b+12c-3d+e+6f \\ 2a-b-c+d-11f \\ a+b+7c+2d+e-3f \\ a+2b+12c+5e-5f \end{bmatrix}$$

حيث أن $\dim(M_{23})=6>4=\dim(\mathbb{C}^4)$، T لا يمكن أن يكون أحادي.

لاحظ أن المثال السابق لم يستخدم الصورة الفعلية للدالة. مجرد فقط مقارنة بعدي النطاق والنطاق المصاحب كانت كافية لاستنتاج أن التحويل الخطي ليس أحادي.

تحصيل التحويلات الخطية الأحادية

رأينا في ما سبق كيفية تركيب تحويلات خطية لإنتاج تحويلات خطية جديدة. بخاصة، كيفية تحصيل تحويلين خطيين (تعريف ٧-١-٢٦). سوف يكون من المفيد معرفة كيفية تحصيل تحويلين خطيين أحاديين.

نظرية ٧-٢-١٨. نفرض أن $T:U\to V$ و $S:V\to W$ تحويلين خطيين أحاديين. إذن $(S\circ T):U\to W$ يكون تحويل خطي أحادي.
البرهان: أن التحصيل يكون تحويل خطي سبق برهانه في نظرية ٧-١-٢٧، ومن ثم نحتاج فقط إلى إثبات أن التحصيل يكون أحادي. بتطبيق نظرية ٧-٢-١ نختار x و y من U. إذا كان $(S\circ T)(x)=(S\circ T)(y)$ فإن

$$\begin{aligned}(S\circ T)(x)=(S\circ T)(y) &\Rightarrow S(T(x))=S(T(y))\\ &\Rightarrow T(x)=T(y)\\ &\Rightarrow x=y\end{aligned}$$

تمارين ٧-٢

١- نفرض أن $T:\mathbb{C}^8\to\mathbb{C}^5$ تحويل خطي. لماذا لا يمكن أن يكون T أحادي؟

٢- التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^3$ ليس أحادي. أوجد متجهين $x,y\in\mathbb{C}^4$ بحيث $T(x)=T(y)$، حيث

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_1+x_2+x_3\\-x_1+3x_2+x_3-x_4\\3x_1+x_2+2x_3-2x_4\end{bmatrix}$$

٣- نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ حيث

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_1-x_2+5x_3\\-4x_1+2x_2-10x_3\end{bmatrix}$$

أوجد أساس لنواة T، $K(T)$. هل T أحادي؟

٤- نفـــــرض $A=\begin{bmatrix}1&2&3&1&0\\2&-1&1&0&1\\1&2&-1&-2&1\\1&3&2&1&2\end{bmatrix}$ ونفــــــرض أن $T:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^4$ معطى بالصورة $T(x)=Ax$. هل T يكون أحادي ؟

٥- نفرض أن $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ معطى بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y+z\\x-y+2z\\x+2y-z\end{bmatrix}$$

أوجد $K(T)$. هل T أحادي؟

٦- نفــرض $A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&-1&1&0\\1&2&-1&-2\\1&3&2&1\end{bmatrix}$ ونفــرض $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ معطى بالصورة $T(x)=Ax$. أوجد $K(T)$. هل T أحادي؟

٧- نفرض $A=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&0\\1&2&1&2\\1&2&1&1\end{bmatrix}$ ونفرض $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ معطى بالصورة $T(x)=Ax$. أوجد $K(T)$. هل T أحادي؟

٨- نفرض $T:M_{22}\to P_2$ معطى بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=(a+b)+(a+c)x+(a+d)x^2$$

. أوجـــــد $K(T)$. هل T أحادي؟

٩- نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$، حيث

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\2y+z\\x+2z\end{bmatrix}$$

هل T أحادي؟ بين مباشرة أن $\{T(e_1),T(e_2),T(e_3)\}$ تكون مجموعة مستقلة خطيا.

١٠- نفرض أن $T:U\to V$ و $S:V\to W$ تحويلين خطيين. برهن أن $K(T)\subseteq K(S\circ T)$.

١١- نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$. عرف تحويل خطي T بالصورة $T(x)=Ax$, $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$. برهن أن نواة T تساوي فضاء الصفرية لـ A، $K(T)=N(A)$.

٧-٣ التحويلات الخطية الفوقية

Surjective Linear Transformations

قرين الأحادي هو الفوقي. التحويلات الخطية الفوقية وثيقة الصلة بالمجموعات المولدة والمدى. ومن ثم عند قراءتك لهذا الفصل عد للخلف إلى الفصل السابق ولاحظ التوازي والتعاكس . في الفصل القادم سوف نضم الخاصيتين.

تعريف ٧-٣-١. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. إذن T يكون **فوقي** surjective إذا كان لكل $v\in V$ يوجد $u\in U$ بحيث $T(u)=v$.

إذا أعطينا دالة اختيارية، فإنه من الممكن أن يوجد عنصر في النطاق المصاحب لا يكون مخرج لهذه الدالة (على سبيل المثال الدالة $y=f(x)=x^2$ والعنصر في النطاق المصاحب $y=-3$). للدوال الفوقية، هذا لا يحدث أبدا. إذا اخترنا عنصر في النطاق المصاحب $(v\in V)$ فإنه يجب أن يوجد مدخل من النطاق $(u\in U)$ والذي سوف يعطي هذا المخرج عندما يستعمل لحساب قيمة التحويل الخطي $(T(u)=v)$.

أمثلة للتحويلات الخطية الفوقية

مثال ٧-٣-٢. نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5$ حيث

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2x_1+3x_2+3x_3-6x_4+3x_5\\-16x_1+9x_2+12x_3-28x_4+28x_5\\-19x_1+7x_2+14x_3-32x_4+37x_5\\-21x_1+9x_2+15x_3-35x_4+39x_5\\-9x_1+5x_2+7x_3-16x_4+16x_5\end{bmatrix}$$

سوف نوضح أن المتجه

$$v=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\-1\\4\end{bmatrix}$$

لا يمكن الحصول عليه كعنصر في النطاق المصاحب. نفرض على العكس أنه يوجد عنصر u في النطاق بحيث $T(u) = v$. إذن

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = v = T(u) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 \\ -16x_1 + 9x_2 + 12x_3 - 28x_4 + 28x_5 \\ -19x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 32x_4 + 37x_5 \\ -21x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 35x_4 + 39x_5 \\ -9x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 16x_4 + 16x_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -6 & 3 \\ -16 & 9 & 12 & -28 & 28 \\ -19 & 7 & 14 & -32 & 37 \\ -21 & 9 & 15 & -35 & 39 \\ -9 & 5 & 7 & -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

الآن ندرك أن المتجه المدخل المناسب u يكون هو حل نظام المعادلات. نكون المصفوفة الموسعة ونختزلها صفيا إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فيها العمود الأخير عمود محوري. نظرية ١-٣-٦ تخبرنا أن النظام غير متوافق. من عدم وجود أي حل نستنتج أن مثل هذا المتجه u يكون غير موجود، ومن تعريف ٧-٣-١، T يكون ليس فوقيا.

لبيان أن تحويل خطي يكون ليس فوقيا، يكفي إيجاد عنصر واحد في النطاق المصاحب لا يمكن تكوينه بأي مدخل من النطاق، كما في مثال ٧-٣-٢ ومع ذلك، لبيان أن تحويل خطي يكون فوقي يجب أن نبرهن أن

كل عنصر في النطاق المصاحب يحدث كمخرج للتحويل الخطي لعنصر ما مدخل في النطاق.

