الباب الثالث

المصفوفات Matrices

فيما سبق استخدمنا المصفوفات في حل نظام من المعادلات الخطية، وتطرقنا إلى قليل من خواصها، مثل فضاء الصفرية وعدم الشذوذ. في هذا الباب سوف نسلك أسلوب أكثر نظاما في دراسة المصفوفات.

٣-١ العمليات على المصفوفات Matrix Operations

في هذا الفصل سوف نعود للوراء قليلا ونبدأ بداية بسيطة. سوف نبدأ بتعريف المجموعة الكلية العامة للمصفوفات وننظر إلى أين تقودنا.

تعريف ٣-١-١. الفضاء الاتجاهي M_{mn} هو مجموعة كل المصفوفات من الحجم $m \times n$ والتي جميع عناصرها من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

تعريف ٣-١-٢. المصفوفتان A و B من الحجم $m \times n$ تكونا متساويتان، ونكتب $A = B$ إذا كان $[A]_{ij} = [B]_{ij}$ ، لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

لذلك تساوي المصفوفات يتحول إلى تساوي أعداد مركبة عنصر بعنصر.

الآن نعرف عمليتين على المجموعة M_{mn}.

تعريف ٣-١-٣. مجموع مصفوفتين.نفرض مصفوفتين A و B من الحجم $m \times n$. يعرف **مجموع** A و B ، يرمز له بالرمز $A+B$ ، كما يلي:

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \text{ ، } 1 \le i \le m \text{ و } 1 \le j \le n$$

لذلك مجموع المصفوفات يضم مصفوفتين من نفس الحجم (بطريقة طبيعية) ليعطي مصفوفة جديدة من نفس الحجم.

مثال ٣-١-٤. نعتبر مصفوفتين في M_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

إذن

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 2 & -4\\ 3 & 5 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2+6 & -3+2 & 4+(-4)\\ 1+3 & 0+5 & -7+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -5\end{bmatrix}$$

العملية الثانية تأخذ شيئين من نوعين مختلفين، عدد ومصفوفة، وبضمهما تعطي مصفوفة جديدة. كما في حالة المتجهات، العدد يسمى قياسي للتأكيد على أنه ليس مصفوفة.

تعريف ٣-١-٥. إذا كانت A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و $\alpha\in\mathbb{C}$ قياسي، فإن **مضاعف** A **القياسي** scalar multiple (حاصل ضرب A في قياسي) ، تكتب αA، وتعرف كما يلي

$$[\alpha A]_{ij}=\alpha[A]_{ij} \text{ ، } 1\le i\le m \text{ و } 1\le j\le n$$

لاحظ أننا عرفنا نوعا جديدا من الضرب، ويكتب بوضع الرمزين متجاورين. حساب ضرب في قياسي عملية يسيرة جدا.

مثال ٣-١-٦. نفرض $A=\begin{bmatrix}2 & 8\\ -3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ و $\alpha=7$. إذن

$$\alpha A=7\begin{bmatrix}2 & 8\\ -3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7(2) & 7(8)\\ 7(-3) & 7(5)\\ 7(0) & 7(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 56\\ -21 & 35\\ 0 & 7\end{bmatrix}$$

خواص الفضاء الاتجاهي Vector Space Properties

مع تعريف جمع المصفوفات وضرب مصفوفة في قياسي، يمكننا صياغة وبرهان العديد من الخواص لكل عملية، وخواص تتعلق بالعمليتين معا. هنا نجمع عشرة من هذه الخواص لكي نرجع إليها فيما بعد.

نظرية ٣-١-٧. نفرض أن M_{mn} هي مجموعة كل المصفوفات من الحجم $m\times n$ مع جمع المصفوفات وضرب مصفوفة في قياسي كما هو في تعريف ٣-١-٣ وتعريف ٣-١-٥ إذن

١- إذا كان $A,B\in M_{mn}$ فإن $A+B\in M_{mn}$. أي أن جمع المصفوفات مغلقة.

٢- إذا كان $A\in M_{mn}$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، فإن $\alpha A\in M_{mn}$. أي أن عملية ضرب مصفوفة في قياسي مغلقة.

٣- إذا كان $A,B\in M_{mn}$ فإن $A+B=B+A$. أي أن عملية جمع المصفوفات إبدالية.

٤- إذا كان $A,B,C\in M_{mn}$ فإن $A+(B+C)=(A+B)+C$. أي أن عملية جمع المصفوفات دامجة.

٥- توجد مصفوفة O ، تسمى المصفوفة الصفرية، بحيث $A+O=A$ لكل $A\in M_{mn}$.

٦- إذا كانت $A\in M_{mn}$، فإنه توجد مصفوفة $-A\in M_{mn}$، تسمى المعكوس الجمعي، بحيث $A+(-A)=O$.

٧- إذا كان $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ و $A\in M_{mn}$ ، فإن $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$. أي أن عملية الضرب في قياسي دامجة.

٨- إذا كان $\alpha\in\mathbb{C}$ و $A,B\in M_{mn}$ ، فإن $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

٩- إذا كان $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ و $A\in M_{mn}$ ، فإن $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

١٠- إذا كان $A\in M_{mn}$ ، فإن $1A=A$.

البرهان: بينما بعض هذه الخواص يبدو أنها واضحة جدا، فإنها تحتاج إلى برهان. ومع ذلك البراهين ليست معقدة وقد تكون إلى حد ما مملة. سوف نعطي برهان لأحدى خاصيتي التوزيع بتفصيل. ويمكن للقارئ اختبار مدى قدرته على بناء برهان في الأجزاء الأخرى.

لإثبات خاصية التوزيع $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ نحتاج إلى برهان التساوي بين مصفوفتين. من تعريف تساوي مصفوفين يكون المطلوب هو إثبات تساوي العناصر المتناظرة في المصفوفتين.

لأي i و j بحيث $1\le i\le m$ ، $1\le j\le n$ يكون

$$\begin{aligned}[(\alpha+\beta)A]_{ij} &= (\alpha+\beta)[A]_{ij}\\ &= \alpha[A]_{ij}+\beta[A]_{ij}\\ &= [\alpha A]_{ij}+[\beta A]_{ij}\\ &= [\alpha A+\beta A]_{ij}\end{aligned}$$

هناك عدة أشياء تلاحظ هنا. كل علامة تساوي هي عملية تساوي كميات قياسية (أعداد). طرفي المعادلة، لكونهما صحيحة لكل i و j، تسمح لنا باستنتاج تساوي المصفوفتين حسب تعريف تساوي مصفوفتين. أخيرا توجد عدة إشارات جمع وعدة حالات تجاور، حدد كل واحدة منها ثم تعرف على العملية التي تمثلها.

لاحظ التشابه بين نظرية ٣-١-٧ عن المصفوفات ونظرية ٢-١-٧ عن المتجهات.

المصفوفة الصفرية الموصوفة في هذه النظرية ينبغي أن تتوقع أنها المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار.

تعريف ٣-١-٨. المصفوفة من الحجم $m\times n$ تسمى **مصفوفة صفرية** zero matrix وتكتب $O=O_{mn}$، إذا كان $[O]_{ij}=0$ لكل $1\le i\le m$، $1\le j\le n$.

مدور المصفوفة والمصفوفات المتماثلة

الآن نصف عملية هي من أكثر العمليات التي تجرى على المصفوفات. بصورة غير رسمية، تدوير مصفوفة هو عملية بناء مصفوفة جديدة وذلك بتبديل الصفوف والأعمدة.

تعريف ٣-١-٩. نفرض مصفوفة A من الحجم $m\times n$. **مدور** المصفوفة A transpose، يرمز له بالرمز A^t، هو مصفوفة من الحجم $n\times m$ تعطى بالصورة

$$[A^t]_{ij}=[A]_{ji}\ ،\ 1\le i\le m\ ،\ 1\le j\le n$$

مثال ٣-١-١٠. نعتبر المصفوفة

$$D=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

يمكن تكوين مدور المصفوفة عنصر بعنصر باستخدام التعريف. ولكن الأيسر هو بصورة منهجية إعادة كتابة الصفوف أعمدة (والعكس). صيغة التعريف سوف تكون أكثر فائدة في البراهين. لذلك يكون

$$D^t=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

في بعض الأحيان يحدث أن مصفوفة تساوي مدورها. في هذه الحالة، سوف نسمي المصفوفة متماثلة. هذه المصفوفات تحدث بصورة طبيعية في أوضاع معينة، وأيضا لها بعض الخواص اللطيفة. لذلك يكون من المفيد أن نعطي التعريف بعناية. بشكل غير رسمي، المصفوفة تكون متماثلة إذا أمكن قلب المصفوفة حول القطر الرئيسي(الذي يبدأ من الركن الأعلى يسار، وينتهي في الركن الأسفل يمين) بدون أن يحدث تغيير.

تعريف ٣-١-١١. المصفوفة A تسمى **متماثلة** symmetric إذا كان $A=A^t$.

مثال ٣-١-١٢. المصفوفة

$$E=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -9 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & -2 & -3 \\ -9 & 6 & 0 & -1 & 9 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & -8 \\ 7 & -3 & 9 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

تكون متماثلة.

قد تلاحظ أن تعريف المصفوفة المتماثلة لم يعين حجم المصفوفة A، كما هي عادتنا. ذلك لأنه غير ضروري. البديل هو أن يذكر التعريف للمصفوفات المربعة، ولكن هذا هو جوهر البرهان التالي.

نظرية ٣-١-١٣. نفرض A مصفوفة متماثلة. إذن A تكون مصفوفة مربعة.

البرهان: نبدأ بتعيين حجم A دون أن نذكر أنها مربعة، حيث مطلوب إثبات أنها مربعة فلا يصح فرض ذلك. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$. نفرض أن A تكون متماثلة. من التعريف يكون $A = A^t$، لذلك من تعريف تساوي مصفوفتين A و A^t يجب أن يكون لهما نفس الحجم. حجم A^t هو $n \times m$، لأن A بها m صف و n عمود. من ذلك نستنتج أن $m = n$ و A يجب أن تكون مربعة.

الآن نقدم ثلاث نظريات سهلة، ولكنها توضح لنا التفاعل بين للعمليات الثلاث الجديدة والرموز الجديدة والأساليب المستخدمة في إثبات تساوي المصفوفات.

نظرية ٣-١-١٤. نفرض A و B مصفوفتين من الحجم $m \times n$.إذن $(A+B)^t = A^t + B^t$.

البرهان: العبارة المطلوب برهانها هي تساوي مصفوفات، لذلك سوف نعمل على إثبات تساوي العناصر المتناظرة وينتج المطلوب من تعريف تساوي مصفوفتين. نفكر جيدا في الأشياء الواردة هنا والاستخدامات المتعددة لإشارة الجمع. لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ ،

$$\begin{aligned}
[(A+B)^t]_{ij} &= [A+B]_{ji} \\
&= [A]_{ji} + [B]_{ji} \\
&= [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij} \\
&= [A^t + B^t]_{ij}
\end{aligned}$$

حيث أن المصفوفتان $(A+B)^t$ و $A^t + B^t$ تتفقان في كل عناصرهما، من تعريف ٣-١-٢ تكون المصفوفتان متساويتان.

نظرية ٣-١-١٤. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن $(A^t)^t = A$.

البرهان: لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ ،

$$\left[(A^t)^t\right]_{ij} = [A^t]_{ji}$$
$$= [A]_{ij}$$

من تعريف تساوي مصفوفتين، ينتج أن $(A^t)^t = A$.

المصفوفات والمرافق المركب

كما هو الحال في المتجهات، يمكننا تعريف ما هو المقصود بمرافق مصفوفة.

تعريف ٣-١-١٥. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. **المرافق المركب** للمصفوفة A conjugate، يكتب $\overline{A}$ ، هو مصفوفة من الحجم $m \times n$ تعرف بالصورة

$$[\overline{A}]_{ij} = \overline{[A]_{ij}}$$

مثال ٣-١-١٦. المرافق المركب للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & 3 & 5+4i \\ -3+6i & 2-3i & 0 \end{bmatrix}$$

هو المصفوفة

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & 5-4i \\ -3-6i & 2+3i & 0 \end{bmatrix}$$

التفاعل بين مرافق مصفوفة وعمليتي جمع مصفوفتين وضرب مصفوفة في قياسي يظهر من النظريات التالية.

نظرية ٣-١-١٧. نفرض A و B مصفوفتين من الحجم $m \times n$. إذن $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.

البرهان: لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ ،

$$[\overline{A+B}]_{ij} = \overline{[A+B]_{ij}}$$
$$= \overline{[A]_{ij} + [B]_{ij}}$$
$$= \overline{[A]_{ij}} + \overline{[B]_{ij}}$$

$$= [\overline{A}]_{ij} + [\overline{B}]_{ij}$$
$$= [\overline{A} + \overline{B}]_{ij}$$

حيث أن المصفوفتان $\overline{A+B}$ و $\overline{A}+\overline{B}$ تتفقان في كل عناصرهما، من تعريف ٣-١-٢ تكون المصفوفتان متساويتان، أي أن $\overline{A+B} = \overline{A}+\overline{B}$.

نظرية ٣-١-١٨. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. إذن $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$.

البرهان: لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$،

$$[\overline{\alpha A}]_{ij} = \overline{[\alpha A]_{ij}}$$
$$= \overline{\alpha [A]_{ij}}$$
$$= \overline{\alpha}\,\overline{[A]_{ij}}$$
$$= [\overline{\alpha}\,\overline{A}]_{ij}$$

حيث أن المصفوفتان $\overline{\alpha A}$ و $\overline{\alpha}\,\overline{A}$ تتفقان في كل عناصرهما، من تعريف ٣-١-٢ تكون المصفوفتان متساويتان ، أي أن $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$.

نظرية ٣-١-١٩. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن $\overline{(\overline{A})} = A$.

البرهان: لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$،

$$\left[\overline{(\overline{A})}\right]_{ij} = \overline{[\overline{A}]_{ij}}$$
$$= \overline{\overline{[A]_{ij}}}$$
$$= [A]_{ij}$$

حيث أن المصفوفتان $\overline{(\overline{A})}$ و A تتفقان في كل عناصرهما، من تعريف ٣-١-٢ تكون المصفوفتان متساويتان، أي أن $\overline{(\overline{A})} = A$.

أخيرا نحتاج إلى النظرية التالية التي توضح العلاقة بين المرافق والمدور لمصفوفة.

نظرية ٣-١-٢٠. نفرض A مصفوفة من الحجم $m\times n$. إذن $\overline{(A^t)}=\left(\overline{A}\right)^t$.

البرهان: لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ ،

$$\begin{aligned}\left[\overline{(A^t)}\right]_{ji} &= \overline{[A^t]_{ji}}\\ &= \overline{[A]_{ij}}\\ &= [\overline{A}]_{ij}\\ &= \left[\left(\overline{A}\right)^t\right]_{ji}\end{aligned}$$

حيث أن المصفوفتان $\overline{(A^t)}$ و $\left(\overline{A}\right)^t$ تتفقان في كل عناصرهما، من تعريف ٣-١-٢ تكون المصفوفتان متساويتان أي أن $\overline{(A^t)}=\left(\overline{A}\right)^t$.

قرين المصفوفة

المزج بين المدور والمرافق لمصفوفة سوف يكون مهما في ما تبقى من هذا الفصل. هنا سوف نعطي التعريف المفتاح وبعض النتائج الأساسية بنفس الأسلوب المذكور أعلى.

تعريف ٣-١-٢١. إذا كانت A مصفوفة، فإن **قرين** A adjoint هو $A^*=\left(\overline{A}\right)^t$.

نظرية ٣-١-٢٢. نفرض A و B مصفوفتين من نفس الحجم. إذن $(A+B)^*=A^*+B^*$.

البرهان:

$$\begin{aligned}(A+B)^* &= \left(\overline{A+B}\right)^t\\ &= (\overline{A}+\overline{B})^t\\ &= \left(\overline{A}\right)^t+\left(\overline{B}\right)^t\end{aligned}$$

$$= A^* + B^*$$

نظريـــة ٣-١-٢٣. نفـرض $\alpha \in \mathbb{C}$ قياســي و A مـصفوفة. إذن $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

البرهان:

$$(\alpha A)^* = \left(\overline{\alpha A}\right)^t$$
$$= \left(\overline{\alpha}\,\overline{A}\right)^t$$
$$= \overline{\alpha}\left(\overline{A}\right)^t$$
$$= \overline{\alpha} A^*$$

نظرية ٣-١-٢٤. نفرض A مصفوفة . إذن $(A^*)^* = A$.

البرهان:

$$(A^*)^* = \left(\overline{(A^*)}\right)^t$$
$$= \overline{\left((A^*)^t\right)}$$
$$= \overline{\left(\left(\left(\overline{A}\right)^t\right)^t\right)}$$
$$= \overline{\left(\overline{A}\right)}$$
$$= A$$

تمارين ٣-١

١- نفـــــــرض $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & -6 & 5\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 0\\ -2 & 2\end{bmatrix}$. ونفرض $\alpha=4$ و $\beta=\frac{1}{2}$. أحسب ما يلـي :

$A+B$ ، $A+C$ ، B^t+C ، $A+B^t$ ، βC ، $4A-3B$،
$A^t+\alpha C$ ، $A+B-C^t$ ، $4A+2B-5C$.

٢- حل المعادلة الاتجاهية التالية في x، أو وضح لماذا لا يوجد حل.

$$2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -2\end{bmatrix}.$$

٣- حل المعادلة الاتجاهية التالية في α ، أو وضح لماذا لا يوجد حل.

$$\alpha\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3 & -6\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12 & 6\\ 6 & 4 & -2\end{bmatrix}.$$

٤- حل المعادلة الاتجاهية التالية في α ، أو وضح لماذا لا يوجد حل.

$$\alpha\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\\ 2 & 6\end{bmatrix}.$$

٥- أوجد α و β التي تكون حلا للمعادلة

$$\alpha\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 6 & 1\end{bmatrix}.$$

في الباب الثاني عرفنا عمليات جمع المتجهات وضرب متجه في قياسي. في هذا الفصل عرفنا عمليات مشابهة على المصفوفات. يمكنك ملاحظة التشابه بين النتائج في نظرية ٢-١-٧ ونظرية ٣-١-٧ في التمارين ٦ -

١٠ سوف يطلب منك توسيع هذه التشابهات إلى المفاهيم والتعريفات الأخرى. التي ظهرت أولا في الباب الثاني.

٦- نفرض $S=\{B_1,B_2,B_3,\ldots,B_p\}$ مجموعة من المصفوفات من M_{mn}. أكتب صياغة مناسبة لتعريف المفاهيم التالية مع إعطاء مثال لاستخدام كل منها.

(أ) تراكيب خطية لعناصر من S.

(ب) علاقة ارتباط خطي على S خاليه وخير خالية.

(ج) S مجموعة مستقلة خطيا.

(د) $\langle S\rangle$.

٧- بين أن المجموعة S مستقلة خطيا في M_{22} .

