الباب الخامس
المحددات
Determinants

المحدد هو دالة تأخذ مصفوفة مربعة إلى كمية قياسية. لذلك يكون، عكس المتجه، هو ليس تركيبة جبرية. ومع ذلك، للمحددات خواص مفيدة في دراسة الفضاءات الاتجاهية، المصفوفات وأنظمة المعادلات، ومن ثم يصعب إهمالها. بينما خواص المحددات تكون مفيدة جدا، إلا أنها أيضا معقدة في برهانها.

٥-١ محدد المصفوفة Determinant of a Matrix

قبل تعريف محدد المصفوفة، نلتفت قليلا لنقدم المصفوفات الأولية. هذا سوف يعود بنا إلى بداية الكتاب حيث عمليات الصفوف.

المصفوفات الأولية

المصفوفات الأولية بسيطة جدا، كما يمكن أن يظن من اسمها. الغرض منها هو التأثير بعمليات صفوف على مصفوفة من خلال ضرب المصفوفات. تعريف المصفوفات الأولية يبدو أكثر تعقيدا من حقيقة كونها.

تعريف ٥-١-١. (المصفوفات الأولية).

١- لكل $i \neq j$ ، $E_{i,j}$ هي المصفوفة المربعة من الحجم n بحيث

$$[E_{i,j}]_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq i, k \neq j, l \neq k \\ 1 & k \neq i, k \neq j, l = k \\ 0 & k = i, l \neq j \\ 1 & k = i, l = j \\ 0 & k = j, l \neq i \\ 1 & k = j, l = i \end{cases}$$

٢- لكل $\alpha \neq 0$ ، $E_i(\alpha)$ هي المصفوفة المربعة من الحجم n بحيث

$$[E_i(\alpha)]_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq i, l \neq k \\ 1 & k \neq i, l = k \\ \alpha & k = i, l = i \end{cases}$$

٣- لـ $i \neq j$ ، $E_{i,j}(\alpha)$ هي المصفوفة المربعة من الحجم n بحيث

$$[E_{i,j}(\alpha)]_{kl}=\begin{cases}0 & k\neq j,l\neq k\\1 & k\neq j,l=k\\0 & k=j,l\neq i,l\neq j\\1 & k=j,l=j\\\alpha & k=j,l=i\end{cases}$$

أيضا هذه المصفوفات ليست معقدة كتعريفاتها المقترحة، حيث أنها مجرد تحوير بسيط في مصفوفة الوحدة من الحجم n. $E_{i,j}$ هي مصفوفة الوحدة حيث تم فيها تبديل الصفين (أو العمودين) i و j، $E_i(\alpha)$ هي مصفوفة الوحدة حيث العنصر القطري في الصف i والعمود i تم استبداله بـ α و $E_{i,j}(\alpha)$ هي مصفوفة الوحدة حيث العنصر في الصف j والعمود i تم استبداله بـ α. لاحظ أن الرموز المستخدمة لا تعتمد على حجم المصفوفة الأولية.

أهمية المصفوفات الأولية تكمن في أنها تجري عمليات الصف على مصفوفة عن طريق ضرب المصفوفات. لذلك نعطي هنا مثال لنرى بعض المصفوفات الأولية ونرى كيفية إجراء عملية صف باستخدام ضرب المصفوفات.

مثال ٥-١-٢. نجري متتابعة من عمليات الصفوف على مصفوفة A من الحجم 3×4 ، كذلك أيضا نضرب المصفوفة من جهة اليسار في مصفوفة أولية من الحجم 3×3

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&1\\1&3&2&4\\5&0&3&1\end{bmatrix}$$

$$E_{1,3}:\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3&1\\1&3&2&4\\5&0&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&3&1\\1&3&2&4\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$R_1\leftrightarrow R_3:\begin{bmatrix}5&0&3&1\\1&3&2&4\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$E_2(2):\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&3&1\\1&3&2&4\\2&1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&3&1\\2&6&4&8\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$2R_2:\begin{bmatrix}5&0&3&1\\2&6&4&8\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$E_{3,1}(2):\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&3&1\\2&6&4&8\\2&1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&2&9&3\\2&6&4&8\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

$$2R_3+R_1:\begin{bmatrix}9&2&9&3\\2&6&4&8\\2&1&3&1\end{bmatrix}$$

النظريات الثلاث التالية تبرهن على أن كل مصفوفة أولية تؤثر كعملية صف من خلال ضرب المصفوفات.

نظرية ٥-١-٣. نفرض أن A مصفوفة من الحجم $m\times n$ و B مصفوفة من نفس الحجم حصلنا عليها من A بإجراء عملية صف واحدة. إذن توجد مصفوفة أولية من الحجم m تحول A إلى B بالضرب من اليسار. بتعبير أدق

١- إذا كانت عملية الصف هي تبديل الصفين i و j فإن $B=E_{i,j}A$.

٢- إذا كانت عملية الصف هي ضرب الصف رقم i في α فإن $B=E_i(\alpha)A$.

٣- إذا كانت عملية الصف هي إضافة الصف رقم i مضروبا في α إلى الصف رقم j فإن $B=E_{i,j}(\alpha)A$.

البرهان: في كل من الحالات الثلاث، بإجراء عملية صف على A نحصل على مصفوفة B حيث فقط صف واحد أو صفين يحدث فيهما تغيير. لذلك فإننا سوف نقوم بإثبات التساوي بين عناصر المصفوفتين صفا بصف، أولا للصفوف التي لم تتغير، ثم بالنسبة للصفوف التي حدث فيها تغيير، نبين في كل حالة أن نتيجة الضرب في المصفوفة تعطي نفس نتيجة إجراء عملية الصف.

