الباب الثامن
التمثيلات
Representations

التعامل السابق مع التحويلات الخطية قد يجعلك تقتنع بأنه يمكننا تحويل معظم الأسئلة حول التحويلات الخطية إلى أسئلة حول أنظمة معادلات خطية أو خواص لفضاءات جزئية من $\mathbb{C}^m$. في هذا الفصل نبدأ بتحويل هذا الغموض إلى مفاهيم دقيقة. استخدمنا كلمة "تمثيل" سابقا، ولكن في هذا الباب سوف تأخذ منا عملا جادا. بطرق عدة، كل شيء سبقت دراسته هو تمهيد لهذا الباب.

٨-١ تمثيلات المتجه Vector Representations

يمكنك ملاحظة أن العديد من الأسئلة حول عناصر الفضاءات الاتجاهية المجردة يتحول إلى أسئلة حول متجهات أعمدة أو أنظمة معادلات. سوف نوضح هذه الفكرة بصورة دقيقة في هذا الفصل.

سوف نبدأ بإثبات وجود تحويل خطي منعكس بين الفضاء الاتجاهي V من البعد m و $\mathbb{C}^m$. هذا يسمح لنا بالحركة ذهابا وإيابا بين الفضاءين الاتجاهيين، بغض النظر عن التعريف المجرد لـ V ماذا يكون.

تعريف ٨-١-١. نفرض أن V فضاء اتجاهي له الأساس $B=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n\}$. نعرف الدالة $\rho_B:V\to\mathbb{C}^n$ ، كما يلي. لكل $w\in V$ نعرف متجه العمود $\rho_B(w)\in\mathbb{C}^n$ كما يلي

$$w=[\rho_B(w)]_1v_1+[\rho_B(w)]_2v_2+[\rho_B(w)]_3v_3+\dots+[\rho_B(w)]_nv_n$$

هذا التعريف يبدو معقد أكثر من الحقيقة، ومع ذلك هذه الصيغة سوف تكون مفيدة في البراهين. ببساطة، إذا أعطينا متجه $w\in V$، نكتب w كتركيبة خطية من عناصر الأساس B. هذا هو المفتاح لتأكيد أن نظرية تضمن أنه يمكننا فعل ذلك مع كل w، وعلاوة على ذلك هذا التعبير باعتباره تركيبة خطية يكون وحيد. الكميات القياسية الناتجة هي مجرد عناصر المتجه $\rho_B(w)$. هذه المناقشة سوف تقنعك بأن ρ_B

معرف جيدا كدالة. يمكننا تحديد مخرج دقيق لأي مدخل. الآن نريد إثبات أن ρ_B تكون دالة بخواص إضافية، إنها تحويل خطي.

نظرية ٨-١-٢. الدالة ρ_B المعرفة في تعريف ٨-١-١ تكون تحويل خطي.

البرهان: سوف نستخدم أسلوب جديد في البرهان. سوف نكون دالة أخرى، والتي يمكن بسهولة إثبات أنها تحويل خطي، ثم نبين أن هذه الدالة الثانية هي حقا ρ_B.

حيث أن B أساس، يمكننا تعريف $T: V \to \mathbb{C}^n$ على أنه التحويل الخطي الوحيد بحيث $T(v_i) = e_i$ ، $1 \leq i \leq n$ ، كما تضمن ذلك نظرية ٤-٣-١٠، حيث e_i هي متجهات الوحدة القياسية. نفرض أنه لأي $w \in V$ يكون،

$$
\begin{aligned}
[T(w)]_i &= \left[T\left(\sum_{j=1}^{n}[\rho_B(w)]_j v_j\right)\right]_i \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n}[\rho_B(w)]_j T(v_j)\right]_i \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n}[\rho_B(w)]_j e_j\right]_i \\
&= \sum_{j=1}^{n}[\rho_B(w)]_j [e_j]_i \\
&= [\rho_B(w)]_i [e_i]_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}[\rho_B(w)]_j [e_j]_i \\
&= [\rho_B(w)]_i (1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}[\rho_B(w)]_j (0) \\
&= [\rho_B(w)]_i
\end{aligned}
$$

كمتجهات أعمدة، تعريف ٢-١-٢ يؤدي إلى $T(w)=\rho_B(w)$. وحيث أن w عنصر اختياري في V، كدالة يكون $T=\rho_B$. حيث أنه من المعروف أن T تحويل خطي فإن ρ_B يجب أن يكون تحويل خطي.

برهان نظرية ٨-١-٢ يزودنا بتعريف بديل لتمثيل متجه بالنسبة للأساس والذي يمكن صياغته كنتيجة: ρ_B هو التحويل الخطي الوحيد الذي يأخذ B إلى أساس الوحدة القياسي.

مثال ٨-١-٣. نعتبر المتجه $y\in\mathbb{C}^4$

$$y=\begin{bmatrix}6\\14\\6\\7\end{bmatrix}$$

سوف نوجد تمثيلات عديدة للمتجه y في هذا المثال. لاحظ أن y لا يتغير، ولكن تمثيلات y تتغير. أحد أساسات $\mathbb{C}^4$ يكون

$$B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}=\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\2\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-6\\2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\3\\1\\6\end{bmatrix}\right\}$$

كما يمكننا بيانه بجعل هذه المتجهات أعمدة مصفوفة والتحقق من أنها غير شاذة، لإيجاد $\rho_B(y)$ ، نحتاج إلى كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ بحيث

$$y=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3+\alpha_4u_4$$

من نظرية ٢-٢-٥، الكميات القياسية المطلوبة هي حل لنظام المعادلات الخطية الذي مصفوفة معاملاته هي المصفوفة المكونة أعمدتها من متجهات الأساس B ومتجه ثوابت هو y. مع مصفوفة معاملات غير شاذة، الحل يكون وحيد، ولكن هذا ليس غريبا حيث أنه هو مضمون نظرية ٤-٣-١٠. هذا الحل الوحيد هو

$$\alpha_1=2 \;،\; \alpha_2-1 \;،\; \alpha_3=-3 \;،\; \alpha_4=4$$

إذن من تعريف ٨-١-١، يكون

$$\rho_B(y)=\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\\4\end{bmatrix}$$

نفرض أننا نريد تكوين تمثيل لـ y بالنسبة إلى أساس آخر لـ $\mathbb{C}^4$،

$$C=\left\{\begin{bmatrix}-15\\9\\-4\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}16\\-14\\5\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-26\\14\\-6\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}14\\-13\\4\\6\end{bmatrix}\right\}$$

كما حدث مع B يمكن التحقق بسهولة من أن C يكون أساس. كتابة y كتركيبة خطية من المتجهات في C يؤدي إلى حل نظام من أربع معادلات في أربعة متغيرات بمصفوفة معاملات غير شاذة. الحل الوحيد يمكن التعبير عنه

$$y=\begin{bmatrix}6\\14\\6\\7\end{bmatrix}=(-28)\begin{bmatrix}-15\\9\\-4\\-2\end{bmatrix}+(-8)\begin{bmatrix}16\\-14\\5\\2\end{bmatrix}+11\begin{bmatrix}-26\\14\\-6\\-3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}14\\-13\\4\\6\end{bmatrix}$$

لذلك من تعريف ٨-١-١ نحصل على

$$\rho_C(y)=\begin{bmatrix}-28\\-8\\11\\0\end{bmatrix}$$

غالبا نعطي التمثيلات بالنسبة إلى الأساسات القياسية، ولكن بالنسبة للمتجه في $\mathbb{C}^m$ يكون سخيف قليلا. دعنا نوجد تمثيل للمتجه y بالنسبة للأساس القياسي (نظرية ٤-٤-٢)

$$D=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$$

بدون أية حسابات يمكننا التحقق من أن

$$y=\begin{bmatrix}6\\14\\6\\7\end{bmatrix}=6e_1+14e_2+6e_3+7e_4$$

لذلك من تعريف ٨-١-١ يكون

$$\rho_D(y)=\begin{bmatrix}6\\14\\6\\7\end{bmatrix}$$

وهذه ليست مثيرة. لاحظ كيف أن ترتيب وضع متجهات الأساس أمر غاية في الأهمية بالنسبة للتمثيل. دعنا نحتفظ بمتجهات الوحدة القياسية كأساس، ولكن نعيد ترتيب وضعها في الأساس. لذلك الأساس الرابع يكون

$$E=\{e_3,e_4,e_2,e_1\}$$

إذن

$$y=\begin{bmatrix}6\\14\\6\\7\end{bmatrix}=6e_3+7e_4+14e_2+6e_1$$

من تعريف ٨-١-١ يكون

$$\rho_E(y)=\begin{bmatrix}6\\7\\14\\6\end{bmatrix}$$

إذن لكل أساس ممكن لـ $\mathbb{C}^4$ يمكننا تكوين تمثيلات مختلفة لـ y.

تمثيل المتجهات يكون أكثر أهمية في الفضاءات التي ليست $\mathbb{C}^m$.

مثال ٨-١-٤. نعتبر المتجه $u=15+10x-6x^2\in P_2$ من فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 2. أساس لطيف لـ P_2 يكون

$$B = \{1, x, x^2\}$$

لذلك

$$u = 15 + 10x - 6x^2 = 15(1) + 10(x) + (-6)(x^2)$$

ومن تعريف ٨-١-١ يكون

$$\rho_B(u) = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ -6 \end{bmatrix}$$

أساس لطيف آخر لـ P_2 يكون

$$C = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

هنا نحتاج إلى بعض الحسابات لتحديد الكميات القياسية للتمثيل. مطلوب $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ بحيث

$$15 + 10x - 6x^2 = \alpha_1(1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x+x^2)$$

بإجراء عمليات P_2 على الطرف الأيمن ومساواة المعاملات نحصل على ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات كميات قياسية،

$$15 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$10 = \alpha_2 + \alpha_3$$
$$-6 = \alpha_3$$

مصفوفة المعاملات لهذا النظام غير شاذة وهذا يؤدي إلى حل وحيد

$$\alpha_1 = 5 \;،\; \alpha_2 = 16 \;،\; \alpha_3 = -6$$

من تعريف ٨-١-١ نحصل على

$$\rho_C(u) = \begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

رغم أنه في الغالب نكون تمثيلات للمتجه بالنسبة إلى أساس لطيف، لاشيء يمنعنا من تكوين تمثيل للمتجه بالنسبة إلى أي أساس. على سبيل المثال، نضع

$$D = \{-2 - x + 3x^2, 1 - 2x^2, 5 + 4x + x^2\}$$

يمكننا التحقق من هذا يكون أساس لـ P_2. الآن نرغب في كميات قياسية $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ بحيث

$$15+10x-6x^2=\alpha_1(-2-x+3x^2)+\alpha_2(1-2x^2)+\alpha_3(5+4x+x^2)$$

بإجراء عمليات P_2 على الطرف الأيمن ومساواة المعاملات نحصل على ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات كميات قياسية،

$$15=-2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3$$
$$10=-\alpha_1+4\alpha_3$$
$$-6=3\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$$

مصفوفة المعاملات غير شاذة مما يؤدي إلى حل وحيد

$$\alpha_1=-2 ، \quad \alpha_2=1 ، \quad \alpha_3=2$$

من تعريف ٨-١-١ نحصل على

$$\rho_D(u)=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$$

نظرية ٨-١-٥. الدالة ρ_B في تعريف ٨-١-١ تكون تحويل خطي أحادي.

البرهان: نفرض أن U فضاء اتجاهي من البعد n، لذلك تمثيل المتجه يكون $\rho_B:U\to\mathbb{C}^n$. نفرض أن $B=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ هو أساس U المستخدم في تعريف ρ_B. نفرض أن $u\in K(\rho_B)$. نكتب u كتركيبة خطية من متجهات الأساس B حيث الكميات القياسية هي مركبات تمثيل المتجه، $\rho_B(u)$ ،

$$\begin{aligned}u&=[\rho_B(u)]_1u_1+[\rho_B(u)]_2u_2+[\rho_B(u)]_3u_3+\ldots+[\rho_B(u)]_nu_n\\&=[0]_1u_1+[0]_2u_2+[0]_3u_3+\ldots+[0]_nu_n\\&=0u_1+0u_2+0u_3+\ldots+0u_n\\&=0+0+0+\ldots+0\\&=0\end{aligned}$$

لذلك متجه اختياري، u، من النواة ، $K(\rho_B)$ ، يجب أن يساوي المتجه الصفري لـ U . ومن ثم $K(\rho_B)=\{0\}$ ، ومن نظرية ٧-٢-١٠، ρ_B يكون أحادي.

نظرية ٨-١-٦. الدالة ρ_B في تعريف ٨-١-١ تكون تحويل خطي فوقي.

البرهان: نفرض أن U فضاء اتجاهي من البعد n، لذلك تمثيل المتجه يكون $\rho_B : U \to \mathbb{C}^n$. نفرض أن $B=\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ هو أساس U المستخدم في تعريف ρ_B. نفرض أن $v \in \mathbb{C}^n$. نعرف المتجه كما يلي

$$u=[v]_1u_1+[v]_2u_2+[v]_3u_3+\dots+[v]_nu_n$$

إذن لكل $1 \le i \le n$، من تعريف ٨-١-١

$$[\rho_B(u)]_i=[\rho_B([v]_1u_1+[v]_2u_2+[v]_3u_3+\dots+[v]_nu_n]_i=[v]_i$$

لذلك عناصر المتجهين $\rho_B(u)$ و v تكون متساوية ومن ثم نحصل على تساوي المتجهين $\rho_B(u)=v$. هذا يوضح أن $v \in R(\rho_B)$، لذلك $\mathbb{C}^n \subseteq R(\rho_B)$. حيث أن $R(\rho_B) \subseteq \mathbb{C}^n$، من تعريف المدى ، إذن $R(\rho_B)=\mathbb{C}^n$. من نظرية ٧-٣-٩، ρ_B يكون فوقي.

في كثير من المناسبات سوف نحتاج لتوظيف معكوس تمثيل المتجه، لذلك سوف نسجل حقيقة أن تمثيل المتجه يكون تحويل خطي منعكس.

نظرية ٨-١-٧. الدالة ρ_B في تعريف ٨-١-١ تكون تحويل خطي منعكس.

البرهان: الدالة ρ_B تكون تحويل خطي من نظرية ٨-١-٢ ، وتكون أحادي من نظرية ٨-١-٥ وفوقي من نظرية ٨-١-٦ بنطاق V ونطاق مصاحب $\mathbb{C}^n$. إذن من نظرية ٧-٤-٧ ρ_B يكون تحويل خطي منعكس.

تشخيص الفضاءات الاتجاهية

نظرية ٨-١-٨. نفرض أن V فضاء اتجاهي له البعد n. إذن V يكون متماثل مع $\mathbb{C}^n$.

البرهان: حيث أن V له البعد n، يمكننا إيجاد أساس لـ V من الحجم n، والذي نسميه B. التحويل الخطي ρ_B يكون تحويل خطي منعكس من V إلى $\mathbb{C}^n$، لذلك من تعريف ٧-٤-١١، V و $\mathbb{C}^n$ يكونا متماثلان.

مثال ٨-١-٩. الفضاء الاتجاهي P_8 من البعد 9 ، من نظرية ٨-١-٨ P_8 يكون متماثل مع $\mathbb{C}^9$.

مثال ٨-١-١٠. في مثال ٤-٥-٢٢ حددنا أن فضاء جزئي معين W من P_4 يكون من البعد 4 ، ومن ثم W تكون متماثلة مع $\mathbb{C}^4$.

نظرية ٨-١-١١. نفرض U و V فضاءان اتجاهيان منتهيا البعد. إذن U و V يكونا متماثلان إذا وفقط إذا كان $\dim(U) = \dim(V)$.

البرهان: الاتجاه الأول هو منطوق نظرية ٧-٤-١٣.

الاتجاه الآخر هو عكس نظرية ٧-٤-١٣ سوف نفرض أن U و V متساويان في البعد ونبرهن أنهما متماثلان. نفرض أن n هو البعد المشترك لـ U و V . من نظرية ٨-١-٨ يوجد تماثلين $T : U \to \mathbb{C}^n$ و $S : V \to \mathbb{C}^n$.

T يكون منعكس، من تعريف ٧-٤-١١ . بالمثل S يكون منعكس. وكذلك S^{-1} يكون تحويل خطي منعكس. تحصيل تحويلين خطيين منعكسين يكون أيضا منعكس ، لذلك تحصيل S^{-1} و T يكون منعكس. إذن $(S^{-1} \circ T) : U \to V$ يكون تحويل خطي منعكس من U إلى V ومن تعريف ٧-٤-١١ U و V يكونا متماثلان.

مثال ٨-١-١٢. $\mathbb{C}^{10}$ ، P_9 ، M_{25} و M_{52} كلها فضاءات اتجاهية من البعد 10 ومن ثم كل منها يماثل الآخر.

الفضاء الجزئي من M_{44} الذي يحتوي كل المصفوفات المتماثلة يكون بعده 10 ومن ثم هذا الفضاء يكون متماثل مع كل من هذه الفضاءات الأربعة.

مبدأ الأحدثة Coordinatization Principle

مع إتاحة ρ_B كتحويل خطي منعكس، يمكننا التحويل بين المتجهات بين الفضاء الاتجاهي U من البعد m و $\mathbb{C}^m$. علاوة على ذلك،

كتحويل خطي، ρ_B يتعلق بالجمع والضرب في قياسي في U، بينما ρ_B^{-1} يتعلق بالجمع والضرب في قياسي في $\mathbb{C}^m$. حيث أن تعريفاتنا للاستقلال الخطي، التوليد، الأساس والبعد جميعا تبنى على التراكيب الخطية، يمكننا تحويل الخواص الأساسية بين الفضاءات الاتجاهية المجردة U والفضاءات الاتجاهية $\mathbb{C}^m$.

نظرية ٨-١-١٣. نفرض أن U فضاء اتجاهي بأساس B من الحجم n. إذن

$$S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$$

تكون مجموعة مستقلة خطيا من U إذا وفقط إذا كان

$$R = \{\rho_B(u_1), \rho_B(u_2), \rho_B(u_3), \dots, \rho_B(u_k)\}$$

مجموعة جزئية مستقلة خطيا من $\mathbb{C}^n$.

البرهان: التحويل الخطي ρ_B يكون تماثل بين U و $\mathbb{C}^n$. كتحويل خطي منعكس ρ_B يكون أحادي و ρ_B^{-1} يكون أيضا تحويل خطي أحادي.

حيث أن ρ_B تحويل خطي أحادي و S مستقلة خطيا، نظرية ٧-٢-١٤ تقول أن R تكون مستقلة خطيا.

في الاتجاه الآخر، بتطبيق ρ_B^{-1} على كل عنصر من R سوف نحصل على مجموعة S. حيث أننا فرضنا أن R مستقلة خطيا و ρ_B^{-1} أحادي، نظرية ٧-٢-١٤ تقول أن S تكون مستقلة خطيا.