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

٨- حدد ما إذا كانت المجموعة S مستقلة خطيا في M_{23}

$$\left\{\begin{bmatrix}-2&3&4\\-1&3&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-2&2\\0&-1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\2&2&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&2&-2\\0&-1&-2\end{bmatrix}\right\}$$

٩- حدد ما إذا كانت المصفوفة A في امتداد S ، بمعنى هل $A\in\langle S\rangle$؟ إذا كانت كذلك اكتب A كتركيبة خطية من عناصر من S.

$$A=\begin{bmatrix}-13&24&2\\-8&-2&-20\end{bmatrix}$$

$$S=\left\{\begin{bmatrix}-2&3&4\\-1&3&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&-2&2\\0&-1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\2&2&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&2&-2\\0&-1&-2\end{bmatrix}\right\}$$

١٠- نفرض Y مجموعة من المصفوفات المتماثلة من درجة 3. أوجد مجموعة T بحيث تكون T مستقلة خطيا و $\langle T\rangle = Y$.

١١- نعرف مجموعة جزئية U_{33} من M_{33} كما يلي

$$U_{33} = \{A \in M_{33} : [\mathrm{A}]_{ij} = 0 \text{ if } i > j\}$$

أوجد مجموعة R بحيث تكون R مستقلة خطيا و $\langle R\rangle = U_{33}$.

المصفوفة A تسمى **شبه متماثلة** skew-symmetric إذا كان $A = -A^t$.

١٢- برهن أن المصفوفة شبه المتماثلة تكون مربعة.

١٣- برهن أن المصفوفة شبه المتماثلة تكون عناصر القطر الرئيسي فيها كلها أصفار. أي إذا كانت A مصفوفة شبه متماثلة من الحجم n فإن $[A]_{ii} = 0$ لكل $1 \le i \le n$.

١٤- برهن أن المصفوفة A تكون متماثلة وشبه متماثلة إذا وفقط إذا كانت A هي المصفوفة الصفرية.

١٥- نفرض A و B مصفوفتان شبه متماثلتان من نفس الحجم و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. برهن أن $\alpha A + \beta B$ تكون مصفوفة شبه متماثلة.

١٦- نفرض A مصفوفة مربعة. برهن أن $A + A^t$ تكون مصفوفة متماثلة.

١٧- نفرض A مصفوفة مربعة. برهن أن $A - A^t$ تكون مصفوفة شبه متماثلة.

١٨- نفرض A مصفوفة مربعة. برهن أنه يوجد مصفوفة متماثلة B ومصفوفة شبه متماثلة C بحيث $A = B + C$.

١٩- برهن أن التجزيء في تمرين ١٨ يكون وحيد.

٣-٢ ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

نعلم كيفية جمع متجهين وكيفية ضرب متجه في قياسي. هاتان العمليتان معا تعطينا إمكانية تكوين تراكيب خطية. بالمثل تعلمنا كيفية جمع مصفوفتين وضرب مصفوفة في قياسي. في هذا الفصل سوف نخلط هذه الأفكار لتكوين عملية تعرف بضرب المصفوفات. هذا سوف يقودنا إلى بعض النتائج التي تكون مدهشة ومركزية. نبدأ بتعريف كيف يتم ضرب متجه في مصفوفة.

ضرب مصفوفة في متجه

رأينا مرارا أهمية التراكيب الخطية لأعمدة مصفوفة. على سبيل المثال رأينا في نظرية ٢-٢-٥ أن كل حل لنظام معادلات خطية يعطى كتركيبة خطية من أعمدة مصفوفة المعاملات التي تساوي متجه الثوابت. هذه النظرية وغيرها تحفزنا للتعريف التالي.

تعريف ٣-٢-١. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$ أعمدتها $A_1, A_2, \ldots, A_n$ و u متجه من الحجم n. يعرف ضرب **مصفوفة في متجه** matrix-vector product أو حاصل ضرب المصفوفة A مع المتجه u بأنه التركيبة الخطية

$$Au = [u]_1 A_1 + [u]_2 A_2 + [u]_3 A_3 + \ldots + [u]_n A_n$$

لذلك ضرب مصفوفة في متجه هو صورة جديدة للضرب، على الأقل بمفهوم أنه أيضا كتب بالتجاور للرمزين كما هو الحال في أنواع الضرب السابقة. تذكر أن ضرب مصفوفة $m \times n$ في متجه من الحجم n سوف يولد متجه من الحجم m. لذلك إذا كانت المصفوفة مستطيلة فإن حجم المتجه يتغير. مع كل التراكيب الخطية التي سبق تكوينها، هذه الحسابات تبدو ذات طبيعة أخرى.

مثال ٣-٢-٢. نعتبر

$$u=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\\3\\-1\end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix}1&4&2&3&4\\-3&2&0&1&-2\\1&6&-3&-1&5\end{bmatrix}$$

إذن

$$Au=2\begin{bmatrix}1\\-3\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}4\\-2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\1\\6\end{bmatrix}$$

يمكننا الآن تمثيل أنظمة المعادلات الخطية في صورة محكمة، عبارة عن حاصل ضرب مصفوفة مع متجه وتساوي متجه عمود. هذه تعطينا الرمز العام البديل للرمز الذي سبق استخدامه $LS(A,b)$.

نظرية ٣-٢-٣. مجموعة حلول النظام $LS(A,b)$ تساوي مجموعة الحلول للمتجه x في المعادلة الاتجاهية $Ax=b$.

البرهان: هذه النظرية تنص على تساوي مجموعتي حلول. نحتاج لبيان أن إحدى المجموعتين تكون جزئية من الأخرى والعكس.

نفرض أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هي أعمدة A. كلا علاقتي الاحتواء تنتج من هذه المتتابعة من التكافؤات

x حل للنظام $LS(A,b)$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad [x]_1 A_1+[x]_2 A_2+\ldots+[x]_n A_n=b$$

x حل للنظام $Ax=b$.

مثال ٣-٢-٤. نعتبر نظام المعادلات الخطية

$$2x_1+4x_2-3x_3+5x_4+x_5=9$$
$$3x_1+x_2+x_4-3x_5=0$$
$$-2x_1+7x_2-5x_3+2x_4+2x_5=-3$$

والذي له مصفوفة المعاملات ومتجه الثوابت

$$b=\begin{bmatrix}9\\0\\-3\end{bmatrix} \text{ ، } A=\begin{bmatrix}2&4&-3&5&1\\3&1&0&1&-3\\-2&7&-5&2&2\end{bmatrix}$$

والذي يوصف بصورة محكمة بالمعادلة الاتجاهية $Ax=b$.
النظرية التالية سوف نحتاج إليها فيما بعد.

نظرية ٣-٢-٥. نفرض أن A و B مصفوفتين من الحجم $m\times n$ بحيث $Ax=Bx$ لكل $x\in\mathbb{C}^n$. إذن $A=B$.

البرهان: الفرض أن $Ax=Bx$ لكل $x\in\mathbb{C}^n$ ، يمكننا من استخدام هذا التساوي لأي اختيار للمتجه x. ومع ذلك فسوف نقتصر في استخدامنا لهذه المساواة على متجهات الوحدة القياسية e_j ، $1\le j\le n$. لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ يكون

$$\begin{aligned}
[A]_{ij}
&=0[A]_{i1}+\ldots+0[A]_{i,j-1}+1[A]_{ij}+0[A]_{i,j+1}+\ldots+0[A]_{in}\\
&=[A]_{i1}[e_j]_1+[A]_{i2}[e_j]_2+[A]_{i3}[e_j]_3+\ldots+[A]_{in}[e_j]_n\\
&=[Ae_j]_1\\
&=[Be_j]_1\\
&=[B]_{i1}[e_j]_1+[B]_{i2}[e_j]_2+[B]_{i3}[e_j]_3+\ldots+[B]_{in}[e_j]_n\\
&=0[B]_{i1}+\ldots+0[B]_{i,j-1}+1[B]_{ij}+0[B]_{i,j+1}+\ldots+0[B]_{in}\\
&=[B]_{ij}
\end{aligned}$$

من تعريف تساوي مصفوفتين ينتج أن $A=B$.

ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

الآن نعرف كيف يتم ضرب مصفوفتين.

الكثير من الكتب تعطي هذا التعريف مبكرا. ومع ذلك فقد تأخرنا في هذا الكتاب في إيراد هذا التعريف حتى نكون قد تعرفنا على كثير من

الأفكار التي تتعلق بالتراكيب الخطية. ضرب مصفوفتين هو تعريف مركزي وربما يكون من أهم التعريفات في الجبر الخطي.

تعريف ٣-٢-٦. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و $B_1, B_2, B_3, \dots, B_p$ أعمدة مصفوفة B من الحجم $n \times p$. **مصفوفة حاصل ضرب** A مع B هي مصفوفة AB من الحجم $m \times p$ حيث العمود رقم i في AB هو ضرب مصفوفة في متجه AB_i. في صورة رمزية يكون

$$AB = A[B_1 \mid B_2 \mid \dots \mid B_p] = [AB_1 \mid AB_2 \mid \dots \mid AB_p]$$

مثال ٣-٢-٧. أوجد المصفوفة AB حيث

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ، } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$AB = \left[A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| A\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \middle| A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 17 & 20 & 10 \\ 20 & -13 & -3 & -1 \\ -18 & -44 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

هل هذا هو حاصل ضرب المصفوفات الذي كنت تتوقع؟ ربما أن العمليات السابقة على المصفوفات تجعلك تتوقع أن يكون حاصل ضرب

مصفوفتين يتم بضرب مصفوفتين من نفس الحجم عنصر مع عنصر. لاحظ أن التعريف الحالي استخدم مصفوفتين من حجمين مختلفين(ومع ذلك عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية) والمصفوفة الناتجة تكون من حجم ثالث. لاحظ أيضا أنه في المثال السابق لا يمكن تكوين حاصل الضرب BA، حيث أن حيث أن حجمي المصفوفتين في هذا الترتيب لا يكون صحيحا.

ولكن قد يحدث ما هو أغرب من ذلك، كثير من الأفكار القديمة حول الضرب لا تنطبق على ضرب المصفوفات. لذلك لا تضع أي افتراضات حتى نقدم النظرية التي تخبرك عن الأمر. حتى وإن كانت أحجام المصفوفات صحيحة، فإن حاصل ضرب مصفوفتين ليس إبداليا. المثال التالي يوضح ذلك.

مثال ٣-٢-٨. نعتبر المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

إذن لدينا مصفوفتين مربعتين من الحجم 2 ومن ثم يمكن إجراء حاصل الضرب بأي ترتيب.

$$AB=\begin{bmatrix}19 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix} \text{ ، } BA=\begin{bmatrix}4 & 12\\ 4 & 17\end{bmatrix}$$

واضح أن $AB \neq BA$.

بينما بعض الخصائص الطبيعية للضرب غير محققة، العديد منها محقق. فيما يلي سوف نقدم ونبرهن بعض النظريات ذات الصلة. ولكن أولا نحن بحاجة إلى نظرية تعطينا المعنى البديل لضرب مصفوفتين. في العديد من الكتب، هذا قد يعطى على أنه تعريف ضرب مصفوفتين. الآن نعطي الصياغة التالية كنتيجة لتعريف حاصل الضرب الذي سبق تقديمه أعلى.

نظرية ٣-٢-٩. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B مصفوفة من الحجم $n \times p$. إذن لكل $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq p$ ، عناصر AB الفردية تعطى من

$$[AB]_{ij} = [A]_{i1}[B]_{1j} + [A]_{i2}[B]_{2j} + [A]_{i3}[B]_{3j} + \ldots + [A]_{in}[B]_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}$$

البرهان: نفرض أن المتجهات $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ترمز إلى أعمدة A ونفرض $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_p$ ترمز إلى أعمدة B. إذن لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le p$ يكون

$$\begin{aligned}
[AB]_{ij} &= [AB_j]_i \\
&= [[B_j]_1 A_1 + [B_j]_2 A_2 + \ldots + [B_j]_n A_n]_i \\
&= [[B_j]_1 A_1]_i + [[B_j]_2 A_2]_i + \ldots + [[B_j]_n A_n]_i \\
&= [B_j]_1 [A_1]_i + [B_j]_2 [A_2]_i + \ldots + [B_j]_n [A_n]_i \\
&= [B]_{1j}[A]_{i1} + [B]_{2j}[A]_{i2} + \ldots + [B]_{nj}[A]_{in} \\
&= [A]_{i1}[B]_{1j} + [A]_{i2}[B]_{2j} + \ldots + [A]_{in}[B]_{nj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}
\end{aligned}$$

مثال ٣-٢-١٠. نعتبر مرة أخرى المصفوفتين في مثال ٣-٢-٧

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ،} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

نفرض أننا أردنا تحديد العنصر في AB في الصف الثاني في العمود الثالث.

$$\begin{aligned}
[AB]_{23} &= [A]_{21}[B]_{13} + [A]_{22}[B]_{23} + [A]_{23}[B]_{33} + \\
&\qquad [A]_{24}[B]_{43} + [A]_{25}[B]_{53} \\
&= (0)(2) + (-4)(3) + (1)(2) + (2)(-1) + (3)(3) = -3
\end{aligned}$$

لاحظ كيف يوجد خمسة حدود في الجمع، حيث أن 5 هو البعد المشترك بين المصفوفتين (عدد أعمدة A وعدد صفوف B) . في نظرية ٣-٢-٩ الدليل k يأخذ من 1 إلى 5.
الآن نحدد العنصر في الصف الثالث في العمود الأول.

$$[AB]_{31} = [A]_{31}[B]_{11} + [A]_{32}[B]_{21} + [A]_{33}[B]_{31} + [A]_{34}[B]_{41} + [A]_{35}[B]_{51}$$
$$= (-5)(1) + (1)(-1) + (2)(1) + (-3)(6) + (4)(1) = -18$$

أكمل حساب بقية عناصر AB بنفس الطريقة ثم قارن النتيجة التي حصلت عليها بالنتيجة في مثال ٣-٢-٧.

نظرية ٣-٢-٩ هي الطريقة التي يستخدمها الكثيرون عن حساب حاصل ضرب مصفوفتين يدويا. أيضا سوف تكون مفيدة للنظريات التي سوف نبرهنها بعد قليل. ومع ذلك فإن التعريف (تعريف ٣-٢-٦) يكون في كثير من الأحيان أكثر فائدة في الأفكار الأكثر عمقا مثل فضاء الصفرية وفضاء الأعمدة الذي سوف نتعرض له فيما بعد.

خواص ضرب المصفوفات

في هذا القسم نجمع خواص ضرب المصفوفات وتفاعلاتها مع كل من المصفوفة الصفرية ، مصفوفة الوحدة ، جمع المصفوفات ، ضرب مصفوفة في قياسي ، الضرب الداخلي ، المرافق والمدور.

نظرية ٣-٢-١١. (الضرب في المصفوفة الصفرية) نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ ، إذن

١- $AO_{n\times p} = O_{m\times p}$.

٢- $O_{p\times m}A = O_{p\times n}$.

البرهان: سوف نبرهن (١) ونترك (٢) كتمرين للقارئ. باستخدام التساوي عنصر بعنصر، لكل $1 \le i \le m$ ، $1 \le j \le p$ يكون

$$[AO_{n\times p}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[O_{n\times p}]_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} 0$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 0$$
$$= 0$$
$$= [O_{m\times p}]_{ij}$$

لذلك من تعريف تساوي مصفوفتين $O_{p\times m}A$ و $O_{p\times n}$ تكونا متساويتين.

نظرية ٣-٢-١٢. (الضرب في مصفوفة الوحدة) نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ ، إذن

١- $AI_n = A$.

٢- $I_m A = A$.

البرهان: أيضا سوف نبرهن (١) ونترك برهان (٢) كتمرين.

لكل $1 \le i \le m$ ،$1 \le j \le p$ يكون

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [I_n]_{kj}$$
$$= [A]_{ij} [I_n]_{jj} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} [A]_{ik} [I_n]_{kj}$$
$$= [A]_{ij} (1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} [A]_{ik} (0)$$
$$= [A]_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} 0$$
$$= [A]_{ij}$$

لذلك المصفوفتان A و AI_n تكونا متساويتان.

في هذه النظرية، مصفوفة الوحدة I_n تسلك في ضرب المصفوفات مسلك العدد الصحيح 1 في ضرب الأعداد القياسية. ضرب مصفوفة في مصفوفة الوحدة لا يكون له أي تأثير على المصفوفة.

نظرية ٣-٢-١٣. (توزيع الضرب على الجمع) نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B و C مصفوفتين من الحجم $n \times p$ و D مصفوفة من الحجم $p \times s$ ، إذن

١- $A(B+C) = AB + AC$.

٢- $(B+C)D = BD + CD$

البرهان: سوف نبرهن (١) ونترك (٢) يبرهن بالمثل كتمرين.

لكل $1 \le i \le m$ ، $1 \le j \le p$ يكون

$$\begin{aligned}
[A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B+C]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} ([B]_{kj} + [C]_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ([A]_{ik} [B]_{kj} + [A]_{ik} [C]_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kj} + \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [C]_{kj} \\
&= [AB]_{ij} + [AC]_{ij} \\
&= [AB + AC]_{ij}
\end{aligned}$$

لذلك المصفوفتان $A(B+C)$ و $AB + AC$ تكونا متساويتان وذلك لتساوي العناصر المتناظرة في كليهما عنصرا بعنصر.

نظرية ٣-٢-١٤. (ضرب قياسي في حاصل ضرب مصفوفتين) نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ ، B مصفوفة من الحجم $n \times p$ و α قياسي. إذن $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

البرهان: هنا تساوي مصفوفات. سوف نبرهن التساوي الأول ونترك التساوي الثاني كتمرين. لكل $1 \le i \le m$ ، $1 \le j \le p$ يكون

$$
\begin{aligned}
[\alpha(AB)]_{ij} &= \alpha[AB]_{ij} \\
&= \alpha\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\alpha[A]_{ik}[B]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}[\alpha A]_{ik}[B]_{kj} \\
&= [(\alpha A)B]_{ij}
\end{aligned}
$$

لذلك المصفوفتان $\alpha(AB)$ و $(\alpha A)B$ تكونا متساويتان عنصرا بعنصر ومن ثم تكونا متساويتان.

نظرية ٣-٢-١٥. (عملية ضرب المصفوفات دامجة) نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ ، B مصفوفة من الحجم $n\times p$ و C مصفوفة من الحجم $p\times s$ ، إذن $A(BC)=(AB)C$.

البرهان: لكل $1\le i\le m$ ، $1\le j\le s$ يكون

$$
\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[BC]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p}[B]_{kl}[C]_{lj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}[A]_{ik}[B]_{kl}[C]_{lj}
\end{aligned}
$$

يمكننا تبديل علامتي المجموع حيث أنهما منتهيتين

$$
= \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kl}[C]_{lj}
$$

حيث أن $[C]_{lj}$ لا تعتمد عل الدليل k يمكن استخدام التوزيع لإزاحتها خارج المجموع الداخلي

$$= \sum_{l=1}^{p} [C]_{lj} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kl} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{p} [C]_{lj} \ [AB]_{il}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \ [AB]_{il} [C]_{lj}$$

$$= [(AB)C]_{ij}$$

وحيث أن عناصر المصفوفتين $A(BC)$ و $(AB)C$ تتساوى عنصرا بعنصر فإن المصفوفتان تكونا متساويتان.

في النظرية التالية إذا تعاملنا مع كل من المتجهين u و v على أنه مصفوفة من عمود واحد فإن التعبير $\overline{u}^{t} v$ يكون مصفوفة من درجة 1×1 وسوف نتعامل مع هذه المصفوفة الصغيرة ببساطة باعتبارها كمية قياسية وهو العنصر الوحيد فيها.

لاحظ أنه إذا تعاملنا مع المتجه باعتباره مصفوفة من عمود واحد، فإنه يمكن تكوين مرافق المتجه.