مثال ٧-٣-٣. نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -65x_1+128x_2+10x_3-262x_4+40x_5 \\ 36x_1-73x_2-x_3+151x_4-16x_5 \\ -44x_1+88x_2+5x_3-180x_4+24x_5 \\ 34x_1-68x_2-3x_3+140x_4-18x_5 \\ 12x_1-24x_2-x_3+49x_4-5x_5 \end{bmatrix}$$

لبيان أن هذا التحويل فوقي يجب أن نبدأ بعنصر اختياري في النطاق المصاحب، v ونوجد بطريقة ما متجه مدخل u بحيث $T(u)=v$.

$$T(u)=v$$

$$\begin{bmatrix} -65u_1+128u_2+10u_3-262u_4+40u_5 \\ 36u_1-73u_2-u_3+151u_4-16u_5 \\ -44u_1+88u_2+5u_3-180u_4+24u_5 \\ 34u_1-68u_2-3u_3+140u_4-18u_5 \\ 12u_1-24u_2-u_3+49u_4-5u_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -65 & 128 & 10 & -262 & 40 \\ 36 & -73 & -1 & 151 & -16 \\ -44 & 88 & 5 & -180 & 24 \\ 34 & -68 & -3 & 140 & -18 \\ 12 & -24 & -1 & 49 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هذه المعادلة هي نظام من المعادلات الخطية في المتغيرات u_i ولكن متجه الثوابت يحتوي رموز. على وجه العموم، يمكنك اختزال المصفوفة الموسعة صفيا. ومع ذلك، في هذه الحالة الخاصة، مصفوفة المعاملات من الحجم 5×5 غير شاذة ومن ثم يكون لها معكوس.

$$\begin{bmatrix} -65 & 128 & 10 & -262 & 40 \\ 36 & -73 & -1 & 151 & -16 \\ -44 & 88 & 5 & -180 & 24 \\ 34 & -68 & -3 & 140 & -18 \\ 12 & -24 & -1 & 49 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} -47 & 92 & 1 & -181 & -14 \\ 27 & -55 & \frac{7}{2} & \frac{221}{2} & 11 \\ -32 & 64 & -1 & -126 & -12 \\ 25 & -50 & \frac{3}{2} & \frac{199}{2} & 9 \\ 9 & -18 & \frac{1}{2} & \frac{71}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

لذلك نجد أن

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 & 92 & 1 & -181 & -14 \\ 27 & -55 & \frac{7}{2} & \frac{221}{2} & 11 \\ -32 & 64 & -1 & -126 & -12 \\ 25 & -50 & \frac{3}{2} & \frac{199}{2} & 9 \\ 9 & -18 & \frac{1}{2} & \frac{71}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -47v_1 + 92v_2 + v_3 - 181v_4 - 14v_5 \\ 27v_1 - 55v_2 + \frac{7}{2}v_3 + \frac{221}{2}v_4 + 11v_5 \\ -32v_1 + 64v_2 - v_3 - 126v_4 - 12v_5 \\ 25v_1 - 50v_2 + \frac{3}{2}v_3 + \frac{199}{2}v_4 + 9v_5 \\ 9v_1 - 18v_2 + \frac{1}{2}v_3 + \frac{71}{2}v_4 + 4v_5 \end{bmatrix}$$

هذا يوضح أنه إذا أعطينا متجه v، فإنه يمكننا استخدام مركباته في التعبير الأخير لتكوين متجه u بحيث $T(u) = v$. لذلك من تعريف ٧-٣-١، T يكون فوقي.

مثال ٧-٣-٤. نعتبر التحويل الخطي $T : P_3 \to M_{22}$ المعرف كما يلي

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}$$

لبيان أن هذا التحويل الخطي يكون فوقي، نبدأ باختيار عنصر اختياري في النطاق المصاحب (مصفوفة من الحجم 2×2)

$$v = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

ونحاول إيجاد عنصر في النطاق (كثيرة حدود من الدرجة الثالثة)

$$u = a + bx + cx^2 + dx^3$$

بحيث $T(u) = v$. الآن

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} &= v \\ &= T(u) \\ &= T(a+bx+cx^2+dx^3) \\ &= \begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}\end{aligned}$$

تساوي المصفوفات يؤدي إلى نظام من المعادلات في أربعة متغيرات x, y, z, w ،

$$\begin{aligned} a+b &= x \\ a-2c &= y \\ d &= z \\ b-d &= w \end{aligned}$$

والذي يمكن كتابه على الصورة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات غير شاذة، ومن ثم يكون لها معكوس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك يكون

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x-z-w \\ z+w \\ \frac{1}{2}(x-y-z-w) \\ z \end{bmatrix}$$

ومن ثم كثيرة الحدود

$$u=(x-z-w)+(z+w)x+\tfrac{1}{2}(x-y-z-w)x^2+zx^3$$

كمدخل تنتج المصفوفة v كمخرج دون النظر إلى كيفية اختيار v. وهذا يعني أن T يكون فوقي. دعنا نحسب تأثير T على u،

$$\begin{aligned} &T(u) \\ &=T((x-z-w)+(z+w)x+\tfrac{1}{2}(x-y-z-w)x^2+zx^3) \\ &=\begin{bmatrix} (x-z-w)+(z+w) & (x-z-w)-2(\frac{1}{2}(x-y-z-w)) \\ z & (z+w)-z \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \\ &=v \end{aligned}$$

مدى التحويل الخطي

للتحويل الخطي $T:U\to V$ ، المدى يكون مجموعة جزئية من النطاق المصاحب V. بصورة غير رسمية، هي مجموعة كل مخرجات التحويل الخطي التي تنشأ عندما يؤثر على كل المدخلات الممكنة من النطاق. سوف يكون للمدى بعض الارتباطات الطبيعية مع فضاء الأعمدة لمصفوفة.

تعريف ٧-٣-٥. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. **مدى** T range هو المجموعة

$$R(T)=\{T(u):u\in U\}$$

مثال ٧-٣-٦. نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^5$ ، حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 - 3x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر $\mathbb{C}^5$ التي تنتمي إلى $R(T)$، نوجد تلك المتجهات v بحيث $T(u) = v$ لبعض $u \in \mathbb{C}^3$،

$$\begin{aligned} v &= T(u) \\ &= \begin{bmatrix} -u_1 + u_2 - 3u_3 \\ -u_1 + 2u_2 - 4u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 \\ 2u_1 + 3u_2 + u_3 \\ u_1 + 2u_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_1 \\ u_1 \\ 2u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ 2u_2 \\ u_2 \\ 3u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3u_3 \\ -4u_3 \\ u_3 \\ u_3 \\ 2u_3 \end{bmatrix} \\ &= u_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

هذا يعني أن كل مخرج لـ T (بتعبير آخر المتجه v) يمكن كتابته كتركيبة خطية من المتجهات الثلاثة

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

باستخدام الكميات القياسية u_1 ، u_2 و u_3. علاوة على ذلك، حيث أن u يمكن أن يكون أي عنصر في $\mathbb{C}^3$، مثل هذه التركيبات الخطية يكون مخرج. هذا يعني أن

$$R(T)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

المتجهات الثلاثة في مجموعة الامتداد هذه لـ $R(T)$ تكون مجموعة مرتبطة خطيا (تحقق من ذلك). ومن ثم يمكننا إيجاد تمثيل أكثر اقتصادا بأي طريقة من الطرق التي سبق دراستها. سوف نضع المتجهات كصفوف مصفوفة، نختزلها صفيا، نستبعد الصفوف الصفرية وبتطبيق نظرية ٣-٥-١٦ يمكننا وصف مدى T بالأساس

$$R(T)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\-7\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\5\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

نعلم أن المجموعة الممتدة من المتجهات تكون دائما فضاء جزئي (نظرية ٤-٢-١٣) لذلك المدى المحسوب في مثال ٧-٣-٦ يكون دائما فضاء جزئي. هذا ليس مصادفة، مدى التحويل الخطي دائما فضاء جزئي.

نظرية ٧-٣-٧. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. إذن مدى T، $R(T)$، يكون فضاءا جزئيا من V.

البرهان: يمكننا تطبيق اختبار الأجزاء الثلاثة في نظرية ٤-٢-٣. أولا، $0_U\in U$ و $T(0_U)=0_V$ من نظرية ٧-١-٦، لذلك $0_V\in R(T)$ والمدى يكون مجموعة غير خالية.

نفـــرض أن $x, y \in R(T)$. هـــل $x + y \in R(T)$ ؟ إذا كـــان $x + y \in R(T)$ فإنه يوجد متجهين $w, z \in U$ بحيث $T(w) = x$ و $T(z) = y$. حيث أن U فضاء اتجاهي، $w + z \in U$. إذن

$$T(w+z) = T(w) + T(z)$$
$$= x + y$$

إذن وجدنا عنصر في النطـاق $w + z$ تحت تـأثير T كمدخل يعطـي $x + y$ كمخرج. هذا يعنـي أن $x + y$ يكون عنصر فـي $R(T)$. وهذا يحقق شرط الإغلاق لجمع المتجهات.

نفـرض أن $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in R(T)$. هـل $\alpha x \in R(T)$ ؟ إذا كـان $\alpha x \in R(T)$، فإنه يوجد متجه $w \in U$ بحيث $T(w) = x$. حيث أن U فضاء اتجاهي، يكون $\alpha w \in U$. إذن

$$T(\alpha w) = \alpha T(w)$$
$$= \alpha x$$

إذن وجدنا عنصر في النطاق αw تحت تـأثير T كمدخل يعطـي αx كمخرج. هذا يعني أن αx يكون عنصر في $R(T)$. وهذا يحقق شرط الإغلاق لضرب متجه فـي قياسي. ومن نظرية ٤-٢-٣، $R(T)$ يكون فضاء جزئي من V.