نظرية ٨-١-١٤. نفرض أن U فضاء اتجاهي بأساس B من الحجم n. إذن

$$u \in \langle\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}\rangle$$

إذا وفقط إذا كان

$$\rho_B(u) \in \langle\{\rho_B(u_1), \rho_B(u_2), \rho_B(u_3), \dots, \rho_B(u_k)\}\rangle$$

البرهان: نفرض أن $u \in \langle\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}\rangle$. إذن توجد كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ بحيث

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_k u_k$$

إذن من نظرية ٧-١-١٢

$$\rho_B(u) = \rho_B(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_k u_k)$$
$$= \alpha_1 \rho_B(u_1) + \alpha_2 \rho_B(u_2) + \alpha_3 \rho_B(u_3) + \ldots + \alpha_k \rho_B(u_k)$$

وهذه تعني أن

$$\rho_B(u) \in \langle \{\rho_B(u_1), \rho_B(u_2), \rho_B(u_3), \ldots, \rho_B(u_k)\} \rangle$$

في الاتجاه الآخر نفرض أن

$$\rho_B(u) \in \langle \{\rho_B(u_1), \rho_B(u_2), \rho_B(u_3), \ldots, \rho_B(u_k)\} \rangle$$

إذن توجد كميات قياسية $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ بحيث

$$\rho_B(u) = \beta_1 \rho_B(u_1) + \beta_2 \rho_B(u_2) + \beta_3 \rho_B(u_3) + \ldots + \beta_k \rho_B(u_k)$$

حيث أن ρ_B منعكسة، نظرية ٨-١-٧، لذلك

$$\begin{aligned}
u &= I_U(u) \\
&= (\rho_B^{-1} \circ \rho_B)(u) \\
&= (\rho_B^{-1}(\rho_B(u)) \\
&= \rho_B^{-1}(\beta_1 \rho_B(u_1) + \beta_2 \rho_B(u_2) + \beta_3 \rho_B(u_3) \\
&\qquad + \ldots + \beta_k \rho_B(u_k)) \\
&= \beta_1 \rho_B^{-1}(\rho_B(u_1)) + \beta_2 \rho_B^{-1}(\rho_B(u_2)) + \beta_3 \rho_B^{-1}(\rho_B(u_3)) \\
&\qquad + \ldots + \beta_k \rho_B^{-1}((\rho_B(u_k)) \\
&= \beta_1 I_U(u_1) + \beta_2 I_U(u_2) + \beta_3 I_U(u_3) + \ldots + \beta_k I_U(u_k)) \\
&= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \ldots + \beta_k u_k
\end{aligned}$$

وهذه تعني أن $u \in \langle \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k\} \rangle$.

هنا مثال يوضح فكرة هامة جدا.

مثال ٨-١-١٥. في مثال ٨-١-٤ كنا في حاجة إلى معرفة أن

$$D = \{-2 - x + 3x^2, 1 - 2x^2, 5 + 4x + x^2\}$$

يكون أساس لـ P_2. مع نظرية ٨-١-١٣ ونظرية ٨-١-١٤، هذه المهمة تكون أكثر سهولة.

أولا نختار أساس معلوم لـ P_2، أساس يكون تمثيل المتجه له بسيط. سوف نختار

$$B=\{1,x,x^2\}$$

نكون المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}^3$ التي تنتج من تطبيق ρ_B على كل عاصر D.

$$F=\{\rho_B(-2-x+3x^2),\rho_B(1-2x^2),\rho_B(5+4x+x^2)\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ونسأل هل F مجموعة مستقلة خطيا تولد $\mathbb{C}^3$. هذا الأمر يسير، نكون المصفوفة A التي أعمدتها هي متجهات F، نختزل A صفيا إلى مصفوفة الوحدة I_3 ومن ثم نستخدم عدم شذوذ A لنقرر أن F تكون أساس لـ $\mathbb{C}^3$. الآن، حيث أن F تكون أساس لـ $\mathbb{C}^3$، نظرية ٨-١-١٤ تخبرنا بأن D تكون أيضا أساس لـ P_2.

مثال ٨-١-١٥ يوضح لنا الفكرة الواسعة أن الحسابات في فضاء اتجاهي مجرد يمكن اختزالها إلى حسابات في $\mathbb{C}^m$. قد تكون لاحظت هذه الظاهرة خلال تعاملك مع الأمثلة في الباب الثاني أو الباب السابع بتوظيف الفضاءات الاتجاهية للمصفوفات أو كثيرات الحدود. هذه الحسابات يبدو أنها حتما تؤدي إلى أنظمة معادلات خطية. إنه تمثيل المتجه ρ_B الذي يسمح لنا بإجراء هذا الربط الدقيق.

معرفة تمثيل المتجه يسمح لنا بتحويل أسئلة عن التراكيب الخطية، الاستقلال الخطي والتوليد من فضاء اتجاهي عام إلى $\mathbb{C}^m$، ويسمح لنا أيضا ببرهنة عدد كبير من النظريات حول كيفية تحويل الخواص الأخرى. بدلا من إثبات كل هذه النظريات التي كلها من نفس النمط، سوف نقدم بعض التوجيهات الهامة حول التوظيف الأمثل لنظرية ٨-١-٢ ، نظرية ٨-١-١٣ ونظرية ٨-١-١٤ . هذا يأتي في صورة "مبدأ" هو مسلمة صحيحة وغالبا ما تكون تعريف وليست نظرية (ومن ثم ليس لها برهان).

مبدأ الأحدثة

نفرض أن U فضاء اتجاهي لـه أساس B من الحجم n. إذن أي سؤال حول U، أو عناصره، والتي تعتمد أساسا على جمع المتجهات أو ضرب متجه في قياسي في U، أو تعتمد على الاستقلال الخطي أو التوليد ، ربما تحول إلى نفس الأسئلة في $\mathbb{C}^n$ بتطبيق التحويل الخطي ρ_B على المتجهات ذات الصلة. بمجرد الإجابة عن السؤال في $\mathbb{C}^n$، الإجابة تتحول عكسيا إلى U من خلال تطبيق التحويل الخطي العكسي ρ_B^{-1} (إذا كان ضروريا).

مثال ٨-١-١٦. هذا مثال بسيط لمبدأ الأحدثة، يعتمد فقط على أن الأحدثة هي تحويل خطي منعكس (نظرية ٨-١-٧). نفرض أنه لدينا تركيبة خطية لنجريها في M_{32}، الفضاء الاتجاهي للمصفوفات من الحجم 3×2 ، ولكن نحن سلبيون من جهة إجراء العمليات في M_{32}.
بصورة أكثر تحديدا نفرض أننا نواجه الحساب

$$6\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

نختار أساس لطيف لـ M_{32}

$$B=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

بتطبيق ρ_B لكل متجه في التركيبة الخطية. هذه يعطينا حسابات جديدة، الآن في الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^6$، والذي يمكن إجراؤها بالعمليات في $\mathbb{C}^6$،

$$6\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -4 \\ -4 \\ 48 \\ 40 \\ -8 \end{bmatrix}$$

الآن نطبق ρ_B^{-1} لنحصل على المصفوفة من الحجم 3×2

$$16\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}+(-4)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{bmatrix}+(-4)\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{bmatrix}+48\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$+40\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}+(-8)\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}16&48\\-4&40\\-4&-8\end{bmatrix}$$

وهي تماما المصفوفة التي نود حسابها قد أجريت. هذه ليست أيسر ولكنها طريقة مختلفة.

تمارين ٨ـ١

١- في الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^3$، أحسب تمثيل المتجه $\rho_B(v)$ للأساس B والمتجه v، حيث

$$B=\left\{\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}\right\}\qquad v=\begin{bmatrix}11\\5\\8\end{bmatrix}$$

٢- أعد مثال ٨-١-١٦ باستبدال الأساس B بالأساس

$$C=\left\{\begin{bmatrix}-14&-9\\10&10\\-6&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7&-4\\5&5\\-3&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3&-1\\0&-2\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7&-4\\3&2\\-1&0\end{bmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}4&2\\-3&-3\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\-1&-2\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

٣- برهن أن المجموعة S التالية تكون أساس للفضاء الاتجاهي للمصفوفات من الحجم 2×2، M_{22}، ذلك باختيار أساس محايد لـ

M_{22} وأحدث عناصر S بالنسبة لهذا الأساس، اختبر المجموعة الناتجة من متجهات الأعمدة في $\mathbb{C}^4$ وطبق مبدأ الأحدثة

$$S=\left\{\begin{bmatrix}33 & 99\\ 78 & -9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-16 & -47\\ -36 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}10 & 27\\ 17 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2 & -7\\ -6 & 4\end{bmatrix}\right\}$$

٤- المجموعة $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ تكون أساس للفضاء الاتجاهي P_3، كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 3 . لذلك ρ_B يكون تحويل خطي، طبقا لنظرية ٨-١-٢ . أوجد صيغة لـ ρ_B. بتعبير آخر، أوجد تعبير لـ $\rho_B(a+bx+cx^2+dx^3)$.

$$v_1=1-5x-22x^2+3x^3$$

$$v_2=-2+11x+49x^2-8x^3$$

$$v_3=-1+7x+33x^2-8x^3$$

$$v_2=-1+4x+16x^2+x^3$$

٨-٢ تمثيلات المصفوفة Matrix Representations

رأينا أن التحويلات الخطية التي النطاق والنطاق المصاحب لها فضاءات اتجاهية من متجهات أعمدة لها ارتباط وثيق بالمصفوفات (نظرية ٨-١-٧، نظرية ٧-١-١٠). في هذا الفصل، سوف نوسع العلاقة بين المصفوفات والتحويلات الخطية إلى وضع التحويلات الخطية بين الفضاءات الاتجاهية المجردة.

تعريف ٨-٢-١. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي، $B=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ أساس لـ U من الحجم n و C أساس لـ V من الحجم m. إذن **تمثيل المصفوفة** (أو **التمثيل المصفوفي**) matrix representation لـ T بالنسبة إلى B و C هو المصفوفة من الحجم $m \times n$،

$$M_{B,C}^{T}=[\rho_C(T(u_1))|\rho_C(T(u_2))|\rho_C(T(u_3))|\ldots|\rho_C(T(u_n))]$$

مثال ٨-٢-٢. نعتبر التحويل الخطي $S:P_3 \to M_{22}$ المعرف بالصورة

$$S(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix} 3a+7b-2c-5d & 8a+14b-2c-11d \\ -4a-8b+2c+6d & 12a+22b-4c-17d \end{bmatrix}$$

أولا نكون تمثيل بالنسبة للأساسين

$$B=\{1+2x+x^2-x^3, 1+3x+x^2+x^3, -1-2x+2x^3, 2+3x+2x^2-5x^3\}$$

$$C=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right\}$$

نحسب S عند كل عنصر من أساس النطاق، B، ونأحدث الناتج بالنسبة للمتجهات في أساس النطاق المصاحب، C. لاحظ هنا كيف أننا نأخذ عناصر من الفضاءات الاتجاهية ونقسمها إلى تراكيب خطية من عناصر أساس كخطوة أولى نحو إنشاء أحدثة للمتجهات. يكون هناك نظام من المعادلات في كل مرة، ولكن سوف نحذف هذه التفاصيل ويمكن اعتبارها تمارين تقليدية.

$$\rho_C(S(1+2x+x^2-x^3)) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 20 & 45 \\ -24 & 69 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left((-90)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 37\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + (-40)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -90 \\ 37 \\ -40 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(S(1+3x+x^2+x^3)) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 17 & 37 \\ -20 & 57 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left((-72)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 29\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + (-34)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -72 \\ 29 \\ -34 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(S(-1-2x+2x^3)) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} -27 & -58 \\ 32 & -90 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left(114\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-46)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + 54\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + (-5)\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right.$$

$$
= \begin{bmatrix} 114 \\ -46 \\ 54 \\ -5 \end{bmatrix}
$$

$$
\rho_C(S(2+3x+2x^2-5x^3)) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 48 & 109 \\ -58 & 167 \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= \rho_C\left(-220\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 91\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + (-96)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} -220 \\ 91 \\ -96 \\ 10 \end{bmatrix}
$$

ومن ثم باستخدام تعريف ٨-٢-١ يكون

$$
M^S_{B,C} = \begin{bmatrix} -90 & -72 & 114 & -220 \\ 37 & 29 & -46 & 91 \\ -40 & -34 & 54 & -96 \\ 4 & 3 & -5 & 10 \end{bmatrix}
$$

غالبا نستخدم أساسات لطيفة لبناء تمثيلات المصفوفة وتكون الحسابات أيسر كثيرا. نفرض أننا أخذنا الأساسات

$$
D = \{1, x, x^2, x^3\}
$$

$$
E = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}
$$

حساب S عند عناصر D يكون سهل والأحدثة بالنسبة إلى E تتم بمجرد النظر

$$
\rho_E(S(1)) = \rho_E\left(\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}\right)
$$

$$= \rho_E\left(3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+(-4)\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+12\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}3\\8\\-4\\12\end{bmatrix}$$

$$\rho_E(S(x)) = \rho_E\left(\begin{bmatrix}7 & 14\\-8 & 22\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_E\left(7\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+14\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+(-8)\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+22\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}7\\14\\-8\\22\end{bmatrix}$$

$$\rho_E(S(x^2)) = \rho_E\left(\begin{bmatrix}-2 & -2\\2 & -4\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_E\left((-2)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+(-4)\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\-2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

$$\rho_E(S(x^3)) = \rho_E\left(\begin{bmatrix}-5 & -11\\6 & -17\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_E\left((-5)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+(-11)\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+(-17)\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ 6 \\ -17 \end{bmatrix}$$

إذن تمثيل المصفوفة لـ S بالنسبة إلى D و E تكون

$$M_{D,E}^{S} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -5 \\ 8 & 14 & -2 & -11 \\ -4 & -8 & 2 & 6 \\ 12 & 22 & -4 & -17 \end{bmatrix}$$

مرة أخرى إضافية ولكن هذه المرة نأخذ الأساسات

$$F = \{1 + x - x^2 + 2x^3, -1 + 2x + 2x^3, 2 + x - 2x^2 + 3x^3, 1 + x + 2x^3\}$$

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

نحسب S عند عناصر F ثم نأحدث الناتج بالنسبة إلى G،

$$\rho_G(S(1 + x - x^2 + 2x^3)) = \rho_G\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_G\left(2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_G(S(-1 + 2x + 2x^3)) = \rho_G\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_G\left((-1)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_G(S(2 + x - 2x^2 + 3x^3)) = \rho_G\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_G\left(2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_G(S(1+x+2x^3)) = \rho_G\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_G\left(0\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن ثم نصل إلى تمثيل مصفوفة اقتصادي

$$M_{F,G}^S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نظرية ٨-٢-٣.(النظرية الأساسية لتمثيلات المصفوفة). نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي، B أساس لـ U و C أساس لـ V و $M_{B,C}^T$ هو تمثيل مصفوفة لـ T بالنسبة إلى B و C. إذن لأي $u \in U$،

$$\rho_C(T(u)) = M_{B,C}^T(\rho_B(u))$$

أو بصورة مكافئة

$$T(u) = \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(\rho_B(u)))$$

البرهان: نفرض $B = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ أساس لـ U. حيث أن $u \in U$، يوجد كميات قياسية $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ بحيث

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_n u_n$$

إذن

$$M_{B,C}^T \rho_B(u)$$
$$= [\rho_C(T(u_1)) \mid \rho_C(T(u_2)) \mid \rho_C(T(u_3)) \mid \ldots \mid \rho_C(T(u_n))]\rho_B(u)$$

$$= [\rho_C(T(u_1)) \mid \rho_C(T(u_2)) \mid \rho_C(T(u_3)) \mid \ldots \mid \rho_C(T(u_n))] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1\rho_C(T(u_1)) + \alpha_2\rho_C(T(u_2)) + \alpha_3\rho_C(T(u_3)) + \ldots + \alpha_n\rho_C(T(u_n))$$

$$= \rho_C(\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3) + \ldots + \alpha_n T(u_n))$$

$$= \rho_C(T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_n u_n))$$

$$= \rho_C(T(u))$$

الخلاصة البديلة نحصل عليها كما يلي

$$\begin{aligned} T(u) &= I_V T(u)) \\ &= (\rho_C^{-1} \circ \rho_C)(T(u)) \\ &= (\rho_C^{-1}(\rho_C(T(u))) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(\rho_B(u))) \end{aligned}$$

هذه النظرية تقول أنه يمكننا تطبيق T على u ونأحدث الناتج بالنسبة إلى C في V، أو يمكننا أولا أحدثة u بالنسبة إلى B في U، ثم نضرب في تمثيل المصفوفة. في كلا الطريقتين الناتج يكون هو نفسه. لذلك تأثير التحويل الخطي يمكن دائما أن يتحقق بضرب مصفوفة في متجه (تعريف ٣-٢-١). هذا أمر مهم يكفي أن نقول مرة أخرى أن تأثير التحويل الخطي يكون ضرب مصفوفة في متجه.

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad T \quad} & T(u) \\ \downarrow \rho_B & & \downarrow \rho_C \\ \rho_B(u) & \xrightarrow{\quad M_{B,C}^T \quad} & M_{B,C}^T \rho_B(u) = \rho_C(T(u)) \end{array}$$

الخلاصة البديلة لهذه النتيجة قد تكون أكثر إثارة للانتباه. هي تقول أنه من أجل تأثير التحويل الخطي T على المتجه u، نأحدث المدخل (مع ρ_B)، نجري ضرب مصفوفة في متجه (مع $M_{B,C}^T$)، ونجري

الأحدثة العكسية للناتج (مع ρ_C^{-1}). لذلك في غياب بعض المعلومات عن تمثيلات المتجه، التحويل الخطي يكون مصفوفة. لضبط المخطط نعكس السهم الأيمن، والذي يعني عكس تمثيل المتجه ρ_C على V. الآن يمكننا ان نمضي مباشرة عبر قمة المخطط في حساب التحويل الخطي بين الفضاءات الاتجاهية المجردة. أو يمكننا الدوران حول الأضلاع الثلاثة، باستخدام تمثيل المتجه، ضرب مصفوفة في متجه، متبوعة بالأحدثة العكسية.

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\quad T \quad} & T(u)=\rho_C^{-1}(M_{B,C}^T\rho_B(u)) \\ \downarrow \rho_B & & \rho_C^{-1}\uparrow \\ \rho_B(u) & \xrightarrow{\quad M_{B,C}^T \quad} & M_{B,C}^T\rho_B(u) \end{array}$$

مثال ٨-٢-٤. (التحويل الخطي كضرب مصفوفة). في مثال ٨-٢-٢ أوجدنا ثلاثة تمثيلات للتحويل الخطي S. هنا، في هذا المثال، سوف نحسب مخرج واحد لـ S بأربع طرق مختلفة. أولا بالطريقة المعتادة. ثم ثلاثة أخرى باستخدام نظرية ٨-٢-٣.

نختار $p(x)=(3-x+2x^2-5x^3)$ ، ليس لأي سبب خاص. إذن تطبيق S مباشرة على $p(x)$ يعطي

$$S(p(x))=S(3-x+2x^2-5x^3)$$
$$=\begin{bmatrix} 3(3)+7(-1)-2(2)-5(-5) & 8(3)+14(-1)-2(2)-11(-5) \\ -4(3)-8(-1)+2(2)+6(-5) & 12(3)+22(-1)-4(2)-17(-5) \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 23 & 61 \\ -30 & 91 \end{bmatrix}$$

الآن نستخدم تمثيل S بالنسبة إلى الأساسين B و C ونظرية ٨-٢-٣ . لاحظ أننا سوف نستعمل التركيبة الخطية التالية في التحرك من السطر الثاني إلى الثالث

$$3-x+2x^2-5x^3$$
$$=48(1+2x+x^2-x^3)+(-20)(1+3x+x^2+x^3)$$
$$+(-1)(-1-2x+2x^3)+(-13)(2+3x+2x^2-5x^3)$$

$$S(p(x))=\rho_C^{-1}(M_{B,C}^S\rho_B(p(x)))$$
$$=\rho_C^{-1}(M_{B,C}^S\rho_B(3-x+2x^2-5x^3))$$
$$=\rho_C^{-1}\left(M_{B,C}^S\begin{bmatrix}48\\-20\\-1\\-13\end{bmatrix}\right)$$
$$=\rho_C^{-1}\left(\begin{bmatrix}-90&-72&114&-220\\37&29&-46&91\\-40&-34&54&-96\\4&3&-5&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}48\\-20\\-1\\-13\end{bmatrix}\right)$$
$$=\rho_C^{-1}\left(\begin{bmatrix}-134\\59\\-46\\7\end{bmatrix}\right)$$
$$=(-134)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}+59\begin{bmatrix}2&3\\2&5\end{bmatrix}$$
$$+(-46)\begin{bmatrix}-1&-1\\0&-2\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}-1&-4\\-2&-4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}23&61\\-30&91\end{bmatrix}$$

مرة أخرى، ولكن الآن مع أساسات لطيفة مثل D و E ،

$$S(p(x))=\rho_E^{-1}(M_{D,E}^S\rho_D(p(x)))$$
$$=\rho_E^{-1}(M_{D,E}^S\rho_D(3-x+2x^2-5x^3))$$
$$=\rho_E^{-1}(M_{D,E}^S\rho_D(3(1)+(-1)(x)+2(x^2)+(-5)(x^3)))$$

$$= \rho_E^{-1}\left(M_{D,E}^S \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_E^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -5 \\ 8 & 14 & -2 & -11 \\ -4 & -8 & 2 & 6 \\ 12 & 22 & -4 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_E^{-1}\left(\begin{bmatrix} 23 \\ 61 \\ -30 \\ 91 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 23\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 61\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-30)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 91\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 61 \\ -30 & 91 \end{bmatrix}$$

أخيرا، الآن مع الأساسات F و G. الأحدثة سوف تأخذ بعض العمل هذه المرة، ولكن ضرب مصفوفة في متجه (وهو التأثير الفعلي للتحويل الخطي) سوف يكون خاصة يكون سهل، بإعطاء الطبيعة القطرية لتمثيل المصفوفة، $M_{F,G}^S$،

$$S(p(x)) = \rho_G^{-1}(M_{F,G}^S \rho_F(p(x)))$$
$$= \rho_G^{-1}(M_{F,G}^S \rho_F(3 - x + 2x^2 - 5x^3))$$
$$= \rho_G^{-1}(M_{F,G}^S \rho_F(3 - x + 2x^2 - 5x^3) - 7(-1 + 2x + 2x^3)$$
$$-17(2 + x - 2x^2 + 3x^3) - 2(1 + x + 2x^3))$$

$$= \rho_G^{-1}\left(M_{F,G}^{S} \begin{bmatrix} 32 \\ -7 \\ -17 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_G^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ -7 \\ -17 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_G^{-1}\left(\begin{bmatrix} 64 \\ 7 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 64\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + (-17)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 61 \\ -30 & 91 \end{bmatrix}$$

هذا المثال لا يعني بالضرورة أنه يوضح أن واحدة من هذه الحسابات الأربع أبسط من الأخر. ولكن هو يقصد إلى توضيح الطرق المختلفة التي توصل إلى نفس النتيجة، مع الثلاث الأخيرة كلها تستخدم تمثيل مصفوفة للتأثير بالتحويل الخطي.