الصف رقم k في حاصل الضرب $E_{i,j}A$، حيث $k \neq i$ و $k \neq j$ ، لا تتغير عن A.

$$\begin{aligned}
[E_{i,j}A]_{kl} &= \sum_{p=1}^{n}[E_{i,j}]_{kp}[A]_{pl} \\
&= [E_{i,j}]_{kk}[A]_{kl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n}[E_{i,j}]_{kp}[A]_{pl} \\
&= 1\ [A]_{kl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} 0\,[A]_{pl} \\
&= [A]_{kl}
\end{aligned}$$

الصف رقم i في حاصل الضرب $E_{i,j}A$ هو الصف رقم j في A،

$$\begin{aligned}
[E_{i,j}A]_{il} &= \sum_{p=1}^{n}[E_{i,j}]_{ip}[A]_{pl} \\
&= [E_{i,j}]_{ij}[A]_{jl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n}[E_{i,j}]_{ip}[A]_{pl} \\
&= 1\ [A]_{jl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j}}^{n} 0\,[A]_{pl} \\
&= [A]_{jl}
\end{aligned}$$

الصف رقم j في حاصل الضرب $E_{i,j}A$ هو الصف رقم i في A،

$$\begin{aligned}
[E_{i,j}A]_{jl} &= \sum_{p=1}^{n}[E_{i,j}]_{jp}[A]_{pl} \\
&= [E_{i,j}]_{ji}[A]_{il} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq i}}^{n}[E_{i,j}]_{jp}[A]_{pl}
\end{aligned}$$

$$= 1\ [A]_{il} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n} 0\ [A]_{pl}$$

$$= [A]_{il}$$

ومن ثم يكون حاصل ضرب المصفوفتين $E_{i,j}A$ هو نفس الشيء مثل عملية الصف التي تبدل الصفين i و j.

الصف k في حاصل الضرب $E_i(\alpha)A$، حيث ، $k \neq i$، لم تتغير عن A.

$$[E_i(\alpha)A]_{kl} = \sum_{p=1}^{n} [E_i(\alpha)]_{kp} [A]_{pl}$$

$$= [E_i(\alpha)]_{kk} [A]_{kl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} [E_i(\alpha)]_{kp} [A]_{pl}$$

$$= 1\ [A]_{kl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} 0\ [A]_{pl}$$

$$= [A]_{kl}$$

الصف i في حاصل الضرب $E_i(\alpha)A$، هو الصف رقم i في A مضروبا في α.

$$[E_i(\alpha)A]_{il} = \sum_{p=1}^{n} [E_i(\alpha)]_{ip} [A]_{pl}$$

$$= [E_i(\alpha)]_{ii} [A]_{il} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n} [E_i(\alpha)]_{ip} [A]_{pl}$$

$$= \alpha\ [A]_{il} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{n} 0\ [A]_{pl}$$

$$= \alpha [A]_{il}$$

لذلك مصفوفة حاصل الضرب $E_i(\alpha)A$ هي نفس الشيء مثل ضرب الصف رقم i من المصفوفة A في α.

الصف k في حاصل الضرب $E_{i,j}(\alpha)A$، حيث، $k \neq j$، لم يتغير عن A.

$$\begin{aligned}
[E_{i,j}(\alpha)A]_{kl} &= \sum_{p=1}^{n}[E_{i,j}(\alpha)]_{kp}[A]_{pl} \\
&= [E_{i,j}(\alpha)]_{kk}[A]_{kl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n}[E_{i,j}(\alpha)]_{kp}[A]_{pl} \\
&= 1\,[A]_{kl} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} 0\,[A]_{pl} \\
&= [A]_{kl}
\end{aligned}$$

الصف j في حاصل الضرب $E_{i,j}(\alpha)A$، هو الصف رقم i في A مضروبا في α ومضافا إلى الصف رقم j في A.

$$\begin{aligned}
[E_{i,j}(\alpha)A]_{jl} &= \sum_{p=1}^{n}[E_{i,j}(\alpha)]_{jp}[A]_{pl} \\
&= [E_{i,j}(\alpha)]_{jj}[A]_{jl} + \\
&\qquad [E_{i,j}(\alpha)]_{ji}[A]_{il} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j,i}}^{n}[E_{i,j}(\alpha)]_{jp}[A]_{pl} \\
&= 1\,[A]_{jl} + \alpha\,[A]_{il} + \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq j,i}}^{n} 0\,[A]_{pl} \\
&= [A]_{jl} + \alpha[A]_{il}
\end{aligned}$$

لذلك مصفوفة الضرب $E_{i,j}(\alpha)A$ هي نفس الشيء مثل عملية الصف التي تضيف الصف رقم i مضروبا في α إلى الصف رقم j.

الآن نعطي حقيقتين عن المصفوفات الأولية

نظرية ٥-١-٤. نفرض E مصفوفة أولية. إذن E تكون مصفوفة غير شاذة.

البرهان: سوف نبين أن الشكل الصفي المدرج المختزل لكل مصفوفة أولية يكون هو مصفوفة الوحدة. نعتبر المصفوفة الأولية على الشكل $E_{i,j}$، بإجراء عملية الصف التي تبدل الصف i مع الصف j. نعتبر المصفوفة الأولية على الشكل $E_i(\alpha)$، حيث $\alpha \neq 0$، بإجراء عملية الصف التي تضرب الصف i في $\frac{1}{\alpha}$. نعتبر المصفوفة الأولية على الشكل $E_{i,j}(\alpha)$، حيث $\alpha \neq 0$، نجري عملية الصف التي تضيف الصف رقم i مضروبا في $(-\alpha)$ إلى الصف j. في كل من هذه الحالات الناتج عن عملية صف واحدة هو مصفوفة الوحدة. لذلك كل مصفوفة أولية تكون متكافئة صفيا مع مصفوفة الوحدة، ومن نظرية ١-٥-٧ تكون غير شاذة.