نظرية ٣-٢-١٥. إذا اعتبرنا المتجهين $u, v \in \mathbb{C}^m$ كمصفوفتين من الحجم $m \times 1$ فإن $\langle u, v \rangle = \overline{u}^{t} v = u^* v$.

البرهان: من تعريف الضرب الداخلي
$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{m} \overline{[u]_k} [v]_k$$

باعتبار المتجه مصفوفة من عمود واحد
$$= \sum_{k=1}^{m} \overline{[u]_{k1}} [v]_{k1}$$

من التعريف
$$= \sum_{k=1}^{m} [\overline{u}]_{k1} [v]_{k1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} [\overline{u}^{t}]_{1k} [v]_{k1}$$

$$=[\overline{u}^t v]_{11}$$

لم يبق في البرهان سوى طمس الفرق بين المصفوفة $\overline{u}^t v$ من الحجم 1×1 وعنصرها الوحيد.

نظرية ٣-٢-١٦. نفرض A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و B مصفوفة من الحجم $n\times p$. إذن $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

البرهان: لكي نبرهن على تساوي هاتين المصفوفتين سوف نعمل عنصرا بعنصر. $1\le i\le n$ و $1\le j\le p$ يكون

$$
\begin{aligned}
[\overline{AB}]_{ij} &= \overline{[AB]_{ij}}\\
&= \overline{\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\overline{[A]_{ik}[B]_{kj}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\overline{[A]_{ik}}\;\overline{[B]_{kj}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}[\overline{A}]_{ik}[\overline{B}]_{kj}\\
&= [\overline{A}\,\overline{B}]_{ij}
\end{aligned}
$$

إذن عناصر المصفوفتان $\overline{AB}$ و $\overline{A}\,\overline{B}$ المتناظرة تكون متساوية عنصرا بعنصر ومن ثم $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

نظرية ٣-٢-١٧. نفرض A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و B مصفوفة من الحجم $n\times p$. إذن $(AB)^t=B^tA^t$.

البرهان: هذه النظرية قد تبدو مستغربة ولكن بفحص أحجام المصفوفات فلن يكون الأمر بعيد المنال. أولا AB تكون من الحجم $m\times p$، ومن ثم مدورها تكون من الحجم $p\times m$. حاصل الضرب B^tA^t هو حاصل ضرب مصفوفة B^t من الحجم $p\times n$ في مصفوفة A^t من من

الحجم $n \times m$ ويكون الناتج مصفوفة من الحجم $p \times m$. ومن ثم فالمصفوفتين الناتجتين تكونا ملائمتين للتساوي.
لإثبات التساوي ، كما سبق، ننظر في العناصر المتناظرة عنصرا بعنصر. لكل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le p$ يكون

$$\begin{aligned}
[(AB)^t]_{ji} &= [AB]_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [B]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [B]_{kj} [A]_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [B^t]_{jk} [A^t]_{ki} \\
&= [B^t A^t]_{ji}
\end{aligned}$$

ومن ثم يكون $(AB)^t = B^t A^t$ لأن عناصرهما المتناظرة متساوية عنصرا بعنصر.

هذه النظرية قد تبدو غريبة للوهلة الأولى، حيث أننا بدلنا ترتيب كلا من A و B. ولكن ببساطة إذا نظرنا إلى أحجام المصفوفات المتضمنة، يمكننا ملاحظة أن التبديل يكون ضروريا لهذا السبب وحده. ثم تأتي العناصر المتناظرة لتكون متساوية عنصرا بعنصر يكون إضافة.

كما أن قرين المصفوفة هو خليط من المرافق والمدور فإن تأثيرها على ضرب المصفوفات يماثل تأثير المدور. هنا الخاصية الأخيرة من قائمة الخواص الأساسية لضرب المصفوفات.

نظرية ٣-٢-١٨. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B مصفوفة من الحجم $n \times p$. إذن $(AB)^* = B^* A^*$.

البرهان:

$$\begin{aligned}
(AB)^* &= \left(\overline{AB}\right)^t \\
&= \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)^t
\end{aligned}$$

$$=\left(\overline{B}\right)^t\left(\overline{A}\right)^t$$
$$=B^*A^*$$

النظريات السابقة مع نظرية ٣-١-٧ والنتائج الأخرى في فصل ٣-١ تعطينا القواعد لكيفية تفاعل المصفوفات مع العمليات المختلفة المعرفة على المصفوفات (الجمع، الضرب في قياسي، ضرب المصفوفات، الترافق، المدور والقرين). استخدمها واستفد منها، ولكن لا تفعل أي شيء مع مصفوفة ما لم يكن عندك فيه قاعدة. لاحظ أيضا أن كل متجه عمود هو مصفوفة من الحجم $n\times 1$، لذلك هذه النظريات تطبق على متجهات الأعمدة أيضا. أخيرا هذه النتائج مجتمعة تجعلنا نشعر بأن عملية ضرب المصفوفات تبدو أنها ليست شيء غير طبيعي.

المصفوفات الهيرميتية

قرين المصفوفة له خاصية أساسية عندما توظف في ضرب مصفوفة بمتجه كجزء من الضرب الداخلي. عند هذه النقطة، يمكنك استخدام النتيجة التالية كتفاعل لتعريف القرين.

نظرية ٣-٢-١٩. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ ، $x\in\mathbb{C}^n$ و $y\in\mathbb{C}^m$. إذن $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$.

البرهان:

$$\langle Ax,y\rangle=\left(\overline{Ax}\right)^t y$$
$$=\left(\overline{A}\overline{x}\right)^t y$$
$$=\overline{x}^t\,\overline{A}^t y$$
$$=\overline{x}^t\left(A^*y\right)$$
$$=\langle x,A^*y\rangle$$

أحيانا المصفوفة تساوي قرينها، هذه المصفوفات لها خواص مثيرة للاهتمام. واحدة من هذه الحالات الأكثر شيوعا أن هذا يحدث عندما تكون كل عناصر المصفوفة أعداد حقيقية. إذن ببساطة نحن نتحدث عن مصفوفات متماثلة، لذلك يمكن اعتبار ذلك كتعميم للمصفوفات المتماثلة.

تعريف ٣-٢-٢٠. المصفوفة المربعة A تسمى **هيرميتية** Hermitian (أو **ذاتية القرين** self-adjoint) إذا كان $A = A^*$.

مرة أخرى، مجموعة المصفوفات الحقيقية التي تكون هيرميتية هي تماما مجموعة المصفوفات المتماثلة. الآن سوف نبرهن بعض النتائج الأساسية حول المصفوفات الهيرميتية.

نظرية ٣-٢-٢١. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن A تكون هيرميتية إذا وفقط إذا كان $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ لكل $x, y \in \mathbb{C}^n$.

البرهان: نفرض A مصفوفة هيرميتية. إذن

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle x, A^* y\rangle \\ &= \langle x, Ay\rangle\end{aligned}$$

الاتجاه الآخر، نفرض أن $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ لكل $x, y \in \mathbb{C}^n$.

سوف نبين أن $A = A^*$ وذلك بإثبات أن $Ax = A^* x$ لكل x ومن ثم نطبق نظرية ٣-٢-٥.

لأي $x \in \mathbb{C}^n$ نعتبر الضرب الداخلي

$$\begin{aligned}\langle Ax - A^* x, Ax - A^* x\rangle &= \langle Ax - A^* x, Ax\rangle - \langle Ax - A^* x, A^* x\rangle \\ &= \langle Ax - A^* x, Ax\rangle - \langle A(Ax - A^* x), x\rangle \\ &= \langle Ax - A^* x, Ax\rangle - \langle Ax - A^* x, Ax\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

وحيث أن الضرب الداخلي لمتجه $Ax - A^* x$ مع نفسه يساوي الصفر لابد أن هذا المتجه يساوي الصفر. أي أن $Ax - A^* x = 0$ (نظرية ٢-٦-١٣) ومن ثم $Ax = A^* x$ لكل $x \in \mathbb{C}^n$. من نظرية ٣-٢-٥، $A = A^*$ وتكون A مصفوفة هيرميتية.

تمارين ٣-٢

١- كون حاصل ضرب مصفوفة في متجه

للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ مع المتجه $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

٢- أوجد حاصل ضرب المصفوفتين، بنفس الترتيب المعطى

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 7 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

٣- أعد كتابة نظام المعادلات الخطية التالي كمعادلة اتجاهية وضرب مصفوفة في متجه

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

٤- باستخدام حاصل ضرب مصفوفة في متجه أوجد حاصل ضرب المصفوفتين AB ، حيث

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} ، \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

٥- باستخدام تعريفي حاصل ضرب مصفوفتين، أوجد حاصل ضرب المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}. \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

٦- باستخدام تعريفي حاصل ضرب مصفوفتين، أوجد حاصل ضرب المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}. \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

٧- باستخدام تعريفي حاصل ضرب مصفوفتين، أوجد حاصل ضرب المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\\ 6 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}. \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

٨- احسب حاصل ضرب المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

٩- للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، أوجد A^2 ، A^3 ، A^4. اوجد الصورة العامة للمصفوفة A^n لأي عدد صحيح موجب n.

١٠- للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، أوجد A^2 ، A^3 ، A^4. اوجد الصورة العامة للمصفوفة A^n لأي عدد صحيح موجب n.

١١- للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$، أوجد A^2 ، A^3 ، A^4. اوجد الصورة العامة للمصفوفة A^n لأي عدد صحيح موجب n.

١٢- للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$، أوجد A^2 ، A^3 ، A^4. اوجد الصورة العامة للمصفوفة A^n لأي عدد صحيح موجب n.

١٤- خلاصة نظرية ٣-٢-٢١ هي $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$. استخدم نفس معطيات النظرية لإثبات أن $\langle x,Ay\rangle=\langle A^*x,y\rangle$.

١٥- نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و $x,y\in N(A)$. برهن أن $x+y\in N(A)$.

١٦- نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ ، $\alpha\in\mathbb{C}$ و $x\in N(A)$. برهن أن $\alpha x\in N(A)$.

١٧- نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n . برهن أن A^*A و AA^* تكون مصفوفات هيرميتية.

٣-٣ معكوس المصفوفة ونظام المعادلات الخطية
Matrix Inverse and System of Linear Equations

معكوسات المصفوفات المربعة ترتبط ارتباطا وثيقا مع حلول أنظمة المعادلات الخطية.

الحلول والمعكوسات

نبدأ بمثال لنظام من المعادلات الخطية سبقت مناقشته، بمعالجة جديدة.

مثال ٣-٣-١. نعتبر النظام الخطي من ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات

$$-7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33$$
$$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24$$
$$x_1 + 4x_3 = 5$$

من نظرية ٣-٢-٣ يمكن تمثيل هذا النظام بالصورة

$$Ax = b$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ، } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ ، } b = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

الآن نعتبر المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

لاحظ أن

$$BA = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الآن نطبق تلك الحسابات على حل نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x &= I_3 x \\ &= (BA)x \end{aligned}$$

$$= B(Ax)$$
$$= Bb$$

لذلك يكون

$$x = Bb = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لذلك بمساعدة B نكون قادرين على تحديد حل لنظام المعادلات الممثل بالمعادلة $Ax = b$ من خلال الاستخدام الحكيم لضرب المصفوفات. نعلم من نظرية ١-٥-١٣ حيث أن مصفوفة المعاملات في هذا المثال غير شاذة، سوف يوجد حل وحيد دون اعتبار لاختيار b. الاشتقاق أعلى يجسد هذه النتيجة، حيث أننا مجبرين لاستنتاج أن $x = Bb$ والحل لا يمكن أن يكون إلا هذا.

المصفوفة B في المثال السابق تسمى معكوس A. عند ضم A و B من خلال ضرب المصفوفات، الناتج سوف يكون هو مصفوفة الوحدة.

معكوس المصفوفة

تعريف ٣-٣-٢. نفرض A و B مصفوفتان مربعتان من الحجم n بحيث $AB = I_n$ و $BA = I_n$. إذن A تكون **منعكسة** invertible و B تكون **معكوس** A inverse. في هذا الوضع نكتب $B = A^{-1}$.

لاحظ أنه إذا كانت B معكوس A فإن A تكون معكوس B أو A و B كلاهما معكوس الآخر.

لاحظ أنه ليست كل مصفوفة مربعة يكون لها معكوس. في مثال ٣-٣-١ المصفوفة B تكون معكوس مصفوفة المعاملات A، لبيان ذلك يكفي إثبات أن $AB = I_3$.

مثال ٣-٣-٣. اعتبر مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات المعطى في مثال ٢-٢-٤.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفرض أن A منعكسة ولها معكوس وليكن B. نختار متجه الثوابت

$$b=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

ونعتبر نظام المعادلات $LS(A,b)$. تماما كما في مثال ٣-٣-١ هذه المعادلة الاتجاهية لها حل وحيد $x=Bb$. ومع ذلك نظام المعادلات $LS(A,b)$ غير متوافق. نكون المصفوفة الموسعة $[A\,|\,b]$ وتختزل صفيا إلى

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

التي تقرر لنا عدم التوافق حسب نظرية ١-٣-٦.

إذن فرض وجود معكوس للمصفوفة A أدي إلى تناقض (النظام متوافق وغير متوافق في آن واحد). لذلك الفرض يكون غير صحيح. إذن المصفوفة A تكون غير منعكسة.

مثال ٣-٣-٤. نعتبر المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\-2&-3&0&-5&-1\\1&1&0&2&1\\-2&-3&-1&-3&-2\\-1&-3&-1&-3&1\end{bmatrix}\text{، }B=\begin{bmatrix}-3&3&6&-1&-2\\0&-2&-5&-1&1\\1&2&4&1&-1\\1&0&1&1&0\\1&-1&-2&0&1\end{bmatrix}$$

إذن

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذلك من تعريف ٣-٣-٢ يمكن القول بأن A منعكسة و $B = A^{-1}$.

في الفصل ٣-٤ سوف نعطي بعض النظريات التي تسمح لنا بصورة سريعة بتحديد مع إذا كانت مصفوفة منعكسة. أما الآن فنهتم أكثر بكيفية حساب معكوس المصفوفة.

حساب معكوس المصفوفة

نظرية ٣-٣-٥. نفرض أن

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

إذن A تكون منعكسة إذا وفقط إذا كان $ad-bc\neq 0$. عندما A تكون منعكسة فإن

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

البرهان: نفرض أن $ad-bc\neq 0$. سوف نستخدم تعريف معكوس المصفوفة لنقرر أن A لها معكوس. لاحظ أنه إذا $ad-bc\neq 0$ فإن الصيغة المقترحة لـ A^{-1} تكون منطقية حيث أننا لانقسم على الصفر. باستخدام الصيغة المقترحة لمعكوس A نحسب

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

من تعريف ٣-٣-٢ هذا يكفي لاستنتاج أن A منعكسة، وأن التعبير A^{-1} يكون صحيحا.

من جهة أخري نفرض أن A منعكسة، ونفرض أن $ad-bc=0$. هذا يعني أن $ad=bc$. نفرض أن

$$B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

معكوس للمصفوفة A. هذا يعني أن

$$I_2 = AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

بالعمل على المصفوفتين في نهايتي المعادلة، بضرب الصف الأعلى في c وضرب الصف الأسفل في a

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace+bcg & acf+bch \\ ace+adg & acf+adh \end{bmatrix}$$

بالتعويض من العلاقة $ad = bc$ نحصل على

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace+bcg & acf+bch \\ ace+bcg & acf+bch \end{bmatrix}$$

المصفوفة في الطرف الأيمن لها صفان متساويان، لذلك هذا لابد أن يحدث للمصفوفة في الطرف الأيمن. وهذا يؤدي إلى $a = 0$ و $c = 0$. مع هذه المعلومات، حاصل الضرب AB يصير إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 = AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{bmatrix}$$

لذلك $bg = dh = 1$ ومن ثم b,g,d,h تكون كلها غير صفرية. ولكن هذا يعني أن bh و dg يجب أن تكون غير صفرية. وهذا تناقض، لذلك الفرض يكون خطأ، أي أن $ad - bc \neq 0$ طالما أن A لها معكوس.

هذه نظرية لطيفة، و من الجيد أن تكون هناك صيغة للمعكوس والشرط الذي يخبرنا متى نستخدمها. ومع ذلك، هذا النهج لا يكون عمليا للمصفوفات من حجم أكبر، ولو حتى من الحجم 3×3. الآن نعطي مثال يعتبر كمقدمة للنظرية الرئيسية.

مثال ٣-٣-٦. نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\-2&-3&0&-5&-1\\1&1&0&2&1\\-2&-3&-1&-3&-2\\-1&-3&-1&-3&1\end{bmatrix}$$

للمعكوس، نرغب في إيجاد مصفوفة B بحيث $AB=I_5$. باعتبار أعمدة المصفوفة واستخدام تعريف ضرب المصفوفات باستخدام الأعمدة

$$AB=I_5$$
$$A[B_1\,|\,B_2\,|\,B_3\,|\,B_4\,|\,B_5]=[e_1\,|\,e_2\,|\,e_3\,|\,e_4\,|\,e_5]$$
$$[AB_1\,|\,AB_2\,|\,AB_3\,|\,AB_4\,|\,AB_5]=[e_1\,|\,e_2\,|\,e_3\,|\,e_4\,|\,e_5]$$

بمساواة المصفوفتين عمودا بعمود نحصل على

$$AB_1=e_1\quad AB_2=e_2\quad AB_3=e_3\quad AB_4=e_4\quad AB_5=e_5$$

حيث أن B هي المصفوفة التي نحاول حسابها، يمكننا النظر إلى كل عمود B_i، كمتجه عمود مجاهيل. لذلك يكون لدينا خمسة أنظمة من المعادلات الخطية ، كل نظام مكون من خمس معادلات في خمسة متغيرات. لاحظ أن كل هذه الأنظمة الخمسة لها نفس مصفوفة المعاملات. الآن نقوم بحل كل نظام على حدة

نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام $LS(A,e_1)$

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2&1&1\\-2&-3&0&-5&-1&0\\1&1&0&2&1&0\\-2&-3&-1&-3&-2&0\\-1&-3&-1&-3&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&-3\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix};B_1=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام $LS(A,e_2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام $LS(A,e_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام $LS(A,e_4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام $LS(A,e_5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يمكننا الآن تجميع متجهات الحلول الخمسة في مصفوفة B.

$$B = [B_1 \mid B_2 \mid B_3 \mid B_4 \mid B_5]$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\2\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-5\\4\\1\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 6 & -1 & -2\\0 & -2 & -5 & -1 & 1\\1 & 2 & 4 & 1 & -1\\1 & 0 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

بهذه الطريقة نعلم أن $AB = I_5$. نختبر $BA = I_5$ ، ومن ثم يكون لدينا معكوس A.

لاحظ كيف أن أنظمة المعادلات الخمسة في المثال السابق تم حلها جميعا بنفس المتتابعة من عمليات الصفوف. النظرية التالية هي الرئيسية في هذا الفصل وهي تحاكي المثال السابق.

نظرية ٣-٣-٧. نفرض A مصفوفة مربعة غير شاذة من الحجم n. نكون مصفوفة M من الحجم $n \times 2n$ بوضع مصفوفة الوحدة من الحجم n ، I_n ، على يمين المصفوفة A. نفرض أن N هي المصفوفة المكافئة صفيا للمصفوفة M في الشكل الصفي المدرج المختزل. أخيرا نفرض أن B هي المصفوفة المكونة من الأعمدة n الأخيرة من المصفوفة N. إذن $AB = I_n$.