مثال ٧-٣-٨. نعتبر التحويل الخطي $T : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$، حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 3x_5 \\ 3x_1 + 4x_3 - 6x_4 + 5x_5 \end{bmatrix}$$

لتحديد عناصر $\mathbb{C}^3$ التـي تنتمي إلـى $R(T)$، نوجد تلك المتجهات v بحيث $T(u) = v$ لبعض $u \in \mathbb{C}^5$.

$$v = T(u)$$

$$= \begin{bmatrix} 2u_1 + u_2 + 3u_3 - 4u_4 + 5u_5 \\ u_1 - 2u_2 + 3u_3 - 9u_4 + 3u_5 \\ 3u_1 + 4u_3 - 6u_4 + 5u_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2u_1 \\ u_1 \\ 3u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2 \\ -2u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3u_3 \\ 3u_3 \\ 4u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4u_4 \\ -9u_4 \\ -6u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5u_5 \\ 3u_5 \\ 5u_5 \end{bmatrix}$$

$$= u_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} + u_5 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن كل مخرج لـ T (بتعبير آخر المتجه v) يمكن كتابته كتركيبة خطية من المتجهات الخمسة

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

باستخدام الكميات القياسية u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 . علاوة على ذلك، حيث أن u يمكن أن يكون أي عنصر في $\mathbb{C}^5$، مثل هذه التركيبات الخطية يكون مخرج. هذا يعني أن

$$R(T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

المتجهات الخمسة في مجموعة الامتداد هذه لـ $R(T)$ تكون مجموعة مرتبطة خطيا (تحقق من ذلك). ومن ثم يمكننا إيجاد تمثيل أكثر اقتصادا بأي طريقة من الطرق التي سبق دراستها. سوف نضع المتجهات كصفوف مصفوفة، نختزلها صفيا، نستبعد الصفوف الصفرية وبتطبيق نظرية ٣-٥-١٦ يمكننا وصف مدى T بالأساس (اللطيف)

$$R(T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \mathbb{C}^3$$

على عكس التحويلات الخطية الأحادية التي لها أصغر نواة (التافهة)، التحويلات الخطية الفوقية لها أكبر مدى، كما يظهر من النظرية التالية.

نظرية ٧-٣-٩. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي. إذن T يكون فوقي إذا وفقط إذا كان مدى T يساوي النطاق المصاحب، $R(T)=V$.

البرهان: نفرض أن T يكون فوقي. من تعريف ٧-٣-٥، نعلم أن $R(T)\subseteq V$. لإثبات العلاقة العكسية، نفرض $v\in V$. إذن، حيث أن T فوقي، يوجد $u\in U$ بحيث أن $T(u)=v$. إذن $v\in R(T)$ ومن ثم $V\subseteq R(T)$. وهذا يبرهن أن $R(T)=V$.

الاتجاه الآخر، نفرض أن $R(T)=V$. لإثبات أن T فوقي، نختار $v\in V$. إذن $v\in R(T)$ ومن ثم يوجد $u\in U$ بحيث $T(u)=v$. أي أن T يكون فوقي.

مثال ٧-٣-١٠. في مثال ٧-٣-٢ بينا أن التحويل الخطي المعطى ليس فوقيا، وذلك بتكوين متجه من النطاق المصاحب لا يمكن الحصول عليه كمخرج لـ T لأي متجه مدخل من النطاق. من أين أتى هذا المتجه؟ الإجابة القصيرة هي أن المتجه

$$v=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\-1\\4\end{bmatrix}$$

قد تم تكوينه ليكون خارج مدى T. كيف يتم ذلك؟ أولا مدى T يعطى بالصورة

$$R(T)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

نفرض أن v^* عنصر في المدى مركباته الأربع الأولى هي -1 ، 2، 3 و -1 ، بهذا الترتيب. إذن لكي يكون في $R(T)$ ، لابد أن يكون

$$v^*=(-1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\-1\\-8\end{bmatrix}$$

لذلك المتجه الوحيد في المدى الذي له هذا المركبات الأربع الأولى المعينة، يجب أن يكون له المركبة الخامسة -8. بوضع المركبة الخامسة بأي قيمة أخرى (4 مثلا) سوف تنتج متجه (v في مثال ٧-٣-٢) خارج المدى. أي محاولة لإيجاد مدخل لـ T كي ينتج v كمخرج سوف تفشل.

كلما كان مدى تحويل خطي ليس هو كل النطاق المصاحب، يمكننا توظيف هذه الآلة واستنتاج أن التحويل الخطي ليس فوقيا. هذه طريقة أخرى لرؤية نظرية ٧-٣-٩ . للتحويلات الخطية الفوقية، المدى يكون هو كل النطاق المصاحب ولا يوجد اختيار لمتجه v يكون في V ولا يكون في المدى.

مثال ٧-٣-١١ . في مثال ٧-٣-٢ مدى التحويل الخطي المعطى يحدد من

$$R(T)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-3\\-7\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\\5\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

فضاء جزئي من البعد 2 من $\mathbb{C}^5$. حيث أن $R(T)\neq\mathbb{C}^5$ ، نظرية ٧-٣-٩ تقول أن T ليس فوقيا.

مثال ٧-٣-١٢ . في مثال ٧-٣-٨ حسبنا مدى التحويل الخطي المعطى فكان

$$R(T)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

حيث أن الأساس لهذا الفضاء الجزئي هي مجموعة متجهات الوحدة القياسية في $\mathbb{C}^3$ (نظرية ٤-٤-٢) فيكون $R(T)=\mathbb{C}^3$، ومن نظرية ٧-٣-٩ T يكون فوقي.

المجموعات المولدة والتحويلات الخطية الفوقية

كما أن التحويلات الخطية الأحادية مرتبطة بالاستقلال الخطي (نظرية ٧-٢-١٤ و نظرية ٧-٢-١٥)، التحويلات الخطية الفوقية تكون مرتبطة بالمجموعات المولدة.

نظرية ٧-٣-١٣. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي وأن

$$S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t\}$$

تولد U. إذن

$$R=\{T(u_1),T(u_2),T(u_3),\ldots,T(u_t)\}$$

تولد $R(T)$.

البرهان: المطلوب إثبات أن $R(T)=\langle R\rangle$. أولا نبرهن أن $R(T)\subseteq\langle R\rangle$. لإتمام ذلك نفرض أن $v\in R(T)$. إذن يوجد متجه $u\in U$ بحيث $T(u)=v$. وحيث أن S تولد U ، توجد كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_t$ بحيث

$$u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t$$

إذن

$$\begin{aligned}v&=T(u)\\&=T(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\ldots+\alpha_tu_t)\\&=\alpha_1T(u_1)+\alpha_2T(u_2)+\alpha_3T(u_3)+\ldots+\alpha_tT(u_t)\end{aligned}$$

وهذا يوضح أن $v\in\langle R\rangle$ ومن ثم $R(T)\subseteq\langle R\rangle$.

لإثبات علاقة الاحتواء العكسي، نختار عنصر في امتداد R ، ليكن $v\in\langle R\rangle$. إذن توجد كميات قياسية $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_t$ بحيث

$$\begin{aligned}v&=\beta_1T(u_1)+\beta_2T(u_2)+\beta_3T(u_3)+\ldots+\beta_tT(u_t)\\&=T(\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3+\ldots+\beta_tu_t)\end{aligned}$$

هذا يبين أن v يكون مخرج للتحويل الخطي T، ومن ثم $v \in R(T)$.
لذلك $R(T) \subseteq \langle R \rangle$. وبالتالي تتحقق المتساوية $R(T) = \langle R \rangle$. بتعبير آخر R تولد $R(T)$.

نظرية ٧-٣-١٣ تزودنا بطريقة سهلة للبدء بتكوين أساس لمدى تحويل خطي، حيث أن تكوين مجموعة امتداد يتطلب حساب قيمة التحويل الخطي على مجموعة توليد النطاق. عمليا الاختيار الأمثل لمجموعة مولدة للنطاق سوف تكون صغيرة قدر الإمكان، بتعبير آخر، أساس. المجموعة المولدة للنطاق المصاحب الناتجة قد لا تكون مستقلة خطيا، لذلك لإيجاد أساس للمدى سوف يتطلب إبعاد المتجهات الزائدة من المجموعة المولدة.

