

**مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية**  
*Total Angular Momentum Operator*

## مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية

### Total Angular Momentum Operator

**تعريف :** يعرف المؤثر الإتجاهي لكمية الحركة الزاوية الكلية بأنه مجموع مؤثري كمية الحركة الزاوية المدارية وكمية الحركة الزاوية اللفية ، أي :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

وتحدد حالة النظام حينئذ بالمؤثر  $J^2, J_z$  ، مربع كمية الحركة الزاوية الكلية ، مركبة  $\vec{J}$  في إتجاه معين ( محور z ) حيث  $\vec{J} = \hat{i}J_x + \hat{j}J_y + \hat{k}J_z$  ويمكن إثبات العلاقات الآتية :

$$(i) \quad [J_x, J_y] = i\hbar J_z, [J_y, J_z] = i\hbar J_x, [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

$$(ii) \quad [J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$$

إيجاد القيم الذاتية والدوال الذاتية لمؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية :

حيث أن  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  ، وحيث أن :  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  ( الجزء الأول )

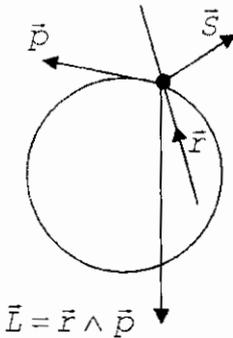
أيضاً نفرض أن :

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2 \quad \text{العلاقة}$$

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad \text{تناظر العلاقة}$$

$$J_z = \alpha\hbar \quad \text{والعلاقة}$$

$$L_z = m\hbar \quad \text{تناظر العلاقة}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

نوجد أولاً : القيم الذاتية والدوال الذاتية للمركبة  $J_z$  :

$$J_z = L_z + S_z = L_z + \frac{\hbar}{2} \sigma_z = m\hbar + \frac{\hbar}{2} (\pm 1) = (m \pm \frac{1}{2})\hbar$$

أيضاً نفرض الدالة الموجية :

$$\phi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ حيث } \Psi_{\ell,m,s} = \psi_{\ell,m} \phi_s$$

$$\therefore J_z \Psi_{\ell,m,s} = (m \pm \frac{1}{2}) \hbar \Psi_{\ell,m,s}$$

وبضرب الطرفين في  $\Psi_{\ell',m',s'}^*$  والتكامل نحصل على :

$$\int \Psi_{\ell',m',s'}^* J_z \Psi_{\ell,m,s} d\tau = (m \pm \frac{1}{2}) \hbar \int \Psi_{\ell',m',s'}^* \Psi_{\ell,m,s} d\tau$$

$$\therefore (J_z)_{\ell,m,s; \ell',m',s'} = (m \pm \frac{1}{2}) \hbar \delta_{\ell\ell'} \cdot \delta_{mm'} \cdot \delta_{ss'}$$

وهذا يعني أن المصفوفة المصاحبة للمؤثر  $J_z$  هي مصفوفة قطرية .

والآن : لإيجاد القيم الذاتية والدوال للمؤثر  $J^2$  :

حيث أن  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  فإن :

$$J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J} = (\vec{L} + \vec{S}) \cdot (\vec{L} + \vec{S}) = (\vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}) \cdot (\vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma})$$

$$= L^2 + \frac{\hbar^2}{4} \sigma^2 + \hbar (\vec{\sigma} \cdot \vec{L})$$

باعتبار أن  $\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \vec{L} \cdot \vec{\sigma}$

نفرض الدالة الموجية  $\Psi_{\ell,m,s} = \psi_{\ell,m} \phi_s$

حيث  $\psi_{\ell,m}$  هي دوال أيّة لكل من  $L^2, L_z$  أي :

$$L^2 \psi_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) \psi_{\ell,m}, \quad L_z \psi_{\ell,m} = m \hbar \psi_{\ell,m}$$

$$\therefore J^2 (\psi_{\ell,m} \phi_s) = \phi_s L^2 \psi_{\ell,m} + \psi_{\ell,m} \frac{\hbar^2}{4} \sigma^2 \phi_s + \hbar (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) \psi_{\ell,m} \phi_s$$

والآن : حيث أن

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\therefore \sigma^2 \phi_s = 3\phi_s$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} &= \sigma_x L_x + \sigma_y L_y + \sigma_z L_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} L_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L_z \\ &= \begin{pmatrix} L_z & L_x - iL_y \\ L_x + iL_y & -L_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore J^2 \psi_{\ell,m} \phi_s &= \hbar^2 \ell(\ell+1) \psi_{\ell,m} \phi_s + \frac{3}{4} \hbar^2 \psi_{\ell,m} \phi_s \\ &+ \hbar \begin{pmatrix} L_z & L_x - iL_y \\ L_x + iL_y & -L_z \end{pmatrix} \psi_{\ell,m} \phi_s \\ &= \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] \psi_{\ell,m} \phi_s \\ &+ \hbar \begin{pmatrix} L_z & L_x - iL_y \\ L_x + iL_y & -L_z \end{pmatrix} \psi_{\ell,m} \phi_s \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

والآن نعتبر الحل العام الآتي :

$$\Psi_{\ell,m,s} = C_1 \psi_{\ell,m'} \phi_1 + C_2 \psi_{\ell,m''} \phi_2 = \begin{pmatrix} C_1 \psi_{\ell,m'} \\ C_2 \psi_{\ell,m''} \end{pmatrix}$$

حيث  $C_1, C_2$  يمثلان احتمال أن الإلكترون ذو اللف (Spining electron) يكون له الدالة الموجية  $\phi_1, \phi_2$  على الترتيب .