تمثيل جديد من تمثيل موجود

في فصل ٧-١ كونا تحويلات خطية جديدة من تحويلات خطية أخرى. الجمع، الضرب في قياسي والتحصيل. هذه التحويلات الخطية الجديدة سوف يكون لها تمثيلات مصفوفة كذلك. كيف ترتبط تمثيلات المصفوفة الجديدة بتمثيلات المصفوفة القديمة؟ هنا النظريات الثلاث.

نظرية ٨-٢-٥. نفرض أن $T:U \to V$ و $S:U \to V$ تحويلين خطيين، B أساس لـ U و C أساس لـ V. إذن

$$M_{B,C}^{T+S} = M_{B,C}^{T} + M_{B,C}^{S}$$

البرهان: نفرض x أي متجه في $\mathbb{C}^n$ نعرف $u \in U$ بالصورة $u = \rho_B^{-1}(x)$ ، لذلك $x = \rho_B(u)$. إذن

$$\begin{aligned} M_{B,C}^{T+S} x &= M_{B,C}^{T+S} \rho_B(u) \\ &= \rho_C((T+S)(u)) \\ &= \rho_C(T(u)+S(u)) \\ &= \rho_C(T(u)) + \rho_C(S(u)) \\ &= M_{B,C}^{T}(\rho_B(u)) + M_{B,C}^{S}(\rho_B(u)) \\ &= (M_{B,C}^{T} + M_{B,C}^{S})\rho_B(u) \\ &= (M_{B,C}^{T} + M_{B,C}^{S})x \end{aligned}$$

حيث أن المصفوفتان $M_{B,C}^{T+S}$ و $M_{B,C}^{T} + M_{B,C}^{S}$ لهما حاصل ضرب مصفوفة في متجه متساوي لكل متجه في $\mathbb{C}^n$ ، فإنه من نظرية ٣-٢-٥ المصفوفتان تكونا متساويتان.

نظرية ٨-٢-٦. نفرض أن $T : U \to V$ تحويل خطي، $\alpha \in \mathbb{C}$، B أساس لـ U و C أساس لـ V. إذن

$$M_{B,C}^{\alpha T} = \alpha M_{B,C}^{T}$$

البرهان: نفرض x أي متجه في $\mathbb{C}^n$ نعرف $u \in U$ بالصورة $u = \rho_B^{-1}(x)$ ، لذلك $x = \rho_B(u)$. إذن

$$\begin{aligned} M_{B,C}^{\alpha T} x &= \alpha M_{B,C}^{T} \rho_B(u) \\ &= \rho_C((\alpha T)(u)) \\ &= \rho_C(\alpha T(u)) \\ &= \alpha \rho_C(T(u)) \\ &= \alpha(M_{B,C}^{T} \rho_B(u)) \\ &= (\alpha M_{B,C}^{T})\rho_B(u) \\ &= (\alpha M_{B,C}^{T})x \end{aligned}$$

حيث أن المصفوفتان $M_{B,C}^{\alpha T}$ و $\alpha M_{B,C}^{T}$ لهما حاصل ضرب مصفوفة في متجه متساوي لكل متجه في $\mathbb{C}^n$ ، فإنه من نظرية ٣-٢-٥ المصفوفتان تكونا متساويتان.

الفضاء الاتجاهي لكل التحويلات الخطية من U إلى V يكون الآن متماثل مع الفضاء الاتجاهي لكل المصفوفات من الحجم $m \times n$.

نظرية ٨-٢-٧. نفرض أن $T : U \to V$ و $S : V \to W$ تحويلين خطيين، B أساس لـ U ، C أساس لـ V و D أساس لـ W. إذن

$$M_{B,D}^{S \circ T} = M_{C,D}^{S} M_{B,C}^{T}$$

البرهان: نفرض x أي متجه في $\mathbb{C}^n$ نعرف $u \in U$ بالصورة $u = \rho_B^{-1}(x)$ ، لذلك $x = \rho_B(u)$. إذن

$$\begin{aligned}
M_{B,D}^{S \circ T} x &= M_{B,D}^{S \circ T} \rho_B(u) \\
&= \rho_D((S \circ T)(u)) \\
&= \rho_D(S(T(u))) \\
&= M_{C,D}^{S} \rho_C(T(u)) \\
&= M_{C,D}^{S}(M_{B,C}^{T} \rho_B(u)) \\
&= (M_{C,D}^{S} M_{B,C}^{T}) \rho_B(u) \\
&= (M_{C,D}^{S} M_{B,C}^{T}) x
\end{aligned}$$

حيث أن المصفوفتان $M_{C,D}^{S} M_{B,C}^{T}$ و $M_{B,D}^{S \circ T}$ لهما حاصل ضرب مصفوفة في متجه متساوي لكل متجه في $\mathbb{C}^n$ ، فإنه من نظرية ٣-٢-٥ المصفوفتان تكونا متساويتان.

هذه هي المفاجأة الكبيرة الثانية في الجبر الخطي الأولي. المصفوفات هي تحويلات خطية (في الحقيقة دوال)، وضرب المصفوفات هو تحصيل دوال! يمكننا تكوين تحصيل تحويلين خطيين، ومن ثم نكون تمثيل المصفوفة للناتج. أو يمكننا تكوين تمثيل مصفوفة لكل تحويل خطي على حدة، ثم بضرب التمثيلين (طبقا لتعريف ٣-٦-٢). في كلتا الحالتين نصل إلى نفس النتيجة.

مثال ٨-٢-٨. نعتبر التحويلين الخطيين

$$T:\mathbb{C}^2 \to P_2,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = (-a+3b)+(2a+4b)x+(a-2b)x^2$$
$$S:P_2 \to M_{22},$$
$$S(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} 2a+b+2c & a+4b-c \\ -a+3c & 3a+b+2c \end{bmatrix}$$

وأساسات لـ $\mathbb{C}^2$، P_2 و M_{22} على الترتيب،

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$
$$C = \{1-2x+x^2, -1+3x, 2x+3x^2\}$$
$$D = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

نبدأ بحساب التحويل الخطي $(S\circ T):\mathbb{C}^2 \to M_{22}$ الذي هو تحصيل T و S،

$$(S\circ T)\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = S\left(T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)\right)$$
$$= S((-a+3b)+(2a+4b)x+(a-2b)x^2)$$
$$= \begin{bmatrix} 2(-a+3b)+(2a+4b)+2(a-2b) & (-a+3b)+4(2a+4b)-(a-2b) \\ -(-a+3b)+3(a-2b) & 3(-a+3b)+(2a+4b)+2(a-2b) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2a+6b & 6a+21b \\ 4a-9b & a+9b \end{bmatrix}$$

الآن نحسب تمثيل المصفوفة لكل من هذه التحويلات الخطية الثلاثة (T، S و $S\circ T$) ، بالنسبة للأساسات المناسبة. بالنسبة للتحويل الخطي T

$$\rho_C\left(T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = \rho_C(10x+x^2)$$
$$= \rho_C(28(1-2x+x^2)+28(-1+3x)+(-9)(2x+3x^2))$$

$$=\begin{bmatrix} 28 \\ 28 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right)=\rho_C(1+8x)$$

$$=\rho_C(33(1-2x+x^2)+32(-1+3x)+(-11)(2x+3x^2))$$

$$=\begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ -11 \end{bmatrix}$$

لذلك يكون تمثيل المصفوفة لـ T هو

$$M_{B,C}^{T}=\begin{bmatrix} 28 & 33 \\ 28 & 32 \\ -9 & -11 \end{bmatrix}$$

الآن تمثيل S،

$$\rho_D(S(1-2x+x^2))=\rho_D\left(\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_D\left((-11)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}+(-21)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+(17)\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} -11 \\ -21 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\rho_D(S(-1+3x))=\rho_D\left(\begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_D\left(26\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -1\end{bmatrix}+51\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}+(-38)\begin{bmatrix}2 & -3\\2 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}26\\51\\0\\38\end{bmatrix}$$

$$\rho_D(S(2x+3x^2))=\rho_D\left(\begin{bmatrix}8 & 5\\9 & 8\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_D\left(34\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -1\end{bmatrix}+67\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}+(-46)\begin{bmatrix}2 & -3\\2 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}34\\67\\1\\-46\end{bmatrix}$$

لذلك يكون لدينا تمثيل مصفوفة لـ S

$$M_{C,D}^{S}=\begin{bmatrix}-11 & 26 & 34\\-21 & 51 & 67\\0 & 0 & 1\\17 & -38 & -46\end{bmatrix}$$

أخيرا تمثيل $S\circ T$،

$$\rho_D\left((S\circ T)\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)\right)=\rho_D\left(\begin{bmatrix}12 & 39\\3 & 12\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_D\left(114\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}+237\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+(-9)\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+(-174)\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}114\\ 237\\ -9\\ -174\end{bmatrix}$$

$$\rho_D\left((S\circ T)\left(\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right)\right)=\rho_D\left(\begin{bmatrix}10 & 33\\ -1 & 11\end{bmatrix}\right)$$
$$= \rho_D\left(95\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}+202\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}+(-11)\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+(-149)\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}95\\ 202\\ -11\\ -149\end{bmatrix}$$

لذلك يكون لدينا تمثيل مصفوفة لـ $S\circ T$

$$M_{B,D}^{S\circ T}=\begin{bmatrix}114 & 95\\ 237 & 202\\ -9 & -11\\ -174 & -149\end{bmatrix}$$

الآن نحقق خلاصة نظرية ٨-٢-٧

$$M_{C,D}^{S}M_{B,C}^{T}=\begin{bmatrix}-11 & 26 & 34\\ -21 & 51 & 67\\ 0 & 0 & 1\\ 17 & -38 & -46\end{bmatrix}\begin{bmatrix}28 & 33\\ 28 & 32\\ -9 & -11\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 114 & 95 \\ 237 & 202 \\ -9 & -11 \\ -174 & -149 \end{bmatrix}$$
$$= M_{B,D}^{S\circ T}$$

تعمدنا عدم استخدام أساسات قياسية. إذا كنا قد اخترنا أساسات لطيفة للفضاءات الاتجاهية الثلاثة، فإن نتيجة النظرية سوف تكون واضحة.

أحد أهدافنا في الجزء الأول من هذا الكتاب كان هو وضع تعريف لضرب المصفوفات (تعريف ٣-٢-١، تعريف ٣-٦-٢) يبدو طبيعيا قدر المستطاع. ومع ذلك الكثير منا يكون مع وصف ضرب المصفوفات عنصرا بعنصر (نظرية ٣-٢-٩) كتعريف لحاصل ضرب المصفوفات ومن ثم النظريات حول أعمدة المصفوفات والتراكيب الخطية تنتج من ذلك التعريف. مع هذا التعريف المحفز، إدراك أن ضرب المصفوفات يكون تحصيل دوال يكون رائع جدا. إنه تمرين هام أن نبدأ بالسؤال" ما هو تمثيل المصفوفة لتحصيل تحويلين خطيين؟"، ومن ثم، بدون استخدام أي نظريات عن ضرب المصفوفات، نصل أخيرا إلى وصف ضرب المصفوفات عنصرا بعنصر.

خواص تمثيلات المصفوفة

ليس من العجيب أن نكتشف العلاقة الوثيقة بين النواة والمدى للتحويل الخطي من جهة و فضاء الصفرية وفضاء الأعمدة لتمثيل المصفوفة للتحويل من جهة أخرى. ربما هذه الفكرة قد تكون غير مقبولة في ذهنك حتى قبل تعريف تمثيل المصفوفة. ومع ذلك، مع التعريف الرسمي لتمثيل مصفوفة (تعريف ٨-٢-١) والنظرية الأساسية التي تصاحبها (نظرية ٨-٢-٣) يمكننا الحديث بصورة رسمية عن العلاقة، باستخدام فكرة تماثل الفضاءات الاتجاهية.

نظرية ٨-٢-٩. نفرض أن $T:U\rightarrow V$ تحويل خطي، B أساس لـ U من الحجم n و C أساس لـ V. إذن نواة T تكون متماثلة مع فضاء الصفرية للمصفوفة $M_{B,C}^{T}$ ،

$$K(T) \cong N(M_{B,C}^{T})$$

البرهان: لكي نبرهن على تماثل فضاءين اتجاهيين، يجب أن نوجد تماثل بينهما، تحويل خطي منعكس. نواة التحويل الخطي T، $K(T)$، تكون فضاء جزئي من U، بينما فضاء الصفرية لتمثيل المصفوفة $N(M_{B,C}^T)$، يكون فضاء جزئي من $\mathbb{C}^n$. الدالة ρ_B تعرف كدالة من U إلى $\mathbb{C}^n$، ولكن يمكننا توظيف ρ_B كدالة من $K(T)$ إلى $N(M_{B,C}^T)$.

أولا يجب التأكد من أنه إذا أعطينا ρ_B مدخل من $K(T)$ فإننا سوف نحصل على مخرج عنصر في $N(M_{B,C}^T)$. لذلك نفرض أن $u \in K(T)$ إذن

$$\begin{aligned} M_{B,C}^T \rho_B(u) &= \rho_C(T(u)) \\ &= \rho_C(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

هذا يعني أن $\rho_B(u) \in N(M_{B,C}^T)$، كما هو مطلوب.

التقييد في الحجم للنطاق والنطاق المصاحب لا يؤثر على حقيقة أن ρ_B تحويل خطي، أو على حقيقة أنها أحادية. بعض الشيء يجب أن يفعل للتأكد من أن ρ_B تكون فوقية، لإتمام ذلك، نعتبر عنصر من النطاق المصاحب $x \in N(M_{B,C}^T) \subseteq \mathbb{C}^n$ ونرغب في إيجاد عصر في النطاق بحيث x يكون صورة له. الآن سوف نبين أن العنصر المطلوب في النطاق يكون $u = \rho_B^{-1}(x)$. أولا نتحقق أن $u \in K(T)$

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\rho_B^{-1}(x)) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(\rho_B(\rho_B^{-1}(x))) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(I_{\mathbb{C}^n}(x))) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(x)) \\ &= \rho_C^{-1}(0_{\mathbb{C}^n}) \end{aligned}$$

$$= 0_V$$

ثانيا نبرهن أن التماثل المقترح ρ_B ، يأخذ u إلى x،

$$\rho_B(u) = \rho_B(\rho_B^{-1}(x))$$
$$= I_{\mathbb{C}^n}(x)$$
$$= x$$

مع إثبات أن ρ_B يكون تحويل خطي أحادي وفوقي من $K(T)$ إلى $N(M_{B,C}^T)$ ، نظرية ٧-٤-٧ تخبرنا أن ρ_B يكون منعكس ومن تعريف ٧-٤-١١ $K(T)$ و $N(M_{B,C}^T)$ يكونا متماثلين.

مثال ٨-٢-١٠. نعتبر نواة التحويل الخطي $T: M_{22} \to P_2$، المعطى بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a-b+c-5d)+(a+4b+5c+2d)x + (3a-2b+c-8d)x^2$$

نبدأ بتمثيل المصفوفة لـ T بالنسبة لأساسات M_{22} و P_2 ، على الترتيب

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right\}$$
$$C = \{1+x+x^2, 2+3x, -1-2x^2\}$$

إذن

$$\rho_C\left(T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)\right) = \rho_C(4+2x+6x^2)$$
$$= \rho_C(2(1+x+x^2)+0(2+3x)+(-2)(-1-2x^2))$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(T\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & -4\end{bmatrix}\right)\right)=\rho_C(18+28x^2)$$
$$=\rho_C((-24)(1+x+x^2)+8(2+3x)+(-26)(-1-2x^2))$$
$$=\begin{bmatrix}-24\\8\\-26\end{bmatrix}$$
$$\rho_C\left(T\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}\right)\right)=\rho_C(10+5x+15x^2)$$
$$=\rho_C(5(1+x+x^2)+0(2+3x)+(-5)(-1-2x^2))$$
$$=\begin{bmatrix}5\\0\\-5\end{bmatrix}$$
$$\rho_C\left(T\left(\begin{bmatrix}2 & 5\\-2 & -4\end{bmatrix}\right)\right)=\rho_C(17+4x+26x^2)$$
$$=\rho_C((-8)(1+x+x^2)+(4)(2+3x)+(-17)(-1-2x^2))$$
$$=\begin{bmatrix}-8\\4\\-17\end{bmatrix}$$

لذلك تمثيل المصفوفة لـ T بالنسبة إلى B و C يكون

$$M_{B,C}^{T}=\begin{bmatrix}2 & -24 & 5 & -8\\0 & 8 & 0 & 4\\-2 & -26 & -5 & -17\end{bmatrix}$$

نعلم من نظرية ٨-٢-٩ أن نواة التحويل الخطي T تكون متماثلة مع فضاء الصفرية لتمثيل المصفوفة $M_{B,C}^{T}$، وبدراسة برهان النظرية نتعلم أن ρ_B يكون تماثل بين هذه الفضاءات. بدلا عن محاولة حساب نواة T باستخدام التعريفات والطرق في الباب السابع، سوف نحلل

فضاء الصفرية لـ $M_{B,C}^T$ باستخدام الطرق من الباب الثاني. أولا نختزل $M_{B,C}^T$ صفيا

$$\begin{bmatrix} 2 & -24 & 5 & -8 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ -2 & -26 & -5 & -17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك، من نظرية ٢-٤-١٧، أساس $N(M_{B,C}^T)$ يكون

$$\left\langle\left\{\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

الآن يمكننا تحويل هذا الأساس لـ $N(M_{B,C}^T)$ إلى أساس لـ $K(T)$ بتطبيق ρ_B^{-1} على كل عنصر من عناصر الأساس،

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = (-\frac{5}{2})\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$+1\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + (-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$+0\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك المجموعة

$$\left\{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

تكون أساس لـ $K(T)$.

نتيجة مشابهة تماما تطبق على مدى التحويل الخطي وفضاء الأعمدة للتمثيل المصفوفي للتحويل الخطي.