مثال ٧-٣-١٤. نعرف التحويل الخطي $T : M_{22} \to P_2$ كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) =$$
$$(a+2b+8c+d)+(-3a+2b+5d)x+(a+b+5c)x^2$$

مجموعة التوليد المناسبة لـ M_{22} تكون الأساس

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

لذلك من نظرية ٧-٣-١٣، مجموعة توليد لـ $R(T)$ تكون

$$R = \left\{\mathrm{T}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\}$$
$$= \{1-3x+x^2, 2+2x+x^2, 8+5x^2, 1+5x\}$$

المجموعة R ليست مستقلة خطيا، ومن ثم إذا رغبنا في أساس لـ $R(T)$، نحتاج لحذف بعض المتجهات الزائدة. علاقتي ارتباط خطي خاصتين على R هما

$$(-2)(1-3x+x^2)+(-3)(2+2x+x^2)+(8+5x^2)$$
$$= 0+0x+0x^2 = 0$$
$$(1-3x+x^2)+(-1)(2+2x+x^2)+(1+5x)$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

هاتان العلاقتان تسمحان لنا بحذف $8+5x^2$ و $1+5x$ من R بدون التأثير على خاصية أن R تولد $R(T)$. المتجهان المتبقيان يكونا مستقلين خطيا (تحقق من ذلك)، لذلك يمكننا كتابة

$$R(T) = \left\langle \left\{ 1-3x+x^2, 2+2x+x^2 \right\} \right\rangle$$

ومن ثم $\dim(R(T)) = 2$.

عناصر المدى بدقة هي تلك العناصر من النطاق المصاحب التي الصورة العكسية لها غير خالية.

نظرية ٧-٣-١٥. نفرض أن $T: U \to V$ تحويل خطي. إذن

$$v \in R(T) \qquad \text{إذا وفقط إذا كان} \qquad T^{-1}(v) \neq \phi$$

البرهان: نفرض $v \in R(T)$، إذن يوجد متجه $u \in U$ بحيث $T(u) = v$. هذا يعني أن $u \in T^{-1}(v)$ ومن ثم الصورة العكسية لـ v تكون غير خالية.

من جهة أخرى، نفرض أن الصورة العكسية لـ v تكون غير خالية. ومن ثم يمكن اختيار متجه $u \in U$ بحيث $T(u) = v$. إذن $v \in R(T)$.

نظرية ٧-٣-١٦. نفرض أن $T: U \to V$ تحويل خطي و

$$B = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m\}$$

أساس لـ U. إذن T يكون فوقي إذا وفقط إذا كانت

$$C = \{T(u_1), T(u_2), T(u_3), \ldots, T(u_m)\}$$

مجموعة مولدة لـ V.

البرهان: نفرض أن T فوقي. حيث أن B أساس، B تكون مجموعة مولدة لـ U. إذن نظرية ٧-٣-١٣ تقول أن C تولد $R(T)$. ولكن الفرض بأن T فوقي يعني أن $V = R(T)$ (نظرية ٧-٣-٩)، لذلك C تولد V.

من جهة أخرى، نفرض أن C تولد V. لإثبات أن T يكون فوقي، سوف نبين أن كل عنصر في V يكون مخرج لـ T لبعض المدخلات. نفرض أن $v \in V$. كعنصر في V، يمكننا كتابة v كتركيبة خطية من

المجموعة المولدة C. ومن ثم يوجد كميات قياسية $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m$ بحيث

$$v = \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \beta_3 T(u_3) + \ldots + \beta_m T(u_m)$$

الآن نعرف المتجه $u \in U$ كما يلي

$$u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \ldots + \beta_m u_m$$

إذن

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \ldots + \beta_m u_m) \\ &= \beta_1 T(u_1) + \beta_2 T(u_2) + \beta_3 T(u_3) + \ldots + \beta_m T(u_m) \\ &= v \end{aligned}$$

لذلك إذا أعطينا أي اختيار لمتجه $v \in V$، يمكننا تصميم مدخل $u \in U$ لإنتاج v كمخرج لـ T. لذلك من تعريف ٧-٣-١، T يكون فوقي.

التحويلات الخطية الفوقية والبعد

نظرية ٧-٣-١٧. نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي فوقي. إذن $\dim(U) \geq \dim(V)$.

البرهان: نفرض على العكس أن $m = \dim(U) < \dim(V) = t$. نفرض أن B أساس لـ U، يحتوي m متجه. بتطبيق T لكل عنصر في B لتكوين مجموعة C والتي تكون مجموعة جزئية من V. من نظرية ٧-٣-١٦، C تكون مجموعة مولدة لـ V بها m متجه أو أقل. لذلك يكون لدينا مجموعة من m متجه أو أقل تولد V، فضاء اتجاهي من البعد t، حيث $m < t$. وهذا يناقض نظرية ٤-٥-١٩، لذلك الفرض يكون خاطئ ومن ثم $\dim(U) \geq \dim(V)$.

مثال ٧-٣-١٨. نعتبر التحويل الخطي $T : P_4 \to P_5$ حيث

$$T(p(x)) = (x-2)p(x)$$

حيث أن $\dim(P_4) = 5 < 6 = \dim(P_5)$، T لا يمكن أن يكون فوقيا.

لاحظ أنه في المثال الأخير لم نستخدم الصورة الفعلية لتعريف الدالة. فقط المقارنة بين بعدي النطاق والنطاق المصاحب يكفي لاستنتاج أن التحويل الخطي ليس فوقيا.

تحصيل التحويلات الخطية الفوقية

رأينا سابقا كيف نضم تحويلين خطيين ليعطيا تحويل خطي جديد، خاصة كيفية بناء تحصيل تحويلين خطيين (تعريف ٧-١-٢٦) . سوف يكون من المفيد أن نبرهن أن تحصيل تحويلين خطيين فوقيين يكون أيضا تحويل خطي فوقي، وهو ما نبرهنه الآن.

نظرية ٧-٣-١٩. نفرض أن $T:U \to V$ و $S:V \to W$ تحويلين خطيين فوقيين. إذن $(S \circ T):U \to W$ يكون تحويل خطي فوقي.

البرهان: التحصيل يكون تحويل خطي تم برهانه في نظرية ٧-١-٢٧ لذلك نحتاج فقط لإثبات أنه يكون فوقي. نفرض أن $w \in W$. حيث أن S فوقي، يجب أن يوجد متجه $v \in V$ بحيث $S(v) = w$. مع وجود v، وحيث أن T فوقي، إذن يوجد متجه $u \in U$ بحيث $T(u) = v$. الآن

$$\begin{aligned}(S \circ T)(u) &= S(T(u)) \\ &= S(v) = w\end{aligned}$$

ومن ثم لكل متجه $w \in W$ يوجد متجه $u \in U$ بحيث $(S \circ T)(u) = w$ وهذا يعني أن $S \circ T$ يكون فوقي.

تمارين ٧-٣

١- نفرض أن $T:\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^8$ تحويل خطي. وضح لماذا لا يكون T فوقي.

٢- ما هي العلاقة بين التحويل الخطي الفوقي ومداه؟

٣- التحويل الخطي $S:\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ ليس فوقيا. أوجد متجه $w \in \mathbb{C}^3$ بحيث تكون الصورة العكسية له خالية، حيث

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 \end{bmatrix}$$

٤- حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^5 \to P_3$ فوقي حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}\right) = a + (b+c)x + (c+d)x^2 + (d+e)x^3$$

٥- حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T : P_3 \to \mathbb{C}^5$ فوقي حيث

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = \begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+d \\ a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

٦- نعرف التحويل الخطي $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 - 10x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد أساس لـ مدى T، $R(T)$. هل T فوقي ؟

٧- نعرف التحويل الخطي $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b+2c \\ 2c \\ a+b+c \end{bmatrix}$$

أوجد أساس لـ مدى T، $R(T)$. هل T فوقي ؟

٨- نعرف التحويل الخطي $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$ كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ -a+b+c \\ a+b+c \end{bmatrix}$$

أوجد أساس لـ مدى T، $R(T)$. هل T فوقي ؟

٩- نعرف التحويل الخطي $T : \mathbb{C}^3 \to M_{22}$ كما يلي

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b & a+b+c \\ a+b+c & a+d \end{bmatrix}$$

أوجد أساس لـ مدى T، $R(T)$. هل T فوقي ؟

١٠- نعرف التحويل الخطي $T: P_2 \to P_4$ بالصورة $T(p(x)) = p'(x)$ حيث $p'(x)$ هي المشتقة الأولى. أوجد أساس لـ $R(T)$. هل T فوقي ؟

١١- بين أن التحويل الخطي T ليس فوقيا بإيجاد عنصر في النطاق المصاحب ، v ، بحيث لا يوجد متجه u بحيث $T(u) = v$، حيث

$$T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2a+3b-c \\ 2b-2c \\ a-b+2c \end{bmatrix}$$

١٢- نفرض أن $T: U \to V$ و $S: V \to W$ تحويلين خطيين. برهن أن $R(S \circ T) \subseteq R(S)$.