نظرية ٥-١-٥. نفرض أن A مصفوفة غير شاذة. إذن توجد مصفوفات أولية $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_t$ بحيث $A = E_1E_2E_3\ldots E_t$.

البرهان. حيث أن A مصفوفة غير شاذة، إذن هي تكافئ صفيا مصفوفة الوحدة، من نظرية ١-٥-٧، ومن ثم توجد متتابعة من t عملية صف تحول I إلى A. لكل من عمليات الصف هذه، نكون المصفوفة الأولية المصاحبة ونرمز لهذه المصفوفات بالرموز $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_t$. بتطبيق عملية الصف الأولى على I نحصل على المصفوفة E_1I. عملية الصف الثانية تعطي $E_2(E_1I)$. عملية الصف الثالثة تعطي المصفوفة $E_3E_2E_1I$. نتيجة كل المتتابعة من عمليات الصف التي عددها t سوف تعطي A، ومن ثم

$$A = E_t \ldots E_3E_2E_1I = E_t \ldots E_3E_2E_1$$

بإعادة ترتيب المصفوفات الأولية بعكس الترتيب الحالي نحصل على المطلوب.

تعريف المحدد

الآن نعود إلى تعريف المحدد ونجري بعض الحسابات. تعريف دالة المحدد هو تعريف ارتدادي، بمعنى أن محدد المصفوفة الأكبر يعرف بدلالة محددات مصفوفات أصغر. لبيان ذلك نعطي بعض التعريفات.

تعريف ٥-١-٦. نفرض A مصفوفة من الحجم $m \times n$. إذن **المصفوفة الجزئية** submatrix هي المصفوفة $A(i \mid j)$ من الحجم $(m-1)\times(n-1)$ التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j.

مثال ٥-١-٧. للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على المصفوفات الجزئية

$$A(2 \mid 3)=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad A(3 \mid 1)=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 9 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف ٥-١-٨. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن محدد A، $\det(A)=|A|$، هو العنصر من $\mathbb{C}$ المعرف ارتداديا كما يلي:

١- إذا كانت A من الحجم 1×1، فإن $\det(A)=[A]_{11}$.

٢- إذا كانت A من الحجم n، $n \geq 2$، فإن

$$\begin{aligned}\det(A)=[A]_{11}\det(A(1\mid 1))-[A]_{12}\det(A(1\mid 2))+\\ [A]_{13}\det(A(1\mid 3))-[A]_{14}\det(A(1\mid 4))+\ldots+\\ (-1)^{n+1}[A]_{1n}\det(A(1\mid n))\end{aligned}$$

ومن ثم لحساب محدد مصفوفة 5×5 يجب أن نكون خمس مصفوفات جزئية كل منها من الحجم 4×4. ولحساب محدد كل مصفوفة من حجم 4×4 نحتاج لتكوين أربع مصفوفات جزئية كل مصفوفة من الحجم 3×3 ، وهكذا. لحساب محدد مصفوفة من الحجم 10×10 ،نحتاج إلى حساب محددات مصفوفات عددها $10!$. لحسن الحظ توجد طرق أفضل.

مثال ٥-١-٩. نعتبر المصفوفة من الحجم 3×3

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 6\\ -3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

إذن

$$\begin{aligned}\det(A)=|A|&=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 6\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}\\ &=3\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4 & 6\\ -3 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}\\ &=3(1|2|-6|-1|)-2(4|2|-6|-3|)-(4|-1|-1|-3|)\\ &=3(1(2)-6(-1))-2(4(2)-6(-3))-(4(-1)-1(-3))\\ &=24-52+1\\ &=-27\end{aligned}$$

نظرية ٥-١-١٠. نفرض أن $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

إذن $\det(A)=(ad-bc)$.

البرهان: بتطبيق التعريف $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a|d|-b|c|=ad-bc$.

حساب المحددات

توجد عديد من الطرق لحساب المحدد. سوف نبرهن أولا أنه يمكننا أن نختار تقليد تعريف المحدد، ولكن باستخدام عناصر المصفوفات الجزئية استنادا إلى صف غير الأول.

نظرية ٥-١-١١. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن لكل $1\le i\le n$ يكون

$$\begin{aligned}\det(A)&=(-1)^{i+1}[A]_{i1}\det(A(i|1))+(-1)^{i+2}[A]_{i2}\det(A(i|2))\\ &+(-1)^{i+3}[A]_{i3}\det(A(i|3))+\ldots+(-1)^{i+n}[A]_{in}\det(A(i|n))\end{aligned}$$

والتي تعرف بالمفكوك عن طريق الصف i.

البرهان: أولا، منطوق النظرية ينطبق مع تعريف ٥-١-٨ عندما $i=1$، لذلك نحتاج إلى اعتبار $i>1$.