نظرية ٨-٢-١١. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي، B أساس لـ U من الحجم n و C أساس لـ V من الحجم m. إذن مدى T يكون متماثل مع فضاء الأعمدة للمصفوفة $M_{B,C}^{T}$ ،

$$R(T) \cong C(M_{B,C}^{T})$$

البرهان: من أجل إثبات أن فضاءين اتجاهيين متماثلين يجب إيجاد تماثل بينهما، تحويل خطي منعكس. مدى التحويل الخطي T، $R(T)$ ، يكون فضاء جزئي من V، بينما فضاء الأعمدة للتمثيل المصفوفي $C(M_{B,C}^{T})$ يكون فضاء جزئي من $\mathbb{C}^m$. الدالة ρ_C معرفة كدالة من V إلى $\mathbb{C}^m$، ولكن يمكننا توظيف تعريف ρ_C كدالة من $R(T)$ إلى $C(M_{B,C}^{T})$.

أولا يجب التأكد من أنه إذا أعطينا ρ_C مدخل من $R(T)$ فإننا سوف نحصل على مخرج عنصر في $C(M_{B,C}^{T})$. لذلك نفرض أن $v \in R(T)$ إذن يوجد $u \in U$ بحيث $T(u) = v$. نعتبر

$$\begin{aligned} M_{B,C}^{T}\rho_B(u) &= \rho_C(T(u)) \\ &= \rho_C(v) \end{aligned}$$

هذه تقول أن $\rho_C(v) \in C(M_{B,C}^{T})$، كما هو مطلوب.

التقييد في الحجم للنطاق والنطاق المصاحب لا يؤثر على حقيقة أن ρ_C تحويل خطي، أو على حقيقة أنها أحادية. بعض الشيء يجب أن يفعل للتأكد من أن ρ_C تكون فوقية. لإثبات أن ρ_C فوقي نعتبر عنصر في

النطاق المصاحب $y \in C(M_{B,C}^T) \subseteq \mathbb{C}^m$ ونرغب في إيجاد عنصر من النطاق بحيث يكون y صورته. حيث أن $y \in C(M_{B,C}^T)$، يوجد متجه $x \in \mathbb{C}^m$ بحيث $M_{B,C}^T x = y$.

الآن نبين أن العنصر المطلوب في النطاق يكون $v = \rho_C^{-1}(y)$. أولا نتحقق أن $v \in R(T)$ بتطبيق T على $u = \rho_B^{-1}(x)$،

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\rho_B^{-1}(x)) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(\rho_B(\rho_B^{-1}(x)))) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T(I_{\mathbb{C}^n}(x))) \\ &= \rho_C^{-1}(M_{B,C}^T x) \\ &= \rho_C^{-1}(y) \\ &= v \end{aligned}$$

ثانيا نتحقق أن التماثل المقترح ، ρ_C ، يأخذ v إلى y،

$$\begin{aligned} \rho_C(v) &= \rho_C(\rho_C^{-1}(y)) \\ &= I_{\mathbb{C}^m}(y) \\ &= y \end{aligned}$$

مع إثبات أن ρ_C تحويل خطي أحادي وفوقي من $R(T)$ إلى $C(M_{B,C}^T)$، نظرية ٧-٤-٧ تقول أن ρ_C يكون منعكس وبالتالي تعريف ٧-٤-١١ يقول أن $R(T)$ و $C(M_{B,C}^T)$ يكونا متماثلان.

مثال ٨-٢-١٢. نعتبر التحويل الخطي $T : M_{22} \to P_2$، المعطى بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a-b+c-5d)+(a+4b+5c+2d)x + (3a-2b+c-8d)x^2$$

نحسب مدى T . مع الأساسين B و C

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\ -2 & -4\end{bmatrix}\right\}$$
$$C=\{1+x+x^2,2+3x,-1-2x^2\}$$

نحصل على التمثيل المصفوفي

$$M_{B,C}^{T}=\begin{bmatrix}2 & -24 & 5 & -8\\ 0 & 8 & 0 & 4\\ -2 & -26 & -5 & -17\end{bmatrix}$$

من نظرية ٨-٢-١١، نعلم أن مدى التحويل الخطي يكون متماثل مع فضاء الأعمدة للتمثيل المصفوفي $M_{B,C}^{T}$ وبدراسة برهان نظرية ٨-٢-١١ نعلم أن ρ_C يكون تماثل بين هذه الفضاءات الجزئية. لاحظ حيث أن المدى فضاء جزئي من النطاق المصاحب، سوف نستعمل ρ_C بدلا عن ρ_B ، الذي كان هو الاختيار الصواب لتماثل بين فضاءات الصفرية في مثال ٨-٢-١٢.

بدلا عن محاولة حساب مدى T باستخدام التعاريف والطرق من الباب السابع سوف نحلل فضاء أعمدة $M_{B,C}^{T}$ باستخدام طرق من الباب الثالث. أولا نختزل $(M_{B,C}^{T})^t$ صفيا،

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ -24 & 8 & -26\\ 5 & 0 & -5\\ -8 & 4 & -17\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{25}{4}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

الآن نستخدم نظرية ٣-٥-١٨ ونظرية ٣-٥-١٦ للحصول على أساس لـ $C(M_{B,C}^{T})$

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -\frac{25}{4}\end{bmatrix}\right\}$$

الآن يمكننا تحويل هذا الأساس لـ $C(M_{B,C}^{T})$ إلى أساس لـ $R(T)$ بتطبيق ρ_C^{-1} على كل عنصر من الأساس

$$\rho_C^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)=(1+x+x^2)-(-1-2x^2)=2+x+3x^2$$

$$\rho_C^{-1}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-\frac{25}{4}\end{bmatrix}\right)=(2+3x)-\frac{25}{4}(-1-2x^2)=\frac{33}{4}+3x+\frac{31}{2}x^2$$

لذلك المجموعة

$$\{2+3x+3x^2,\frac{33}{4}+3x+\frac{31}{2}x^2\}$$

تكون أساس لـ $R(T)$.

التحويلات الخطية المنعكسة

رأينا في كلا من نظريات وأمثلة أن الأسئلة حول التحويلات الخطية غالبا تكافئ أسئلة حول مصفوفات. إنه التمثيل المصفوفي للتحويل الخطي الذي يجعل هذه الفكرة دقيقة. هنا النظرية الأخيرة التي تؤكد هذا الربط.

نظرية ٨-٢-١٣. نفرض أن $T:U\to V$ تحويل خطي ، B أساس لـ U و C أساس لـ V . إذن T يكون تحويل خطي منعكس إذا وفقط إذا كان التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة إلى B و C ، $M_{B,C}^T$ ، يكون مصفوفة منعكسة،

$$M_{C,B}^{T^{-1}}=(M_{B,C}^T)^{-1}$$

البرهان: نفرض أن T منعكس، لذلك التحويل الخطي العكسي $T^{-1}:V\to U$ يكون موجودا. كلا التحويلين الخطيين يكون له تمثيل مصفوفي بالنسبة للأساسات U و V، هما $M_{B,C}^T$ و $M_{C,B}^{T^{-1}}$. إذن

$$\begin{aligned}M_{C,B}^{T^{-1}}M_{B,C}^T&=M_{B,B}^{T^{-1}\circ T}\\&=M_{B,B}^{I_U}\\&=[\rho_B(I_U(u_1))\,|\,\rho_B(I_U(u_2))\,|\ldots|\,\rho_B(I_U(u_n))]\\&=[\rho_B(u_1)\,|\,\rho_B(u_2)\,|\ldots|\,\rho_B(u_n)]\end{aligned}$$

$$= [e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n]$$
$$= I_n$$

و

$$\begin{aligned} M_{B,C}^{T} M_{C,B}^{T^{-1}} &= M_{C,C}^{T \circ T^{-1}} \\ &= M_{C,C}^{I_V} \\ &= [\rho_C(I_V(v_1)) \mid \rho_C(I_V(v_2)) \mid \ldots \mid \rho_C(I_V(v_n))] \\ &= [\rho_C(v_1) \mid \rho_C(v_2) \mid \ldots \mid \rho_C(v_n)] \\ &= [e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n] \\ &= I_n \end{aligned}$$

هاتان المعادلتان توضحان أن $M_{B,C}^{T}$ و $M_{C,B}^{T^{-1}}$ مصفوفتان عكسيتان ، وتبرهن أنه إذا كان T منعكس، فإن $M_{C,B}^{T^{-1}} = (M_{B,C}^{T})^{-1}$.

من جهة أخرى، نفرض أن $M_{B,C}^{T}$ مصفوفة منعكسة، ومن ثم تكون غير شاذة. نحسب صفرية T

$$\begin{aligned} n(T) &= \dim(K(T)) \\ &= \dim(N(M_{B,C}^{T})) \\ &= n(M_{B,C}^{T}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذلك نواة T تكون تافهة، ومن نظرية ٧-٢-١٠، T يكون أحادي. الآن نحسب رتبة T،

$$\begin{aligned} r(T) &= \dim(R(T)) \\ &= \dim(C(M_{B,C}^{T})) \\ &= r(M_{B,C}^{T}) \\ &= \dim(V) \end{aligned}$$

حيث أن بعد مدى T يساوي بعد النطاق المصاحب V، فإنه من نظرية ٤-٥-٢٤ يكون $R(T)=V$. وهذا يعني أن T يكون فوقي. وحيث أن T أحادي وفوقي فإنه يكون منعكس.

من الآن الربط بين المصفوفات والتحويلات الخطية سوف يبدأ ليكون واضحا ويكون لدينا تقريرا بأن انعكاس المصفوفة يعادل انعكاس التمثيل المصفوفي المصاحب. المثال التالي يبين كيفية تطبيق هذه النظرية على مسألة البناء الفعلي لمعكوس تحويل خطي منعكس.

مثال ٨-٢-١٤ . نعتبر التحويل الخطي $R: P_3 \to M_{22}$ حيث

$$R(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix} a+b-c+2d & 2a+3b-2c+3d \\ a+b+2d & -a+b+2c-5d \end{bmatrix}$$

إذا رغبنا في إيجاد صيغة لمعكوس R (بفرض وجوده) بسرعة، نختار أساس لطيف. ومن ثم نكون التمثيل المصفوفي لـ بالنسبة للأساسين B و C،

$$B=\{1,x,x^2,x^3\}$$

$$C=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

إذن

$$\rho_C(R(1))=\rho_C\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(R(x))=\rho_C\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(R(x^2))=\rho_C\left(\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(R(x^3)) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

لذلك التمثيل المصفوفي لـ R يكون

$$M_{B,C}^{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $M_{B,C}^{R}$ تكون منعكسة (تحقق من ذلك)، ومن ثم نستنتج أن R يكون منعكس (نظرية ٨-٢-١٣). علاوة على ذلك

$$M_{B,C}^{R^{-1}} = (M_{B,C}^{R})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -7 & -2 & 3 \\ -8 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

يمكن استخدام هذا التمثيل للتحويل الخطي العكسي، بالتنسيق مع نظرية ٨-٢-٢، لتحديد صيغة صريحة للمعكوس نفسه،

$$R^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \rho_B^{-1}\left(M_{C,B}^{R^{-1}}\rho_C\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_B^{-1}\left((M_{C,B}^{R})^{-1}\rho_C\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_B^{-1}\left((M_{C,B}^{R})^{-1}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 20 & -7 & -2 & 3 \\ -8 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 20a-7b-2c+3d \\ -8a+3b+c-d \\ -a+2c \\ -6a+2b+c-d \end{bmatrix}\right)$$

$$= (20a-7b-2c+3d)+(-8a+3b+c-d)x + (-a+2c)x^2+(-6a+2b+c-d)x^3$$

نظريــة ٨-٢-١٥. نفـرض أن A مـصفوفة مربعـة مـن الحجـم و $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ هو التحويل الخطي المعرف بالصورة $T(x) = Ax$. إذن A تكون منعكسة إذا وفقط إذا كان T تحويل خطي منعكس.

البرهان: نختار الأساسين $B = C = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ المكونين من متجهات الوحدة القياسية كأساس لـ $\mathbb{C}^n$ ونكون التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة إلى B و C،

$$\begin{aligned} \rho_C(T(e_i)) &= \rho_C(Ae_i) \\ &= \rho_C(A_i) \\ &= A_i \end{aligned}$$

ومن ثم التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة إلى B و C، ببساطة يكون هو $A = M_{B,C}^T$. مع هذه الملاحظة، البرهان يصبح تخصيصا لنظرية ٨-٢-١٣.

T يكون منعكس $\Leftrightarrow$ $M_{B,C}^T$ تكون منعكسة $\Leftrightarrow$ A تكون منعكسة.

هذه النظرية قد يبدو أنه لا مبرر لها. لماذا هذه الحالة الخاصة من نظرية ٨-٢-١٣؟ لأن هذه النظرية سوف تضيف تكافؤا جديدا لسلسلة النظريات التي تعطي تكافؤات للمصفوفات غير الشاذة. باستخدام التكافؤ في هذه النظرية يمكننا تحديث نظرية ٦-٢-٣ لنحصل على النظرية التالية

نظرية ٨-٢-١٦. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.

٢- الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A هو مصفوفة الوحدة.

٣- الفضاء الصفري للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A)=\{0\}$.

٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار ممكن للمتجه b.

٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.

٦- A تكون منعكسة.

٧- فضاء الأعمدة لـ A يكون $\mathbb{C}^n$ ، $C(A)=\mathbb{C}^n$.

٨- أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$.

٩- رتبة A تساوي n، $r(A)=n$.

١٠- صفرية A تساوي صفر، $n(A)=0$.

١١- محدد A لا يساوي الصفر، $\det(A)\neq 0$.

١٢- $\lambda=0$ ليست قيمة ذاتية لـ A.

١٣- التحويل الخطي $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ المعرف بالصورة $T(x)=Ax$ يكون منعكس.

تمارين ٨-٢

١- أحسب التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للأساسين B و C، حيث

$$T:P_3\to\mathbb{C}^3$$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix}2a-3b+4c-2d\\ a+b-c+d\\ 3a+2c-3d\end{bmatrix}$$

$$B=\{1,x,x^2,x^3\} \text{ ، } C=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

٢- أحسب التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للأساسين B و C، حيث

$$T:P_2\to\mathbb{C}^2 \text{ ، } T(p(x))=\begin{bmatrix}p(1)\\p(3)\end{bmatrix}$$

$$B=\{2-5x+x^2,1+x-x^2,x^2\} \text{ ، } C=\left\{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$$

٣- نفرض أن S_{22} هو الفضاء الاتجاهي للمصفوفات المتماثلة من الحجم 2×2. كون التمثيل المصفوفي للتحويل الخطي $T:P_2\to S_{22}$ بالنسبة للأساسين B و C ثم استخدم هذا التمثيل في حساب $T(3+5x-2x^2)$

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix}2a-b+c & a+3b-c\\a+3b-c & a-c\end{bmatrix}$$

$$B=\{1,1+x,1+x+x^2\}$$

$$C=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

٤- استخدم التمثيل المصفوفي لتحديد ما إذا كان التحويل الخطي $T:P_3\to M_{22}$ فوقي،

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix}-a+4b+c+2d & 4a-b+6c-d\\a+5b-2c+2d & a+2c+5d\end{bmatrix}$$

٥- أوجد أساسات لنواة ومدى التحويل الخطي $S:M_{22}\to P_2$ حيث

$$S\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=(a+2b+5c-4d)+(3a-b+8c+2d)x+(a+b+4c-2d)x^2$$

٦- نفرض أن S_{22} هو الفضاء الاتجاهي للمصفوفات المتماثلة من الحجم 2×2. تحقق من أن التحويل الخطي R يكون منعكس وأوجد R^{-1}، حيث $R: S_{22} \to P_2$ و

$$R\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-b) + (2a-3b-2c)x + (a-b+c)x^2$$

٧- برهن أن التحويل الخطي $S: P_1 \to M_{12}$ يكون منعكس ثم أوجد صيغة للتحويل الخطي العكسي S^{-1} باستخدام معكوس المصفوفة، حيث $S(a+bx) = \begin{bmatrix} 3a+b & 2a+b \end{bmatrix}$.

٨- التحويل الخطي $R: M_{12} \to M_{21}$ يكون منعكس. استخدم التمثيل المصفوفي لتحديد صيغة للتحويل العكسي $R^{-1}: M_{21} \to M_{12}$، حيث $R([a \quad b]) = \begin{bmatrix} a+3b \\ 4a+11b \end{bmatrix}$.

٩- استخدم التمثيل المصفوفة لإيجاد أساس لمدى التحويل الخطي $L: M_{22} \to P_2$، حيث

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2b+4c+d) + (3a+c-2d)x + (-a+b+3c+3d)x^2$$

١٠- استخدم التمثيل المصفوفة لإيجاد أساس لنواة التحويل الخطي $L: M_{22} \to P_2$، حيث

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2b+4c+d) + (3a+c-2d)x + (-a+b+3c+3d)x^2$$

١١- أوجد أساس لنواة التحويل الخطي $T: P_2 \to M_{22}$، حيث

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a+2b-2c & 2a+2b \\ -a+b-4c & 3a+2b+2c \end{bmatrix}$$

٨-٣ تغيير الأساس Change of Basis

رأينا في الفصل ٨-٢ أن التحويلات الخطية يمكن أن تمثل بمصفوفة، بمجرد اختيار أساسات للنطاق والنطاق المصاحب. كيف يختلف التمثيل المصفوفي إذا اخترنا أساسات مختلفة؟ أي الأساسات تؤدي خاصة إلى تمثيل لطيف؟ من الاحتمالات اللانهائية ما هو أفضل تمثيل ممكن؟ هذا الفصل سوف يبدأ في إجابة هذه الأسئلة. ولكن نحتاج أولا إلى تعريف القيم الذاتية للتحويل الخطي وتغيير مصفوفة الأساس.

القيم والمتجهات الذاتية للتحويل الخطي

الآن نعرف مفهوم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للتحويل الخطي. ينبغي عدم الدهشة كثيرا، خاصة عندما تتذكر العلاقة الوثيقة بين المصفوفات والتحويلات الخطية.

تعريف ٨-٣-١. نفرض أن $T:V \to V$ تحويل خطي. المتجه غير الصفري $v \in V$ يسمى **متجه ذاتي** eigenvector لـ T مناظر **للقيمة الذاتية** eigenvalue λ إذا كان $T(v)=\lambda v$.

مثال ٨-٣-٢. نعتبر التحويل الخطي $T:M_{22} \to M_{22}$ المعرف بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -17a+11b+8c-11d & -57a+35b+24c-33d \\ -14a+10b+6c-10d & -41a+25b+16c-23d \end{bmatrix}$$

والمتجهات

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad x_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

نحسب

$$T(x_1) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2x_1$$

$$T(x_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2x_2$$

$$T(x_3)=T\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -2 & -3\end{bmatrix}=(-1)x_3$$

$$T(x_4)=T\left(\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4 & -12\\ -2 & -8\end{bmatrix}=(-2)x_4$$

لذلك x_1,x_2,x_3,x_4 تكون متجهات ذاتية لـ T تناظر القيم الذاتية $\lambda_1=2,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1,\ \lambda_4=-2$ ، على الترتيب.

مثال ٨-٣-٣. نعتبر التحويل الخطي $R:P_2\to P_2$ المعرف بالصورة

$$R(a+bx+cx^2)=(15a+8b-4c)$$
$$+(-12a-6b+3c)x+(24a+14b-7c)x^2$$

والمتجهات

$$w_1=1-x+x^2 \quad ، \quad w_2=x+2x^2 \quad ، \quad w_3=1+4x^2$$

نحسب

$$R(w_1)=R(1-x+x^2)=3-3x+3x^2=3w_1$$
$$R(w_2)=R(x+2x^2)=0+0x+0x^2=0w_1$$
$$R(w_3)=R(1+4x^2)=-1-4x^2=(-1)w_3$$

لذلك w_1,w_2,w_3 تكون متجهات ذاتية لـ R تناظر القيم الذاتية $\lambda_1=3,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$ ، على الترتيب. لاحظ أن القيمة الذاتية $\lambda_2=0$ تشير إلى أن المتجه w_2 يكون عنصر غير صفري في نواة R، ولذلك لا يكون أحادي.