البرهان: A غير شاذة، إذن من نظرية ١-٥-٧ توجد متتابعة من عمليات الصفوف التي تحول A إلى I_n. هذه تكون نفس المتتابعة من عمليات الصفوف التي تحول M إلى N، حيث أن وجود مصفوفة الوحدة في الأعمدة n الأولى في N يضمن أن N تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل.

إذا اعتبرنا أنظمة المعادلات الخطية $LS(A,e_i)$، $1 \le i \le n$، نجد أن متتابعة عمليات الصفوف المذكورة أعلى أيضا تحول المصفوفة الموسعة لكل نظام من هذه الأنظمة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. علاوة على ذلك، الحل الوحيد للنظام $LS(A,e_i)$ يظهر في العمود $n+1$ في الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة للنظام ويتطابق مع العمود رقم $n+i$ من N. نفرض أن $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{2n}$ ترمز إلى أعمدة N. لذلك نجد أن

$$\begin{aligned}AB &= A[N_{n+1} \mid N_{n+2} \mid N_{n+3} \mid \ldots \mid N_{n+n}]\\ &=[AN_{n+1} \mid AN_{n+2} \mid AN_{n+3} \mid \ldots \mid AN_{n+n}]\\ &=[e_1 \mid e_2 \mid e_3 \mid \ldots \mid e_n]\\ &= I_n\end{aligned}$$

كما هو مطلوب.

ينبغي هنا أن نكون حذرين حول هذه النظرية ماذا تقول وماذا لا تقول. إذا كانت A مصفوفة غير شاذة، إذن سوف نضمن وجود مصفوفة B بحيث $AB = I_n$ والبرهان يعطينا عملية تكوين B. ومع ذلك تعريف معكوس المصفوفة (تعريف ٣-٣-٢) يتطلب أيضا أن $BA = I_n$. لذلك يلزمنا حساب ضرب المصفوفتين في الترتيب المعكوس قبل الحكم على B بأنها معكوس A. ومع ذلك، حالا سوف نرى أن هذا هو الحال دائما.

ماذا لو أن A كانت شاذة؟ عند هذه النقطة، نظرية ٣-٣-٧ لا يمكن تطبيقها. السؤال عن وجود معكوس A يظل مطروحا (ولكن نظرية ٣-٣-٤ في الفصل التالي سوف تجيب على هذا السؤال).

مثال ٣-٣-٨. احسب معكوس المصفوفة غير الشاذة

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

باستخدام نظرية ٣-٣-٧ نضع

$$M=\begin{bmatrix}-7 & -6 & -12 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

والتي تختزل صفيا إلى

$$N=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -10 & -12 & -9\\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

ومن ثم

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}-10 & -12 & -9\\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2}\\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

مجرد أن نتحقق أن $B^{-1}B=I_3$.

خواص معكوس المصفوفة Properties of Matrix Inverses

معكوس المصفوفة يتمتع ببعض الخواص اللطيفة. هنا نجمع بعضا منها. أولا أن المصفوفة يمكن أن يكون لها معكوس واحد.

نظرية ٣-٣-٩. نفرض أن A مصفوفة لها معكوس، إذن A^{-1} يكون وحيدا.

البرهان: نفرض أن A لها معكوسان، B و C. إذن من تعريف ٣-٣-٢، $AB=BA=I_n$ و $AC=CA=I_n$. ومن ثم يكون

$$\begin{aligned}B&=BI_n\\ &=B(AC)\\ &=(BA)C\\ &=I_nC\\ &=C\end{aligned}$$

ومن ذلك نستنتج أن المصفوفتين B و C هما نفس الشيء ولا يمكن أن تكونا مختلفتين. إذن أي مصفوفة لها تأثير المعكوس يجب أن تكون هي المعكوس.

نظرية ٣-٣-١٠. نفرض أن A و B مصفوفتان منعكستان من الحجم n. إذن AB تكون مصفوفة منعكسة، ويكون $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

البرهان: برهان هذه النظرية يكون بسيط عندما نحسن استخدام ما لدينا من بيانات. نعلم أن معكوس المصفوفة AB (إن وجد) هو المصفوفة التي إذا ضربت في AB من جهة اليمن ومن جهة اليسار فإن الناتج في الحالتين يكون هو مصفوفة الوحدة I_n.

الآن بالنسبة للمصفوفة $B^{-1}A^{-1}$ (والتي نضمن وجودها وذلك من الفرض بأن A و B مصفوفتان منعكستان ومن ثم يمكن إجراء عملية ضرب المعكوسين). الآن

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B\\ &= B^{-1}I_nB\\ &= B^{-1}B\\ &= I_n\end{aligned}$$

أيضا

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1}\\ &= AI_nA^{-1}\\ &= AA^{-1}\\ &= I_n\end{aligned}$$

لذلك المصفوفة تحقق المطلوب لمعكوس المصفوفة AB، ومن ثم نستنتج أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

نظرية ٣-٣-١١. نفرض أن A مصفوفة منعكسة. إذن A^{-1} تكون منعكسة ويكون $(A^{-1})^{-1} = A$.

البرهان: إذا كانت A مصفوفة منعكسة، فإن

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{و} \quad A^{-1}A = I_n$$

هذا يعني أن A تحقق المطلوب لمعكوس المصفوفة A^{-1}، ومن ثم $(A^{-1})^{-1} = A$.

نظرية ٣-٣-١٢. نفرض أن A مصفوفة منعكسة. إذن A^t تكون مصفوفة منعكسة ويكون $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

البرهان: كما في برهان النظرية السابقة ننظر فيما إذا كانت $(A^{-1})^t$ تحقق شروط معكوس المصفوفة A^t. لبيان ذلك

$$\begin{aligned}(A^{-1})^t A^t &= (AA^{-1})^t \\ &= I_n^t \\ &= I_n\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}A^t (A^{-1})^t &= (A^{-1}A)^t \\ &= I_n^t \\ &= I_n\end{aligned}$$

لذلك المصفوفة $(A^{-1})^t$ تحقق شروط معكوس المصفوفة A^t، ومن ثم يكون $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

نظرية ٣-٣-١٣. نفرض أن A مصفوفة منعكسة و α قياسي غير صفري. إذن $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ و αA تكون منعكسة.

البرهان:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{\alpha} A^{-1}\right)(\alpha A) &= \left(\tfrac{1}{\alpha}\alpha\right)(A^{-1}A) \\ &= 1I_n \\ &= I_n\end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned}(\alpha A)\left(\tfrac{1}{\alpha} A^{-1}\right) &= \left(\alpha \tfrac{1}{\alpha}\right)(AA^{-1}) \\ &= 1I_n \\ &= I_n\end{aligned}$$

ومن ثم يكون $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

تمارين ٣-٣

١- أحسب معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

٢- أحسب معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

٣- أوجد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ إن وجد. تحقق من الإجابة.

٤- أوجد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ إن وجد. تحقق من الإجابة.

٥- أوجد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ إن وجد. تحقق من الإجابة.

٦- أوجد معكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ إن وجد. تحقق من الإجابة.

٧- تحقق أن المصفوفة B تكون معكوس المصفوفة A.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&2\\-2&-1&2&-3\\1&1&0&2\\-1&2&0&2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4&2&0&-1\\8&4&-1&-1\\-1&0&1&0\\-6&-3&1&1\end{bmatrix}$$

٨- نفرض

$$D=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2&1\\-2&3&-5&3&0\\1&-1&4&-2&2\\-1&4&-1&0&4\\1&0&5&-2&5\end{bmatrix}$$

أحسب معكوس D، D^{-1} وذلك بتكوين مصفوفة 5×10 ، $[D\,|\,I_5]$ واختزالها صفيا.

٩- نفرض

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\-2&-1&-4&-1\\1&4&10&2\\-2&0&-4&5\end{bmatrix}$$

أحسب معكوس A ، A^{-1} وذلك بتكوين مصفوفة 4×8 ، $[A\,|\,I_4]$ واختزالها صفيا.

١٠- أوجد كل حلول نظام المعادلات التالية وذلك باستخدام معكوس المصفوفة التي حصلت عليها في التمرين السابق.

$$\begin{aligned}x_1+x_2+3x_3+x_4&=-4\\-2x_1-x_2-4x_3-x_4&=4\\x_1+4x_2+10x_3+2x_4&=-20\\-2x_1-4x_3+5x_4&=9\end{aligned}$$

١١- استخدم معكوس مصفوفة في إيجاد كل حلول نظام المعادلات

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = -4$$
$$-x_1 - 4x_2 = 2$$

١٢- استخدم معكوس مصفوفة في إيجاد كل حلول نظام المعادلات

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 - 2x_3 = -8$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = -6$$

١٣- كون مثال لتبين أن العلاقة $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ ليست صحيحة لكل المصفوفات المربعة من نفس الحجم.

٣-٤ معكوسات المصفوفات والمصفوفات غير الشاذة

رأينا في نظرية ٣-٣-٧ أنه إذا كانت A مصفوفة غير شاذة، فإنه يوجد مصفوفة B بحيث $AB = I_n$. بتعبير آخر، B تحقق نصف الشروط لكي تكون معكوس A. سوف نرى في هذا الفصل أن B تلقائيا تحقق الشرط الثاني ($BA = I_n$).

في البداية نحتاج إلى نتيجتين فنيتين للمبتدئين. النتيجة الأولى تقول أنه إذا كانت الفروض تصف شيئا لحاصل ضرب مصفوفتين فإن الخلاصة تصف نفس الشيء للمصفوفات الداخلة في الضرب منفردة.

نظرية ٣-٤-١. نفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الحجم n. حاصل الضرب AB يكون مصفوفة غير شاذة إذا وفقط إذا كان A و B كلاهما مصفوفة غير شاذة.

البرهان: الاتجاه الأول سوف نفرض أن AB مصفوفة غير شاذة ونبرهن أن A و B كلاهما مصفوفة غير شاذة. سوف نستخدم البرهان بالتناقض وذلك بفرض أن إحدى المصفوفتين تكون شاذة ونصل إلى تناقض. نفرض أن AB مصفوفة غير شاذة. توجد ثلاثة احتمالات. الاحتمال الأول أن كلا المصفوفتين A و B تكون شاذة، الثاني والثالث إحدى المصفوفتين تكون شاذة والأخرى غير شاذة. هناك احتمال رابع وهو أن كلا المصفوفتين تكون غير شاذة، وهذا الاحتمال لن نعتبره لأنه إذا تحقق فهو عين المطلوب.

الاحتمال الأول، نفرض أن B مصفوفة شاذة. إذن يوجد متجه غير صفري z بحيث يكون حل لنظام المعادلات $LS(B,0)$. لذلك

$$\begin{aligned}(AB)z &= A(Bz)\\ &= A0\\ &= 0\end{aligned}$$

حيث أن z حل غير صفري للنظام $LS(AB,0)$، نستنتج أن AB تكون شاذة (تعريف ١-٥-٢)، وهذا تناقض. لذلك B تكون غير شاذة كما هو مطلوب.

الاحتمال الثاني، نفرض أن A مصفوفة شاذة. إذن يوجد متجه غير صفري y يكون حل لنظام المعادلات $LS(A,0)$. نعتبر نظام

المعادلات $LS(B, y)$ حيث نعلم أن B غير شاذة من الاحتمال الأول، النظام يكون له حل وحيد (نظرية ١-٥-١٣) سوف نرمز له بالرمز w.
أولا نوضح أن w ليس هو المتجه الصفري. نفرض العكس، أن w هو المتجه الصفري. إذن

$$\begin{aligned} y &= Bw \\ &= B0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

وهو عكس الفرض بأن $y \neq 0$. إذن $w \neq 0$. لذلك

$$\begin{aligned} (AB)w &= A(Bw) \\ &= Ay \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذلك w يكون حل غير صفري للنظام $LS(AB, 0)$ ، ومن ثم يمكننا القول أن AB تكون شاذة. وهذا تناقض، إذن A تكون غير شاذة، كما هو مطلوب.

الاتجاه الآخر، نفرض أن A و B كلاهما غير شاذة. نفرض أن $x \in \mathbb{C}^n$ حل للنظام $LS(AB, 0)$، إذن

$$\begin{aligned} 0 &= (AB)x \\ &= A(Bx) \end{aligned}$$

من نظرية ٣-٢-٣ ، Bx يكون حل للنظام $LS(A, 0)$ ومن تعريف المصفوفة غير الشاذة نستنتج أن $Bx = 0$. بنفس المناقشة السابقة، لأن B مصفوفة غير شاذة، نستنتج أن $x = 0$. لذلك الحل الوحيد للنظام $LS(AB, 0)$ هو المتجه الصفري ومن ثم نستنتج أن AB تكون غير شاذة (تعريف ١-٥-٢).

هذه نتيجة مفيدة في الاتجاه المباشر، لأنها تسمح لنا بالبداية بالفرض أن شيء ما مركب (حاصل ضرب المصفوفتين AB) له الخاصية أنه غير شاذ، ويمكننا استنتاج أن المكونات الأبسط (A و B منفردة) أيضا يكون لها خاصية أنها غير شاذة. المكافئ العكسي لهذه النتيجة له أهمية مساوية. إنه يقول أن A أو B (أو كلاهما) تكون مصفوفة شاذة إذا وفقط إذا كان حاصل الضرب AB مصفوفة شاذة.

نظرية ٣-٤-٢. نفرض أن A و B مصفوفتان مربعتان من الحجم n بحيث $AB = I_n$. إذن $BA = I_n$.

البرهان: المصفوفة I_n غير شاذة (حيث أن الاختزال الصفي لها هو I_n، نظرية ١-٥-٧). لذلك A و B كلاهما تكون غير شاذة، من نظرية ٣-٤-١، على وجه الخصوص B تكون غير شاذة. لذلك يمكننا تطبيق نظرية ٣-٣-٧ لنستنتج وجود مصفوفة C بحيث $BC = I_n$.

الآن

$$
\begin{aligned}
BA &= (BA)I_n \\
&= (BA)(BC) \\
&= B(AB)C \\
&= BI_nC \\
&= BC \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

وهذا هو المطلوب.

لذلك نظرية ٣-٤-٢ تخبرنا أنه إذا كانت A غير شاذة، فإن المصفوفة B تكون مضمونة ومن نظرية ٣-٤-٢ سوف تكون معكوس يميني ومعكوس يساري للمصفوفة A، لذلك A تكون منعكسة و $A^{-1} = B$.

لذلك إذا كان لدينا مصفوفة غير شاذة A، فإنه يمكننا استخدام العملية الموصوفة في نظرية ٣-٣-٧ لإيجاد معكوس A. إذن كانت A شاذة، فإن العملية في نظرية ٣-٣-٧ سوف تفشل حيث أن الأعمدة n الأولى في M لن تختزل صفيا إلى مصفوفة الوحدة. عندما تكون A غير شاذة، إذن A لا يكون لها معكوس كما يتضح من النظرية التالية.

نظرية ٣-٤-٣. نفرض A مصفوفة مربعة. إذن A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كانت منعكسة.

البرهان: نفرض أن A منعكسة. إذن يمكننا كتابة $I_n = AA^{-1}$. لاحظ أن I_n غير شاذة (نظرية ١-٥-٧) لذلك نظرية ٣-٤-١ تؤدي إلى A و A^{-1} تكون غير شاذة.

الاتجاه العكسي، نفرض A غير شاذة. من نظرية ٣-٣-٧ توجد مصفوفة B بحيث $AB = I_n$. إذن نظرية ٣-٤-٢ تخبرنا أن $BA = I_n$. لذلك B تكون معكوس A. ومن ثم A تكون منعكسة.

نظرية ٣-٤-٤. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن العبارات التالية تكون متكافئة .

١- A مصفوفة غير شاذة.
٢- الشكل الصفي المدرج المختزل هو مصفوفة الوحدة.
٣- فضاء الصفرية للمصفوفة A يحتوي المتجه الصفري فقط، أي أن $N(A) = \{0\}$.
٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لأي اختيار للمتجه b.
٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.
٦- A تكون منعكسة.

البرهان: يمكننا تحديث قائمة التكافؤات للمصفوفات غير الشاذة ، نظرية ٢-٤-١٥، وذلك بإضافة شرط التكافؤ في نظرية ٣-٤-٤.

في حالة كون A مصفوفة معاملات غير شاذة لنظام معادلات، المعكوس يسمح لنا بسرعة حساب الحل الوحيد، لأي متجه ثوابت.

نظرية ٣-٤-٥. نفرض أن A مصفوفة غير شاذة. إذن الحل الوحيد للنظام $LS(A,b)$ هو $A^{-1}b$.

البرهان: باستخدام نظرية ١-٥-١٣ نعلم أن $LS(A,b)$ له حل وحيد لكل اختيار للمتجه b. نحتاج لبيان التعبير المعطى هو حقا الحل.

$$\begin{aligned} A(A^{-1}b) &= (AA^{-1})b \\ &= I_n b \\ &= b \end{aligned}$$

حيث أن $Ax = b$ تكون صحيحة عندما نعوض عن x بـ $A^{-1}b$، $A^{-1}b$ تكون هي الحل للنظام $LS(A,b)$.

المصفوفات الواحدية

نتذكر أن قرين المصفوفة A هو $A^* = \left(\overline{A}\right)^t$.

تعريف ٣-٤-٦. نفرض أن U مصفوفة مربعة من الحجم n بحيث $U^*U = I_n$. إذن U تسمى مصفوفة **واحدية** unitary.

مثال ٣-٤-٧. نعتبر المصفوفة

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{5}} & \frac{3+2i}{\sqrt{55}} & \frac{2+2i}{\sqrt{22}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{5}} & \frac{2+2i}{\sqrt{55}} & \frac{-3+i}{\sqrt{22}} \\ \frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{3-5i}{\sqrt{55}} & -\frac{2}{\sqrt{22}} \end{bmatrix}$$

يمكن إثبات أن $U^*U = I_n$، ومن ثم U تكون واحدية.

مثال ٣-٤-٨. نعتبر المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن التحقق أن P مصفوفة واحدية. واضح أن هذه المصفوفة نتجت من مصفوفة الوحدة بتبدل الصفوف.

إذا كانت المصفوفة A حقيقية (أي أن جميع عناصرها أعداد حقيقية) فإن تعريف المصفوفة الواحدية يتحول إلى $A^tA = I_n$. في هذه الحالة نقول أن المصفوفة **عمودية** orthogonal.

المصفوفات الواحدية لها معكوسات تحسب بسهولة. أيضا أعمدتها تكون مجموعات عيارية متعامدة. هنا النظريات التي تبين أن المصفوفات الواحدية ليست غريبة كما قد يبدو لأول وهلة.

نظرية ٣-٤-٩. نفرض U مصفوفة واحدية من الحجم n. إذن U تكون غير شاذة و $U^{-1} = U^*$.

البرهان: من تعريف ٣-٤-٦ نعلم أن $U^*U = I_n$. المصفوفة I_n غير شاذة، لذلك من نظرية ٣-٤-١ U و U^* كلاهما تكون غير شاذة.

المعادلة $U^*U = I_n$ هي نصف الطريق إلى معكوس U. نظرية ٣-٤-٢ تخبرنا بأن $UU^* = I_n$. لذلك U و U^* كلاهما تكون معكوس الأخرى.