١٣- نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$. نعرف التحويل الخطي $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ، $T(x) = Ax$. برهن أن مدى T يساوي فضاء أعمدة A، $R(T) = C(A)$.

٧-٤ التحويلات الخطية المنعكسة

Invertible Linear Transformations

في هذا الفصل نختتم حديثنا عن التحويلات الخطية باعتبار التحويلات الخطية التي لها الخاصيتين السابق دراستهما كل على حدة، الأحادية والفوقية.

تعريف ٧-٤-١. تحويل الوحدة الخطي identity linear transformation على الفضاء الاتجاهي W يعرف كما يلي

$$I_W : W \to W \text{ ، } I_W(w) = w$$

بصورة غير رسمية I_W هو الدالة التي لا تفعل شيء. يمكن التحقق أن I_W يكون تحويل خطي، ومن ثم نحسب النواة والمدى لبيان كل من خاصية الأحادية والفوقية.

تعريف ٧-٤-٢. نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي. إذا كانت توجد دالة $S : V \to U$ بحيث $T \circ S = I_V$ و $S \circ T = I_U$
إذن T يكون **منعكس** invertible. في هذه الحالة نقول أن S **معكوس** T inverse ونكتب $S = T^{-1}$.

الآن نعطي مثال لتحويل خطي منعكس. كما تعودنا في بداية الفصول، لن نهتم بكيف جاء S ولكن فقط مجرد توضيح التعريف.

مثال ٧-٤-٣. نعتبر التحويل الخطي $T : P_3 \to M_{22}$ حيث

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}$$

نعرف الدالة $S : M_{22} \to P_3$ كما يلي

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$
$$= (a-c-d) + (c+d)x + \frac{1}{2}(a-b-c-d)x^2 + cx^3$$

إذن

$$(T \circ S)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= T\left((a-c-d)+(c+d)x+\frac{1}{2}(a-b-c-d)x^2+cx^3\right)\\
&= \begin{bmatrix} (a-c-d)+(c+d) & (a-c-d)-2(\frac{1}{2}(a-b-c-d)) \\ c & (c+d)-c \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\\
&= I_{M_{22}}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

كذلك

$$
\begin{aligned}
&(S\circ T)(a+bx+cx^2+dx^3)\\
&\quad = S(T(a+bx+cx^2+dx^3))\\
&\quad = S\left(\begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}\right)\\
&\quad = (a+b-d-(b-d))+(d+b-d)x\\
&\qquad +\left(\frac{1}{2}((a+b)-(a-2c)-d-(b-d))\right)x^2+dx^3\\
&\quad = a+bx+cx^2+dx^3\\
&\quad = I_{p_3}(a+bx+cx^2+dx^3)
\end{aligned}
$$

مما سبق يتضح أن T تكون منعكسة وأن $S=T^{-1}$.

مثال ٧-٤-٤. نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^3\to M_{22}$ المعرف كما يلي

$$
T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a-b & 2a+2b+c \\ 3a+b+c & -2a-6b-2c \end{bmatrix}
$$

نفرض أننا نبحث عن دالة معكوس $S:M_{22}\to\mathbb{C}^3$.

أولا نتحقق أن المصفوفة من الحجم 2×2، $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 8 & 2\end{bmatrix}$ ليست في مدى T. هذا يتحول إلى محاولة إيجاد مدخل لـ T، $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$، بحيث

$$\begin{aligned} a-b&=5\\ 2a+2b+c&=3\\ 3a+b+c&=8\\ -2a-6b-2c&=2 \end{aligned}$$

هذا النظام من المعادلات غير متوافق، وبالتالي لا يوجد متجه عمود كمدخل ومن ثم $A\notin R(T)$. كيف نعرف $S(A)$ ؟ لاحظ أن

$$T(S(A))=(T\circ S)(A)=I_{M_{22}}(A)=A$$

لذلك أي تعريف نعطيه لـ $S(A)$ يجب أن يكون متجه عمود الذي يرسله T إلى A وبالتالي يكون $A\in R(T)$، خلافا لتعريف T. هذا يكون كافيا لبيان أنه لا توجد دالة S تسمح لنا باستنتاج أن T يكون منعكس.

على الرغم من أننا نعلم الآن أن T غير منعكس، لنقف مع هذا المثال قليلا. نتحقق من أن

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 2\end{bmatrix}=B \quad \text{،} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 8\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 2\end{bmatrix}=B$$

كيف نريد تعريف $S(B)$؟

$$S(B)=S\left(T\left(\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\right)\right)=(S\circ T)\left(\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\right)=I_{\mathbb{C}^3}\left(\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}$$

أو

$$S(B)=S\left(T\left(\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 8\end{bmatrix}\right)\right)=(S\circ T)\left(\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 8\end{bmatrix}\right)=I_{\mathbb{C}^3}\left(\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 8\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\ -3\\ 8\end{bmatrix}$$

أي تعريف سوف نعطيه لـ S؟ كلاهما ضروري. ولكن حينئذ S لا تكون دالة. ومن ثم يكون لدينا سبب ثاني لنعلم أنه لا توجد دالة S التي تسمح لنا بالقول بأن T منعكس.

في مثال ٧-٤-٤ يمكنك ملاحظة أن T ليس فوقي، حيث أن المصفوفة A ليست في مدى T. أيضا T ليس أحادي، حيث أن مدخلين مختلفين من متجهات الأعمدة يرسلها T إلى نفس المصفوفة B. التحويلات الخطية التي ليست فوقية تؤدي إلى دوال معكوس مفترضة S ليست معرفة على المدخلات خارج مدى T. التحويلات الخطية التي ليست أحادية تؤدي إلى دوال معكوس مفترضة لها أكثر من قيمة لنفس المدخل. سوف نصوغ هذه الأفكار في نظرية ٧-٤-٧ .

ولكن لاحظ أولا أنه في تعريف ٧-٤-٢ المطلوب الوحيد للمعكوس (إذا كان موجودا) هو أن يكون دالة. عندما يكون موجودا فإنه أيضا يكون تحويلا خطيا.

نظرية ٧-٤-٥. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي منعكس. إذن الدالة $T^{-1}:V \to U$ تكون تحويل خطي.

البرهان: سوف يكون البرهان من خلال التحقق من تعريف ٧-١-١ نفرض أن $x,y \in V$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، إذن

$$\begin{aligned}T^{-1}(x+y) &= T^{-1}(T(T^{-1}(x))+T(T^{-1}(y))) \\ &= T^{-1}(T(T^{-1}(x)+T^{-1}(y))) \\ &= T^{-1}(x)+T^{-1}(y)\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}T^{-1}(\alpha x) &= T^{-1}(\alpha T(T^{-1}(x))) \\ &= T^{-1}(T(\alpha T^{-1}(x))) \\ &= \alpha T^{-1}(x)\end{aligned}$$

ومن ثم T^{-1} يحقق المتطلب في تعريف ٧-١-١ ومن ثم يكون تحويل خطي.

لذلك عندما يكون التحويل الخطي T له معكوس، فإن T^{-1} يكون أيضا تحويل خطي، علاوة على ذلك T^{-1} يكون تحويل خطي منعكس ومعكوسه هو الذي تتوقعه.

نظرية ٧-٤-٦. نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي منعكس. إذن T^{-1} يكون تحويل خطي منعكس و $(T^{-1})^{-1} = T$.

البرهان: حيث أن T منعكس فإنه من تعريف ٧-٤-٢، توجد دالة $T^{-1} : V \to U$ بحيث

$$T^{-1} \circ T = I_U \qquad \text{و} \qquad T \circ T^{-1} = I_V$$

بالإضافة إلى ذلك، من نظرية ٧-٤-٥، T^{-1} يكون تحويل خطي. في ضوء تعريف ٧-٤-٢، هذه مع اعتبار أن T تلعب دور S نجد أن T^{-1} يكون منعكس وأن معكوسه هو T، أي أن $(T^{-1})^{-1} = T$.

قابلية الانعكاس

الآن نعلم ما هو التحويل الخطي المنعكس، ولكن أي التحويلات الخطية يكون له معكوس؟ الآن النظرية التي نعد لها على طول هذا الباب.

نظرية ٧-٤-٧. نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي. إذن T يكون منعكس إذا وفقط إذا كان أحادي وفوقي.