بالطبع، هذه الأمثلة فقط لتوضيح تعريف المتجهات الذاتية والقيم الذاتية للتحويلات الخطية، ومن ثم السؤال الكبير كيف نوجد القيم الذاتية؟ سوف نجيب على هذا السؤال قبل نهاية هذا الفصل.

مصفوفة تغيير الأساس

إذا أعطينا فضاء اتجاهي، نعلم أنه يمكننا إيجاد العديد من الأساسات المختلفة، بعضها لطيف وبعضها غير ذلك. إذا اخترنا متجه واحد من هذا الفضاء الاتجاهي، يمكننا تكوين عدة تمثيلات مختلفة للمتجه بتكوين

التمثيلات بالنسبة لأساسات مختلفة. كيف ترتبط هذه التمثيلات بعضها مع البعض. مصفوفة تغيير الأساس تجيب عن هذه الأسئلة.

تعريف ٨-٣-٤. نفرض أن V فضاء اتجاهي و $I_V : V \to V$ هو تحويل الوحدة الخطي على V. نفرض $B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ و C أساسان لـ V. إذن **مصفوفة تغيير الأساس** change-of-basis matrix من B إلى C هي التمثيل المصفوفي لـ I_V بالنسبة إلى B و C،

$$\begin{aligned} C_{B,C} &= M^{I_V}_{B,C} \\ &= [\rho_C(I_V(v_1)) \mid \rho_C(I_V(v_3)) \mid \ldots \mid \rho_C(I_V(v_n))] \\ &= [\rho_C(v_1) \mid \rho_C(v_3) \mid \ldots \mid \rho_C(v_n)] \end{aligned}$$

نظرية ٨-٣-٥. نفرض أن v متجه في الفضاء الاتجاهي V و B و C أساسان لـ V. إذن

$$\rho_C(v) = C_{B,C}\,\rho_B(v)$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \rho_C(v) &= C_{B,C}\,\rho_B(v) \\ &= M^{I_V}_{B,C}\,\rho_B(v) \\ &= C_{B,C}\,\rho_B(v) \end{aligned}$$

ومن ثم مصفوفة تغيير الأساس يمكن استخدامها مع ضرب المصفوفات لتحويل التمثيل المتجهي (تمثيل المتجه) للمتجه v بالنسبة لأساس $\rho_B(v)$ إلى تمثيل لنفس المتجه بالنسبة إلى أساس آخر $\rho_C(v)$.

نظرية ٨-٣-٦. نفرض أن V فضاء اتجاهي، B و C أساسان لـ V. إذن مصفوفة تغيير الأساس $C_{B,C}$ تكون غير شاذة و

$$C^{-1}_{B,C} = C_{C,B}$$

البرهان: التحويل الخطي $I_V : V \to V$ يكون منعكس، ومعكوسه هو نفسه، I_V (تحقق من ذلك). ومن ثم، من نظرية ٨-٢-١٣

$M_{B,C}^{I_V} = C_{B,C}$ تكون منعكسة. نظرية ٣-٤-٣ تقول أن المصفوفة المنعكسة تكون غير شاذة.

إذن

$$\begin{aligned} C_{B,C}^{-1} &= \left(M_{B,C}^{I_V}\right)^{-1} \\ &= M_{C,B}^{I_V^{-1}} \\ &= M_{C,B}^{I_V} \\ &= C_{C,B} \end{aligned}$$

مثال ٨-٣-٧. الفضاء الاتجاهي P_4 له أساسان لطيفان ،

$$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

$$C = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, \\ 1+x+x^2+x^3+x^4\}$$

لتكوين مصفوفة تغيير الأساس بين B و C ، يجب أن نكون تمثيل متجهي لكل متجه في B بالنسبة إلى C

$$\rho_C(1) = \rho_C((1)(1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x) = \rho_C((-1) + (1)(1+x)) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x^2) = \rho_C((-1)(1+x) + (1)(1+x+x^2)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x^3)=\rho_C((-1)(1+x+x^2)+(1)(1+x+x^2+x^3))=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x^4)=\rho_C((-1)(1+x+x^2+x^3)+(1)(1+x+x^2+x^3+x^4))$$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

بتجميع هذه المتجهات كأعمدة مصفوفة،

$$C_{B,C}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

الآن، لتوضيح نظرية ٨-٣-٥، نعتبر المتجه

$$u=5-3x+2x^2+8x^3-3x^4$$

يمكننا بسهولة تكوين تمثيل لـ u بالنسبة إلى B،

$$\rho_B(u)=\rho_B(5-3x+2x^2+8x^3-3x^4)=\begin{bmatrix}5\\-3\\2\\8\\-3\end{bmatrix}$$

بتطبيق نظرية ٨-٣-٥ نحصل على تمثيل آخر لـ u ، ولكن الآن بالنسبة إلى C ،

$$\rho_C(u)=C_{B,C}\,\rho_B(u)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -3\\ 2\\ 8\\ -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8\\ -5\\ -6\\ 11\\ -3\end{bmatrix}$$

يمكن التحقق من عملنا بالعمل عكس التمثيل الثاني

$$u=\rho_C^{-1}(\rho_C(u))$$

$$=\rho_C^{-1}\left(\begin{bmatrix}8\\ -5\\ -6\\ 11\\ -3\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}&=8(1)+(-5)(1+x)+(-6)(1+x+x^2)\\ &\quad+(11)(1+x+x^2+x^3)+(-3)((1+x+x^2+x^3+x^4)\\ &=5-3x+2x^2+8x^3-3x^4\end{aligned}$$

مصفوفة تغيير الأساس من C إلى B فعليا أيسر في التكوين. نأخذ كل متجه من الأساس C ونكون له التمثيل بالنسبة إلى B ،

$$\rho_B(1)=\rho_B((1)1)=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(1+x)=\rho_B((1)1+(1)x)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(1+x+x^2)=\rho_B((1)1+(1)x+(1)x^2)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(1+x+x^2+x^3)=\rho_B((1)1+(1)x+(1)x^2+(1)x^3)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

$$=\rho_B((1)1+(1)x+(1)x^2+(1)x^3+(1)x^4)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

بتجميع هذه المتجهات كأعمدة مصفوفة،

$$C_{C,B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

الآن نحن كونا تمثيلين للمتجه u ، لذلك يمكننا التأكد من حساباتنا بالانتقال من تمثيل u بالنسبة إلى C إلى تمثيل u بالنسبة إلى B.

$$\rho_B(u)=C_{C,B}\,\rho_C(u)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\-5\\-6\\11\\-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\\-3\\2\\8\\-3\end{bmatrix}$$

حسابات أخرى إما للتأكد من العمل، أو توضيح للنظرية. مصفوفتي تغيير الأساس $C_{B,C}$ و $C_{C,B}$ ، سوف تكون كل منهما معكوس الأخرى، طبقا لنظرية ٨-٣-٦ . هنا نفعل ذلك

$$C_{B,C}C_{C,B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

مثال ٨-٣-٨. للفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^4$ لدينا أساسين

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\3\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\\3\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{bmatrix}1\\-6\\-4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\8\\-5\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\13\\-2\\9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-7\\3\\-6\end{bmatrix}\right\}$$

مصفوفة تغيير الأساس من B إلى C تتطلب كتابة كل متجه من B كتركيبة خطية من متجهات C ،

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{bmatrix}\right)=\rho_C\left((1)\begin{bmatrix}1\\-6\\-4\\-1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}-4\\8\\-5\\8\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}-5\\13\\-2\\9\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}3\\-7\\3\\-6\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\rho_C\left((2)\begin{bmatrix}1\\-6\\-4\\-1\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}-4\\8\\-5\\8\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}-5\\13\\-2\\9\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}3\\-7\\3\\-6\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2\\-3\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}2\\-3\\3\\-4\end{bmatrix}\right)=\rho_C\left((1)\begin{bmatrix}1\\-6\\-4\\-1\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}-4\\8\\-5\\8\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}-5\\13\\-2\\9\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}3\\-7\\3\\-6\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\-2\end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}-1\\3\\3\\0\end{bmatrix}\right)=\rho_C\left((2)\begin{bmatrix}1\\-6\\-4\\-1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}-4\\8\\-5\\8\end{bmatrix}+(4)\begin{bmatrix}-5\\13\\-2\\9\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}3\\-7\\3\\-6\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2\\-2\\4\\3\end{bmatrix}$$

بتجميع هذه المتجهات كمصفوفة تغيير الأساس نحصل على

$$C_{B,C}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\-2&-3&-3&-2\\1&3&1&4\\-1&0&-2&3\end{bmatrix}$$

الآن نعتبر متجه (اختياري) $y=\begin{bmatrix}2\\6\\-3\\4\end{bmatrix}$. أولا نكون التمثيل المتجهي لـ y بالنسبة إلى B. هذا يتطلب كتابة y كتركيبة خطية من متجهات B،

$$\rho_B(y)=\rho_B\left(\begin{bmatrix}2\\6\\-3\\4\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_B\left((-21)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{bmatrix}+(6)\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix}+(11)\begin{bmatrix}2\\-3\\3\\-4\end{bmatrix}+(-7)\begin{bmatrix}-1\\3\\3\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-21\\6\\11\\-7\end{bmatrix}$$

الآن، نطبق نظرية ٨-٣-٥ لتحويل تمثيل y بالنسبة إلى B إلى تمثيل بالنسبة إلى C

$$\begin{aligned}\rho_C(y) &= C_{B,C}\rho_B(y)\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 \\ 6 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \\ -20 \\ -22 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

تمثيلات المصفوفة والتشابه

هنا النظرية الرئيسية في هذا الفصل. للوهلة الأولى يبدو أنها معقدة، ولكن البرهان سوف يجعلك توقن بأنها ليست كذلك. على أي حال، نحن أكثر اهتماما بالحالة الخاصة.

نظرية ٨-٣-٩. نفرض أن $T:U \to V$ تحويل خطي، B و C أساسين لـ U و D و E أساسين لـ V. إذن

$$M^T_{B,D} = C_{E,D}M^T_{C,E}C_{B,C}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}C_{E,D}M^T_{C,E}C_{B,C} &= M^{I_V}_{E,D}M^T_{C,E}M^{I_U}_{B,C}\\ &= M^{I_V}_{E,D}M^{T\circ I_U}_{B,E}\\ &= M^{I_V}_{E,D}M^T_{B,E}\\ &= M^{I_V\circ T}_{B,D}\\ &= M^T_{B,D}\end{aligned}$$

سوف نهتم غالبا بحالة خاصة من هذه النظرية (نظرية ٨-٣-١١)، ولكن الآن مع مثال توضيحي للنظرية في صورتها العامة.

مثال ٨-٣-١٠. نبدأ بفضاءين اتجاهيين، S_{22}، الفضاء الجزئي من M_{22} المكون من كل المصفوفات المتماثلة من الحجم 2×2 و P_3 الفضاء الاتجاهي لكل كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوي 3.
نعرف التحويل الخطي $Q: S_{22} \to P_3$ بالصورة

$$Q\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (5a-2b+6c)+(3a-b+2c)x + (a+3b-c)x^2+(-4a+2b+c)x^3$$

هنا أساسين لكل فضاء اتجاهي، أولا لـ S_{22}

$$B=\left\{\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ثانيا لـ P_3

$$D=\{2+x-2x^2+3x^3, -1-2x^2+3x^3, -3-x+x^3, -x^2+x^3\}$$

$$E=\{1, x, x^2, x^3\}$$

نبدأ بتمثيل مصفوفي لـ Q بالنسبة إلى C و E. أولا نوجد تمثيل متجهي لعناصر C بالنسبة إلى E،

$$\rho_E\left(Q\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \rho_E(5+3x+x^2-4x^3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\rho_E\left(Q\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \rho_E(-2-x+3x^2+2x^3) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_E\left(Q\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\right)=\rho_E(6+2x-x^2+x^3)=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

لذلك

$$M_{C,E}^{Q}=\begin{bmatrix}5 & -2 & 6\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ -4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

الآن مصفوفتي تغيير أساس. أولا، $C_{B,C}$ تتطلب تمثيل متجهي لعناصر B بالنسبة إلى C. حيث أن C أساس لطيف، هذا يكون مباشر

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & -2\end{bmatrix}\right)$$
$$=\rho_C\left((5)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\ -3\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$=\rho_C\left((2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\rho_C\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\right)$$
$$=\rho_C\left((1)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+(4)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$$

لذلك

$$C_{B,C}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -3 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

مصفوفة تغيير الأساس الأخرى التي سوف تحسب هي $C_{E,D}$

$$\rho_E(2+x-2x^2+3x^3)$$
$$=\rho_E((2)1+(1)x+(-2)x^2+(3)x^3)=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

$$\rho_E(-1-2x^2+3x^3)$$
$$=\rho_E((-1)1+(0)x+(-2)x^2+(3)x^3)=\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\3\end{bmatrix}$$

$$\rho_E(-3-x+x^3)$$
$$=\rho_E((-3)1+(-1)x+(0)x^2+(1)x^3)=\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\rho_E(-x^2+x^3)=\rho_E((0)1+(0)x+(-1)x^2+(1)x^3)=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

نجمع متجهات الأعمدة هذه في مصفوفة لنحصل على $C_{D,E}$، إذن

$$C_{E,D}=(C_{D,E})^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}2&-1&-3&0\\1&0&-1&0\\-2&-2&0&-1\\3&3&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\-2&5&-1&-1\\1&-3&1&1\\2&-6&-1&0\end{bmatrix}$$

الآن نحن في وضع لتطبيق نظرية ٨-٣-٩ . التمثيل المصفوفي لـ Q بالنسبة إلى B و D يمكن الحصول عليه كما يلي

$$M_{B,D}^{Q} = C_{E,D} M_{C,E}^{Q} C_{B,C}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -39 & -23 & 14 \\ 62 & 34 & -12 \\ -53 & -32 & 5 \\ -44 & -15 & -7 \end{bmatrix}$$

الآن يمكن التأكد من حساباتنا بحساب $M_{B,D}^{Q}$ مباشرة.

هنا حالة خاصة من النظرية السابقة، حيث نختار U و V على أنهما نفس الفضاء الاتجاهي، لذلك التمثيلات المصفوفية ومصفوفات تغيير الأساس تكون جميعها مربعة ومن نفس الحجم.

نظرية ٨-٣-١١. نفرض أن $T : V \to V$ تحويل خطي و B و C أساسان لـ V. إذن

$$M_{B,B}^{T} = C_{B,C}^{-1} M_{C,C}^{T} C_{B,C}$$

البرهان: في خلاصة نظرية ٨-٣-٩ نضع B بدلا عن D ونضع C بدلا عن E،

$$M_{B,B}^{T} = C_{C,B} M_{C,C}^{T} C_{B,C}$$
$$= C_{B,C}^{-1} M_{C,C}^{T} C_{B,C}$$

هذه هي المفاجأة الثالثة في هذا الباب. نظرية ٨-٣-١١ تعتبر الحالة الخاصة عندما التحويل الخطي يكون له نفس الفضاء الاتجاهي للنطاق والنطاق المصاحب (V). نكون تمثيل مصفوفي لـ T باستخدام الأساس B في آن واحد لكل من النطاق والنطاق المصاحب ($M_{B,B}^{T}$)، ثم نكون تمثيل مصفوفي آخر لـ T ، الآن باستخدام الأساس C لكل من

النطاق والنطاق المصاحب ($M_{C,C}^{T}$). هذان التمثيلان يرتبطان كتحويل التشابه باستخدام مصفوفة تغيير الأساس ($C_{B,C}$).

مثال ٨-٣-١٢. نعود إلى التحويل الخطي $T: M_{22} \to M_{22}$ في مثال ٨-٣-٢ المعرف بالصورة

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -17a+11b+8c-11d & -57a+35b+24c-33d \\ -14a+10b+6c-10d & -41a+25b+16c-23d \end{bmatrix}$$

في مثال ٨-٣-٢ عرضنا أربعة متجهات ذاتية لـ T. الآن نضع هذه المتجهات في مجموعة

$$B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right\}$$

نتحقق أن B أساس لـ M_{22} بالتحقق من الاستقلال الخطي لـ B ثم التحقق من خاصية التوليد. هنا مجموعة أخرى من المصفوفات من الحجم 2×2 تكون أساس لـ M_{22}

$$C = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

يمكننا تكوين تمثيلين مصفوفيين لـ T، واحد بالنسبة للأساس B والثاني بالنسبة للأساس C . في حساباتنا للتمثيل المصفوفي بالنسبة للأساس B سوف نقترض بعض الحسابات من مثال ٨-٣-٢ ، هنا التمثيلات ثم التوضيح

$$\rho_B(T(x_1)) = \rho_B(2x_1) = \rho_B(2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_B(T(x_2)) = \rho_B(2x_2) = \rho_B(0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_B(T(x_3)) = \rho_B((-1)x_3)$$

$$= \rho_B(0x_1 + 0x_2 + (-1)x_3 + 0x_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_B(T(x_4)) = \rho_B((-2)x_4)$$

$$= \rho_B(0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + (-2)x_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

لذلك التمثيل الناتج يكون

$$M_{B,B}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

شيء جميل جدا.

الآن للتمثيل المصفوفي بالنسبة للأساس C نحسب

$$\rho_C(T(y_1)) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} -17 & -57 \\ -14 & -41 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left((-17)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-57)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-14)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-41)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-17\\-57\\-14\\-41\end{bmatrix}$$

$$\rho_C(T(y_2))=\rho_C\left(\begin{bmatrix}11 & 35\\10 & 25\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_C\left(11\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+35\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+25\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}11\\35\\10\\25\end{bmatrix}$$

$$\rho_C(T(y_3))=\rho_C\left(\begin{bmatrix}8 & 24\\6 & 16\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_C\left(8\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+24\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+16\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}8\\24\\6\\16\end{bmatrix}$$

$$\rho_C(T(y_4))=\rho_C\left(\begin{bmatrix}-11 & -33\\-10 & -23\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_C\left((-11)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+(-33)\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+(-10)\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+(-23)\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -11 \\ -33 \\ -10 \\ -23 \end{bmatrix}$$

التمثيل الناتج يكون

$$M_{C,C}^{T} = \begin{bmatrix} -17 & 11 & 8 & -11 \\ -57 & 35 & 24 & -33 \\ -14 & 10 & 6 & -10 \\ -41 & 25 & 16 & -23 \end{bmatrix}$$

ليس جميلا كما نحب.

الهدف من هذا المثال هو توضيح نظرية ٨-٣-١١ . هذه النظرية تقول أن تمثيلي مصفوفات $M_{B,B}^{T}$ و $M_{C,C}^{T}$ لتحويل خطي واحد ، T، تكونا مرتبطتين بتحويل تشابه باستخدام مصفوفة تغيير الأساس $C_{B,C}$. دعنا نحسب مصفوفة تغيير الأساس هذه. لاحظ أن، لكون C أساس لطيف، هذه تكون مباشرة .

$$\rho_C(x_1) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left(0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x_2) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left(1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x_3) = \rho_C\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left(1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\rho_C(x_4)=\rho_C\left(\begin{bmatrix}2 & 6\\1 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_C\left(2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\6\\1\\4\end{bmatrix}$$

لذلك يكون

$$C_{B,C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 3 & 6\\0 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

الآن طبقا لنظرية ٨-٣-١١ يمكننا كتابة، $M^T_{B,B}=C^{-1}_{B,C}M^T_{C,C}C_{B,C}$

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 3 & 6\\0 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-17 & 11 & 8 & -11\\-57 & 35 & 24 & -33\\-14 & 10 & 6 & -10\\-41 & 25 & 16 & -23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 3 & 6\\0 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

هذا يبدو أنه يشعرنا بعملية تقطير المصفوفة، كما وصفت في الفصل ٥-٢، وهي كذلك.