نظرية ٣-٤-١٠. نفرض أن $S = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ هي مجموعة أعمدة مصفوفة مربعة A من الحجم n. إذن A تكون مصفوفة واحدية إذا وفقط إذا كانت S مجموعة عيارية متعامدة.

البرهان: البرهان يدور حول إثبات أن العناصر في حاصل الضرب A^*A هي نفسها الضرب الداخلي لأعمدة A.

$$
\begin{aligned}
[A^*A]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A^*]_{ik} [A]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\overline{A}^t\right]_{ik} [A]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\overline{A}]_{ki} [A]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{[A]_{ki}} [A]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{[A_i]_k} [A_j]_k \\
&= \left\langle A_i, A_j \right\rangle
\end{aligned}
$$

الآن نوظف هذه المتطابقة في متتابعة من التكافؤات.

$S = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ تكون مجموعة عيارية متعامدة

$$\Leftrightarrow \qquad \left\langle A_i, A_j \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad [A^*A]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad [A^*A]_{ij} = [I_n]_{ij}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$$

$$\Leftrightarrow \quad A^*A = I_n$$

$\Leftrightarrow$ A مصفوفة واحدية.

مثال ٣-٤-١١. المصفوفة

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{5}} & \frac{3+2i}{\sqrt{55}} & \frac{2+2i}{\sqrt{22}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{5}} & \frac{2+2i}{\sqrt{55}} & \frac{-3+i}{\sqrt{22}} \\ \frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{3-5i}{\sqrt{55}} & -\frac{2}{\sqrt{22}} \end{bmatrix}$$

واحدية، من مثال ٣-٤-٧. من نظرية ٣-٤-١٠ أعمدتها

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{5}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{5}} \\ \frac{i}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3+2i}{\sqrt{55}} \\ \frac{2+2i}{\sqrt{55}} \\ \frac{3-5i}{\sqrt{55}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2+2i}{\sqrt{22}} \\ \frac{-3+i}{\sqrt{22}} \\ -\frac{2}{\sqrt{22}} \end{bmatrix} \right\}$$

تكون مجموعة عيارية متعامدة. قد يكون اختبار حواصل الضرب الداخلي الستة لأزواج المتجهات أيسر من إيجاد حاصل الضرب U^*U. أو لأن الضرب الداخلي سلبي التماثل، نحتاج فقط إلى اختبار ثلاثة حواصل ضرب داخلي.

عند استخدام المصفوفات والمتجهات التي تكون فقط من أعداد حقيقية، المصفوفات العمودية تكون هي التي معكوسها هو المدور لها. أيضا الضرب الداخلي يكون هو الضرب القياسي العادي.

نظرية ٣-٤-١٢. نفرض U مصفوفة واحدية من الحجم n و u و v متجهين في $\mathbb{C}^n$. إذن $\langle Uu, Uv \rangle = \langle u, v \rangle$ و $\|Uv\| = \|v\|$.

البرهان:

$$\langle Uu, Uv \rangle = \left(\overline{Uu}\right)^t Uv$$

$$= \left(\overline{U}\,\overline{u}\right)^t Uv$$

$$= \overline{u}^t\, \overline{U}^t Uv$$

$$= \bar{u}^t U^* U v$$
$$= \bar{u}^t I_n v$$
$$= \bar{u}^t v = \langle u, v \rangle$$

المطلوب الثاني هو حالة خاصة من المطلوب الأول.

$$\|Uv\| = \sqrt{\|Uv\|^2}$$
$$= \sqrt{\langle Uv, Uv \rangle}$$
$$= \sqrt{\langle v, v \rangle}$$
$$= \sqrt{\|v\|^2} = \|v\|$$

بصرف النظر عن الفائدة الكامنة في هذه النظرية، فإنها تعطينا بيانا كبيرا حول المصفوفات الواحدية. عندما ننظر إلى المتجهات على أنها اتجاهات أو قوى فإن المعيار يعادل مفهوم الطول. إذا حولنا المتجهات بالضرب في مصفوفة واحدية، فإن طول (معيار) المتجه يظل كما هو. إذا اعتبرنا متجهات الأعمدة من الحجم 2 أو 3 من أعداد حقيقية فقط، فإن الضرب الداخلي لاثنين من هذه المتجهات يكون هو الضرب القياسي، وهذه القيمة يمكن أن تستخدم لحساب الزاوية بين المتجهين. عند ضرب (تحويل) متجهين في نفس المصفوفة الواحدية، فإن حاصل ضربهما القياسي لا يتغير وطول كل منهما لا يتغير. هذا يعني أن الزاوية بين المتجهين لم تتغير.

لذلك التحويل الواحدي (ضرب متجه بمصفوفة واحدية) يحافظ على العلاقات الهندسية بين المتجهات التي تمثل اتجاهات، قوى أو أي كميات فيزيائية أخرى. في حالة متجه من الحجم 2 بأعداد حقيقية، هذا ببساطة يكون دوران.

تمارين ٣-٤

١- احسب معكوس مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات التالي ثم استخدم المعكوس في حل النظام

$$4x_1+10x_2=12$$
$$2x_1+6x_2=4$$

٢- هل المصفوفة A واحدية؟ لماذا؟

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{22}}(4+2i) & \frac{1}{\sqrt{374}}(5+3i)\\ \frac{1}{\sqrt{22}}(-1-i) & \frac{1}{\sqrt{374}}(12+14i)\end{bmatrix}$$

٣- حل نظام المعادلات التالي باستخدام معكوس المصفوفة.

$$x_1+x_2+3x_3+x_4=5$$
$$-2x_1-x_2-4x_3-x_4=-7$$
$$x_1+4x_2+10x_3+2x_4=9$$
$$-2x_1-4x_3+5x_4=9$$

٤- أوجد قيم x، y و z التي تجعل المصفوفة التالية منعكسة

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & x\\ 3 & 0 & y\\ 1 & 1 & z\end{bmatrix}$$

٥- أوجد قيم x، y و z التي تجعل المصفوفة التالية شاذة

$$\begin{bmatrix}1 & x & 1\\ 1 & y & 4\\ 0 & z & 5\end{bmatrix}$$

٦- إذا كانت A و B مصفوفتان مربعتان من الحجم n وكانت A غير شاذة و B شاذة، بين مباشرة أن AB تكون شاذة بدون استخدام نظرية ٣-٤-١.

٧- نفرض Q و P مصفوفتان واحديتان من الحجم n. بين أن QP تكون مصفوفة واحدية.

٨- برهن على أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الهيرميتية تكون أعداد حقيقية.

٩- الرمز A^k يعني حاصل ضرب المصفوفة A في نفسها k مرة.

(أ) نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n بحيث $A^2 = O$ (بحيث لا يؤدي إلى $A = O$). برهن أن $I_n - A$ تكون منعكسة ببيان أن $I_n + A$ تكون معكوس $I_n - A$.

(ب) نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n بحيث $A^3 = O$. برهن أن $I_n - A$ تكون منعكسة.

(ج) ضع نظرية عامة في ضوء ملاحظاتك في (أ) و(ب) وبرهنها.

٣ـ٥ فضاءات الصفوف والأعمدة Column and Row Spaces

حاصل ضرب متجه بمصفوفة تكون تركيبة خطية من أعمدة المصفوفة وهذا يسمح لنا بربط ضرب المصفوفات بأنظمة معادلات. طبقا لنظرية ٢ـ٢ـ٥ عمليات الصفوف تكون تراكيب خطية من صفوف المصفوفة، وبالطبع الشكل الصفي المدرج المختزل أيضا يكون ذا علاقة لحل أنظمة المعادلات الخطية. في هذا الفصل نصوغ هذه الأفكار مع تعريف لمجموعتين من المتجهات المشتقة من مصفوفة.

فضاءات الأعمدة وأنظمة المعادلات

نظرية ٢ـ٢ـ٥ تبين لنا أنه يوجد تناظر طبيعي بين حلول أنظمة المعادلات الخطية والتراكيب الخطية من أعمدة مصفوفة المعاملات. هذه الفكرة تحفز على التعريف الهام التالي.

تعريف٣ـ٥ـ١. نفرض A مصفوفة من الحجم $n\times m$ أعمدتها $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. **فضاء أعمدة** A column space، يكتب $C(A)$ هو المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}^m$ التي تحتوي كل التراكيب الخطية من أعمدة A،

$$C(A)=\left\langle\left\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\right\}\right\rangle$$

مثال ٣ـ٥ـ٢. نعتبر نظام المعادلات الخطية الأول

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+7x_3-7x_4&=8\\ -3x_1+4x_2-5x_3-6x_4&=-12\\ x_1+x_2+4x_3-5x_4&=4 \end{aligned}$$

النظام الثاني

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+7x_3-7x_4&=2\\ -3x_1+4x_2-5x_3-6x_4&=3\\ x_1+x_2+4x_3-5x_4&=2 \end{aligned}$$

النظامان لهما نفس مصفوفة المعاملات

$$A=\begin{bmatrix}2&1&7&-7\\-3&4&-5&-6\\1&1&4&-5\end{bmatrix}$$

النظـام الأول سبقت دراسته فـي مثـال ١-٣-١٢ وهو متوافق، النظـام الثاني سبق دراسته في مثال ١-٢-٢٠ وهو غير متوافق. يمكن توضيح هذا الاختلاف بتوظيف فضاء الأعمدة للمصفوفة A.

متجـه عمـود الثوابـت b للنظـام المتوافـق وأحـد الحلـول x للنظـام $LS(A,b)$ هي

$$b=\begin{bmatrix}8\\-12\\4\end{bmatrix} \quad ، \quad x=\begin{bmatrix}7\\8\\1\\3\end{bmatrix}$$

باستخدام نظرية ٢-٢-٥ يمكننا تلخيص هذا الحل كتركيبة خطية من أعمدة A التي تساوي b.

$$7\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}7\\-5\\4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-7\\-6\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-12\\4\end{bmatrix}=b$$

هذه المعادلة تخبرنا أن b تكون تركيبة خطية من أعمدة A. ومن ثم ، من تعريف ٣-٥-١ يمكننا القول بأن $b\in C(A)$.

من جهة أخرى النظام الثاني $LS(A,c)$ ، حيث متجه الثوابت هو

$$c=\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

غير متوافق. هذا يعني أن $c\notin C(A)$، حيث إذا كان $c\in C(A)$ فإن c يكون تركيبة خطية من أعمدة A ومن نظرية ٢-٢-٥ هذا يقودنا إلى حل للنظام $LS(A,c)$.

لذلك بتثبيت مصفوفة المعاملات وتغيير متجه الثوابت، يمكننا أحيانا إيجاد أنظمة متوافقة وأحيانا أنظمة غير متوافقة. متجهات الثوابت التي تؤدي إلى أنظمة متوافقة تحديدا هي عناصر فضاء الأعمدة. هذا هو محتوى النظرية التالية التي تزودنا برؤية جديدة لفضاء الأعمدة.

نظرية ٣-٥-٣. نفرض A مصفوفة من الحجم $n \times m$ و b متجه من الحجم m. إذن $b \in C(A)$ إذا وفقط إذا كان $LS(A,b)$ متوافق.

البرهان: نفرض أن $b \in C(A)$، إذن يمكننا كتابة b كتركيبة خطية من أعمدة A. من نظرية ٢-٢-٥ يمكننا استخدام الكميات القياسية لهذه التركيبة لتكون حلا للنظام $LS(A,b)$، ومن ثم هذا النظام يكون متوافق.

من جهة أخرى، نفرض أن $LS(A,b)$ نظام متوافق. إذن يوجد حل، والذي يمكن استخدامه لكتابة b كتركيبة خطية من أعمدة A، وذلك من نظرية ٢-٢-٥ ومن ثم $b \in C(A)$.

هذه النظرية تخبرنا بأن السؤال عن ما إذا كان النظام متوافق يكون هو نفس السؤال عن ما إذا كانت b في فضاء الأعمدة. أو بصورة مكافئة، تخبرنا أن فضاء الأعمدة للمصفوفة A هو ببساطة كل المتجهات b التي يمكن أن تكون مع A نظام من المعادلات الخطية $LS(A,b)$ المتوافق.

بتوظيف نظرية ٣-٢-٣، يمكننا كتابة التكافؤات التالية

$$b \in C(A) \;\Leftrightarrow\; LS(A,b) \text{ متوافق } \;\Leftrightarrow\; Ax = b \text{ لبعض } x.$$

لذلك التعريف البديل والأكثر شيوعا لفضاء الأعمدة لمصفوفة A من الحجم $m \times n$ هو

$$\begin{aligned} C(A) &= \{y \in \mathbb{C}^m : y = Ax, \text{for som } x \in \mathbb{C}^n\} \\ &= \{Ax : x \in \mathbb{C}^n\} \subseteq \mathbb{C}^m \end{aligned}$$

إذا أعطينا متجه b ومصفوفة A، فيمكننا اختبار ما إذا كان $b \in C(A)$ بطريقة آلية وذلك بتكوين النظام الخطي $LS(A,b)$ واختزال مصفوفته الموسعة، $[A \mid b]$، واختبار هل النظام متوافق باستخدام نظرية ١-٣-٦ المثال التالي يوضح هذه العملية.

مثال ٣-٥-٤. نعتبر فضاء الأعمدة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & -4\\ -1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 6 & -8\end{bmatrix}$$

نبين أولا أن المتجه $v=\begin{bmatrix}18\\ -6\\ 12\end{bmatrix}$ يكون في فضاء أعمدة A، $v\in C(A)$. من نظرية ٣-٥-٣ ، نختبر توافق النظام $LS(A,v)$. نكون المصفوفة الموسعة ونختزلها صفيا

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & -4 & 18\\ -1 & 1 & -2 & 3 & -6\\ 2 & -4 & 6 & -8 & 12\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

حيث أن العمود الأخير ليس عمودا محوريا، من نظرية ١-٣-٦، هذا النظام يكون متوافق، ومن ثم، من نظرية ٣-٥-٣، $v\in C(A)$.

إذا كنا نرغب في تكوين v صراحة كتركيبة خطية من أعمدة A ، فإننا نوجد حل للنظام $LS(A,v)$ ونستخدم نظرية ٢-٢-٥ لبناء التركيبة الخطية المطلوبة. على سبيل المثال نضع المتغيرات الحرة $x_3=2$ و $x_4=1$. إذن الحل يأخذ $x_2=1$ و $x_1=6$. من نظرية ٢-٢-٥

$$v=\begin{bmatrix}18\\ -6\\ 12\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 6\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-4\\ 3\\ -8\end{bmatrix}$$

الآن نبين أن $w=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -3\end{bmatrix}$ لا يكون في فضاء أعمدة A، $w\notin C(A)$. نختبر توافق النظام $LS(A,w)$. نكون المصفوفة الموسعة $[A\,|\,w]$ ونختزلها صفيا

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & -4 & 2\\ -1 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -4 & 6 & -8 & -3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

حيث أن العمود الأخير عمود محوري فإن النظام يكون غير متوافق ومن ثم $w \notin C(A)$.

نظرية ٣-٥-٣ تكمل تجمع من ثلاث نظريات وتعريف والذي يستحق التعليق. عدة أسئلة حول الامتدادات، الاستقلال الخطي، فضاء الصفرية، فضاءات الأعمدة والأشياء المشابهة يمكن تحويلها إلى أسئلة حول أنظمة من المعادلات الخطية (متجانسة أو غير متجانسة) التي فهمناها جيدا من النتائج السابقة خاصة في الباب الأول. هذه النتائج السابقة تشتمل على نظريات تسمح لنا بسرعة تقرير هل النظام متوافق ونظريات تسمح لنا بوصف مجموعات الحل للأنظمة المتجانسة بصورة محكمة كامتداد لمجموعة مستقلة خطيا من متجهات الأعمدة.

فضاء الأعمدة الممتد بالأعمدة الأصلية

لذلك يكون لدينا الإجراءات المضمونة المؤتمنة لتحديد العضوية في $C(A)$. بينما يعمل هذا على ما يرام على أساس متجه في كل مرة، نود أن يكون لدينا وصفا أكثر فائدة للمجموعة $C(A)$ كاملة. المثال التالي يعتبر تقدمة لاثنين من النتائج الأساسية حول فضاء الأعمدة لمصفوفة.

مثال ٣-٥-٥. نعتبر المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

حسب التعريف فضاء أعمدة A يكون

$$C(A)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\2\\0\\2\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\4\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\4\\8\\9\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\7\\7\\6\\-2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

بينما يكون هذا وصفا موجزا لمجموعة لانهائية، قد يكون باستطاعتنا وصف الامتداد بأقل من سبعة متجهات، هذا هو مضمون نظرية ٢-٥-٤.

لذلك نأخذ هذه المتجهات السبعة ونجعلها أعمدة مصفوفة، وهي ببساطة المصفوفة الأصلية A، نختزلها صفيا

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الأعمدة المحورية هي $D = \{1,3,4,5\}$ ، لذلك يمكننا تكوين المجموعة

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

ونعلم أن $C(A) = \langle T \rangle$ و T تكون مجموعة مستقلة خطيا من مجموعة أعمدة A.

الآن نضفي الطابع الرسمي على المثال السابق والذي يجعل من اليسير تحديد مجموعة من المتجهات مستقلة خطيا والتي تمد فضاء الأعمدة لمصفوفة وتتألف من مجرد أعمدة A.

نظرية ٣-٥-٦. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ أعمدتها $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ و B هي المصفوفة المكافئة صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل لها r صف غير صفري. نفرض $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r\}$ مجموعة أدلة الأعمدة المحورية في B و $T = \{A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}, \ldots, A_{d_r}\}$. إذن

١- T تكون مجموعة مستقلة خطيا.

٢- $C(A)=\langle T\rangle$.

البرهان: تعريف ٣-٥-١ يصف فضاء الأعمدة كامتداد لمجموعة أعمدة A. نظرية ٢-٥-٤ تخبرنا أنه يمكننا اختزال مجموعة المتجهات المستخدمة في الامتداد. إذا طبقنا نظرية ٢-٥-٤ على $C(A)$، نجمع أعمدة A في مصفوفة ونختزلها صفيا إلى الشكل الصفي المدرج المختزل B الواردة في النظرية. في هذه الحالة، خلاصة نظرية ٢-٥-٤ تطبق على A، B و $C(A)$ تكون هي الخلاصات المطلوبة.

مثال ٣-٥-٧. لتطبيق نظرية ٣-٥-٦ نعتبر نظام المعادلات الوارد في مثال ٣-٥-٢ نبدأ بمصفوفة المعاملات A التي تم اختزالها صفيا إلى المصفوفة B

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & -7 \\ -3 & 4 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix} ، \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن الأعمدة الأول والثاني أعمدة محورية، $D=\{1,2\}$. لتكوين مجموعة تمد $C(A)$، مجرد نستخلص أعمدة A التي أدلتها في D، لذلك

$$C(A)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

في مثال ٣-٥-٢ حددنا أن المتجه

$$c=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ليس في فضاء أعمدة A. حاول كتابة c كتركيبة خطية من العمودين الأول والثاني من A. ماذا يحدث؟

أيضا في مثال ٣-٥-٢ حددنا أن المتجه

$$b=\begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

يكون في فضاء أعمدة A. حاول كتابة b كتركيبة خطية من العمودين الأول والثاني من A . ماذا يحدث؟ هل يوجد حل وحيد لهذا السؤال؟

فضاء الأعمدة لمصفوفة غير شاذة

الآن نخصص عملنا إلى المصفوفات المربعة وننظر في فضاء الأعمدة لمصفوفة المعاملات لنظامي المعادلات الخطية الواردين في مثال ١-٢-١٩ ومثال ٢-٢-٣.