البرهان: نفرض أن T منعكس. إذن يمكننا توظيف المعكوس، T^{-1} (تعريف ٧-٤-٢). لبيان أن T أحادي، نفرض $x, y \in U$ ونفرض أن $T(x) = T(y)$،

$$\begin{aligned} x &= I_U(x) \\ &= (T^{-1} \circ T)(x) \\ &= T^{-1}(T(x)) \\ &= T^{-1}(T(y)) \\ &= (T^{-1} \circ T)(y) \end{aligned}$$

$$= I_U(y)$$
$$= y$$

ومن ثم، من تعريف ٧-٢-١، T يكون أحادي.
لإثبات أن T يكون فوقي، نفرض $v \in V$. إذن $T^{-1}(v)$ يكون متجه في U. نحسب

$$T(T^{-1}(v)) = (T \circ T^{-1})(v)$$
$$= I_V(v) = v$$

ومن ثم يكون T فوقي.
في الاتجاه العكسي نفرض أن T أحادي وفوقي. سوف نكون دالة $S : V \to U$ والتي تبرهن على أن T يكون منعكس. نختار أي $v \in V$. حيث أن T فوقي، نظرية ٧-٣-٩ تقول أن $R(T) = V$، لذلك $v \in R(T)$. من نظرية ٧-٣-١٥ الصورة العكسية $T^{-1}(v)$ لـ v تكون غير خالية. نختار متجه u بحيث $u \in T^{-1}(v)$.
حيث أن $T^{-1}(v)$ غير خالية فإنه من نظرية ٧-٢-٩ يكون

$$T^{-1}(v) = \{u + z : z \in K(T)\}$$

ولكن T أحادي، ومن ثم نواته تكون تافهة، $K(T) = \{0\}$. لذلك $T^{-1}(v) = \{u\}$. الآن يمكننا تعريف S بالصورة $S(v) = u$. هذا هو مفتاح برهان الجزء الثاني من النظرية.
عادة الصورة العكسية لمتجه من النطاق المصاحب قد تكون مجموعة خالية، أو مجموعة لانهائية. شرط الفوقية يتطلب أن الصورة العكسية لا تكون خالية، ثم شرط الأحادية يحدد الصورة العكسية على عنصر واحد. وحيث أن اختيارنا لـ v كان اختياريا، كل صورة عكسية لـ T تكون مجموعة بها عنصر واحد. وهذا يسمح لنا بتكوين S كدالة. الآن تم تعريفها، التأكد من أنها معكوس T سوف يكون سهلا. الآن نفعل ذلك
نختار $u \in U$. نعرف $v = T(u)$، إذن $T^{-1}(v) = \{v\}$، ومن ثم $S(v) = u$ و

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)) = S(v) = u = I_U(u)$$

وحيث أن اختيار u كان اختياريا، يكون لدينا التساوي $S \circ T = I_U$.
الآن نختار $v \in V$. نعرف u بأنه المتجه الوحيد في المجموعة $T^{-1}(v)$، بتعبير آخر $u = S(v)$. إذن $T(u) = v$ وبالتالي

$$(T \circ S)(v) = T(S(v)) = T(u) = v = I_V(v)$$

وحيث أن اختيار v كان اختياريا يكون لدينا التساوي $T \circ S = I_V$.

مثال ٧-٤-٨. نعتبر التحويل الخطي $T : S_{22} \to P_2$ ، حيث

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b+c) + (-a+2c)x + (2a+3b+6c)x^2$$

يمكن التحقق من أن T يكون منعكس، ربما بتحديد أن نواة T تكون تافهة وأن مدى T هو كل P_2.

من نظرية ٧-٤-٧ نعلم أن T^{-1} يكون موجود وسوف نقرر بسهولة أن T^{-1} يكون تحويل خطي وذلك من نظرية ٧-٤-٥. لتحديد السلوك التام لـ $T^{-1} : P_2 \to S_{22}$ يمكننا ببساطة تحديد تأثيره على أساس النطاق، P_2. هذا جوهر نظرية ٧-١-١٣ ومثال ممتاز للتطبيق. نختار أي أساس لـ P_2، مثل $B = \{1, x, x^2\}$. قيم T^{-1} لهذه العناصر الثلاثة للأساس سوف تكون هي العناصر المنفردة للصور العكسية لها.

$T^{-1}(1)$:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 0x + 0x^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(صورة عكسية) $$T^{-1}(1) = \left\{\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}\right\}$$

(دالة) $$T^{-1}(1) = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$$

$T^{-1}(x)$:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 + 1x + 0x^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(صورة عكسية) $$T^{-1}(x) = \left\{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

(دالة) $$T^{-1}(x) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$T^{-1}(x^2)$:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0 + 0x + 1x^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(صورة عكسية) $$T^{-1}(x^2) = \left\{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(دالة) $$T^{-1}(x^2) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

نظرية ٧-١-١٣ تقول، بصورة غير رسمية، أنه يكفي معرفة ماذا يفعل التحويل الخطي مع الأساس. لدينا مخرجات T^{-1} لأساس، لذلك من نظرية ٧-١-١٣ يوجد تحويل خطي وحيد بهذه المخرجات.

نعتبر عنصر في P_2 ، ليكن $p + qx + rx^2$ ، إذن

$$\begin{aligned} T^{-1}(p + qx + rx^2) &= T^{-1}(p(1) + q(x) + r(x^2)) \\ &= pT^{-1}(1) + qT^{-1}(x) + rT^{-1}(x^2) \end{aligned}$$

$$= p\begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 10 & -3 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -6p-3q+2r & 10p+4q-3r \\ 10p+4q-3r & -3p-q+r \end{bmatrix}$$

لاحظ كيف أن تركيبة خطية في نطاق T^{-1} تحولت إلى تركيبة خطية في النطاق المصاحب لـ T^{-1}، حيث نعلم من نظرية ٧-٢-١٤ أن T^{-1} تحويل خطي.

نظرية ٧-٤-٩. نفرض أن $T:U \to V$ و $S:V \to W$ تحويلين خطيين منعكسين. إذن التحصيل $(S \circ T):U \to W$ يكون تحويل خطي منعكس.

البرهان: حيث أن S و T كلاهما تحويل خطي، $S \circ T$ يكون أيضا تحويل خطي، من نظرية ٧-١-٢٧. حيث أن S و T كلاهما منعكس، نظرية ٧-٤-٧ تقول أن S و T كلاهما أحادي وفوقي. إذن من نظرية ٧-٢-١٨، $S \circ T$ يكون أحادي ومن نظرية ٧-٣-١٩، $S \circ T$ يكون فوقي. إذن من نظرية ٧-٤-٧، $S \circ T$ يكون منعكس.

نظرية ٧-٤-١٠. نفرض أن $T:U \to V$ و $S:V \to W$ تحويلين خطيين منعكسين. إذن التحصيل $S \circ T$ يكون منعكس و $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

البرهان: لكل $w \in W$

$$\begin{aligned} ((S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}))(w) &= S(T(T^{-1}(S^{-1}(w)))) \\ &= S(I_V(S^{-1}(w))) \\ &= w \\ &= I_W(w) \end{aligned}$$

لذلك $(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1}) = I_W$.

أيضا

$$\begin{aligned} ((T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T))(u) &= T^{-1}(S^{-1}(S(T(u)))) \\ &= T^{-1}(I_V(T(u))) \end{aligned}$$

$$= T^{-1}(T(u))$$
$$= u$$
$$= I_U(u)$$

لذلك $(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T) = I_U$.

من تعريف ٧-٤-٢، $S \circ T$ يكون منعكس و $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

التراكيب (البنى) والتماثل

الفضاء الاتجاهي يعرف كمجموعة من الأشياء تسمى متجهات معرف عليها عملية جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي. العديد من التعريفات حول الفضاءات الاتجاهية تشتمل على تراكيب خطية، مثل مجموعة الامتداد والاستقلال الخطي. التعريفات الأخرى تبنى من هذه الأفكار، مثل الأساس والبعد. الخواص المعرفة للتحويل الخطي تتطلب من دالة احترام العمليات في الفضاءين الاتجاهيين اللذان هما النطاق والنطاق المصاحب. أخيرا التحويل الخطي المنعكس هو الذي يمكن أن يعكس اتجاهه وهو الذي له قرين يعكس تأثيره. هنا سوف نضع كل هذه الأفكار في واحدة.

الفضاء الاتجاهي له تركيبة (بنية) تتكون من تعريف عمليتين تتفاعلان بحيث تتحقق عشر خواص (تعريف ٤-١-١). عندما يمكن تعريف تحويل خطي منعكس بين فضاءين اتجاهيين، فإنه يمكن تحويل الأسئلة عن التراكيب الخطية (التوليد، الاستقلال الخطي، الأساس، البعد) من الفضاء الأول إلى الفضاء الثاني. الإجابات التي نحصل عليها من الفضاء الثاني يمكن أن تحول عكسيا، عن طريق التحويل الخطي العكسي وتفسر في الفضاء الاتجاهي الأول. نقول أن هذه التحويلات الخطية المنعكسة تحافظ على التراكيب. ونقول أن الفضاءين الاتجاهيين لهما نفس التركيبة (البنية). المصطلح الدقيق هو " متماثلان".