نعتبر التعريف الارتدادي للمحدد، ليس من الغريب أن نستخدم الاستنتاج الرياضي في هذا البرهان. عندما $n=1$، لا يوجد ما يحتاج إلى برهان حيث لدينا صف واحد. عندما $n=2$ ، مجرد نختبر المفكوك عن طريق الصف الثاني.

$$\begin{aligned}(-1)^{2+1}[A]_{21}\det(A(2|1)) &+ (-1)^{2+2}[A]_{22}\det(A(2|2))\\ &= -[A]_{21}[A]_{12}+[A]_{22}[A]_{11}\\ &= [A]_{11}[A]_{22}-[A]_{12}[A]_{21}\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

ومن ثم النظرية تكون صحيحة للمصفوفات من الحجم $n=1$، $n=2$.
الآن نفرض أن النتيجة تكون محققة لكل المصفوفات من الحجم $n-1$ كما نشتق تعبير للمفكوك بدلالة الصف i لمصفوفة من الحجم n.
سوف نستخدم الرمز $A(i_1,i_2\,|\,j_1,j_2)$ لترمز إلى المصفوفة المكونة بحذف الصفوف i_1 و i_2 والأعمدة j_1 و j_2. أيضا كما أننا نأخذ محدد المصفوفة الجزئية، سوف نحتاج إلى القفز على دليل المجموع خلال الأعمدة المستبعدة. لذلك نستخدم الرمز

$$\varepsilon_{lj}=\begin{cases}0 & l<j\\ 1 & l>j\end{cases}$$

الآن

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}[A]_{1j}\det(A(1|j))\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}[A]_{1j}\sum_{\substack{1\le l\le n\\ l\ne j}}(-1)^{i-1+l-\varepsilon_{lj}}[A]_{il}\det(A(1,i\,|\,j,l))\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{1\le l\le n\\ l\ne j}}(-1)^{j+i+l-\varepsilon_{lj}}[A]_{1j}[A]_{il}\det(A(1,i\,|\,j,l))\end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne l}} (-1)^{j+i+l-\varepsilon_{lj}} [A]_{1j} [A]_{il} \det(A(1,i \mid j,l))$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l} [A]_{il} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne l}} (-1)^{j-\varepsilon_{lj}} [A]_{1j} \det(A(1,i \mid j,l))$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l} [A]_{il} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\ne l}} (-1)^{\varepsilon_{lj}+j} [A]_{1j} \det(A(i,1 \mid l,j))$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l} [A]_{il} \det(A(i \mid l))$$

يمكننا أيضا الحصول على صيغة لحساب المحدد بمفكوك بدلالة عمود، ولكن هذا سوف يكون أبسط إذا استخدمنا أولا النتيجة حول العلاقة بين المحددات والمدورات. لاحظ كيف أن البرهان التالي يعطينا القدرة على حساب محدد بالمفكوك باستخدام أي صف.

نظرية ٥-١-١٢. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن $\det(A^t) = \det(A)$.

البرهان: مع تعريف المحدد (تعريف ٥-١-٨) ونظريات مثل نظرية ٥-١-١١، استخدام الاستنتاج الرياضي هو نهج طبيعي لإثبات خواص المحددات. نفرض n هو حجم المصفوفة A، ونستخدم الاستنتاج على n.

عندما $n = 1$، مدور المصفوفة هو نفس المصفوفة الأصلية، ومن ثم من البديهي أن المحددين يكونا متساويين.

الآن نفرض أن النتيجة محققة للمصفوفات من الحجم $n-1$. إذن

$$\det(A^t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \det(A^t)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A^t]_{ij} \det(A^t(i \mid j))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{ji}\det(A^t(i\,|\,j)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{ji}\det((A(j\,|\,i))^t) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{ji}\det(A(j\,|\,i)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}[A]_{ji}\det(A(j\,|\,i)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\det(A) \\
&= \det(A)
\end{aligned}
$$

الآن يمكننا الحصول على نتيجة أن المحدد يمكن حسابها باستخدام عمود أيضا.

نظرية ٥-١-١٣. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. إذن لكل $1 \le j \le n$ يكون

$$
\det(A) = (-1)^{1+j}[A]_{1j}\det(A(1\,|\,j)) + (-1)^{2+j}[A]_{2j}\det(A(2\,|\,j)) + (-1)^{3+j}[A]_{3j}\det(A(3\,|\,j)) + \ldots + (-1)^{n+j}[A]_{nj}\det(A(n\,|\,j))
$$

والذي يعرف بالمفكوك عن طريق العمود j.

البرهان:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det(A^t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}[A^t]_{ji}\det(A^t(j\,|\,i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}[A^t]_{ji}\det((A^t(i\,|\,j))^t) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}[A^t]_{ji}\det(A^t(i\,|\,j))
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \det(A^t(i \mid j))$$

المثال التالي يحسب محدد مصفوفة بطريقتين.

مثال ٥-١-١٤. نفرض

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

بفك محدد المصفوفة عن طريق الصف الرابع (نظرية ٥-١-١١ $i = 4$) نحصل على

$$|A| = (4)(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (6)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)(10) + (1)(-22) + (-2)(61) + 6(46) = 92$$

بالفك عن طريق العمود الثالث (نظرية ٥-١-١٣، $j = 3$) نحصل على

$$|A| = (0)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$(-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + (-2)(-107) + (-2)(61) = 92$$

لاحظ كيف أن الطريقة الثانية كانت أيسر كثيرا في الحسابات. باختيار الفك عن طريق العمود الثالث لدينا عنصران أصفار، لذلك محددين من الحجم 3×3 لسنا في حاجة إلى حسابهما.