مثال ٣-٥-٨. في مثال ١-٢-١٩ تعرضنا لنظام المعادلات

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

مصفوفة المعاملات لهذا النظام هي A والشكل الصفي المدرج المختزل لها هو B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

العمودين الأول والثاني عمودين محوريين، لذلك يمكننا كتابة

$$C(A) = \langle \{ A_1, A_2 \} \rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

في هذا المثال نود بيان أن $C(A) \neq \mathbb{C}^3$. لذلك نأخذ المتجه $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

إذن لا يوجد حل للنظام $LS(A,b)$، أو بتعبير مكافئ لا يمكن كتابة b كتركيبة خطية من المتجهين A_1 و A_2 (تأكد من ذلك). حيث أن $b \notin C(A)$، فضاء أعمدة A لا يمكن أن يكون هو كل $\mathbb{C}^3$.

مثال ٣-٥-٩. في مثال ٢-٢-٣ تعرضنا لنظام المعادلات

$$-7x_1 - 6x_2 - 12x_3 = -33$$
$$5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 24$$

$$x_1+4x_3=5$$

مصفوفة المعاملات لهذا النظام نسميها B مصفوفة غير شاذة (مثال ٢-٤-١٣). من نظرية ١-٥-١٣ نظام المعادلات $LS(B,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار لمتجه الثوابت b. نظرية ٣-٥-٣ تقول أن $b \in C(B)$ لكل $b \in \mathbb{C}^3$. أي أنه لا توجد طريقة لبناء نظام معادلات غير متوافق مصفوفة المعاملات له هي B.

مثال ٣-٥-٨ ومثال ٣-٥-٩ يحثان على النظرية التالية التي تقول أن المصفوفات غير الشاذة يكون لها فضاء أعمدة أكبر ما يمكن.

نظرية ٣-٥-١٠. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن A تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كان $C(A)=\mathbb{C}^n$.

البرهان: نفرض A مصفوفة غير شاذة. مطلوب إثبات أن $C(A)=\mathbb{C}^n$. من تعريف ٣-٥-١ $C(A)\subseteq \mathbb{C}^n$. لبيان أن $\mathbb{C}^n \subseteq C(A)$ نختار $b\in \mathbb{C}^n$. من نظرية ١-٥-١٣ نعلم أن النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد ومن ثم يكون متوافق. ومن ثم، من نظرية ٣-٥-٣، $b\in C(A)$. لذلك $C(A)=\mathbb{C}^n$.

الاتجاه الآخر، إذا كان e_i هو العمود رقم i في مصفوفة الوحدة من الحجم n ومن الفرض $C(A)=\mathbb{C}^n$، لذلك $e_i \in C(A)$ لكل $1\le i\le n$. من نظرية ٣-٥-٣، النظام $LS(A,e_i)$ يكون متوافق لكل $1\le i\le n$. نفرض b_i ترمز إلى أحد الحلول الخاصة للنظام $LS(A,e_i)$، $1\le i\le n$.

نعرف المصفوف المربعة من الحجم n $B=[b_1\,|\,b_2\,|\,b_3\,|\ldots|\,b_n]$، إذن

$$\begin{aligned}AB&=A[b_1\,|\,b_2\,|\,b_3\,|\ldots|\,b_n]\\&=[A\,b_1\,|\,A\,b_2\,|\,A\,b_3\,|\ldots|\,A\,b_n]\\&=[e_1\,|\,e_2\,|\,e_3\,|\ldots|\,e_n]\\&=I_n\end{aligned}$$

لذلك المصفوفة B تكون هي المعكوس الأيمن للمصفوفة A من نظرية ١-٥-٧، I_n مصفوفة غير شاذة، ومن نظرية ٣-٤-١، A و B كلاهما تكون مصفوفة غير شاذة، وعلى وجه الخصوص A تكون غير شاذة.

بهذا التكافؤ يمكن تحديث نظرية ٣-٤-٤ لنحصل على النظرية التالية:

نظرية ٣-٥-١١. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.
٢- الشكل الصفي المدرج المختزل هو مصفوفة الوحدة.
٣- فضاء الصفرية للمصفوفة A يحتوي المتجه الصفري فقط، أي أن $N(A)=\{0\}$.
٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لأي اختيار للمتجه b.
٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.
٦- A تكون منعكسة.
٧- فضاء الأعمدة للمصفوفة A يساوي $\mathbb{C}^n$، $C(A)=\mathbb{C}^n$.

فضاء صفوف مصفوفة

صفوف مصفوفة يمكن النظر إليها كمتجهات، حيث أنها مجرد قائمة من الأعداد تم ترتيبها أفقيا. لذلك سوف ندور المصفوفة، لتحويل الصفوف إلى أعمدة، لذلك يمكننا معالجة الصفوف كمتجهات أعمدة. كنتيجة يمكننا عمل علاقات بين عمليات الصفوف وحلول أنظمة المعادلات.

تعريف ٣-٥-١٢. نفرض A مصفوفة من الحجم $m\times n$. **فضاء الصفوف** للمصفوفة A، نرمز له بالرمز $R(A)$ ، هو فضاء الأعمدة للمصفوفة A^t ، أي أن $R(A)=C(A^t)$.

بصورة مبسطة، فضاء الصفوف لمصفوفة هو مجموعة كل التراكيب الخطية لصفوف المصفوفة. ومع ذلك، نكتب الصفوف على صورة متجهات أعمدة، ومن ثم يكون من الضروري استخدام المدور لجعل الصفوف أعمدة. إضافة لذلك، مع تعريف فضاء الصفوف بدلالة

فضاء الأعمدة، كل النتائج السابقة في هذا الفصل يمكن أن تطبق على فضاءات الصفوف.

لاحظ أنه إذا كانت A مصفوفة مستطيلة من الحجم $m \times n$ ، فإن $C(A) \in \mathbb{C}^m$ بينما $R(A) \in \mathbb{C}^n$ والمجموعتان غير قابلتان للمقارنة. على الرغم من أنه في حالة كون A مربعة من الحجم n ، كلا من $C(A)$ و $R(A)$ تكون مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^n$ فإن المجموعتان لا تكونا متساويتان.

مثال ٣-٥-١٣. مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات في مثال ١-٣-٣ هي

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 7 & -9 \\ 2 & 8 & -1 & 3 & 9 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & 2 & 4 & 8 & -31 & 37 \end{bmatrix}$$

لبناء فضاء الصفوف نكون مدور المصفوفة

$$I^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 9 & -4 & 8 \\ 7 & -13 & 12 & -31 \\ -9 & 7 & -8 & 37 \end{bmatrix}$$

أعمدة هذه المصفوفة تستخدم في امتداد لبناء فضاء الصفوف

$$R(I) = C(I^t) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \\ 3 \\ 9 \\ -13 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ -31 \\ 37 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

يمكننا استخدام نظرية ٣-٥-٦ لإعطاء وصف أفضل. أولا نختزل I^t صفيا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{31}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث أن الأعمدة المحورية لها الأدلة $D = \{1,2,3\}$ ، فضاء أعمدة I^t يمكن أن يمتد بالأعمدة الثلاث الأولي من I^t.

$$R(I) = C(I^t) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \\ 3 \\ 9 \\ -13 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \\ 12 \\ -8 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

عمليات الصف على مصفوفة ليس لها أي تأثير على التراكيب الخطية التي يمكن أن تشكل من صفوف المصفوفة. هذا يمكن صياغته في النظرية التالية.

نظريـة ٣-٥-١٤. نفرض A و B مصفوفتان متكافئتان صفيا. إذن $R(A) = R(B)$.

البرهان: مصفوفتان تكونا متكافئان صفيا إذا كان يمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بمتتابعة من عمليات الصف. سوف نبرهن النظرية لمصفوفتين تختلفان لعملية صف واحدة، ويمكن إعادة تطبيق هذا للحصول على كامل النظرية. فضاءات الصفوف للمصفوفتين A و B تمتد بأعمدة المدور لهما. لكل عملية صف يمكن إجراؤها على مصفوفة يمكننا تعريف عملية مشابهة على الأعمدة. ربما نسميها عمليات عمود.

بدلا عن ذلك سوف نستمر نسميها عمليات صفوف، ولكن سوف نطبقها على أعمدة مدور المصفوفة.

نرمز لأعمدة A^t و B^t بالرموز A_i و B_i ، $1 \le i \le m$. عملية الصف التي تبدل صفين سوف تبدل عمودين في المصفوفات المدورة. هذا لن يكون له أي تأثير على التراكيب الخطية الممكنة المكونة من الأعمدة.

نفرض أن B^t تكونت من A^t بضرب العمود A_t في $\alpha \neq 0$. أي أن $B_t = \alpha A_t$ و $B_i = A_i$ لكل $i \neq t$. المطلوب إثبات أن $C(A^t) = C(B^t)$. سوف نأخذ عنصر عام من إحداهما ونبرهن على أنه موجود في الأخرى.

$$\begin{aligned}
&\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 + \ldots + \beta_t B_t + \ldots + \beta_m B_m \\
&\quad = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 + \ldots + \beta_t(\alpha A_t) + \ldots + \beta_m A_m \\
&\quad = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 + \ldots + (\alpha\beta_t) A_t + \ldots + \beta_m A_m
\end{aligned}$$

هذا يعني أن $C(B^t) \subseteq C(A^t)$. بالمثل

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 + \ldots + \gamma_t A_t + \ldots + \gamma_m A_m \\
&\quad = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 + \ldots + \left(\frac{\gamma_t}{\alpha}\alpha\right) A_t + \ldots + \gamma_m A_m \\
&\quad = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 + \ldots + \frac{\gamma_t}{\alpha}(\alpha A_t) + \ldots + \gamma_m A_m \\
&\quad = \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 + \ldots + \frac{\gamma_t}{\alpha} B_t + \ldots + \gamma_m B_m
\end{aligned}$$

لذلك $C(A^t) \subseteq C(B^t)$. ومن ثم

$R(A) = C(A^t) = C(B^t) = R(B)$ عندما تجرى عملية صف واحدة من النوع الثاني.

الآن نفرض أن B^t تم تكوينها من A^t باستبدال A_t بـ $\alpha A_s + A_t$ لبعض $\alpha \in \mathbb{C}$ و $s \neq t$. أي أن $B_t = \alpha A_s + A_t$، و $B_i = A_i$ عندما $i \neq t$.

$$\begin{aligned}
&\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \ldots + \beta_s B_s + \ldots + \beta_t B_t + \ldots + \beta_m B_m \\
&= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_s A_s + \ldots + \beta_t(\alpha A_s + A_t) + \ldots + \beta_m A_m \\
&= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_s A_s + \ldots + (\beta_t \alpha) A_s + \beta_t A_t + \ldots + \beta_m A_m \\
&= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + \beta_s A_s + (\beta_t \alpha) A_s + \ldots + \beta_t A_t + \ldots + \beta_m A_m \\
&= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \ldots + (\beta_s + \beta_t \alpha) A_s + \ldots + \beta_t A_t + \ldots + \beta_m A_m
\end{aligned}$$

لذلك $C(B^t) \subseteq C(A^t)$. بالمثل

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \ldots + \gamma_s A_s + \ldots + \gamma_t A_t + \ldots + \gamma_m A_m \\
&= \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \ldots + \gamma_s A_s + \ldots + (-\alpha\gamma_t A_s + \alpha\gamma_t A_s) \\
&\qquad + \gamma_t A_t + \ldots + \gamma_m A_m \\
&= \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \ldots + (-\alpha\gamma_t + \gamma_s) A_s + \ldots + \gamma_t(\alpha A_s + A_t) \\
&\qquad + \ldots + \gamma_m A_m \\
&= \gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \ldots + (-\alpha\gamma_t + \gamma_s) B_s + \ldots + \gamma_t B_t + \ldots + \gamma_m B_m
\end{aligned}$$

هذا يعني أن $C(A^t) \subseteq C(B^t)$. ومن ثم $R(A) = C(A^t) = C(B^t) = R(B)$ عندما تجرى عملية صف واحدة من النوع الثالث.

لذلك كل عملية صف تحافظ على فضاء الصفوف للمصفوفة ومن ثم فضاءات الصفوف للمصفوفات المتكافئة صفيا تكون مجموعات متساوية.

مثال ٣-٥-١٥. في مثال ١-٢-١٠ رأينا أن المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

متكافئتان صفيا وذلك بإجراء متتابعة من عمليات الصفوف لتحويل A إلى B. بتطبيق نظرية ٣-٥-١٤ يمكننا القول أن

$$R(A)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\2\\-2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\6\end{bmatrix}\right\}\right\rangle=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\4\end{bmatrix}\right\}\right\rangle=R(B)$$

نظرية ٣-٥-١٦. نفرض A مصفوفة و B مصفوفة مكافئة صفيا في الشكل الصفي المدرج المختزل. نفرض S هي مجموعة الأعمدة غير الصفرية في B^t. إذن

١- $R(A)=\langle S\rangle$.

٢- S مجموعة مستقلة خطيا.

البرهان: من نظرية ٣-٥-١٤ نعلم أن $R(A)=R(B)$. إذا كانت B لها أية صفوف صفرية، فإن هذه تكون هي أعمدة B^t التي تكون متجهات صفرية. يمكن وبكل أمان استبعاد المتجهات الصفرية من إنشاء الامتداد، حيث يمكن إعادة تكوينها من المتجهات غير الصفرية بتركيبة خطية جميع معاملاتها القياسية أصفار. لذلك $R(A)=\langle S\rangle$.

نفرض أن B بها r صف غير صفري ونفرض $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_r\}$ ترمز إلى أدلة الأعمدة المحورية في B. نرمز لمتجهات أعمدة B^t ، المتجهات في S، بالصورة $B_1,B_2,B_3,\ldots,B_r$.

لبيان أن S مستقلة خطيا، نبدأ بعلاقة ارتباط خطي

$$\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3+\ldots+\alpha_rB_r=0$$

الآن نعتبر هذه المعادلة الاتجاهية عند الموضع d_i. حيث أن B في الشكل الصفي المدرج المختزل، عناصر العمود d_i من B كلها أصفار، ماعدا العنصر القيادي 1 في الصف i. لذلك، في B^t ، الصف d_i يكون كله أصفار ماعدا 1 في العمود i. لذلك لكل $1\le i\le r$ ،

$$\begin{aligned}0&=[0]_{d_i}\\&=[\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3+\ldots+\alpha_rB_r]_{d_i}\\&=[\alpha_1B_1]_{d_i}+[\alpha_2B_2]_{d_i}+[\alpha_3B_3]_{d_i}+\ldots+[\alpha_rB_r]_{d_i}\\&=\alpha_1[B_1]_{d_i}+\alpha_2[B_2]_{d_i}+\alpha_3[B_3]_{d_i}+\ldots+\alpha_r[B_r]_{d_i}\end{aligned}$$

$$= \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \alpha_3(0) + \ldots + \alpha_i(1) + \ldots + \alpha_r(0)$$
$$= \alpha_i$$

من ذلك نستنتج أن $\alpha_i = 0$ لكل $1 \le i \le r$ وهو ما يبرهن الاستقلال الخطي للمجموعة S.

مثال ٣-٥-١٧. نعتبر مجموعة المتجهات الموصوفة بالامتداد

$$X = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

نفرض A هي المصفوفة التي صفوفها متجهات X

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

نختزل A صفيا لنحصل على الشكل الصفي المدرج المختزل

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نظرية ٣-٥-١٦ تقول أنه يمكننا استبعاد الأعمدة الصفرية من B^t ونكتب

$$X = R(A) = R(B) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

هذه المتجهات الثلاثة تعطي تحسين أكثر لوصف X. يوجد عدد أقل من المتجهات، ونمط 0s و 1s في الموضع الثلاثة الأول من المتجهات تجعل من الأيسر تحديد العضوية في X.

نظرية ٣-٥-١٨. نفرض A مصفوفة. إذن $C(A) = R(A^t)$.

البرهان:

$$C(A) = C\left(\left(A^t\right)^t\right)$$
$$= R(A^t)$$

لذلك لإيجاد تعبير آخر لفضاء أعمدة مصفوفة، نكون مقلوب المصفوفة، نختزلها صفيا، نستبعد الصفوف الصفرية، ونحول الصفوف غير الصفرية إلى متجهات أعمدة لنحصل على مجموعة محسنة لتكوين الامتداد.

مثال ٣-٥-١٩. لتكوين فراغ الأعمدة لمصفوفة معاملات نظام المعادلات المعطى في مثال ١-٣-٣ نتبع ما يلي. المصفوفة هي

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 7 & -9 \\ 2 & 8 & -1 & 3 & 9 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & 2 & 4 & 8 & -31 & 37 \end{bmatrix}$$

مدور المصفوفة هو

$$I^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 9 & -4 & 8 \\ 7 & -13 & 12 & -31 \\ -9 & 7 & -8 & 37 \end{bmatrix}$$

باختزالها صفيا نحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{31}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الآن باستخدام نظرية ٣-٥-١٦ ونظرية ٣-٥-١٨

$$C(I)=R(I^t)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-\frac{31}{7}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\frac{12}{7}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\frac{13}{7}\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

هذا وصف لطيف لفضاء الأعمدة. عدد أقل من الأعمدة عن السبعة المحتواة في التعريف، ونمط 0s و 1s في المواضع الثلاث الأولى يمكن استخدامها لميزتها. على سبيل المثال نظام المعادلات المذكور في بداية هذا المثال مقدم باعتباره نظام متوافق مع متجه الثوابت

$$b=\begin{bmatrix}3\\9\\1\\4\end{bmatrix}$$

حيث أن $LS(I,b)$ متوافق، نظرية ٣-٥-٣ تخبرنا بأن $b\in C(I)$. ولكن يمكننا رؤية ذلك بسرعة عن طريق الحسابات

$$b=\begin{bmatrix}3\\9\\1\\4\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-\frac{31}{7}\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\frac{12}{7}\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\frac{13}{7}\end{bmatrix}$$

والذي حقا ينطوي فقط على جعل العنصر الرابع في المتجهات كتركيبة خطية معاملاتها القياسية هي العناصر الثلاثة الأولى من b.

تمارين ٣-٥

١- أكتب فضاء الأعمدة للمصفوفة التالية كامتداد لمجموعة من ثلاثة متجهات مع توضيح سبب اختيار الطريق.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٢- نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n غير شاذة. ماذا يمكن أن تقول عن فضاء أعمدتها؟

٣- هل المتجه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ يكون في فضاء صفوف المصفوفة التالية؟ لماذا؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

٤- لكل من المصفوفات التالية، أوجد مجموعة متجهات مستقلة خطيا X بحيث تكون $\langle X \rangle$ مساوية لفضاء أعمدة المصفوفة، ومجموعة متجهات مستقلة خطيا Y بحيث تكون $\langle Y \rangle$ مساوية لفضاء صفوف المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

من إجابتك على هذه المصفوفات الثلاث، هل يمكن وضع مقترح حول المجموعتين X و Y؟

٥- للمصفوفة A التالية أوجد مجموعة متجهات T تحقق الشروط التالية: (أ) امتداد T. هو فضاء أعمدة A، أي أن $\langle T \rangle = C(A)$ ، (ب) T تكون مستقلة خطيا و (ج) عناصر T هي أعمدة A.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 5 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -7 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 8 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

٦- أوجد مجموعة متجهات مستقلة خطيا S بحيث يكون امتداد S، $\langle S\rangle$، هو فضاء صفوف المصفوفة B.