يمكننا الآن الرجوع للسؤال عن حساب القيم الذاتية أو المتجهات الذاتية لتحويل خطي. للتحويل الخطي على الصورة $T:V\to V$، نعلم أن التمثيلات بالنسبة لأساسات مختلفة تكون مصفوفات متشابهة. نعلم أيضا أن المصفوفات المتشابهة لها كثيرات حدود مميزة متساوية، من

نظرية ٦-٣-٥. الآن سوف نبين أن القيم الذاتية للتحويل الخطي T هي على وجه التحديد القيم الذاتية لأي تمثيل مصفوفي لـ T. حيث أن اختيار تمثيلات مصفوفية مختلفة يؤدي إلى مصفوفات متشابهة، لن نحصل على قيم ذاتية جديدة من هذا التمثيل الثاني. بالمثل، مصفوفة تغيير الأساس يمكن استخدامها لبيان أن المتجهات الذاتية التي نحصل عليها من التمثيل المصفوفي سوف تكون هي تلك التي نحصل عليها من أي تمثيل آخر. لذلك يمكننا تحديد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لتحويل خطي بتكوين تمثيل مصفوفي، باستخدام أي أساس، وتحليل المصفوفة بأسلوب الباب السادس.

نظرية ٨-٣-١٣. نفرض أن $T:V \to V$ تحويل خطي و B أساس لـ V. إذن $v \in V$ يكون متجه ذاتي لـ T مناظر للقيمة الذاتية λ إذا وفقط إذا كان $\rho_B(v)$ متجه ذاتي لـ $M_{B,B}^{T}$ مناظر للقيمة الذاتية λ.

البرهان: نفرض أن $v \in V$ متجه ذاتي لـ T مناظر للقيمة الذاتية λ. إذن

$$\begin{aligned} M_{B,B}^{T}\rho_B(v) &= \rho_B(T(v)) \\ &= \rho_B(\lambda v) \\ &= \lambda\rho_B(v) \end{aligned}$$

وهو ما يعني أن $\rho_B(v)$ يكون متجه ذاتي للمصفوفة $M_{B,B}^{T}$ مناظر للقيمة الذاتية λ.

في الاتجاه الآخر، نفرض أن $\rho_B(v)$ يكون متجه ذاتي للمصفوفة $M_{B,B}^{T}$ مناظر للقيمة الذاتية λ. إذن

$$\begin{aligned} T(v) &= \rho_B^{-1}(\rho_B(T(v))) \\ &= \rho_B^{-1}(M_{B,B}^{T}\rho_B(v)) \\ &= \rho_B^{-1}(\lambda\rho_B(v)) \\ &= \lambda\rho_B^{-1}(\rho_B(v)) \\ &= \lambda v \end{aligned}$$

وهذا يعني أن v يكون متجه ذاتي لـ T مناظر للقيمة الذاتية λ.

حساب المتجهات الذاتية للتحويلات الخطية

نظرية ٨-٣-١٣ تخبرنا أن القيم الذاتية لتحويل خطي هي القيم الذاتية لأي تمثيل مصفوفي، بصرف النظر عن اختيار الأساس B أيا كان. لذلك يمكننا بدون لبس تعريف كثيرة حدود مميزة لتحويل خطي، والتي سوف تعرف مثل كثيرة الحدود المميزة لأي تمثيل مصفوفي. سوف نقول أيضا القيم الذاتية، المتجهات الذاتية و كثيرة الحدود المميزة تكون خصائص ذاتية للتحويل الخطي، لا تعتمد على اختيار الأساس المستخدم في التمثيل المصفوفي.

من الناحية العملية، كيف يمكننا حساب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لتحويل خطي على الصورة $T:V\to V$؟ نختار أساس لطيف B لـ V. نكون التمثيل المصفوفي بالنسبة لهذا الأساس ونوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لهذه المصفوفة باستخدام الطرق في الباب السادس. القيم الذاتية الناتجة للمصفوفة هي على وجه التحديد القيم الذاتية للتحويل الخطي. المتجهات الذاتية للمصفوفة هي متجهات الأعمدة التي نحتاج لتحويلها إلى متجهات V من خلال تطبيق ρ_B^{-1} (هذا جزء من محتوى نظرية ٨-٣-١٣). الآن نعتبر الحالة عندما يكون التمثيل المصفوفي لتحويل خطي هو مصفوفة قابلة للتقطير. المتجهات الذاتية المستقلة خطيا والتي عددها n والتي يجب أن تكون موجودة للمصفوفة يمكن تحويلها (عن طريق ρ_B^{-1}) إلى متجهات ذاتية للتحويل الخطي. تمثيل المصفوفي للتحويل الخطي بالنسبة لأساس من المتجهات الذاتية سوف يكون مصفوفة قطرية.

مثال ٨-٣-١٤. نعتبر التحويل الخطي $S:M_{22}\to M_{22}$ المعرف كما يلي

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix} -b-c-3d & -14a-15b-13c+d \\ 18a+21b+19c+3d & -6a-7b-7c-3d \end{bmatrix}$$

لإيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـ S سوف نكون التمثيل المصفوفي ونحلل المصفوفة. حيث أن نظرية ٨-٣-١٣ لا تضع قيودا على اختيار الأساس B ، يمكننا للتيسير، اختيار الأساس

$$B=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

لبناء التمثيل المصفوفي لـ S بالنسبة للأساس B نحسب

$$\rho_B(S(x_1))=\rho_B\left(\begin{bmatrix}0&-14\\18&-6\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_B(0x_1+(-14)x_2+18x_3(-6)x_4)=\begin{bmatrix}0\\-14\\18\\-6\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(S(x_2))=\rho_B\left(\begin{bmatrix}-1&-15\\21&-7\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_B((-1)x_1+(-15)x_2+21x_3(-7)x_4)=\begin{bmatrix}-1\\-15\\21\\-7\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(S(x_3))=\rho_B\left(\begin{bmatrix}-1&-13\\19&-7\end{bmatrix}\right)$$

$$=\rho_B((-1)x_1+(-13)x_2+19x_3(-7)x_4)=\begin{bmatrix}-1\\-13\\19\\-7\end{bmatrix}$$

$$\rho_B(S(x_4))=\rho_B\left(\begin{bmatrix}-3&1\\3&-3\end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_B((-3)x_1 + 1x_2 + 3x_3(-3)x_4) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

لذلك من التعريف نحصل على

$$M = M^S_{B,B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ -14 & -15 & -13 & 1 \\ 18 & 21 & 19 & 3 \\ -6 & -7 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

الآن نحسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للتمثيل المصفوفي M. أولا كثيرة الحدود المميزة

$$p_M(x) = \det(M - xI_4) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24$$
$$= (x-3)(x-2)(x+2)^2$$

لذلك القيم الذاتية لـ M تكون $\lambda = 3, 2, -2$. تعدد هذه القيم هو

$\alpha_S(-2) = 2$ ، $\alpha_S(2) = 1$ ، $\alpha_S(3) = 1$

الآن نحسب المتجهات الذاتية لـ M

$\lambda = 3$

$$M - 3I_4 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & -3 \\ -14 & -18 & -13 & 1 \\ 18 & 21 & 16 & 3 \\ -6 & -7 & -7 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(3) = N(M - 3I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$\lambda = 2$

$$M - 2I_4 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -3 \\ -14 & -17 & -13 & 1 \\ 18 & 21 & 17 & 3 \\ -6 & -7 & -7 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(2) = N(M - 2I_4) = \left\langle\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$\lambda = -2$

$$M - (-2)I_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ -14 & -13 & -13 & 1 \\ 18 & 21 & 21 & 3 \\ -6 & -7 & -7 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(-2) = N(M - (-2)I_4) = \left\langle\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

طبقا لنظرية ٨-٣-١٣ المتجهات الذاتية التي بالفعل وضعت كمتجهات أساس للفضاءات الذاتية لـ M هي تمثيلات متجهية (بالنسبة إلى B) للمتجهات الذاتية لـ S. لذلك تطبيق الدالة العكسية ρ_B^{-1} سوف يحول متجهات الأعمدة هذه إلى عناصر في الفضاء الاتجاهي M_{22} (المصفوفات من الحجم 2×2) والتي هي متجهات ذاتية لـ S. حيث أن ρ_B تماثل، كذلك يكون ρ_B^{-1}. بتطبيق الدالة العكسية سوف نحافظ على خواص الاستقلال الخطي والتوليد، ومن ثم، مع تطبيقات واسعة لمبدأ الأحدثة وبعض التوسيعات للمفاهيم السابقة عن الفضاءات الذاتية والتعددات الهندسية، يمكننا كتابة

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)x_1 + 3x_2 + (-3)x_3 + 1x_4 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix}-2\\4\\-3\\1\end{bmatrix}\right)=(-2)x_1+4x_2+(-3)x_3+1x_4=\begin{bmatrix}-2&4\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=0x_1+(-1)x_2+1x_3+0x_4=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=1x_1+(-1)x_2+0x_3+1x_4=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

لذلك

$$\varepsilon_S(3)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1&3\\-3&1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_S(2)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2&4\\-3&1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_S(-2)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

التعدد الهندسي يعطى بـ

$\gamma_S(-2)=2$ ، $\gamma_S(2)=1$ ، $\gamma_S(3)=1$

نفرض أننا الآن قررنا بناء تمثيل مصفوفي آخر لـ S، فقط الآن بالنسبة إلى مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات الذاتية لـ S، مثل

$$C=\left\{\begin{bmatrix}-1&3\\-3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&4\\-3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

عند هذه النقطة نكون قد حسبنا من التمثيلات المصفوفية ما يكفي للتنبؤ أن نتيجة تمثيل S بالنسبة إلى C سوف يكون مصفوفة قطرية. حساب

هذا التمثيل يكون مثال لكيف أن نظرية ٨-٣-١١ تكون تعميم للتقطير في الفصل ٦-٣ . للتسجيل، هنا تمثيل قطري

$$M_{C,C}^{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

اهتمامنا في هذا المثال ليس بالضرورة بناء تمثيل لطيف، ولكن نريد توضيح كيف أن القيم الذاتية والمتجهات الذاتية تكون خواص ذاتية للتحويل الخطي، لا تعتمد على أي اختيار خاص للتمثيل. من أجل ذلك سوف نكرر ما سبق، ولكن باستبدال B بأساس آخر. سوف نعطي أساس مختلف ولكن ليس كثيرا.

$$D = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

لذلك، لبناء تمثيل مصفوفي لـ S بالنسبة إلى D نحسب

$$\rho_D(S(y_1)) = \rho_D\left(\begin{bmatrix} 0 & -14 \\ 18 & -6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_D(14y_1 + (-32)y_2 + 24y_3 + (-6)y_4) = \begin{bmatrix} 14 \\ -32 \\ 24 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\rho_D(S(y_2)) = \rho_D\left(\begin{bmatrix} -1 & -29 \\ 39 & -13 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_D(28y_1 + (-68)y_2 + 52y_3 + (-13)y_4) = \begin{bmatrix} 28 \\ -68 \\ 52 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\rho_D(S(y_3)) = \rho_D\left(\begin{bmatrix} -2 & -42 \\ 58 & -20 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \rho_D(40y_1 + (-100)y_2 + 78y_3 + (-20)y_4) = \begin{bmatrix} 40 \\ -100 \\ 78 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\rho_D(S(y_4)) = \rho_D\left(\begin{bmatrix} -5 & -41 \\ 61 & -23 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \rho_D(36y_1 + (-102)y_2 + 84y_3 + (-23)y_4) = \begin{bmatrix} 36 \\ -102 \\ 84 \\ -23 \end{bmatrix}$$

لذلك من تعريف ٨-٢-١ نحصل على

$$N = M_{D,D}^{S} = \begin{bmatrix} 14 & 28 & 40 & 36 \\ -32 & -68 & -100 & -102 \\ 24 & 52 & 78 & 84 \\ -6 & -13 & -20 & -23 \end{bmatrix}$$

الآن نحسب القيم الذاتية والمتجهات للتمثيل المصفوفي N ، كثيرة الحدود المميزة هي

$$p_N(x) = \det(N - xI_4) = x^4 - x^3 - 10x^2 + 4x + 24$$
$$= (x-3)(x-2)(x+2)^2$$

بالطبع هذا ليس جديدا، نعلم أن $M = M_{B,B}^{S}$ و $N = M_{D,D}^{S}$ مصفوفتان متشابهتان (نظرية ٨-٣-١١)، ولكن نظرية ٦-٣-٥ تخبرنا بأن المصفوفتان المتشابهتان يكون لهما نفس كثيرة الحدود المميزة. الآن نحسب المتجهات الذاتية للتمثيل المصفوفي، والتي سوف تختلف عن تلك التي أوجدناها لـ M،

$\lambda = 3$

$$N - 3I_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 28 & 40 & 36 \\ -32 & -71 & -100 & -102 \\ 24 & 52 & 75 & 84 \\ -6 & -13 & -20 & -26 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_N(3) = N(N-3I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\lambda = 2$$

$$N - 2I_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 28 & 40 & 36 \\ -32 & -70 & -100 & -102 \\ 24 & 52 & 76 & 84 \\ -6 & -13 & -20 & -25 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_N(2) = N(N-2I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\lambda = -2$$

$$N - (-2)I_4 =$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 28 & 40 & 36 \\ -32 & -66 & -100 & -102 \\ 24 & 52 & 80 & 84 \\ -6 & -13 & -20 & -21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_N(-2) = N(N-(-2)I_4) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

باستخدام نظرية ٨-٣-١٣ يمكننا تطبيق ρ_D^{-1} على كل متجه من متجهات أساس الفضاء الذاتي لـ N للحصول على المتجهات الذاتية لـ S التي تكون أيضا أساس للفضاء الذاتي لـ S،

$$\rho_D^{-1}\left(\begin{bmatrix}-4\\6\\-4\\1\end{bmatrix}\right)=(-4)y_1+6y_2+(-4)y_3+1y_4=\begin{bmatrix}-1&3\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$\rho_D^{-1}\left(\begin{bmatrix}-6\\7\\-4\\1\end{bmatrix}\right)=(-6)y_1+7y_2+(-4)y_3+1y_4=\begin{bmatrix}-1&3\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$\rho_D^{-1}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)=1y_1+(-2)y_2+1y_3+0y_4=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\rho_D^{-1}\left(\begin{bmatrix}3\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right)=3y_1+(-3)y_2+0y_3+1y_4=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$$

الفضاءات الذاتية للقيم الذاتية التي لها التعدد الجبري 1، كما سبق هي

$$\varepsilon_N(3)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1&3\\-3&1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_N(2)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2&4\\-3&1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

ومع ذلك الفضاء الذاتي لـ $\lambda=-2$ قد يبدو لأول وهلة أنه مختلف. هنا فضاءان ذاتيان لـ $\lambda=-2$، الفضاء الذاتي الأول الذي نحصل عليه من $M=M_{B,B}^S$ ، ثم بعد ذلك الذي نحصل عليه من $M=M_{D,D}^S$

$$\varepsilon_S(-2)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_S(-2)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

الفضاءات الجزئية عادة يكون لها العديد من الأساسات، وهذا هو الوضع هنا، يمكننا بسهولة بيان أن هذان الفضاءان الذاتيان متساويان. مفتاح هذه الملاحظة هو

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

لذلك القيم الذاتية لتحويل خطي لا تعتمد على التمثيل المصفوفي المستخدم في إيجادها.

مثال ٨-٣-١٥. نعتبر التحويل الخطي $Q: P_4 \to P_4$ المعرف بالصورة

$$\begin{aligned}Q(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)\\ &=(-46a-22b+13c+5d+e)\\ &\quad+(117a+57b-32c-15d-4e)x\\ &\quad+(-69a-29b+21c-7e)x^2\\ &\quad+(159a+73b-44c-13d+2e)x^3\\ &\quad+(-195a-87b+55c+10d-13e)x^4\end{aligned}$$

نختار أساس لنحسب معه وليكن

$$B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$$

قد يظهر أن التمثيل المصفوفي لـ Q يكون

$$M=M^Q_{B,B}=\begin{bmatrix}-46 & -22 & 13 & 5 & 1\\ 117 & 57 & -32 & -15 & -4\\ -69 & -29 & 21 & 0 & -7\\ 159 & 73 & -44 & -13 & 2\\ -195 & -87 & 55 & 10 & -13\end{bmatrix}$$

نحسب كثيرة الحدود المميزة، القيم الذاتية والمتجهات الذاتية،

$$p_Q(x) = -x^5 + 6x^4 - x^3 - 88x^2 + 252x - 208x$$
$$= -(x-2)^2(x+4)(x^2-6x+13)$$
$$= -(x-2)^2(x+4)(x-(3+2i))(x-(3-2i))$$
$$\alpha_Q(2) = 2,\ \alpha_Q(-4) = 1,\ \alpha_Q(3+2i) = 1,\ \alpha_Q(3-2i) = 1$$

$$\lambda = 2$$

$$M-(2)I_5 =$$
$$\begin{bmatrix} -48 & -22 & 13 & 5 & 1 \\ 117 & 55 & -32 & -15 & -4 \\ -69 & -29 & 19 & 0 & -7 \\ 159 & 73 & -44 & -15 & 2 \\ -195 & -87 & 55 & 10 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(2) = N(M-(2)I_5) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$
$$= \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\lambda = -4$$

$$M-(-4)I_5 =$$
$$\begin{bmatrix} -42 & -22 & 13 & 5 & 1 \\ 117 & 61 & -32 & -15 & -4 \\ -69 & -29 & 25 & 0 & -7 \\ 159 & 73 & -44 & -9 & 2 \\ -195 & -87 & 55 & 10 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(-4) = N(M-(-4)I_5) = \left\langle\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\lambda = 3+2i$$

$$M-(3+2i)I_5 =$$

$$\begin{bmatrix}-49-2i & -22 & 13 & 5 & 1\\ 117 & 54-2i & -32 & -15 & -4\\ -69 & -29 & 18-2i & 0 & -7\\ 159 & 73 & -44 & -16-2i & 2\\ -195 & -87 & 55 & 10 & -16-2i\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}+\frac{i}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{4}-\frac{i}{4}\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4}-\frac{i}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(3+2i) = N(M-(3+2i)I_5) =$$

$$\left\langle\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{4}-\frac{i}{4}\\ -\frac{7}{4}+\frac{i}{4}\\ \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\\ -\frac{7}{4}+\frac{i}{4}\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle = \left\langle\left\{\begin{bmatrix}3-i\\-7+i\\2-2i\\-7+i\\4\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$\lambda = 3-2i$$

$$M-(3-2i)I_5 =$$

$$\begin{bmatrix}-49+2i & -22 & 13 & 5 & 1\\ 117 & 54+2i & -32 & -15 & -4\\ -69 & -29 & 18+2i & 0 & -7\\ 159 & 73 & -44 & -16+2i & 2\\ -195 & -87 & 55 & 10 & -16+2i\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}-\frac{i}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{4}+\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2}-\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4}+\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_M(3-2i) = N(M-(3-2i)I_5) =$$

$$\left\langle \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{4}+\frac{i}{4} \\ -\frac{7}{4}-\frac{i}{4} \\ \frac{1}{2}+\frac{i}{2} \\ -\frac{7}{4}-\frac{i}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 3+i \\ -7-i \\ 2+2i \\ -7-i \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

بطريقة مباشرة نحول كل من متجهات الأساس للفضاء الذاتي لـ M مرة أخرى إلى عناصر في P_4 بتطبيق التماثل ρ_B^{-1}،

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -1+5x+4x^2+2x^3$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 1+5x+12x^2+2x^4$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -1+3x+x^2+2x^3+x^4$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3-i \\ -7+i \\ 2-2i \\ -7+i \\ 4 \end{bmatrix}\right) = (3-i)+(-7+i)x+(2-2i)x^2+(-7+i)x^3+4x^4$$

$$\rho_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3+i \\ -7-i \\ 2+2i \\ -7-i \\ 4 \end{bmatrix}\right) = (3+i)+(-7-i)x+(2+2i)x^2+(-7-i)x^3+4x^4$$

بتطبيق نظرية ٨-٣-١٣ ومبدأ الأحدثة نحصل على الفضاءات الذاتيـة لـ Q

$$\varepsilon_Q(2) = \left\langle\left\{-1+5x+4x^2+4x^3, 1+5x+12x^2+2x^4\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_Q(-4) = \left\langle\left\{-1+3x+x^2+2x^3+x^4\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_Q(3+2i) = \left\langle\left\{(3-i)+(-7+i)x+(2-2i)x^2+(-7+i)x^3+4x^4\right\}\right\rangle$$

$$\varepsilon_Q(3-2i) = \left\langle\left\{(3+i)+(-7-i)x+(2+2i)x^2+(-7-i)x^3+4x^4\right\}\right\rangle$$

بتعددات هندسية

$$\gamma_Q(2)=2,\ \gamma_Q(-4)=1,\ \gamma_Q(3+2i)=1,\ \gamma_Q(3-2i)=1$$

تمارين ٨-٣

١- أوجد أساس للفضاء الاتجاهي P_3 يتكون من المتجهات الذاتية للتحويل الخطي T. ومن ثم أوجد التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة لهذا الأساس، حيث $T: P_3 \to P_3$ و

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = (a+c+d)+(b+c+d)x+(a+b+c)x^2 + (a+b+d)x^3$$

٢- نفرض أن S_{22} هو الفضاء الاتجاهي للمصفوفات المتماثلة من الحجم 2×2. أوجد أساس C لـ S_{22} الذي ينتج مصفوفة تمثيل مصفوفة قطرية للتحويل الخطي R، حيث $R: S_{22} \to S_{22}$ و

$$R\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5a+2b-3c & -12a+5b-6c \\ -12a+5b-6c & 6a-2b+4c \end{bmatrix}$$

٣- نفرض أن S_{22} هو الفضاء الاتجاهي للمصفوفات المتماثلة من الحجم 2×2. أوجد أساس لـ S_{22} يتكون من المتجهات الذاتية للتحويل الخطي $Q: S_{22} \to S_{22}$ و

$$Q\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 25a+18b+30c & -16a-11b-20c \\ -16a-11b-20c & -11a-9b-12c \end{bmatrix}$$

٤- نفرض أن $T: V \to V$ تحويل خطي منعكس بقيمة ذاتية غير صفرية λ. برهن أن $\frac{1}{\lambda}$ تكون قيمة ذاتية لـ T^{-1}.