مثال ٥-١-١٥. نعتبر المصفوفة المثلثة العليا

$$T=\begin{bmatrix}2&3&-1&3&3\\0&-1&5&2&-1\\0&0&3&9&2\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

سوف نحسب محدد المصفوفة من الحجم 5×5 بتتابع الفك عن طريق العمود الأول في كل مصفوفة جزئية تظهر وليس لها معامل صفري مضروب فيه

$$\begin{aligned}\det(T)&=\begin{vmatrix}2&3&-1&3&3\\0&-1&5&2&-1\\0&0&3&9&2\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&0&5\end{vmatrix}\\&=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&5&2&-1\\0&3&9&2\\0&0&-1&3\\0&0&0&5\end{vmatrix}\\&=2(-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&9&2\\0&-1&3\\0&0&5\end{vmatrix}\\&=2(-1)(3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&3\\0&5\end{vmatrix}\\&=2(-1)(3)(-1)(-1)^{1+1}\,|5|\\&=2(-1)(3)(-1)(5)=30\end{aligned}$$

عند مطالعة كتب أخرى في دراسة المحددات سوف تطالعنا كلمة **فرعي** (أو **صغير**) minor و **عامل مرافق** cofactor خصوصا عند الحديث عن المفكوك عن طريق الصفوف أو الأعمدة. ولكن هنا فضلنا عدم استخدام صياغة هذه التعريفات حيث يمكننا العمل بدونها. ومع ذلك المحددة الصغرى هي محددة مصفوفة جزئية، وتحديدا $\det(A(i\,|\,j))$ عادة يشار إليها على أنها المحددة الصغرى لـ $[A]_{ij}$. العامل المرافق

هو المحددة الصغرى باعتبار الإشارة، تحديدا العامل المرافق لـ $[A]_{ij}$ هو $(-1)^{i+j}\det(A(i\,|\,j))$.

تمارين ٥-١

١- كون المصفوفة الأولية التي تؤثر كعملية الصف $-6R_2 + R_3$ على مصفوفة من الحجم 4×7.

٢- أحسب محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

٣- أحسب محدد المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

٤- أحسب محدد المصفوفات التالية

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(ب) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(ج) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
(د) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(ز) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.   (ح) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

٥- أوجد قيمة k بحيث أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ يكون لها $\det(A) = 0$.

٦- أوجد قيمة k بحيث أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix}$ يكون لها $\det(A) = 0$.

٧- نعتبر المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ 4 & 2-x \end{bmatrix}$. أوجد كل قيم x التي تكون حلا للمعادلة $\det(B) = 0$.

٨- نعتبر المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 4-x & -4 & -4 \\ 2 & -2-x & -4 \\ 3 & -3 & -4-x \end{bmatrix}$. أوجد كل قيم x التي تكون حلا للمعادلة $\det(B) = 0$.

٥-٢ خواص محدد المصفوفة
Properties of Determinants of Matrices

رأينا في الفصل السابق كيف نحسب محدد مصفوفة، وحقيقة، قد لا تصدق، وهي أنه يمكننا إجراء المفكوك عن طريق أي صف أو أي عمود للحصول على قيمة المحدد. في هذا الفصل الذي يكون نظريا أكثر، سوف نصوغ ونبرهن العديد من الخواص الأكثر إثارة للاهتمام حول المحددات. هدفنا الأساسي هو نظريتي ٥-٢-١٠ و ٥-٢-١٢، ولكن أكثر تحديدا سوف نرى كيف أن قيمة المحدد سوف تسمح لنا باكتساب بصيرة نافذة حول الخصائص المختلفة لمصفوفة مربعة.

المحددات وعمليات الصفوف

نبدأ بنظرية سهلة ومباشرة وبرهانها ينبئنا بنمط البراهين في هذا القسم.

نظرية ٥-٢-١. نفرض أن A مصفوفة مربعة حيث أحد صفوفها (أو أعمدتها) كله أصفار. إذن $\det(A)=0$.

البرهان: نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n وأن الصف رقم i كله أصفار. نحسب $\det(A)$ بالفك عن طريق الصف رقم i.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{ij}\det(A(i\,|\,j))\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\ 0\det(A(i\,|\,j))\\ &= \sum_{j=1}^{n}0=0\end{aligned}$$

البرهان في حالة العمود تكون بالمثل أو يمكن اشتقاقها من تطبيق نظرية ٥-١-١٢ التي تتعلق بمدور المصفوفة.

نظرية ٥-٢-٢. نفرض أن A مصفوفة مربعة. نفرض B هي المصفوفة التي نحصل عليها من A بتبديل وضع صفين (أو عمودين). إذن $\det(B)=-\det(A)$.

البرهان: نبدأ بالحالة الخاصة حيث A مصفوفة مربعة من الحجم n ونكون المصفوفة B بتبديل الصفين المتجاورين i و $i+1$ لبعض $1 \le i \le n$. لاحظ أن الفرض حول تبديل صفين متجاورين يعني أن $B(i+1|j) = A(i|j)$ لكل $1 \le i \le n$ و $[B]_{i+1,j} = [A]_{ij}$ لكل $1 \le j \le n$. نحسب $\det(B)$ بالفك عن طريق الصف $i+1$.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+1)+j} [B]_{i+1,j} \det(B(i+1|j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+1)+j} [A]_{ij} \det(A(i|j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \det(A(i|j)) \\
&= (-1)\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \det(A(i|j)) \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

الآن نعتبر تبديل الصف s مع الصف t حيث $1 \le s < t \le n$.
نبدأ بالصف s ، نكرر تبديل الصف مع الصف أسفل منه بما فيه الصف t ونتوقف عندها. هذا سوف يعطي $t-s$ تبديل. الآن نبدل الصف السابق t ،والذي تحول إلى الصف $t-1$ ، مع كل صف أعلى منه ونتوقف عندما يصبح الصف s. هذا سوف يعطي $t-s-1$ تبديلة أخرى. بهذه الطريقة نكون قد كونا B خلال متتابعة من $2(t-s)-1$ تبديل لصفين متجاورين، كل منها يضبط $\det(A)$ بالضرب في معامل (-1). لذلك

$$\begin{aligned}
\det(B) &= (-1)^{2(t-s)-1} \det(A) = ((-1)^2)^{t-s} (-1)^{-1} \det(A) \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

كما هو مطلوب.