تعريف ٧-٤-١١. فضاءان اتجاهيان U و V يكونا **متماثلان** isomorphic إذا وجد تحويل خطي منعكس $T : U \to V$ نطاقه U ونطاقه المصاحب V. في هذه الحالة نكتب $U \cong V$ والتحويل الخطي يسمى **تماثل** isomorphism بين U و V.

بعض التعليقات القليلة عن هذا التعريف. أولا، كن حذرا في لغتك. فضاءان اتجاهيان يكونا إما متماثلان أو لا، هذا التعبير يطبق على زوج من الفضاءات الاتجاهية. أي تحويل خطي منعكس يسمى تماثل، هذا التعبير يطبق على الدوال. ثانيا، إذا أعطينا زوج من الفضاءات الاتجاهية فقد يوجد العديد من التماثلات بين الفضاءين. ولكن نأخذ واحد فقط لنقول أن الزوج متماثل. ثالثا، U يتماثل مع V أو V يتماثل مع U؟ لا يهم، حيث أن التحويل الخطي العكسي سوف يعطينا التماثل اللازم في الاتجاه العكسي. التماثل هي علاقة تكافؤ على مجموعة كل الفضاءات الاتجاهية.

مثال ٧-٤-١٢. نعتبر التحويل الخطي $T:P_3 \to M_{22}$ حيث

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix} a+b & a-2c \\ d & b-d \end{bmatrix}$$

حيث أن هذا التحويل الخطي أحادي وفوقي، فإنه يكون منعكس (نظرية ٧-٤-٧)، من تعريف ٧-٤-١١، P_3 و M_{22} يكونا متماثلان. هذا المثال يقودنا إلى الاعتقاد بأنه لا يوجد خلاف في البنية بين P_3 و M_{22}. بمفهوم خاص، هما نفس الشيء. ليسا متساويان، ولكن نفس الشيء. أحدهما جيد مثل الآخر. أحدهما هام مثل الآخر. هنا تطبيق أساسي للغاية لهذه الفكرة. نفرض أننا نريد أن نحسب التركيبة الخطية التالية في P_3

$$5(2+3x-4x^2+5x^3)+(-3)(3-5x+3x^2+x^3)$$

بدلا من حسابها مباشرة (وهي سهلة) سوف نطبق التحويل الخطي لتحويلها إلى تركيبة خطية من مصفوفات ومن ثم نحسب في M_{22} طبقا لتعريف العمليات في هذا الفضاء الاتجاهي

$$\begin{aligned} &T(5(2+3x-4x^2+5x^3)+(-3)(3-5x+3x^2+x^3)) \\ &\quad =5T(2+3x-4x^2+5x^3)+(-3)T(3-5x+3x^2+x^3) \\ &\quad =5\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} 31 & 59 \\ 22 & 8 \end{bmatrix}$$

الآن نحول النتيجة التي حصلنا عليها مرة أخري إلى P_3 بتطبيق T^{-1}، والذي تم إثباته في مثال ٧-٤-٣

$$T^{-1} : M_{22} \to P_3$$

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a-c-d)+(c+d)x+\frac{1}{2}(a-b-c-d)x^2+cx^3$$

نحسب

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 31 & 59 \\ 22 & 8 \end{bmatrix}\right) = 1+30x-29x^2+22x^3$$

وهو، كما نتوقع، تماما ما نريد حسابه للتركيبة الخطية الأصلية. لاحظ أن المقصود هنا هو كمثال توضيحي وليس هو طريقة للحسابات.

في مثال ٧-٤-١٢ تحاشينا الحسابات في P_3 بتحويل الحسابات إلى فضاء اتجاهي جديد، M_{22} ، عن طريق تحويل خطي منعكس (يعرف بالتماثل). المخطط التالي يهدف إلى تحويل الوضع العام لفضاءين اتجاهيين، U و V، وتحويل خطي منعكس، T ،

$$\begin{array}{ccc} u_1, u_2 & \xrightarrow{T} & T(u_1), T(u_2) \\ \downarrow + & & \downarrow + \\ u_1+u_2 & \xleftarrow[T^{-1}]{} & T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2) \end{array}$$

لفهم هذا المخطط، نبدأ من الركن يسار الأعلى ، ثم نسير لأسفل يمكننا حساب مجموع المتجهين باستخدام الجمع في الفضاء الاتجاهي U. البديل الأكثر التواء، على ضوء مثال ٧-٤-١٢، هو أن نبدأ الركن يسار الأعلى ثم نمضي قدما في اتجاه عقارب الساعة عبر أحرف المستطيل الثلاثة. لاحظ أن عملية جمع متجهين قد تمت في الفضاء

الاتجاهي V. ومن ثم. لأن T تحويل خطي، يمكننا القول أن نتيجة $T(u_1)+T(u_2)$ تساوي نتيجة $T(u_1+u_2)$. إذن الميزة الأساس هو أن ندرك أن تطبيق T^{-1} بوضوح الصيغة الثانية لهذه النتيجة إلى المجموع في الركن أسفل اليسار. لذلك يوجد طريقين للمجموع u_1+u_2، كل منهما يوظف الجمع من فضاء مختلف، ولكن أحدهما مباشر والآخر طريق ملتوية. يمكن تصميم مخطط مشابه للضرب في قياسي.

التحقق من البعد للفضاءين الاتجاهيين يمكن أن يجعلنا نقرر ما إذا كان الفضاءان متماثلين أم لا. هنا النظرية.

نظرية ٧-٤-١٣. نفرض أن U و V فضاءان متماثلان. إذن $\dim(U)=\dim(V)$.

البرهان: إذا كان U و V متماثلان فإنه يوجد تحويل خطي منعكس $T:U\to V$ (تعريف ٧-٤-١١). T يكون أحادي (من نظرية ٧-٤-٧)، ومن ثم، من نظرية ٧-٢-١٦ $\dim(U)\le\dim(V)$. أيضا T فوقي (نظرية ٧-٤-٧) ومن ثم ، من نظرية ٧-٣-١٧، $\dim(U)\ge\dim(V)$. النتيجة الحتمية لذلك هو $\dim(U)=\dim(V)$.

المكافئ العكسي لنظرية ٧-٤-١٣ يقول أنه إذا كان U و V لهما بعدان مختلفان، فإنهما يكونا غير متماثلان. البعد هو أيسر خاصية للبنية التي تسمح لنا بتمييز الفضاءات الاتجاهية غير المتماثلة. على سبيل المثال P_6 لا يكون متماثل مع M_{37}، حيث أن لهما بعدان مختلفان (7 و 12 على الترتيب). هل عكس النظرية صحيح؟ فكر في هذا لبعض الوقت.

الرتبة والصفرية للتحويل الخطي

كما أن المصفوفة لها رتبة ولها صفرية، أيضا يكون للتحويل الخطي. وكما أن الرتبة والصفرية لمصفوفة مرتبطان (مجموعهما يرتبط بعدد الأعمدة)، رتبة وصفرية التحويل الخطي أيضا ترتبطان. هنا التعريفات والنظريات المتعلقة بذلك.

تعريف ٧-٤-١٤. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي. إذن رتبة T rank، $r(T)$ تكون هي بعد مدى T،
$$r(T) = \dim(R(T))$$
تعريف ٧-٤-١٥. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي. إذن **صفرية** T nullity، $n(T)$ تكون هي بعد نواة T،
$$n(T) = \dim(K(T))$$
نظرية ٧-٤-١٦. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي. إذن رتبة T تساوي بعد V ، $r(T) = \dim(V)$ إذا وفقط إذا كان T فوقي.

البرهان: من نظرية ٧-٣-٩، T يكون فوقي إذا وفقط إذا كان $R(T) = V$. بتطبيق تعريف ٧-٤-١٤، $R(T) = V$ إذا وفقط إذا كان $r(T) = \dim(R(T)) = \dim(V)$.

نظرية ٧-٤-١٧. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي. إذن صفرية T تساوي صفر، $n(T) = 0$، إذا وفقط إذا كان T أحادي.

البرهان: من نظرية ٧-٢-١٠، T يكون أحادي إذا وفقط إذا كان $K(T) = \{0\}$. بتطبيق تعريف ٧-٤-١٥، $K(T) = \{0\}$ إذا وفقط إذا كان $n(T) = 0$.

بمجرد أن يتحقق شرط الأحادية والفوقية معا في تحويل خطي منعكس فمن الواضح أنه توجد علاقة بين رتبة وصفرية التحويل الخطي. إذا كانت واحدة هي الأكبر فإن الأخرى تكون أصغر.