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

٧- للمصفوفة A من الحجم 3×4 والمتجه $y\in\mathbb{C}^4$، حدد ما إذا كان y في فضاء صفوف A. بتعبير آخر هل $y\in R(A)$ ؟

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 7 & -1\\ 7 & -3 & 0 & -3\\ 8 & 0 & 7 & 6\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\\ -2\end{bmatrix}$$

٨- للمصفوفة A التالية، أوجد مجموعتين مستقلتين خطيا مختلفتين امتداد كل منهما يساوي فضاء أعمدة A، $C(A)$ ، بحيث

(أ) العناصر هي أعمدة A.

(ب) المجموعة نحصل عليها بعملية مختلفة جوهريا عن العملية المتبعة في (أ).

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ -3 & -4 & 7 & 13\end{bmatrix}$$

٩- للمصفوفة A التالية أوجد متجهين b و c بحيث يكون النظام $LS(A,b)$ متوافق والنظام $LS(A,c)$ غير متوافق.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

١٠- نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B مصفوفة من الحجم $n \times p$. برهن أن فضاء أعمدة AB يكون مجموعة جزئية من فضاء أعمدة A، أي أن $C(AB) \subseteq C(A)$. أعط مثال يبين أن العكس غير صحيح.

١١- نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B مصفوفة مربعة من الحجم n غير شاذة. برهن أن فضاء أعمدة A يساوي فضاء أعمدة AB.

١٢- نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و B مصفوفة من الحجم $n \times m$ بحيث تكون AB مصفوفة غير شاذة. برهن أن

(أ) $N(B) = \{0\}$. (ب) $C(B) \cap N(A) = \{0\}$.

٣-٦ المجموعات الجزئية الأربع Four Subsets

توجد أربع مجموعات جزئية تصاحب المصفوفة. قابلنا منها ثلاثة بالفعل: فضاء الصفرية، فضاء الأعمدة وفضاء الصفوف. في هذا الفصل نقدم المجموعة الجزئية الرابعة، فضاء الصفرية الأيسر. الهدف من هذا الفصل هو وصف عملية تسمح لنا بإيجاد المجموعة المستقلة خطيا التي تولد كل من هذه المجموعات الجزئية الأربع من متجهات الأعمدة. على طول الطريق، سوف نعمل ربط مع معكوس المصفوفة، لذلك نظرية ٣-٦-٦ سوف تربط معظم هذا الفصل.

فضاء الصفرية الأيسر

تعريف ٣-٦-١. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$. **فضاء الصفرية الأيسر** left null space يعرف بالصورة $L(A)=N(A^t)\subseteq\mathbb{C}^m$.

فضاء الصفرية الأيسر لن يحتل مكانة بارزة في المستقبل، ولكن يمكن أن نوضح اسمه ونربطه مع عمليات الصف.

نفرض أن $y\in L(A)$. من تعريف ٣-٦-١، $A^t y=0$ ، لذلك يمكننا كتابة

$$\begin{aligned}0^t &= (A^t y)^t\\ &= y^t (A^t)^t\\ &= y^t A\end{aligned}$$

حاصل الضرب $y^t A$ يمكن النظر إليه على أن مركبات y تؤثر ككميات قياسية في التركيبة الخطية من صفوف A. والناتج يكون متجه صف، 0_t والذي كله أصفار. عندما نطبق متتابعة من عمليات الصف على المصفوفة، كل صف في المصفوفة الناتجة هو تركيبة خطية ما من الصفوف. هذه الملاحظة تخبرنا أن المتجهات في فضاء الصفرية الأيسر هي الكميات القياسية المسجلة في متتابعة عمليات الصف التي تنتج في صف من الأصفار في الشكل الصفي المختزل للمصفوفة. سوف نرى هذه الفكرة بوضوح في برهان النظرية.

مثال ٣-٦-٢. سوف نوجد فضاء الصفرية الأيسر للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 9 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

ندور A ونختزلها صفيا

$$A^t=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 9\\ -3 & 1 & 5 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

بتطبيق تعريف ٣-٦-١ ومن نظرية ٢-٤-١٧ يكون

$$L(A)=N(A^t)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

إذا اختزلنا A صفيا فسوف نكتشف صف صفري في الشكل الصفي المدرج المختزل. هذا الصف تكون بمتتابعة من عمليات الصف، التي في مجموعها تتحول إلى تركيبة خطية بكميات قياسية $a_1=-2$، $a_2=3$، $a_3=-1$ و $a_4=1$ على صفوف A والتي تنتج في المتجه الصفري. لذلك المركبات في المتجه الذي يصف فضاء الصفرية الأيسر لـ A تزودنا بعلاقة ارتباط خطي على صفوف A.

حساب فضاءات الأعمدة

لدينا ثلاثة طرق لبناء فضاء الأعمدة لمصفوفة. أولا، يمكننا استخدام مجرد التعريف، تعريف ٣-٥-١، ونعبر عن فضاء الأعمدة كامتداد لأعمدة المصفوفة. النهج الثاني يعطينا فضاء الأعمدة كتوليد من بعض أعمدة المصفوفة، بالإضافة أن هذه المجموعة تكون مستقلة خطيا. أخيرا يمكننا تدوير المصفوفة، اختزال المدور صفيا، استبعاد الصفوف الصفرية، وكتابة الصفوف الباقية كمتجهات أعمدة. نظرية ٣-٥-١٨ ونظرية ٣-٥-١٦ تخبرنا أن المتجهات الناتجة تكون مستقلة خطيا وامتدادها يكون فضاء الأعمدة للمصفوفة الأصلية.

الآن سوف نوضح طريقة رابعة عن طريق مثال معقد نوعا ما. ادرس هذا المثال بعناية، ولكن لندرك أن الغرض الرئيسي منه هو التحفيز لنظرية تبسط أكثر من هذا التعقيد.

مثال ٣-٦-٣. دعنا نوجد فضاء الأعمدة للمصفوفة A بطريقة جديدة

$$A=\begin{bmatrix}10 & 0 & 3 & 8 & 7\\ -16 & -1 & -4 & -10 & -13\\ -6 & 1 & -3 & -6 & -6\\ 0 & 2 & -2 & -3 & -2\\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

من نظرية ٣-٥-٣ نعلم أن متجه العمود b يكون في فضاء أعمدة A إذا وفقط إذا كان النظام الخطي $LS(A,b)$ متوافق. لذلك دعنا نحاول حل هذا النظام بتعميم تام، باستخدام متجه متغيرات لمتجه الثوابت. بتعبير آخر، ما هو متجه الثوابت b الذي يجعل النظام متوافق؟ نبدأ بتكوين المصفوفة الموسعة $[A\,|\,b]$ مع الصورة العامة لـ b

$$[A\,|\,b]=\begin{bmatrix}10 & 0 & 3 & 8 & 7 & b_1\\ -16 & -1 & -4 & -10 & -13 & b_2\\ -6 & 1 & -3 & -6 & -6 & b_3\\ 0 & 2 & -2 & -3 & -2 & b_4\\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & b_5\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & b_6\end{bmatrix}$$

لتحديد الحلول نحول المصفوفة إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. على الرغم من وجود متغيرات في العمود الأخير، ليس هناك ما يمنعنا من القيام بذلك.

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2 & b_3-b_4+2b_5-b_6\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2b_3+3b_4-3b_5+3b_6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & b_3+b_4+3b_5+3b_6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2b_3+b_4-4b_5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+3b_3-b_4+3b_5+b_6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2-2b_3+b_4+b_5-b_6\end{bmatrix}$$

هدفنا هو تحديد المتجهات b التي تجعل النظام $LS(A,b)$ متوافق. من نظرية ١-٣-٦ نعلم أن الأنظمة المتوافقة هي تلك التي بدون أعمدة محورية في العمود الأخير. هل التعبيرات في العمود الأخير في الصفين الخامس والسادس تساوي أصفار، أم أنها قيادية 1s؟ الإجابة هي ربما. إنها تعتمد على b. مع قيم غير صفرية لأي من هذه التعبيرات، سوف نعاير الصف لإنتاج القيادي 1. لذلك نحصل على نظام متجانس، و b تكون في فضاء الأعمدة، إذا وفقط إذا كان التعبيران كلاهما صفر في آن واحد. بتعبير آخر عناصر فضاء الأعمدة لـ A هي تحديدا تلك المتجهات b التي تحقق

$$b_1 + 3b_3 - b_4 + 3b_5 + b_6 = 0$$
$$b_2 - 2b_3 + b_4 + b_5 - b_6 = 0$$

تبدو مريبة كأنها نظام متجانس من معادلتين في ستة متغيرات. نكون مصفوفة المعاملات ونختزلها صفيا(لاحظ أن المصفوفة بالفعل هي في الشكل الصفي المدرج المختزل).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

لذلك $C(A) = N(L)$ ويمكننا تطبيق نظرية ٢-٤-١٧ للحصول على مجموعة مستقلة خطيا لاستخدامها في تكوين الامتداد

$$C(A) = N(L) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

قد ترغب في إقناع نفسك أن هذه المتجهات الأربع حقا تكون عناصر في فضاء الأعمدة. هل هذه تكون أنظمة متجانسة مع A كمصفوفة معاملات؟ هل يمكنك التعرف على متجهات الثوابت في وصفك لمجموعات الحل هذه؟

حسنا، هذا مرح كثير، دعنا نفعل ذلك مرة أخرى. ولكن أبسط هذه المرة. بدلا عن اختزال العمود b صفيا بكل متغيراته، دعنا نكتب $b = I_6 b$ ونختزل I_6 وعندما ننتهي من الاختزال الصفي، نحسب ضرب مصفوفة في متجه. ومن ثم بدلا عن أن نوسع A بالمتجه b نوسع A بالمصفوفة I_6

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 & 8 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16 & -1 & -4 & -10 & -13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -3 & -6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نريد أن نختزل الجزء الأيسر من هذه المصفوفة، ولكن سوف نطبق نفس عمليات على الجزء الأيمن كذلك. بمجرد الحصول على الشكل الصفي المدرج المختزل للجزء الأيسر سوف نستمر في وضع القيادية 1s في الصفين الأخيرين فضلا عن جعل أعمدة محورية التي تحتوي هذه القيادية 1s الإضافية.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الآن مع الأعمدة الستة الأخيرة من هذه المصفوفة، والتي سوف نضربها في b

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

لذلك

$$Jb=\begin{bmatrix}0&0&1&-1&2&-1\\0&0&-2&3&-3&3\\0&0&1&1&3&3\\0&0&-2&1&-4&0\\1&0&3&-1&3&1\\0&1&-2&1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_3-b_4+2b_5-b_6\\-2b_3+3b_4-3b_5+3b_6\\b_3+b_4+3b_5+3b_6\\-2b_3+b_4-4b_5\\b_1+3b_3-b_4+3b_5+b_6\\b_2-2b_3+b_4+b_5-b_6\end{bmatrix}$$

لذلك بتطبيق نفس عمليات الصف التي اختزلت A إلى مصفوفة الوحدة يمكننا الوصول لنتيجة اختزال عمود الرموز. حيث أن الشكل الصفي المدرج المختزل لـ A يحتوي صفين أصفار، لنظام متوافق نتطلب أن

$$b_1+3b_3-b_4+3b_5+b_6=0$$

$$b_2-2b_3+b_4+b_5-b_6=0$$

الشكل الصفي المدرج الموسع

المصفوفة النهائية التي اختزلناها صفيا في مثال ٣-٦-٣ سوف تبدو مألوفة لنا في معظم الحالات للعملية التي استخدمناها لحساب معكوس مصفوفة غير شاذة، نظرية ٣-٣-٧.الآن سوف نعمم هذه العملية للمصفوفات التي ليست بالضرورة غير شاذة، أو حتى مربعة.

تعريف ٣-٦-٤. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$. نوسع A من جهة اليمين بإضافة مصفوفة الوحدة من الحجم $m\times m$ لتكوين مصفوفة M من الحجم $m\times(n+m)$. نستخدم عمليات الصف لتحويل M إلى الشكل الصفي المدرج المختزل ونسمي الناتج N. N تسمى **الشكل الصفي المدرج المختزل الموسع** للمصفوفة A extended reduced row-echelon form وسوف نوحد المعيار لأسماء خمسة مصفوفات جزئية (B، C ، J، K، L) من N.

نفرض أن B ترمز إلى المصفوفة من الحجم $m \times n$ المكونة من n عمود الأولى من N و J ترمز إلى المصفوفة من الحجم $m \times m$ المكونة من m عمود الأخيرة من N. نفرض أن B تحتوي r صف غير صفري. تجزيء آخر لـ N، بفرض أن C ترمز إلى المصفوفة من الحجم $r \times n$ المكونة من الصفوف غير الصفرية في B. نفرض أن K هي المصفوفة من الحجم $r \times m$ المكونة من r صف الأولى من J، بينما L هي المصفوفة من الحجم $(m-r)\times m$ المكونة من $m-r$ صف السفلى من J. بيانيا

$$M = [A \mid I_m] \to N = [B \mid J] = \begin{bmatrix} C & K \\ O & L \end{bmatrix}$$

مثال ٣-٦-٥. سوف نوضح تعريف ٣-٦-٤ بالمصفوفة A،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 7 & 1 & 6 \\ -6 & 2 & -4 & -18 & -3 & -26 \\ 4 & -1 & 4 & 10 & 2 & 17 \\ 3 & -1 & 2 & 9 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

بالتوسيع بمصفوفة الوحدة من الحجم 4×4،

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 7 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & -18 & -3 & -26 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 10 & 2 & 17 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 9 & 1 & 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باختزالها صفيا نحصل على،

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم نحصل على

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&2&1&0&3\\0&1&4&-6&0&-1\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&2&3&0\\0&-1&0&-2\\1&2&2&1\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&2&3&0\\0&-1&0&-2\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&2&2&1\end{bmatrix}$$

يمكن التحقق من الخواص لهذا المثال في النظرية التالية.

نظرية ٣-٦-٦. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و N هي المصفوفة الموسعة في الشكل الصفي المدرج. إذن

١- J تكون غير شاذة.

٢- $B=JA$.

٣- إذا كان $x\in\mathbb{C}^n$ و $y\in\mathbb{C}^m$ ، فإن $Ax=y$ إذا وفقط إذا كان $Bx=Jy$.

٤- C تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل ، ليس لها صفوف صفرية ولها r عمود محوري.

٥- L تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل ، ليس لها صفوف صفرية ولها $m-r$ عمود محوري.

البرهان: J ناتجة من تطبيق متتابعة من عمليات الصف على I_m، ومن ثم J و I_m متكافئتان صفيا. $LS(I_m,0)$ له فقط الحل الصفري، حيث أن I_m غير شاذة. لذلك، $LS(J,0)$ يكون له فقط الحل الصفري، ومن ثم J تكون غير شاذة.

لإثبات الجزء الثاني من هذه النظرية، أولا لابد أن تقتنع أن عمليات الصف وضرب مصفوفة في متجه تكون عمليات متصاحبة. نقصد بذلك ما يلي. نفرض أن F مصفوفة من الحجم $m\times n$ تكافئ صفيا

المصفوفة G. بتطبيق على متجه العمود Fw نفس المتتابعة من عمليات الصف التي تحول F إلى G. إذن الناتج يكون Gw. لذلك يمكننا إجراء عمليات صف على مصفوفة، ثم نجري عملية ضرب مصفوفة في متجه، أو نجري عملية ضرب مصفوفة في متجه ثم نجري عمليات الصف على متجه العمود، وفي الحالتين سوف يكون الناتج هو نفس الشيء. حيث أن ضرب المصفوفات يعرف بتجمع من ضرب مصفوفة في متجه، ضرب المصفوفتين FH سوف يصير GH إذا طبقنا نفس المتتابعة من عمليات الصف على FH التي تحول F إلى G. الآن نطبق هذه الملاحظة على A.

نكتب $AI_n = I_m A$ ونطبق عمليات الصف التي تحول M إلى N. A تتحول إلى B، بينما I_m تتحول إلى J، لذلك يكون $BI_n = JA$. بتبسيط الطرف الأيسر نحصل على الخلاصة المطلوبة.

بالنسبة للجزء الثالث، الآن نبرهن التكافؤين

$$Bx = Jy \quad \Leftrightarrow \quad JAx = Jy \quad \Leftrightarrow \quad Ax = y$$

الاتجاه المباشر للتكافؤ الأول يتم بضرب طرفي المعادلة المصفوفية في J، بينما الاتجاه العكسي يتم بالضرب في معكوس J (والذي نعلم وجوده لأن J غير شاذة). التكافؤ الثاني نحصل عليه ببساطة بالتعويض الذي هو $JA = B$.

الصفوف r الأولى من N تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل، حيث أن أي تجمع متجاور من الصفوف مأخوذة من مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل سوف تشكل مصفوفة تكون أيضا في الشكل الصفي المدرج المختزل. حيث أن المصفوفة C تكونت بحذف العناصر n الأخيرة من كل من هذه الصفوف، الباقي يظل في الشكل الصفي المدرج المختزل. من تكوينها، C ليس بها صفوف صفرية. C لها r صف كل صف يحتوي قيادي 1، لذلك يوجد r عمود محوري في C.

الصفوف $m-r$ الأخيرة من N تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل، حيث أن أي تجمع متجاور من الصفوف مأخوذة من مصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل سوف تشكل مصفوفة تكون أيضا في الشكل الصفي المدرج المختزل. حيث أن المصفوفة L تكونت بحذف

العناصر n الأولى من كل من هذه الصفوف، وهذه العناصر كلها أصفار (هذه تكون الصفوف الصفرية في B)، الباقي يظل في الشكل الصفي المدرج المختزل. L تكون هي الصفوف $m-r$ الأخيرة من المصفوفة غير الشاذة J، لذلك أي من هذه الصفوف لا يمكن أن يكون كله أصفار، وإلا J لن تكون متكافئة صفيا مع مصفوفة الوحدة. L لها $m-r$ صف وكل صف يحتوي قيادي 1، لذلك يوجد $m-r$ عمود محوري في L.

لاحظ أنه في الحالة حيث A مصفوفة غير شاذة نعلم أن الشكل الصفي المدرج المختزل لـ A هو مصفوفة الوحدة، لذلك $B=I_n$. إذن الجزء الثاني أعلى يقول أن $JA=B=I_n$، لذلك J تكون هي معكوس A. لذلك هذه النظرية تعمم نظرية ٣-٤-٢، رغم أن النتيجة هي معكوس يساري لـ A بدلا عن معكوس يميني. الجزء الثالث من نظرية ٣-٦-٦ هو الأعظم تأثيرا. إنه يقول أن x يكون حلاً للنظام الخطي $LS(A,y)$ إذا وفقط إذا كان x حلا للنظام الخطي $LS(B,Jy)$. أو بشكل مختلف يقول أنه إذا اختزلنا صفيا المصفوفة الموسعة $[A\,|\,y]$ سوف نحصل على المصفوفة الموسعة $[B\,|\,Jy]$. المصفوفة J تسلك التأثير التراكمي لعمليات الصف التي تحول A إلى الشكل الصفي المدرج المختزل. عندما تختزل A صفيا إلى مصفوفة بها صفوف صفرية، فإن Jy سوف يكون لها أيضا مركبات صفرية في نفس الصفوف إذا كان النظام متوافق.