البرهان في حالة تبديل عمودين تكون بالمثل أو يمكن اشتقاقها من تطبيق نظرية ٥-١-١٢ التي تتعلق بمدور المصفوفة.

النظرية السابقة توضح لنا تأثير عملية الصف الأولى على محدد المصفوفة. الآن ننظر في تأثير عملية الصف الثانية.

نظرية ٥-٢-٣. نفرض أن A مصفوفة مربعة. نفرض B هي المصفوفة التي نحصل عليها من A بضرب صف (أو عمود) واحد في الكمية القياسية α . إذن $\det(B)=\alpha\det(A)$.

البرهان: نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n ونكون المصفوفة المربعة B بضرب كل عناصر الصف i من المصفوفة A في الكمية القياسية α. لاحظ أن الصفوف الأخرى في A و B تكون متساوية، لذلك $A(i\,|\,j)=B(i\,|\,j)$ لكل $1\le j\le n$. نحسب $\det(B)$ بالفك عن طريق الصف i.

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[B]_{ij}\det(B(i\,|\,j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[B]_{ij}\det(A(i\,|\,j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha[A]_{ij}\det(A(i\,|\,j)) \\
&= \alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}[A]_{ij}\det(A(i\,|\,j)) \\
&= \alpha\det(A)
\end{aligned}$$

البرهان في حالة ضرب عناصر عمود في قياسي تكون بالمثل أو يمكن اشتقاقها من تطبيق نظرية ٥-١-١٢ التي تتعلق بمدور المصفوفة.

قبل أن ننظر في تأثير عملية الصف الثالثة على المحدد، نعتبر النتيجة البسيطة التالية.

نظرية ٥-٢-٤. نفرض A مصفوفة مربعة بها صفين متساويين أو عمودين متساويين. إذن $\det(A)=0$.

البرهان: نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n حيث الصفين s و t متساويان. نكون المصفوفة B بتبديل الصفين s و t. لاحظ أنه كنتيجة للفرض، $A=B$. إذن.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \frac{1}{2}(\det(A)+\det(A)) \\ &= \frac{1}{2}(\det(A)-\det(B)) \\ &= \frac{1}{2}(\det(A)-\det(A)) \\ &= \frac{1}{2}(0)=0\end{aligned}$$

البرهان في حالة تساوي عمودين تكون بالمثل أو يمكن اشتقاقها من تطبيق نظرية ٥-١-١٢ التي تتعلق بمدور المصفوفة.

الآن نوضح عملية الصف الثالثة.

نظرية ٥-٢-٥. نفرض أن A مصفوفة مربعة. نفرض أن B مصفوفة مربعة حصلنا عليها من A بضرب صف في قياسي α ثم نضيف الناتج إلى صف آخر (أو ضرب عمود في قياسي ثم نضيف الناتج إلى عمود آخر). إذن $\det(A)=\det(A)$.

البرهان: نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n. نكون المصفوفة B بضرب الصف s في القياسي α ونضيف الناتج إلى الصف t. نفرض أن C هي المصفوفة الافتراضية حيث استبدلنا الصف t في A بالصف s في A. لاحظ أن $A(t\,|\,j)=B(t\,|\,j)=C(t\,|\,j)$ لكل $1\le j\le n$. نحسب محدد B بالفك عن طريق الصف t.

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}[B]_{tj}\det(B(t\,|\,j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}\left(\alpha[A]_{sj}+[A]_{tj}\right)\det(B(t\,|\,j)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}\alpha[A]_{sj}\det(B(t\,|\,j))\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}[A]_{tj}\det(B(t\mid j))$$

$$=\alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}[A]_{sj}\det(B(t\mid j))$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}[A]_{tj}\det(B(t\mid j))$$

$$=\alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}[C]_{tj}\det(C(t\mid j))$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{t+j}[A]_{tj}\det(A(t\mid j))$$

$$=\alpha\det(C)+\det(A)$$

$$=\alpha 0+\det(A)=\det(A)$$

البرهان في حالة إضافة مضاعفات عمود إلى عمود آخر تكون بالمثل أو يمكن اشتقاقها من تطبيق نظرية ٥-١-١٢ التي تتعلق بمدور المصفوفة.

مثال ٥-٢-٦. نعتبر أننا نريد حساب محدد المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2&0&2&3\\1&3&-1&1\\-1&1&-1&2\\3&5&4&0\end{bmatrix}$$

سوف نجري متتابعة من عمليات الصف على هذه المصفوفة، للحصول على مصفوفة مثلثة عليا، محددها سوف يساوي ببساطة حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي. لكل عملية صف، سوف نعزو التأثير على المحدد للنظريات ٥-٢-٢، ٥-٢-٣ و ٥-٢-٥.

$$\det(A) \qquad A=\begin{bmatrix}2&0&2&3\\1&3&-1&1\\-1&1&-1&2\\3&5&4&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad -\det(A_1)$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad -\det(A_2)$$

$$\xrightarrow{1R_1+R_3} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad -\det(A_3)$$

$$\xrightarrow{-3R_1+R_4} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad -\det(A_4)$$

$$\xrightarrow{1R_3+R_2} A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad -\det(A_5)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad 2\det(A_6)$$

$$\xrightarrow{-4R_2+R_3} A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & -4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad 2\det(A_7)$$

$$\xrightarrow{4R_2+R_4} A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} \qquad 2\det(A_8)$$

$$\xrightarrow{-1R_3+R_4} A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{bmatrix} \qquad 2\det(A_9)$$

$$\xrightarrow{-2R_4+R_3} A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \end{bmatrix} \qquad 2\det(A_{10})$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \qquad -2\det(A_{11})$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{55}R_4} A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -110\det(A_{12})$$

المصفوفة A_{12} مصفوفة مثلثة علوية لذلك المفكوك عن طريق العمود الأول بالتتابع نحصل على $\det(A_{12}) = (1)(1)(1)(1) = 1$ ومن ثم $\det(A) = -110(1) = -110$.