نظرية ٧-٤-١٨. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي. إذن
$$r(T) + n(T) = \dim(U)$$
البرهان: نفرض $r = r(T)$ و $s = n(T)$. نفرض أن $V \supseteq R = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_r\}$ أساس لمدى T ، $R(T)$ و نفرض $U \supseteq S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_s\}$ أساس لنواة T، $K(T)$. لاحظ أن R و S لا يمكن أن تكون خالية.

حيث أن كل عناصر R تكون في مدى T ، كل منها يجب أن يكون صورة عكسية غير خالية، من نظرية ٧-٣-١٥ . نختار متجهات

$w_i \in U$ ، $1 \le i \le r$ بحيث $w_i \in T^{-1}(v_i)$. لذلك $T(w_i) = v_i$، $1 \le i \le r$. نعتبر المجموعة

$$B = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_s, w_1, w_2, w_3, ..., w_r\}$$

سوف نوضح أن B أساس لـ U.

لكي نبرهن الاستقلال الخطي لـ B، نبدأ بعلاقة ارتباط خطي على B. لذلك نفرض أنه توجد كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ و $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ بحيث

$$0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_s u_s + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_r w_r$$

إذن

$$\begin{aligned} 0 &= T(0) \\ &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_s u_s + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_r w_r) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + ... + \alpha_s T(u_s) \\ &\qquad + \beta_1 T(w_1) + \beta_2 T(w_2) + ... + \beta_r T(w_r) \\ &= \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + ... + \alpha_s 0 \\ &\qquad + \beta_1 T(w_1) + \beta_2 T(w_2) + ... + \beta_r T(w_r) \\ &= 0 + 0 + ... + 0 + \beta_1 T(w_1) + \beta_2 T(w_2) + ... + \beta_r T(w_r) \\ &= \beta_1 T(w_1) + \beta_2 T(w_2) + ... + \beta_r T(w_r) \\ &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_r v_r \end{aligned}$$

هذه علاقة ارتباط الخطي على R ، وحيث أن R مجموعة مستقلة خطيا، إذن $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_r = 0$. ومن ثم علاقة الارتباط الخطي الأصلية تصبح

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_s u_s + 0w_1 + 0w_2 + ... + 0w_r \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_s u_s + 0 + 0 + ... + 0 \\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_s u_s \end{aligned}$$

ولكن هذه أيضا علاقة ارتباط خطي على المجموعة S. وحيث أن S مجموعة مستقلة خطيا فإن $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0$. الآن كل

الكميات القياسية في علاقة الارتباط الخطي على B يجب أن تكون أصفار ومن ثم B تكون مستقلة خطيا.

لبيان أن B تولد U نختار متجه اختياري $u \in U$. إذن $T(u) \in R(T)$ ، لذلك توجد كميات قياسية $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ بحيث

$$T(u) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_r v_r$$

باستخدام الكميات القياسية $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ نعرف متجه $y \in U$

$$y = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \ldots + \gamma_r w_r$$

إذن

$$\begin{aligned}
T(u-y) &= T(u) - T(y) \\
&= T(u) - T(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \ldots + \gamma_r w_r) \\
&= T(u) - (\gamma_1 T(w_1) + \gamma_2 T(w_2) + \ldots + \gamma_r T(w_r)) \\
&= T(u) - T(\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_r v_r) \\
&= T(u) - T(u) = 0
\end{aligned}$$

ومن ثم المتجه $u - y$ يرسل عن طريق T إلى المتجه الصفري وبالتالي يكون عنصر في نواة T. إذن يمكن كتابته كتركيبة خطية من متجهات أساس $K(T)$ ، المجموعة S، لذا توجد كميات قياسية $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ بحيث

$$u - y = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \ldots + \delta_s u_s$$

إذن

$$\begin{aligned}
u &= (u-y) + y \\
&= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \ldots + \delta_s u_s + \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \ldots + \gamma_r w_r
\end{aligned}$$

هذه تقول أن أي متجه، u ، من U توجد كميات قياسية $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ و $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ والتي تمثل u كتركيبة خطية من متجهات من المجموعة B. بتعبير آخر، B تولد U.

لذلك B تكون أساس لـ U يحتوي $s + r$ متجه ومن ثم

$$\dim(U) = s + r = n(T) + r(T)$$

كما هو مطلوب.

نظرية ٤-٥-١٥ تقول أن مجموع رتبة وصفرية مصفوفة هو عدد أعمدة المصفوفة. هذه النتيجة الآن هي نتيجة سهلة لنظرية ٧-٤-١٨ حيث نعتبر التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ يعرف بالمصفوفة A من الحجم $m \times n$ بالصورة $T(x) = Ax$. مدى ونواة T يتطابقان مع فضاء الأعمدة وفضاء الصفوف للمصفوفة A، ومن ثم رتبة وصفرية المصفوفة A تتطابقان مع رتبة وصفرية التحويل الخطي T. بعد نطاق T هو بعد $\mathbb{C}^n$، وهو تماما عدد أعمدة المصفوفة A.

هذه النظرية يمكن أن تكون مفيدة خصوصا في تحديد الخواص الأساسية للتحويل الخطي. على سبيل المثال، نفرض أن $T:\mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ تحويل خطي ويمكننا بسرعة استنتاج أن نواته خالية. إذن $n(T) = 0$. أولا هذا يعني أن T يكون أحادي، من نظرية ٧-٤-١٧، أيضا نظرية ٧-٤-١٨ تصبح

$$6 = \dim(\mathbb{C}^6) = r(T) + n(T) = r(T) + 0 = r(T)$$

لذلك رتبة T تساوي رتبة النطاق المصاحب، ومن نظرية ٧-٤-١٦ نعلم أن T يكون فوقي. أخيرا، T يكون منعكس وذلك باستخدام نظرية ٧-٤-٧ . لذلك من تحديد أن النواة تافهة واعتبار أبعاد مختلفة، النظريات في هذا الفصل تسمح لنا باستنتاج وجود تحويل خطي عكسي لـ T. بالمثل نظرية ٧-٤-١٨ يمكن استخدامها لتزودنا ببراهين بديلة لنظرية ٧-٢-١٦ ونظرية ٧-٣-١٧ ونظرية ٧-٤-١٣.

تمارين ٧-٤

١- للتحويلات الخطية المنعكسة $T:U\to V$ التالية تحقق من أن
$T^{-1}\circ T=I_U$ و $T\circ T^{-1}=I_V$

(أ) $T:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5$

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-65x_1+128x_2+10x_3-262x_4+40x_5\\36x_1-73x_2-x_3+151x_4-16x_5\\-44x_1+88x_2+5x_3-180x_4+24x_5\\34x_1-68x_2-3x_3+140x_4-18x_5\\12x_1-24x_2-x_3+49x_4-5x_5\end{bmatrix}$$

(ب) $T:P_3\to M_{22}$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix}a+b & a-2c\\ d & b-d\end{bmatrix}$$

(ج) $T:P_2\to P_2$

$$\begin{aligned}T(a+bx+cx^2)&\\ &=(19a+6b-4c)+(-24-7b+4c)x\\ &\qquad+(36a+12b-9c)x^2\end{aligned}$$

٢- حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T:P_2\to M_{22}$ (أ) أحادي،
(ب) فوقي و (ج) منعكس، حيث

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix}a+2b-2c & 2a+2b\\ -a+b-4c & 3a+2b+2c\end{bmatrix}$$

٣- حدد ما إذا كان التحويل الخطي $T:P_3\to M_{22}$ (أ) أحادي،
(ب) فوقي و (ج) منعكس، حيث

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix}-a+4b+c+2d & 4a-b+6c-d\\ a+5b-2c+2d & a+2c+5d\end{bmatrix}$$

٤- لكل تحويل خطي مما يلي : أوجد تمثيل مصفوفة لـ T، أحسب
$n(T)$ و أحسب $r(T)$.

(أ) $T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$.

(ب) $T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ج) $T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$.

(د) $T:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2,\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

(هـ) $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3,\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$.

(و) $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3,\ T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$.

٥- نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي فوقي وأن $\dim(U) = \dim(V)$. برهن أن T يكون أحادي.

٦- نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي أحادي وأن $\dim(U) = \dim(V)$. برهن أن T يكون فوقي.

٧- نفرض أن U و V فضاءان اتجاهيان متماثلان. برهن أنه يوجد عدد لا نهائي من التماثلات بين U و V.

٨- نفرض أن $T:U \to V$ و $S:V \to W$ تحويلين خطيين و $\dim(U) = \dim(V)$. نفرض أن $S \circ T$ منعكس. برهن أن S و T كلاهما يكون منعكس.