٥- نفرض أن V فضاء اتجاهي و $T: V \to V$ تحويل خطي. برهن أن T يكون أحادي إذا وفقط إذا كان $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية لـ T.

٨-٤ التقطير العياري المتعامد Orthonormal Diagonalization

رأينا في الفصل ٨-٣ أنه في ظل الشروط المناسبة، مصفوفة مربعة تكون متشابهة مع مصفوفة قطرية. الآن نعلم من نظرية ٨-٣-١١، أن التحويل المتشابه يكون تغيير أساس على تمثيل مصفوفي. لذلك يمكننا الآن مناقشة اختيار الأساس المستخدم في تكوين التمثيل المصفوفي، ونقرر ما إذا كان بعض الأساسات أحسن من الآخر لهذا الغرض. هذه هي نغمة هذا الفصل. سوف نرى أيضا أن كل مصفوفة يكون لها تمثيل مصفوفي مفيد معقول، وسوف نكتشف فصل جديد من التحويلات الخطية المقطرة. أولا نحتاج بعض الحقائق الأساسية حول المصفوفات المثلثة.

المصفوفات المثلثة

تعريف ٨-٤-١. المصفوفة المربعة A من الحجم $n \times n$ تكون **مثلثة عليا** upper triangular إذا كان $[A]_{ij} = 0$ كلما كان $i > j$.

تعريف ٨-٤-٢. المصفوفة المربعة A من الحجم $n \times n$ تكون **مثلثة سفلى** lower triangular إذا كان $[A]_{ij} = 0$ كلما كان $i < j$.

واضح أن خواص المصفوفات المثلثة السفلى تكون متشابهة مع خواص المصفوفات المثلثة العليا. بدلا من أن نبدأ بنظريتين متماثلتين جدا، سوف نقول مصفوفات مثلثة من نفس النوع كاختصار مناسب لنغطي لكلا الاحتمالين ثم نعطي برهان لنوع واحد فقط.

نظرية ٨-٤-٣. نفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الحجم $n \times n$ مثلثتان من نفس النوع. إذن AB تكون مصفوفة مثلثة من نفس النوع.

البرهان: سوف نبرهن النظرية للمصفوفات المثلثة السفلى ونترك البرهان للمصفوفات المثلثة العليا ويكون بالمثل. نفرض أن A و B مثلثتان سفليتان. نحتاج إلى إثبات أن عناصر معينة في حاصل الضرب AB تكون أصفار. نفرض أن $i < j$، إذن

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1}[A]_{ik}[B]_{kj} + \sum_{k=j}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1}[A]_{ik}0 + \sum_{k=j}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj} \qquad k<j$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1}[A]_{ik}0 + \sum_{k=j}^{n}0\,[B]_{kj} \qquad i<j\le k$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1}0 + \sum_{k=j}^{n}0$$

$$= 0$$

حيث أن $[AB]_{ij} = 0$ كلما كان $i<j$، إذن AB تكون مثلثة سفلي.

معكوس المصفوفة المثلثة يكون مصفوفة مثلثة من نفس النوع.

نظرية ٨-٤-٤. نفرض أن A مصفوفة غير شاذة مثلثة من الحجم n. إذن معكوس A، A^{-1} تكون مثلثة من نفس النوع. علاوة على ذلك العناصر القطرية في A^{-1} تكون هي مقلوبات العناصر القطرية المناظرة في A. أكثر تحديدا $[A^{-1}]_{ii} = [A]_{ii}^{-1}$.

البرهان: سوف نعطي برهان للحالة عندما A تكون مثلثة سفلى، ونترك حالة المصفوفة المثلثة العليا للقارئ. نعتبر أن عملية حساب معكوس المصفوفة (والتي هي خارج البرهان) هي التي تم تفصيلها في نظرية ٣-٣-٧ . نوسع A بمصفوفة الوحدة من الحجم n، I_n، نختزل صفيا المصفوفة من الحجم $n\times 2n$ إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. نفرض أن $M=[A\,|\,I_n]$.

أولا أي من عناصر القطر في A لا يساوي الصفر. بتكرار الفك عن طريق الصف الأول، محدد المصفوفة المثلثة يمكن أن يلاحظ أنه حاصل ضرب العناصر القطرية. إذا كان هناك ولو عنصر واحد من عناصر القطر صفر فإن محدد A يكون صفر و A تكون شاذة. يمكننا تكوين مصفوفة M' تكافئ صفيا المصفوفة M بضرب الصف رقم i بالكمية القياسية غير الصفرية $[A]_{ii}^{-1}$ لكل $1\le i\le n$. هذا يجعل

$[M']_{ii}=1$ و $[M']_{i,n+1}=[A]_{ii}^{-1}$ ويترك كل عنصر صفري في M بدون تغيير.

نفرض أن M_j ترمز إلى المصفوفة التي نحصل عليها من M' بعد تحويل العمود رقم j إلى عمود محوري. يمكننا تحويل العمود رقم j في M_{j-1} إلى عمود محوري بمجموعة من $n-j-1$ من عمليات الصف على الصورة αR_j+R_k، حيث $j+1\le k\le n$. الملاحظة الأساسية هنا هي أننا أضفنا مضاعفات الصف j فقط إلى الصفوف ذات الأرقام الأكبر. هذا يعني أن أيا من العناصر في الصفوف من 1 إلى $j-1$ لا يتغير، وحيث أن الصف j له أصفار في الأعمدة من $j+1$ إلى n، أي من العناصر في الصفوف من $j+1$ إلى n في العمود $j+1$ لا تتغير. الأعمدة n الأولى من M' تكون مصفوفة مثلثة سفلى مع 1s في القطر. في تحويلها إلى مصفوفة الوحدة خلال هذه المتتابعة من عمليات الصف، ظلت مصفوفة مثلثة سفلى مع 1s في القطر.

ما الذي حدث في الأعمدة من $n+1$ إلى $2n$ من M'. هذه الأعمدة بدأت في M كمصفوفة وحدة، وفي M' كل عنصر قطري تم تحجيمه ليكون مقلوب العنصر القطري المناظر في A. لاحظ أنه من البديهي أن الأعمدة n الأخيرة في M' تكون مصفوفة مثلثة سفلى. مثلما قلنا للأعمدة n الأولى، عمليات الصف التي حولت M_{j-1} إلى M_j سوف تحافظ على الشكل المثلث السفلي في الأعمدة n الأخيرة وتحافظ على القيم الدقيقة لعناصر القطر. من نظرية ٣-٣-٧ الأعمدة n الأخيرة من M تكون هي معكوس A، وهذه المصفوفة يكون لها الخواص الضرورية الواردة في خلاصة النظرية.

التمثيل المصفوفي المثلث العلوي

ليست كل مصفوفة تكون قابلة للتقطير، ولكن كل تحويل خطي له تمثيل مصفوفي عبارة عن مصفوفة مثلثة عليا، والأساس الذي يعطي هذا التمثيل، على وجه الخصوص، يكون مرضي.

نظريـة ٨-٤-٥. نفـرض أن $T:V\to V$ تحويـل خطـي. إذن يوجـد أساس B لـ V بحيث أن التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة للأساس B، $M_{B,B}^{T}$، يكون مصفوفة مثلثة عليا. كل عنصر قطري يكون قيمـة ذاتيـة لـ T ، وإذا كانت λ قيمـة ذاتيـة لـ T فإن λ تتكرر $\alpha_T(\lambda)$ مرة في القطر.

البرهان: سوف نستخدم الاستنتاج الرياضي في برهان النظريـة. سـوف نستخدم الاستنتاج علـى بعد V لبيـان أنـه إذا كـان $T:V\to V$ تحويل خطي، فإنه يوجد أساس B لـ V بحيث أن التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة إلى B، $M_{B,B}^{T}$ ، تكون مصفوفة مثلثة عليا.

لكـي نبـدأ، نفـرض أن $\dim(V)=1$. نختـار أي متجـه غيـر صـفري $v\in V$ و نتحقـق أن $V=\langle\{v\}\rangle$. إذن $T(v)=\beta v$ لـبعض $\beta\in\mathbb{C}$ والتي تحدد T تحديدا وحيدا. هذه الوصف لـ T أيضا يعطي تمثيل مـصفوفي بالنـسبة للأسـاس $B=\{v\}$ كمـصفوفة مـن الحجـم 1×1 بعنصر واحد يساوي β . وهذا التمثيل المصفوفي يكون مصفوفة مثلثـة عليا.

بالنـسبة لخطـوة الاسـتنتاج، نفـرض أن $\dim(V)=m$، ونفـرض أن النظرية صحيحة لأي تحويل خطي معرف على فضاء اتجاهي بعده أقل من m . من نظرية ٦-١-٤ ، T له على الأقل قيمة ذاتية واحدة ونرمز لهـذه القيمـة الذاتيــة بـــ λ. الآن نعتبــر خــواص التحويــل الخطــي $T-\lambda I_V:V\to V$

نفرض x متجه ذاتي لـ T منـاظر للقيمـة λ. من التعريـف $x\neq 0$. إذن

$$\begin{aligned}(T-\lambda I_V)(x)&=T(x)-\lambda I_V(x)\\&=T(x)-\lambda x\\&=\lambda x-\lambda x\\&=0\end{aligned}$$

لذلك $T-\lambda I_V$ لا يكون أحادي حيث أن نواته ليست تافهة. بتطبيق نظرية ٧-٤-١٨ نحدد رتبة $T-\lambda I_V$،

$$r(T-\lambda I_V)=\dim(V)-n(T-\lambda I_V)\leq m-1$$

نفرض أن W فضاء جزئي من V والذي هو مدى $T-\lambda I_V$، $W=R(T-\lambda I_V)$، ونعرف $k=\dim(W)\leq m-1$. نعرف تحويل خطي جديد S على W،

$$S:W\to W,\qquad S(w)=T(w)$$

هذا لا يبدو أننا قد أنجزنا الكثير، حيث أن تأثير S يتطابق مع تأثير T. لأغراضنا هذا سوف يكون أمر جيد. ما هو المختلف؟ النطاق والنطاق المصاحب. S معرف على W ، فضاء اتجاهي بعده أقل من m، وهذا قابل لأن يكون فرض للاستنتاج. التحقق من أن S هو في الحقيقة تحويل خطي هو أمر مباشر، مع استثناء واحد. توظيف T في تعريفنا لـ S يثير احتمال أن نواتج S لا تكون محتواة في W (ولكن تقع في V خارج W). لاختبار هذه الاحتمالية نفرض أن $w\in W$

$$\begin{aligned}S(w)&=T(w)\\&=T(w)+0\\&=T(w)+(\lambda I_V(w)-\lambda I_V(w))\\&=(T(w)-\lambda I_V(w))+\lambda I_V(w)\\&=(T(w)-\lambda I_V(w))+\lambda w\\&=(T-\lambda I_V)(w)+\lambda w\end{aligned}$$

حيث أن W هو مدي $T-\lambda I_V$ ، $(T-\lambda I_V)(w)\in W$. ومن خاصية الضرب في قياسي $\lambda w\in W$ ، أخيرا، بتطبيق خاصية الإغلاق للجمع في W نستنتج أن $S(w)\in W$.

هذه الحجة تقنعنا أنه يكون من المشروع تعريف S كما فعلنا بنطاق مصاحب W.

S يكون تحويل خطي معرف على فضاء اتجاهي من البعد k أقل من m ، لذلك يمكننا تطبيق فرض الاستنتاج ونستنتج أن W لها أساس

$C=\{w_1,w_2,w_3,...,w_k\}$ ، بحيث أن التمثيل المصفوفي لـ S بالنسبة إلى C يكون مصفوفة مثلثة علوية.
ابتداء بالمجموعة المستقلة خطيا C، بتكرار تطبيق نظرية ٤-٥-١٨ لإضافة متجهات إلى C، نحافظ على مجموعة مستقلة خطيا تولد فضاءات جزئية من V أكبر. هذه العملية سوف تنتهي بإضافة $m-k$ متجه، هذه مع C سوف تولد كل V. نرمز لهذه المتجهات بالصورة $D=\{u_1,u_2,u_3,...,u_{m-k}\}$. إذن $B=C\cup D$ تكون أساس لـ V، وهو الأساس المطلوب في منطوق النظرية. ومن ثم، الآن نعتبر التمثيل المصفوفي لـ T بالنسبة إلى B. حيث أن تعريف T و S يتفقان على W ، الأعمدة k الأولى من $M_{B,B}^T$ سوف يكون لها التمثيل المصفوفي المثلث العلوي لـ S في الصفوف k الأولى. الصفوف $m-k$ المتبقية من هذه الأعمدة k الأولى سوف تكون أصفار حيث أن كل نواتج T لمتجهات الأساس من C كلها تكون محتواة في W وبالتالي تكون تراكيب خطية من لمتجهات الأساس في C. الوضع بالنسبة إلى T على متجهات الأساس في D ليست تماما كما نحب، ولكن هو وثيقة.
لـ $1\le i\le m-k$ ، نعتبر

$$\begin{aligned}
\rho_B(T(u_i)) &= \rho_B(T(u_i)+0)\\
&= \rho_B(T(u_i)+(\lambda I_V(u_i)-\lambda I_V(u_i)))\\
&= \rho_B((T(u_i)-\lambda I_V(u_i))+\lambda I_V(u_i))\\
&= \rho_B((T(u_i)-\lambda I_V(u_i))+\lambda u_i)\\
&= \rho_B((T-\lambda I_V)(u_i)+\lambda u_i)\\
&= \rho_B(a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+...+a_kw_k+\lambda u_i)
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

في المساواة قبل الأخيرة، أعدنا كتابة عنصر من مدى $T - \lambda I_V$ كتركيبة خطية من متجهات الأساس، C، لمدى $T - \lambda I_V$، W، باستخدام الكميات القياسية $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. إذا أدرجنا متجهات الأعمدة $m-k$ هذه في التمثيل المصفوفي $M^T_{B,B}$ نجد أنه يوجد $m-k$ ظهور لـ λ يحدث في القطر، وأي عنصر غير صفري يقع فقط في الصفوف k الأولى فقط. مع التمثيل المصفوفي المثلث العلوي من الحجم $k \times k$ في الركن أعلى اليسار، التمثيل المصفوفي الكلي لـ T واضح أنه يكون مصفوفة مثلثة عليا. وهذا يكمل خطوة الاستنتاج. لذلك، لأي تحويل خطي يوجد أساس ينشئ تمثيل مصفوفي مثلث علوي.

لدينا عبارة أخرى في النظرية مطلوب برهانها. القيم الذاتية لـ T، وتعدداتها يمكن حسابها بطرق الباب السادس بالنسبة لأي تمثيل مصفوفي (نظرية ٨-٣-١٣). نستخدم هذا النهج مع التمثيل المصفوفي المثلث العلوي $M^T_{B,B}$. نفرض أن d_i هو العنصر القطري في المصفوفة $M^T_{B,B}$ في الصف i والعمود i. إذن كثيرة الحدود المميزة، تحسب كمحدد، مع تكرار الفك بالعمود الأول، تكون

$$p_{M^T_{B,B}}(x) = (d_1 - x)(d_2 - x)(d_3 - x)\ldots(d_m - x)$$

جذور معادلة كثيرة الحدود $p_{M^T_{B,B}}(x)=0$ تكون هي القيم الذاتية للتحويل الخطي. لذلك كل عنصر قطري يكون قيمة ذاتية، ويتكرر في القطر تحديدا $\alpha_T(\lambda)$ مرة.

الخطوة الأساس في البرهان كانت تكوين الفضاء الجزئي W الذي بعده أقل من بعد V. هذا يتطلب زوج، قيمة ذاتية/ متجه ذاتي، وهو الشيء المضمون لنا من نظرية ٦-١-٤ . بصورة أعمق، برهان نظرية ٦-١-٤ يتطلب أنه يمكننا تحليل كثيرة الحدود تحليلا تاما إلى عوامل خطية. هذا لن يحدث دائما إذا كانت مجموعة الكميات القياسية هي مجموعة الأعداد الحقيقية، $\mathbb{R}$. لذلك هذا يكون هو توضيحنا النهائي عن سبب اختيار الأعداد المركبة، $\mathbb{C}$، على أنها المجموعة التي نأخذ منها الكميات القياسية. في $\mathbb{C}$ ، يمكن تحليل كثيرات الحدود تحليلا تاما، لذلك كل مصفوفة يكون لها على الأقل قيمة ذاتية، وحجة استنتاج سوف تعطينا تمثيل مصفوفي مثلث علوي.

نظرية ٨-٤-٦. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن توجد مصفوفة واحدية U، ومصفوفة مثلثة عليا T ، بحيث

$$U^*AU=T$$

و T يكون لها القيم الذاتية لـ A والتي هي العناصر القطرية.

البرهان: هذه النظرية هي تقرير عن المصفوفات والتشابه. يمكننا تحويلها إلى تقرير عن التحويلات الخطية، التمثيلات المصفوفية والأساسات. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $n\times n$، ونعرف التحويل الخطي $S:\mathbb{C}^n\rightarrow\mathbb{C}^n$ بالصورة $S(x)=Ax$. إذن نظرية ٨-٤-٥ تعطينا أساس $B=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ لـ $\mathbb{C}^n$ بحيث أن التمثيل المصفوفي لـ S بالنسبة إلى B، $M^S_{B,B}$ ، يكون مصفوفة مثلثة عليا.