المحددات، عمليات الصف، المصفوفات الأولية

كاستعداد نهائي للنظريتين الأكثر أهمية عن المحددات، سوف نبرهن بعض الخواص حول تأثير عمليات الصف والضرب في المصفوفات الأولية مع قيمة المحدد. ولكن نبدأ بخاصية عن مصفوفة الوحدة.

نظرية ٥-٢-٧. لكل $n \geq 1$، $\det(I_n) = 1$.

البرهان: سوف نستخدم البرهان بالاستنتاج الرياضي على n.

عندما $n=1$ ، النتيجة تكون محققة، حيث

$$\det(I_1)=[I_1]_{11}=1$$

الآن نفرض أن النظرية تكون محققة لمصفوفة الوحدة من الحجم $n-1$ ونبرهن أنها تكون محققة لمصفوفة الوحدة من الحجم n، نحسب المحدد عن طريق الصف الأول،

$$\begin{aligned}\det(I_n)&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}[I_n]_{1j}\det(I_n(1\,|\,j))\\&=(-1)^{1+1}[I_n]_{11}\det(I_n(1\,|\,1))\\&\qquad+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}[I_n]_{1j}\det(I_n(1\,|\,j))\\&=1\det(I_{n-1})+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}0\det(I_n(1\,|\,j))\\&=1(1)+\sum_{j=2}^{n}0=1\end{aligned}$$

نظرية ٥-٢-٨. للأنواع الثلاثة الممكنة من المصفوفات الأولية المحددات تكون

١- $\det(E_{i,j})=-1$.

٢- $\det(E_i(\alpha))=\alpha$.

٣- $\det(E_{i,j}(\alpha))=1$.

البرهان: بتبديل الصفين i و j في مصفوفة الوحدة نحصل على $E_{i,j}$ (تعريف المصفوفات الأولية) ومن ثم

$$\begin{aligned}\det(E_{i,j})&=-\det(I_n) &&\text{(نظرية ٥-٢-٢)}\\&=-1 &&\text{(نظرية ٥-٢-٧)}\end{aligned}$$

بضرب الصف رقم i من مصفوفة الوحدة في α نحصل على $E_i(\alpha)$ ، ومن ثم

$$\det(E_i(\alpha))=\alpha\det(I_n)$$

$$= \alpha(1) = \alpha$$

بإضافة الصف i في مصفوفة الوحدة مضروبا في α إلى الصف j نحصل على $E_{i,j}(\alpha)$، ومن ثم

$$\det(E_{i,j}(\alpha)) = \det(I_n) = 1$$

نظرية ٥-٢-٩. نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n و E مصفوفة أولية من الحجم n. إذن

$$\det(EA) = \det(E)\det(A)$$

البرهان: البرهان يتم علا ثلاثة أجزاء، جزء لكل نوع من المصفوفات الأولية.

أولا، نفرض أن B هي المصفوفة التي نحصل عليها من A بتبديل الصفين i و j.

$$\begin{aligned} \det(E_{i,j}A) &= \det(B) \\ &= -\det(A) \\ &= \det(E_{i,j})\det(A) \end{aligned}$$

ثانيا، نفرض أن B هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بضرب الصف رقم i في α.

$$\begin{aligned} \det(E_i(\alpha)A) &= \det(B) \\ &= \alpha\det(A) \\ &= \det(E_i(\alpha))\det(A) \end{aligned}$$

ثالثا، نفرض أن B هي المصفوفة التي نحصل عليها من المصفوفة A بضرب الصف رقم i في α وإضافة الناتج إلى الصف j.

$$\begin{aligned} \det(E_{i,j}(\alpha)A) &= \det(B) \\ &= \det(A) \\ &= \det(E_{i,j}(\alpha))\det(A) \end{aligned}$$

المحددات، المصفوفات غير الشاذة، ضرب المصفوفات

إذا سألت أي شخص لديه خبرة كبيرة في العمل مع المصفوفات عن قيمة المحدد سوف يجيبك بالنظرية التالية باعتبارها أول شيء يتبادر إلى الذهن.

نظرية ٥-٢-١٠. نفرض أن A مصفوفة مربعة. إذن A تكون شاذة إذا وفقط إذا كان $\det(A) = 0$.

البرهان: بدلا عن القفز إلى شطري التكافؤ، نقرر أولا بعض البنود. نفرض أن B هي المصفوفة الوحيدة المتكافئة صفيا مع A وفي الشكل الصفي المدرج المختزل (نظرية ١-٢-١٦، ١-٢-١٧). لكل عملية من عمليات الصف التي تحول A إلى B توجد مصفوفة أولية E_i تؤثر عملية الصف بالضرب في المصفوفة (نظرية ٥-١-٣) بتكرار تطبيق نظرية ٥-١-٣ يمكننا كتابة

$$A = E_s E_{s-1} \ldots E_2 E_1 B$$

إذن

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(E_s E_{s-1} \ldots E_2 E_1 B) \\ &= \det(E_s)\det(E_{s-1})\ldots\det(E_2)\det(E_1)\det(B)\end{aligned}$$

من نظرية ٥-٢-٨ يمكننا استنتاج أن محدد المصفوفة الأولية لا يمكن أن تكون صفر أبدا (لاحظ الحظر المفروض على $\alpha = 0$ في تعريف ٥-١-١). لذلك الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة هو حاصل ضرب كميات قياسية لا تساوي الصفر، مع احتمال أن $\det(B)$ يمكن أن يساوي الصفر. أكثر تحديدا، يمكننا تقرير أن $\det(A) = 0$ إذا وفقط إذا كان $\det(B) = 0$. من هذا يمكننا أن نصل إلى شطري التكافؤ.