المجموعات الجزئية الأربع

مع كل هذا التمهيد الذي سبق تقديمه يمكننا صياغة النتيجة الرئيسية في هذا الفصل. في جوهرها، هذه النتيجة تسمح لنا بالقول أنه يمكننا إيجاد مجموعة مستقلة خطيا لاستخدامها في تكوين توليد لكل المجموعات الجزئية الأربع (فضاء الصفرية، فضاء الأعمدة، فضاء الصفوف و فضاء الصفرية الأيسر) فقط بتحليل الشكل الصفي المدرج الموسع للمصفوفة، وخاصة، المصفوفتين الجزئيتين C و L والتي تكون ملائمة في التحليل لأنها بالفعل في الشكل الصفي المدرج المختزل.

نظرية ٣-٦-٧. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m \times n$ و N هي المصفوفة في الشكل الصفي المدرج الموسع. نفرض أن الشكل الصفي المدرج المختزل لـ A يحتوي r صف غير صفري. نفرض أن C هي المصفوفة الجزئية من N المكونة من الصفوف r الأولى و الأعمدة n الأولى و L تكون هي المصفوفة الجزئية من N المكونة من الأعمدة m الأخيرة والصفوف $m-r$ الأخيرة. إذن

١- فضاء الصفرية لـ A يكون هو فضاء الصفرية لـ C، $N(A)=N(C)$.

٢- فضاء الصفوف لـ A يكون هو فضاء الصفوف لـ C، $R(A)=R(C)$.

٣- فضاء الأعمدة لـ A هو فضاء الصفرية لـ L، $C(A)=N(L)$.

٤- فضاء الصفرية الأيسر لـ A هو فضاء الصفوف لـ L، $L(A)=R(L)$.

البرهان: أولا $N(A)=N(B)$، حيث أن B متكافئة صفيا مع A. الصفوف الصفرية في B تمثل معادلات تكون دائما محققة في النظام المتجانس $LS(B,0)$ ، لذلك إزالة هذه الصفوف لا يغير من مجموعة الحل. لذلك $N(B)=N(C)$.

ثانيا $R(A)=R(B)$ ، حيث أن B متكافئة صفيا مع A. الصفوف الصفرية في B لا تساهم بشيء في الامتداد الذي هو فضاء الصفوف لـ B، لذلك استبعاد هذه الصفوف لا يؤثر في فضاء الصفوف لـ B . ومن ثم $R(B)=R(C)$.

ثالثا، نبرهن تساوي المجموعتين $C(A)=N(L)$ باستخدام تعريف تساوي مجموعتين. نبدأ ببيان أن $C(A)\subseteq N(L)$. نختار $y\in C(A)\subseteq \mathbb{C}^m$. إذن يوجد متجه $x\in\mathbb{C}^n$ بحيث $Ax=y$ (نظرية ٣-٥-٣). إذن لكل $1\le k\le m-r$،

$$
\begin{aligned}
[Ly]_k &= [Jy]_{r+k} && (L \text{ مصفوفة جزئية من } J)\\
&= [Bx]_{r+k} && (\text{نظرية ٣-٦-٦})\\
&= [Ox]_k && (\text{المصفوفة الصفرية جزئية من } B)
\end{aligned}
$$

$$=[0]_k$$

ومن ثم، لكل $1 \leq k \leq m-r$، $[Ly]_k = [0]_k$. لذلك من تعريف تساوي متجهات الأعمدة يكون $Ly = 0$ وبالتالي $y \in N(L)$.

الآن نبين أن $N(L) \subseteq C(A)$. نختار $y \in N(L) \subseteq \mathbb{C}^m$. نكون المتجه $Ky \in \mathbb{C}^r$. النظام الخطي $LS(C, Ky)$ يكون متوافق حيث أن C تكون في الشكل الصفي المدرج المختزل وليس بها صفوف أصفار. نفرض أن $x \in \mathbb{C}^n$ ترمز إلى حل للنظام $LS(C, Ky)$. إذن لكل $1 \leq j \leq r$،

$$\begin{aligned}[Bx]_j &= [Cx]_j && (\text{مصفوفة جزئية من } C \; B)\\ &= [Ky]_j && (x \text{ حل للنظام } LS(C,Ky))\\ &= [Jy]_j && (\text{مصفوفة جزئية من } K \; J)\end{aligned}$$

ولكل $r+1 \leq k \leq m$ ،

$$\begin{aligned}[Bx]_k &= [Ox]_{k-r}\\ &= [0]_{k-r}\\ &= [Ly]_{k-r} && (y \text{ في } N(L))\\ &= [Jy]_k && (\text{مصفوفة جزئية من } L \; J)\end{aligned}$$

لذلك لكل $1 \leq i \leq m$، $[Bx]_i = [Jy]_i$ ومن تعريف تساوي متجهي أعمدة يكون $Bx = Jy$. من نظرية ٣-٦-٦ نعلم أن $Ax = y$ ، وبالتالي $y \in C(A)$. من تعريف تساوي مجموعتين يكون $C(A) = N(L)$.

رابعا، نبرهن أن $L(A) = R(L)$. نبدأ بإثبات أن $R(L) \subseteq L(A)$. نختار $y \in R(L) \subseteq \mathbb{C}^m$. إذن يوجد متجه $w \in \mathbb{C}^{m-r}$ بحيث يكون $y = L^t w$. إذن لكل $1 \leq i \leq n$،

$$[A^t y]_i = \sum_{k=1}^{m} [A^t]_{ik} [y]_k \qquad (\text{نظرية ٣-٢-٩})$$

$$=\sum_{k=1}^{m}[A^t]_{ik}[L^t w]_k$$ (تعريف w)

$$=\sum_{k=1}^{m}[A^t]_{ik}\sum_{l}^{m-r}[L^t]_{kl}[w]_l$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m-r}[A^t]_{ik}[L^t]_{kl}[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}\sum_{k=1}^{m}[A^t]_{ik}[L^t]_{kl}[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}\left(\sum_{k=1}^{m}[A^t]_{ik}[L^t]_{kl}\right)[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}\left(\sum_{k=1}^{m}[A^t]_{ik}[J^t]_{k,r+l}\right)[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}[A^tJ^t]_{i,r+l}[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}[(JA)^t]_{i,r+l}[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}[B^t]_{i,r+l}[w]_l$$

$$=\sum_{l=1}^{m-r}0\,[w]_l$$

$$=0$$

$$=[0]_i$$

حيث أن $[A^t y]_i=[0]_i$ لكل $1\le i\le n$، إذن $A^t y=0$. هذا يعني أن $y\in N(A^t)$.

الآن نبين أن $L(A) \subseteq R(L)$. نختار $y \in L(A) \subseteq \mathbb{C}^m$. المصفوفة J تكـون غيـر شـاذة، لـذلك J^t تكـون أيـضا غيـر شـاذة، ومـن ثـم النظـام الخطـي $LS(J^t, y)$ يكـون لـه حـل وحيـد. نرمـز لهـذا الحـل بـالرمز $x \in \mathbb{C}^m$. سوف نكون في حاجة للعمل مع جزأين من x ، والذي نرمز لهما بالرموز z و w حيث

$$[z]_j = [x]_j \text{ ، } \quad 1 \le j \le r$$

$$[w]_k = [x]_{r+k} \text{ ، } \quad 1 \le k \le m-r$$

الآن لكل $1 \le j \le r$

$$\begin{aligned}
[C^t z]_j &= \sum_{k=1}^{r} [C^t]_{jk} [z]_k \\
&= \sum_{k=1}^{r} [C^t]_{jk} [z]_k + \sum_{l=1}^{m-r} [\mathrm{O}]_{jl} [w]_l \\
&= \sum_{k=1}^{r} [B^t]_{jk} [z]_k + \sum_{l=1}^{m-r} [B^t]_{j,r+l} [w]_l \\
&= \sum_{k=1}^{r} [B^t]_{jk} [x]_k + \sum_{l=1}^{m-r} [B^t]_{j,r+l} [x]_{r+l} \\
&= \sum_{k=1}^{r} [B^t]_{jk} [x]_k + \sum_{k=r+1}^{m} [B^t]_{jk} [x]_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} [B^t]_{jk} [x]_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} [(JA)^t]_{jk} [x]_k \\
&= \sum_{k=1}^{m} [A^t J^t]_{jk} [x]_k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}[A^t]_{jl}[J^t]_{lk}[x]_k \\
&= \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}[A^t]_{jl}[J^t]_{lk}[x]_k \\
&= \sum_{l=1}^{m}[A^t]_{jl}\left(\sum_{k=1}^{m}[J^t]_{lk}[x]_k\right) \\
&= \sum_{l=1}^{m}[A^t]_{jl}[J^t x]_l \\
&= \sum_{l=1}^{m}[A^t]_{jl}[y]_l \\
&= [A^t y]_j \\
&= [0]_j
\end{aligned}
$$

إذن $C^t z = 0$ والمتجه z يعطينا تركيبة خطية من متجهات C^t وهذه التركيبة تساوي المتجه الصفري. بتعبير آخر z تعطي علاقة ارتباط خطي على صفوف C. ومع ذلك صفوف C تكون مجموعة مستقلة خطيا من نظرية ٣-٥-١٦، ومن تعريف الاستقلال الخطي جميع مركبات z تكون أصفار، أي أن $z = 0$.

الآن لكل $1 \le i \le m$ يكون

$$
\begin{aligned}
[y]_i &= [J^t x]_i \\
&= \sum_{k=1}^{m}[J^t]_{ik}[x]_k \\
&= \sum_{k=1}^{r}[J^t]_{ik}[x]_k + \sum_{k=r+1}^{m}[J^t]_{ik}[x]_k \\
&= \sum_{k=1}^{r}[J^t]_{ik}[z]_k + \sum_{k=r+1}^{m}[J^t]_{ik}[w]_{k-r}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=1}^{r}[J^t]_{ik}0 + \sum_{l=1}^{m-r}[J^t]_{i,r+l}[w]_l$$
$$= 0 + \sum_{l=1}^{m-r}[L^t]_{i,l}[w]_l$$
$$= [L^t w]_i$$

لذلك $y = L^t w$. وجود w يؤدي إلى $y \in R(L)$ ومن ثم $L(A) \subseteq R(L)$. إذن $L(A) = R(L)$. وهذا يكمل برهان النظرية.

النتيجتين الأوليين في هذه النظرية تكون تقريبا بديهية. ولكنها تضع نمط للنتائج حول C التي سجلت في النتيجتين الأخريين حول L. في المجموع، هذه النتائج تخبرنا كيف يمكننا حساب المجموعات الجزئية الأربع فقط من مجرد إيجاد فضائي الصفرية والصفوف. هذه النظرية لا تخبرنا عن كيفية تحديدا حساب هذه المجموعات الجزئية الأربع ولكن ببساطة تعبر عنهم بدلالة فضاء الصفرية وفضاء الصفوف للمصفوفات في الشكل الصفي المدرج المختزل بدون أي صفوف صفرية (C و L). المجموعة المستقلة خطيا التي تولد فضاء الصفرية لمصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل يمكن إيجادها بسهولة من نظرية ٢-٤-١٧ . إنه من الأمر السهل إيجاد مجموعة مستقلة خطيا تولد فضاء الصفوف لمصفوفة في الشكل الصفي المدرج المختزل باستخدام نظرية ٣-٥-١٦، خاصة عندما لا توجد صفوف صفرية. لذلك تطبيق نظرية ٣-٦-٧ ينتج مباشرة من تطبيق نظرية ٢-٤-١٧ و نظرية ٣-٥-١٦.

الوضع عندما $r = m$ يستحق التعليق، حيث الآن المصفوفة L ليس بها صفوف. ما هو $C(A)$ عندما نحاول تطبيق نظرية ٣-٦-٧ و نواجه $N(L)$؟ أحد التفسيرات لهذا الوضع أن L تكون مصفوفة معاملات لنظام متجانس ليس به معادلات. كم يكون صعبا إيجاد متجه لهذا النظام؟ بعض التفكير سوف تقتنع بأن أي متجه مقترح سوف يتأهل لكي يكون حلا، حيث أنه يجعل كل المعادلات محققة. لذلك كل متجه ممكن سوف يكون في فضاء صفرية L ومن ثم

$C(A)=N(L)=\mathbb{C}^m$. حسنا، ربما يبدو هذا كأنه حجة ملتوية من بلاد العجايب. دعنا نحاول حجة أخرى تكون أكثر منطقية.
إذا كانت $r=m$ ، عندما نختزل صفيا المصفوفة الموسعة للنظام $LS(A,b)$ فإن الناتج سوف لا يكون بها أصفار صفرية والأعمدة n الأولى سوف تكون أعمدة محورية ولا يكون العمود الأخير محوري، لذلك النظام يكون متوافق. من نظرية ٣-٥-٣ ، $b\in C(A)$. حيث أن b اختيارية، كل متجه ممكن يكون في فضاء أعمدة A، لذلك نحصل على $C(A)=\mathbb{C}^m$. الوضع عندما يكون لمصفوفة $r=m$ يعرف **بالرتبة التامة** full rank وفي حالة المصفوفة المربعة ينطبق مع عدم الشذوذ.

خواص المصفوفة L الموصوفة بهذه النظرية يمكن توضيحها كما يلي. متجه العمود $y\in\mathbb{C}^m$ يكون في فضاء أعمدة A إذا كان النظام الخطي $LS(A,y)$ متوافق (نظرية ٣-٥-٣). من نظرية ١-٣-٦، الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة الموسعة $[A\,|\,y]$ للنظام المتوافق سوف يكون لها أصفار في كل المواضع $m-r$ السفلى في العمود الأخير. من نظرية ٣-٦-٦ هذا العمود الأخير هو المتجه Jy وبالتالي سوف يكون له أصفار في كل المركبات $m-r$ الأخيرة. ولكن حيث أن L تتألف من الصفوف $m-r$ الأخيرة من J، فإن هذا الشرط يعبر عنه بقولنا $y\in N(L)$.

بالإضافة إلى ذلك، الصفوف في J هي الكميات القياسية في التراكيب الخطية من صفوف A التي تنشئ صفوف B. أي أن، صفوف J تسجل الأثر الخالص لمتتابعة من عمليات الصف تأخذ A إلى شكلها الصفي المدرج المختزل B. هذا يمكن رؤيته في المعادلة $JA=B$ (نظرية ٣-٦-٦). على هذا النحو، صفوف L تكون هي الكميات القياسية للتراكيب الخطية لصفوف A التي تنتج صفوف صفرية. ولكن مثل هذه التراكيب الخطية هي تحديدا عناصر فضاء الصفرية الأيسر. لذلك أي عنصر من فضاء صفوف L يكون أيضا عنصر فضاء الصفرية الأيسر لـ A.

الآن نوضح نظرية ٣-٦-٧ ببعض الأمثلة.

مثال ٣-٦-٨. في مثال ٣-٦-٥ أوجدنا المصفوفات الجزئية الخمس ذات الصلة من المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2 & 7 & 1 & 6\\ -6 & 2 & -4 & -18 & -3 & -26\\ 4 & -1 & 4 & 10 & 2 & 17\\ 3 & -1 & 2 & 9 & 1 & 12\end{bmatrix}$$

لتطبيق نظرية ٣-٦-٧ نحتاج فقط C و L،

$$L=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad ،C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4 & -6 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

إذن باستخدام نظرية ٣-٦-٧ نحصل على

$$N(A)=N(C)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2\\-4\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\6\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$R(A)=R(C)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\\0\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\4\\-6\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$C(A)=N(L)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$L(A)=R(L)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

مثال ٣-٦-٩. الآن نعود إلى المصفوفة A التي استخدمت للتمهيد لهذا الفصل في مثال ٣-٦-٣.

$$A=\begin{bmatrix}10&0&3&8&7\\-16&-1&-4&-10&-13\\-6&1&-3&-6&-6\\0&2&-2&-3&-2\\3&0&1&2&3\\-1&-1&1&1&0\end{bmatrix}$$

كونا المصفوفة M بإلحاق مصفوفة الوحدة من الحجم 6×6، I_6

$$M=\begin{bmatrix}10&0&3&8&7&1&0&0&0&0&0\\-16&-1&-4&-10&-13&0&1&0&0&0&0\\-6&1&-3&-6&-6&0&0&1&0&0&0\\0&2&-2&-3&-2&0&0&0&1&0&0\\3&0&1&2&3&0&0&0&0&1&0\\-1&-1&1&1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

واختزلناها صفيا لنحصل على N

$$N=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2&0&0&1&-1&2&-1\\0&1&0&0&-3&0&0&-2&3&-3&3\\0&0&1&0&1&0&0&1&1&3&3\\0&0&0&1&-2&0&0&-2&1&-4&0\\0&0&0&0&0&1&0&3&-1&3&1\\0&0&0&0&0&0&1&-2&1&1&-1\end{bmatrix}$$

للحصول على المجموعات الجزئية الأربع من A ، نحتاج فقط لتحديد المصفوفة C من الحجم 4×5 والمصفوفة L من الحجم 2×6

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&3&-1&3&1\\0&1&-2&1&1&-1\end{bmatrix}$$

بتطبيق نظرية ٣-٦-٧

$$N(A)=N(C)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$R(A)=R(C)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$C(A)=N(L)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$L(A)=R(L)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\\-1\\3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

المثال التالي يختلف قليلا حيث عدد الصفوف في المصفوفة أكبر من عدد الأعمدة وفضاء الصفرية هو الفضاء التافه.

مثال ٣-٦-١٠. نعتبر المصفوفة

$$G=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\\ 3 & 10\\ 3 & -1\\ 6 & 9\end{bmatrix}$$

بتوسيع هذه المصفوفة بمصفوفة الوحدة I_5 لنكون

$$M=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

هذه تختزل صفيا إلى

$$N=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{33}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

الأعمدة $n=2$ الأولى تحتوي $r=2$ قيادية 1s، لذلك نحصل على C كمصفوفة وحدة من الحجم 2×2 ونستخلص L من الصفوف $m-r=3$ الأخيرة في الأعمدة $m=5$ الأخيرة.

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \quad ، \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

إذن بتطبيق نظرية ٣-٦-٧

$$N(G)=N(C)=\langle\phi\rangle=\{0\}$$

$$R(G)=R(C)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle=\mathbb{C}^2$$

$$C(G)=N(L)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\3\\0\\3\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$L(G)=R(L)=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$=\left\langle\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\\3\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\right\rangle$$

تمارين ٣-٦

١- أوجد العناصر غير الصفرية في فضاء الصفرية الأيسر للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

٢- أوجد المصفوفات C و L في الشكل المدرج الموسع للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} -9 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

٣- للمصفوفة A التالية، استخدم الشكل المدرج الموسع لإيجاد مجموعة من المتجهات المستقلة خطيا التي تولد المجموعات الجزية الأربع: فضاء صفوف A، $R(A)$ ؛ فضاء أعمدة A، $C(A)$ ؛ فضاء صفرية A، $N(A)$ ؛ وفضاء الصفرية الأيسر لـ A، $L(A)$.

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

٤- للمصفوفة D التالية استخدم الشكل الصفي المدرج الموسع لإيجاد

(أ) مجموعة مستقلة خطيا تولد فضاء أعمدة D.

(ب) مجموعة مستقلة خطيا تولد فضاء صفرية D الأيسر.

$$D=\begin{bmatrix} -7 & -11 & -19 & -15 \\ 6 & 10 & 18 & 14 \\ 3 & 5 & 9 & 7 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$