الآن نحول الأساس B إلى أساس عياري متعامد، C، بتطبيق عملية جرام-شميدت. هذه الحسابات تكون عمل فوضوي، ولكن هنا توضيح ممتاز لقوة عملية جرام-شميدت. نحتاج فقط للتأكيد بأن S تكون مستقلة خطيا وتولد $\mathbb{C}^n$، ومن ثم نعلم أن C تكون مستقلة خطيا، تولد $\mathbb{C}^n$

وأيضا تكون مجموعة متعامدة. الآن سوف نعتبر التمثيل المصفوفي لـ S بالنسبة إلى C . نكتب الأساس الجديد $C=\{y_1,y_2 y_3,\ldots,y_n\}$. تطبيق عملية جرام -شميدت ينتج لنا كل متجه من C، ليكن y_j ، على صورة الفرق بين v_j وتركيبة خطية من $y_1,y_2 y_3,\ldots,y_{j-1}$. هنا نحن لسنا معنيين بالقيم الفعلية للكميات القياسية في هذه التركيبة الخطية، لذلك سوف نكتب

$$y_j = v_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} y_k$$

حيث b_{jk} هي اختصار للكميات القياسية. المعادلة السابقة في صورة مفيدة لتكوين الأساس C من B. لفهم أفضل للعلاقة بين B و C نحولها لتقرأ

$$v_j = y_j + \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} y_k$$

في هذه الصورة، ندرك أن مصفوفة تحويل الأساس $C_{B,C}=M_{B,C}^{I_{\mathbb{C}^n}}$ تكون مصفوفة مثلثة عليا. من نظرية ٨-٣-١١، يكون

$$M_{C,C}^{S} = C_{B,C} M_{B,B}^{S} C_{B,C}^{-1}$$

معكوس المصفوفة المثلثة العليا يكون مصفوفة مثلثة عليا (نظرية ٨-٤-٤)، وحاصل ضرب مصفوفتين مثلثتين علويتين يكون أيضا مصفوفة مثلثة عليا. لذلك $M_{C,C}^{S}$ تكون مصفوفة مثلثة عليا.

الآن، نضرب كل متجه من C في كمية قياسية غير صفرية، بحيث أن المعيار الناتج يكون 1. بهذه الطريقة نحصل على أساس جديد D يكون مجموعة عيارية متعامدة. لاحظ أن مصفوفة تغيير الأساس $C_{C,D}$ تكون مصفوفة قطرية بعناصر غير صفرية تساوي معايير المتجهات في C.

الآن يمكننا تحويل نتائجنا إلى لغة المصفوفات. نفرض أن E الأساس لـ $\mathbb{C}^n$ المكون من متجهات الوحدة القياسية. إذن التمثيل المصفوفي لـ S

بالنسبة إلى E هو ببساطة A ، $A = M^S_{E,E}$. مصفوفة تغيير الأساس $C_{D,E}$ لها الأعمدة هي المتجهات في D، الأساس العياري المتعامد. على هذا النحو، نظرية ٣-٤-٧ تخبرنا أن $C_{D,E}$ تكون مصفوفة واحدية، ومن تعريف المصفوفة الواحدية، يكون لها معكوس هو مرافقها. نكتب $U = C_{D,E}$. إذن

$$
\begin{aligned}
U^* AU &= U^{-1} AU \\
&= C^{-1}_{D,E} M^S_{E,E} C_{D,E} \\
&= M^S_{D,D} \\
&= C_{C,D} M^S_{C,C} C^{-1}_{C,D}
\end{aligned}
$$

معكوس المصفوفة القطرية يكون أيضا مصفوفة قطرية، ومن ثم التعبير النهائي هو حاصل ضرب ثلاث مصفوفات مثلثة علوية، وبالتالي يكون مصفوفة مثلثة علوية. لذلك المصفوفة المثلثة العلوية المطلوبة، T، تكون هي التمثيل المصفوفي لـ S بالنسبة للأساس العياري المتعامد D، $M^S_{D,D}$.

المصفوفات الطبيعية

المصفوفات الطبيعية تشمل مجموعة واسعة من المصفوفات المثيرة للاهتمام، بعضها بالفعل نحن قابلناه. ولكنها الأكثر إثارة للاهتمام لأنها تعرف تحديدا بأنها المصفوفات التي يمكن تقطيرها بمساعدة مصفوفات واحدية. هذا هو النظرية القادمة. هنا التعريف.

تعريف ٨-٤-٧. المصفوفة المربعة A تكون **طبيعية** normal إذا كان $A^* A = AA^*$.

لذلك المصفوفة الطبيعية تتبادل مع مرافقها. جزء من جمال هذا التعريف أنه يشتمل العديد من أنواع المصفوفات الأخرى. المصفوفة القطرية سوف تتبادل مع مرافقها، المصفوفة الهيرميتية بداهة تتبادل مع مرافقها، المصفوفة الحقيقية المتماثلة تكون هيرميتية ومن ثم أيضا تكون طبيعية، المصفوفات الواحدية مرافقها هو معكوسها، والمعكوس يتبادل مع المصفوفة وبالتالي المصفوفة الواحدية تكون طبيعية. فصل آخر من

المصفوفات الطبيعية هو المصفوفات متخالفة التماثل. ومع ذلك كل هذه الأوصاف لا تتسع لاحتواء كل المصفوفات الطبيعية، كما يوضح المثال التالي.

مثال ٨-٤-٨. نفرض

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

إذن

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

لذلك من تعريف ٨-٤-٧، A تكون مصفوفة طبيعية. ومع ذلك A ليست مصفوفة متماثلة مع أنها ذات عناصر حقيقية.

التقطير العياري المتعامد

من اليسير جدا التعامل المصفوفة القطرية عند ضرب المصفوفات، والأساسات العيارية المتعامدة أيضا لها العديد من المزايا. ماذا عن تحويل مصفوفة إلى مصفوفة قطرية من خلال تحويل التشابه باستخدام مصفوفة واحدية؟ هذا يكون أمر عظيم. هل يمكننا فعل ذلك؟ يمكننا دائما انجاز ذلك عندما تكون المصفوفة طبيعية، والمصفوفات الطبيعية فقط هي التي يكون لها هذا السلوك. هنا النظرية.

نظرية ٨-٤-٩. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن توجد مصفوفة واحدية U ومصفوفة قطرية D، بعناصر قطر تساوي القيم الذاتية لـ A، بحيث $U^*AU=D$ إذا وفقط إذا كانت A مصفوفة طبيعية.

البرهان: الاتجاه الأول، نفرض أنه توجد مصفوفة واحدية U تقطر A. سوف نكتب هذا الشرط عادة بالصورة $U^*AU=D$، ولكن سوف نجد أنه من المناسب في هذا الجزء من البرهان استخدام الفرض في الصورة المكافئة $A=UDU^*$. لاحظ أن المصفوفة القطرية تكون طبيعية، ولاحظ أن هذه الملاحظة تكون في منتصف المتتابعة التالية من المتساويات. نختبر أن A تكون طبيعية،

$$\begin{aligned}A^*A&=(UDU^*)^*(UDU^*)\\&=(U^*)^*D^*U^*UDU^*\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= UD^*U^*UDU^* \\
&= UD^*I_nDU^* \\
&= UD^*DU^* \\
&= UDD^*U^* \\
&= UDI_nD^*U^* \\
&= UDU^*UD^*U^* \\
&= UDU^*(U^*)^*D^*U^* \\
&= (UDU^*)(UDU^*)^* \\
&= AA^*
\end{aligned}
$$

لذلك، من تعريف ٨-٤-٧، A تكون مصفوفة طبيعية.

في الاتجاه العكسي ، نفرض أن A مصفوفة طبيعية. سواء كانت A طبيعية أم لا، نظرية ٨-٤-٦ تزودنا بمصفوفة واحدية U ومصفوفة مثلثة علوية T، عناصر القطر فيها هي القيم الذاتية لـ A، وبحيث أن $U^*AU = T$. مع الشرط الإضافي أن A تكون طبيعية، سوف نبرهن أن العناصر التي أعلى القطر يجب أن تكون كلها أصفار. الآن نفعل ذلك.

أولا لاحظ أن تعريف المصفوفة الواحدية يؤدي إلى أن معكوس المصفوفة الواحدية U يكون هو المرافق U^*، لذلك حاصل ضرب المصفوفتين في أي ترتيب يكون مصفوفة الوحدة. نبدأ ببيان أن T تكون طبيعية.

$$
\begin{aligned}
T^*T &= (U^*AU)^*(U^*AU) \\
&= U^*A^*(U^*)^*U^*AU \\
&= U^*A^*UU^*AU \\
&= U^*A^*I_nAU \\
&= U^*A^*AU \\
&= U^*AA^*U \\
&= U^*AI_nA^*U
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= U^* AUU^* A^* U \\
&= U^* AUU^* A^* (U^*)^* \\
&= (U^* AU)(U^* AU)^* \\
&= TT^*
\end{aligned}
$$

ومن ثم من التعريف T تكون مصفوفة طبيعية.

يمكننا تحويل خاصية الطبيعية لـ T إلى العبارة $TT^* - T^*T = O$.

الآن نستنتج متساوية سوف نستخدمها مرات عديدة. لكل $1 \le i \le n$،

$$
\begin{aligned}
0 &= [O]_{ii} \\
&= [TT^* - T^*T]_{ii} \\
&= [TT^*]_{ii} - [T^*T]_{ii} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [T]_{ik} [T^*]_{ki} - \sum_{k=1}^{n} [T^*]_{ik} [T]_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [T]_{ik} \overline{[T]_{ik}} - \sum_{k=1}^{n} \overline{[T]_{ki}} [T]_{ki} \\
&= \sum_{k=i}^{n} [T]_{ik} \overline{[T]_{ik}} - \sum_{k=1}^{i} \overline{[T]_{ki}} [T]_{ki} \\
&= \sum_{k=i}^{n} |[T]_{ik}|^2 - \sum_{k=1}^{i} |[T]_{ki}|^2
\end{aligned}
$$

لكي ننتهي، نستخدم المتساوية أعلى، تكراريا، ابتداء بـ $i = 1$، ونكتشف، صفا بصف، أن العناصر أعلى القطر في T تكون كلها أصفار. الملاحظة الأساسية هي أن مجموع مربعات يمكن أن تساوي صفر عندما كل حد في المجموع يساوي صفر. عندما $i = 1$ يكون

$$
0 = \sum_{k=1}^{n} |[T]_{1k}|^2 - \sum_{k=1}^{1} |[T]_{1k}|^2 = \sum_{k=2}^{n} |[T]_{1k}|^2
$$

والتي تؤدي قسرا إلى

$$
[T]_{12} = 0 ، [T]_{13} = 0 ، [T]_{14} = 0 ، \ldots ، [T]_{1n} = 0
$$

عندما $i = 2$ نستخدم نفس المتساويات ولكن بتوظيف الجزء الذي حصلنا عليه أعلى $[T]_{12} = 0$ ،

$$0 = \sum_{k=2}^{n} |[T]_{2k}|^2 - \sum_{k=1}^{2} |[T]_{k2}|^2 = \sum_{k=2}^{n} |[T]_{k2}|^2 - \sum_{k=2}^{2} |[T]_{2k}|^2$$
$$= \sum_{k=3}^{n} |[T]_{2k}|^2$$

والتي تؤدي قسرا إلى

$$[T]_{23} = 0 \text{ ، } [T]_{24} = 0 \text{ ، } [T]_{25} = 0 \text{ ، } \ldots \text{ ، } [T]_{2n} = 0$$

يمكن تكرار هذه العملية للقيم المتتالية لـ $i = 3, 4, 5, \ldots, n-1$. لاحظ أنه من الأهمية بمكان أن نفعل ذلك بهذا الترتيب، حيث أننا نحتاج إلى توظيف أجزاء من كل نتيجة سابقة حول الصفوف التي عناصرها أصفار من أجل النجاح في الحصول على نفس النتيجة للصفوف الأخرى. أخيرا، نستنتج أن العناصر غير القطرية جميعها تكون أصفار. لذلك الفرض الإضافي أن T طبيعية يؤدي إلى أن T تكون قطرية. وهذا يكمل البرهان.

يمكن إعادة كتابة الخلاصة في هذه النظرية لكي تقرأ $A = UDU^*$. تذكر أن المصفوفات الواحدية يمكن النظر إليها على أنها تحويل يحافظ على الخواص الهندسية، أو بشكل أكثر عمومية هو دوران للمصدر. لذلك ضرب مصفوفة في متجه، Ax ، يمكن النظر إليها باعتبارها متتابعة من ثلاثة تحويلات. U^* واحدية ومن ثم تكون دوران. حيث أن D قطرية، هي مجرد ضرب كل مركبة من المتجه في كمية قياسية. عناصر القطر التي تكون موجبة أو سالبة، بقيم مطلقة أكبر من أو أقل من 1 تستحضر أوصاف مثل الانعكاس والتوسيع والانكماش. عموما يمكن القول أن D تمط المتجه في كل مركباته بواسطة. أخيرا الضرب في U يعكس الدوران الناشئ بواسطة U^*. لذلك المصفوفة الطبيعية تكون تحويل دوران- مط - دوران.

الأساس العياري المتعامد المكون من أعمدة U يمكن النظر إليه باعتباره نظام من المحاور المتعامدة . الدوران بواسطة U^* يسمح

للتحويل بواسطة A باستبداله بتحويل بسيط D على طول هذه المحاور، ومن ثم D تحول النتيجة إلى نظام الإحداثيات الأصلي. لهذا السبب نظرية ٨-٤-٩ تعرف **بنظرية مبدأ المحاور** Principal Axis Theorem. أعمدة المصفوفة الواحدية في نظرية ٨-٤-٩ تكون أساس خاص يستخدم مع المصفوفة الطبيعية. نسجل هذه الملاحظة في النظرية التالية.

نظرية ٨-٤-١٠. نفرض أن A مصفوفة مربعة طبيعية من الحجم n. إذن يوجد أساس عياري متعامد لـ $\mathbb{C}^n$ الذي يتكون من المتجهات الذاتية لـ A.

البرهان: نفرض أن U هي المصفوفة الواحدية الواردة في نظرية ٨-٤-٩ ونفرض أن D هي المصفوفة القطرية الناتجة. مجموعة المتجهات المطلوبة تكون بتجميع أعمدة U في مجموعة. نظرية ٣-٤-٧ تقول أن هذه المجموعة من الأعمدة تكون عيارية متعامدة. حيث أن U غير شاذة (نظرية ٣-٤-٦)، نظرية ٤-٤-٩ تخبرنا أن المجموعة تكون أساس. حيث أن A قابلة للتقطير بواسطة U، العناصر القطرية في المصفوفة D تكون هي القيم الذاتية للمصفوفة A. مناقشة مماثلة للجزء الثاني من برهان نظرية ٦-٣-١٠ تبين أن كل متجه في الأساس يكون متجه ذاتي للمصفوفة A.

بطريقة غامضة، نظرية ٨-٤-١٠ تكون تحسين لنظرية ٦-٢-١٦ التي تقول أن المتجهات الذاتية لمصفوفة هيرميتية لقيم ذاتية مختلفة تكون دائما متعامدة. المصفوفات الهيرميتية تكون طبيعية ورأينا أنه يمكن إيجاد على الأقل أساس حيث كل زوج من المتجهات الذاتية يكون متعامد. لاحظ أن هذا ليس تعميما، حيث أن نظرية ٦-٢-١٦ تنص على نتيجة أضعف تطبق على بعض الأزواج من المتجهات الذاتية (وليس كلها)، بينما نظرية ٨-٤-١٠ على ما يبدو تكون نتيجة أقوى، ولكن فقط تؤكد وجود تجمع واحد من المتجهات الذاتية له الخاصية الأقوى.

نفرض A مصفوفة من الحجم $n \times n$، الأساس العياري المتعامد لـ $\mathbb{C}^n$ المكون من المتجهات الذاتية لـ A هو أساس مفيد للغاية. لماذا نقول ذلك؟ يمكن اعتبار متجهات الأساس كمجموعة من اتجاهات الإسناد، تعرف بالمحاور والتي مع بعضها تسمى **نظام إحداثيات**

coordinate system. الأساس القياسي في تعريف ٢-٦-١٧ يمكن اعتباره كنظام إحداثيات افتراضي. عندما يكون أساس عياري متعامد، يمكننا اعتبار الاتجاهات يمكن معايرتها ليكون طولها الوحدة، ويمكننا اعتبار المحاور المتعامدة ثنائيا. دعنا نصوغ هذا الكلام بصورة أكثر منهجية.

نفرض U مصفوفة أعمدتها أساس عياري متعامد من المتجهات الذاتية لمصفوفة A من الحجم $n \times n$. لذلك ، على وجه الخصوص U تكون مصفوفة واحدية (نظرية ٣-٤-٧). للمتجه $x \in \mathbb{C}^n$، نستخدم الرمز $\hat{x}$ للتمثيل المتجه لـ x بالنسبة إلى الأساس العياري المتعامد. لذلك مركبات $\hat{x}$ استخدمت في تركيبة خطية لأعمدة U لكي تكون x. مع تعريف ٣-٢-١، يمكننا كتابة هذه العلاقة على الصورة

$$U\hat{x} = x$$

حيث أن U^* هي معكوس U (تعريف) يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة

$$\hat{x} = U^* x$$

هذه تقول أنه يمكننا بسهولة تكوين تمثيل متجه بالنسبة للأساس العياري المتعامد بضرب مصفوفة في متجه لمرافق U. لاحظ أن المرافق يكون أيسر في حسابه من معكوس المصفوفة، والتي سوف تكون طريقة عامة لحساب تمثيل متجه. هذه ملاحظتنا الأولى حول الأحدثة بالنسبة إلى أساس عياري متعامد.

أيضا نحن نعلم أن الأساس العياري المتعامد يلعب بلطف مع الضرب الداخلي. نظرية ٣-٤-١٢ تقول أن المصفوفات الواحدية تحافظ على الضرب الداخلي (ومن ثم المعيار). أكثر هندسية، الأطوال والزوايا يحافظ عليها الضرب في مصفوفة واحدية. باستخدام مصطلحاتنا، هذا يصبح

$$\langle x, y \rangle = \langle U\hat{x}, U\hat{y} \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

لذلك يمكننا حساب الضرب الداخلي للمتجهات الأصلية، أو لتمثيلاتها ونحصل على نفس النتيجة. من ذلك ينتج أن المعايير، الأطوال والزوايا يمكن جميعها أن تحسب بالمتجهات الأصلية أو بتمثيلاتها في نظام الإحداثيات الجديد الذي وضع على أساس عياري متعامد.

حتى الآن ليس لدينا شيء جديد يقال، ولا للمصفوفة A، أو قيمها الذاتية. نعلم حقا أن المصفوفة هي تحويل خطي، لذلك نعبر عن هذه النظرة للمصفوفة كدالة بكتابة $Ax = y$. المصفوفة U سوف تقطر A، مكونة المصفوفة القطرية D التي عناصر القطر فيها هي القيم الذاتية للمصفوفة A. يمكننا كتابة هذا بالصورة $U^* AU = D$ وتتحول إلى $U^* A = DU^*$. لذلك يكون

$$\hat{y} = U^* y = U^* Ax = DU^* x = D\hat{x}$$

لذلك بالمتجهات المأحدثة ، التحويل بالمصفوفة A يمكن أن يتم بالضرب بمصفوفة قطرية D. التفكير لحظة سوف يقنعك بأن ضرب مصفوفة في متجه مع مصفوفة قطرية تكون حسابات بسيطة للغاية. هندسيا، هذا ببساطة تمدد، تقلص و/أو إنعكاس في اتجاه كل متجه أساس (محور). والمضاعفات المستخدمة لهذه التغيرات هي عناصر القطر في المصفوفة القطرية، القيم الذاتية للمصفوفة A. لذلك نظام الإحداثيات الجديد يكون تجمع من متجهات الوحدة المتعامدة ثنائيا حيث يحافظ على الضرب الداخلي، وتأثير المصفوفة A يوصف بمضاعفات (القيم الذاتية) لمركبات الصورة المأحدثة للمتجهات.

تمارين ٨-٤

١- أذكر ثلاثة فصول للمصفوفات الطبيعية التي سبق دراستها، بحيث لا تكون أي مجموعة جزئية من بقية المجموعات الأخرى التي تم ذكرها.

٢- قارن عكس نظرية ٨-٤-٥ مع نظرية ٨-٤-٩.

٣- نفرض A مصفوفة من الحجم $n \times n$. لماذا ترغب في أساس عياري متعامد لـ $\mathbb{C}^n$ يتكون من المتجهات الذاتية لـ A؟

٤- في تمرين ٣-٢-١٧، طلب منك إثبات أن AA^* تكون مصفوفة هيرميتية. برهن مباشرة أن AA^* تكون مصفوفة طبيعية.

٥- في المناقشة التي أعقبت نظرية ٨-٤-١٠، علقنا أن المعادلة $\hat{x} = U^* x$ هي مجرد نظرية ٤-٤-١١ في صورة مموهة. أعد صياغة هذه الملاحظة بصورة رسمية وبرهن التكافؤ.