في الاتجاه الأول، إذا كانت A شاذة فإنه من نظرية ١-٥-٧، B لا يمكن أن تكون مصفوفة الوحدة. لأن (١) عدد الأعمدة المحورية يساوي عدد الأصفار غير الصفرية، (٢) ليس كل عمود يكون محوري، و(٣) B مربعة، نجد أن B يجب أن يكون لها صف صفري. من نظرية ٥-٢-١، محدد B يكون صفر، ومن المناقشة أعلى، نستنتج أن محدد A يكون صفر.

في الاتجاه الآخر، نستخدم البرهان بالمكافئ العكسي. نفرض أن A مصفوفة غير شاذة، من نظرية ١-٥-٧، B تكون هي مصفوفة الوحدة، ومن نظرية ٥-٢-٧ $\det(B) = 1 \neq 0$. من المناقشة السابقة، نستنتج أن محدد A كذلك لا يساوي الصفر.

حيث أن نظرية ٥-٢-١٠ هي تكافؤ، يمكننا توسيع قائمة تكافؤات المصفوفة غير الشاذة. إضافة الشرط $\det(A) \neq 0$ هي واحدة من أفضل الدوافع لتعلم المحددات.

نظرية ٥-٢-١١. نفرض A مصفوفة مربعة من الحجم n. العبارات التالية تكون متكافئة

١- A مصفوفة غير شاذة.
٢- الشكل الصفي المدرج المختزل للمصفوفة A هو مصفوفة الوحدة.
٣- الفضاء الصفري للمصفوفة A يحتوي فقط المتجه الصفري، أي أن $N(A) = \{0\}$.
٤- النظام الخطي $LS(A,b)$ يكون له حل وحيد لكل اختيار ممكن للمتجه b.
٥- أعمدة A تكون مجموعة مستقلة خطيا.
٦- A تكون منعكسة.
٧- فضاء الأعمدة لـ A يكون $\mathbb{C}^n$ ، $C(A) = \mathbb{C}^n$.
٨- أعمدة A تكون أساس لـ $\mathbb{C}^n$.
٩- رتبة A تساوي n، $r(A) = n$.
١٠- صفرية A تساوي صفر، $n(A) = 0$.
١١- محدد A لا يساوي الصفر، $\det(A) \neq 0$.

البرهان: نظرية ٥-٢-١٠ تقول أن A تكون شاذة إذا وفقط إذا كان $\det(A) = 0$. بنفي كلا العبارتين، نصل إلى مكافئين عكسيين بضمهما نحصل على التكافؤ، A تكو غير شاذة إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$. هذا يسمح لنا بإضافة التقرير الجديد إلى القائمة الموجودة في نظرية ٤-٥-١٧.

الآن نعمم نظرية ٥-٢-٩ إلى حاصل ضرب أي مصفوفتين مربعتين.

نظرية ٥-٢-١٢. نفرض أن A و B مصفوفتين مربعتين من نفس الحجم. إذن $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

البرهان: البرهان يتكون من حالتين. أولا، نفرض أن A شاذة. إذن من نظرية ٥-٢-١٠، $\det(A)=0$. ومن المكافئ العكسي لنظرية ٣-٤-١ AB تكون شاذة كذلك. ومن نظرية ٥-٢-١٠ $\det(AB)=0$. ومن ثم

$$\det(AB)=0=0\det(B)=\det(A)\det(B)$$

كما هو مطلوب.

بالنسبة للحالة الثانية، نفرض أن A غير شاذة. من نظرية ٥-١-٥ توجد مصفوفات أولية $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_s$ بحيث $A=E_1E_2E_3\ldots E_s$. إذن

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1E_2E_3\ldots E_sB)\\ &= \det(E_1)\det(E_2)\det(E_3)\ldots\det(E_s)\det(B)\\ &= \det(E_1E_2E_3\ldots E_s)\det(B)\\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

تمارين ٥-٢

١- نعتبر المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}0 & 8 & 3 & -4\\ -1 & 2 & -2 & 5\\ -2 & 8 & 4 & 3\\ 0 & -4 & 2 & -3\end{bmatrix} B=\begin{bmatrix}0 & 8 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2 & -3\\ -2 & 8 & 4 & 3\\ -1 & 2 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

إذا كان $\det(A)=-120$، فما هو $\det(B)$ ؟ لماذا ؟

٢- أوجد مثال يبين أن العبارة التالية ليست صحيحة لكل المصفوفات A و B المربعة من نفس الحجم
$\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$.

٣- نظرية ٣-٤-١ تقول أنه إذا كان حاصل ضرب مصفوفتين AB هو مصفوفة غير شاذة فإن المصفوفتان A و B كلاهما تكون غير شاذة. أعط برهان جديد لهذه النظرية باستخدام نظريات عن محددات المصفوفات.

٤- نفرض أن A مصفوفة مربعة من الحجم n وأن $\alpha\in\mathbb{C}$ قياسي. برهن أن $\det(\alpha A)=\alpha^n\det(A)$.