وباستخدام (1) وإعتبار أن  $\mathcal{E}$  هو القيمة الذاتية للمؤثر  $J^2$  فإن :

$$\mathcal{E} \begin{pmatrix} C_1 \psi_{\ell, m'} \\ C_2 \psi_{\ell, m'} \end{pmatrix} = \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] \begin{pmatrix} C_1 \psi_{\ell, m'} \\ C_2 \psi_{\ell, m'} \end{pmatrix} + \hbar \begin{pmatrix} L_z & L_x - iL_y \\ L_x + iL_y & -L_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \psi_{\ell, m'} \\ C_2 \psi_{\ell, m'} \end{pmatrix}$$

وهذا يؤدي إلى العلاقتين :

$$\left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] - \mathcal{E} \right\} C_1 \psi_{\ell, m'} + \hbar \left\{ L_z C_1 \psi_{\ell, m'} + (L_x - iL_y) C_2 \psi_{\ell, m'} \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] - \mathcal{E} \right\} C_2 \psi_{\ell, m'} + \hbar \left\{ (L_x + iL_y) C_1 \psi_{\ell, m'} - L_z C_2 \psi_{\ell, m'} \right\} = 0 \quad (3)$$

من (2) :

$$\therefore \left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] - \mathcal{E} \right\} C_1 \psi_{\ell, m'} + \hbar^2 m' C_1 \psi_{\ell, m'} + C_2 \hbar^2 \sqrt{(\ell+m'')( \ell-m''+1)} \psi_{\ell, m''-1} = 0$$

$$\therefore \left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + m' \right] - \mathcal{E} \right\} C_1 \psi_{\ell, m'} + C_2 \hbar^2 \sqrt{(\ell+m'')( \ell-m''+1)} \psi_{\ell, m''-1} = 0 \quad (4)$$

أيضاً من (3) فإن :

$$\left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} - m'' \right] - \mathcal{E} \right\} C_2 \psi_{\ell, m'} + C_1 \hbar^2 \sqrt{(\ell - m')(\ell + m' + 1)} \psi_{\ell, m'+1} = 0 \quad (5)$$

[ استخدمنا هنا العلاقة :

$$[(L_x \mp iL_y)\psi]_{\ell, m} = \hbar \sqrt{(\ell \pm m)(\ell \mp m + 1)} \psi_{\ell, m \mp 1}$$

والآن : لكي نتحقق العلاقتان (4) ، (5) ، فإن :  $m' = m'' - 1$

$$\therefore \left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + m' \right] - \mathcal{E} \right\} C_1 + C_2 \hbar^2 \sqrt{(\ell + m' + 1)(\ell - m')} = 0$$

$$\therefore \left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} - m' - 1 \right] - \mathcal{E} \right\} C_2 + C_1 \hbar^2 \sqrt{(\ell - m')(\ell + m' + 1)} = 0$$

والحل غير الصفري لهاتين العلاقتين يعطي :

$$\begin{vmatrix} \hbar \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + m' \right] - \mathcal{E} & \hbar^2 \sqrt{(\ell + m' + 1)(\ell - m')} \\ \hbar^2 \sqrt{(\ell - m')(\ell + m' + 1)} & \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} - m' - 1 \right] - \mathcal{E} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + m' \right] - \mathcal{E} \right\} \left\{ \hbar^2 \left[ \ell(\ell+1) - \frac{1}{4} - m' \right] - \mathcal{E} \right\} &= \\ = \hbar^4 \sqrt{(\ell + m' + 1)(\ell - m')(\ell - m')(\ell + m' + 1)} & \\ = \hbar^4 (\ell + m' + 1)(\ell - m') & \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{E}^2 - 2\hbar^2 \mathcal{E} \left[ \ell(\ell+1) + \frac{1}{4} \right] + \hbar^4 \left\{ \left[ \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right] \left[ \ell(\ell+1) - \frac{1}{4} \right] - \ell(\ell+1) \right\} = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}^2 - 2\hbar^2 \mathcal{E} \left[ \ell(\ell+1) + \frac{1}{4} \right] + \hbar^4 \left\{ \left[ \ell^2(\ell+1)^2 - \frac{1}{2}\ell(\ell+1) - \frac{3}{16} \right] \right\} = 0$$

$$\therefore \left[ \mathcal{E} - \hbar^2 \left( \ell^2 + 2\ell + \frac{3}{4} \right) \right] \left[ \mathcal{E} - \hbar^2 \left( \ell^2 - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$\therefore \left[ \mathcal{E} - \hbar^2 \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left( \ell + \frac{3}{2} \right) \right] \left[ \mathcal{E} - \hbar^2 \left( \ell - \frac{1}{2} \right) \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \right] = 0$$

$$\therefore \mathcal{E} = \hbar^2 \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left( \ell + \frac{3}{2} \right) \quad , \quad \mathcal{E} = \hbar^2 \left( \ell - \frac{1}{2} \right) \left( \ell + \frac{1}{2} \right)$$

↓

$$j = \ell + \frac{1}{2} \text{ باخذ}$$

↓

$$j = \ell - \frac{1}{2} \text{ باخذ}$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{E} = \hbar^2 j(j+1)}$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{E} = \hbar^2 j(j+1)}$$

وبذلك فإن القيم الذاتية للمؤثر  $J^2$  هو  $\mathcal{E} = \hbar^2 j(j+1)$  حيث  $j = \ell \pm \frac{1}{2}$  وهو المطلوب .

### أمثلة محلولة :

مثال (1) : أثبت العلاقة الآتية :

$$\left[ J_x^2, J_y^2 \right] = \left[ J_y^2, J_z^2 \right] = \left[ J_z^2, J_x^2 \right]$$

الحل :

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad \therefore J_y^2 = J^2 - J_x^2 - J_z^2$$

$$\therefore \left[ J_x^2, J_y^2 \right] = \left[ J_x^2, J^2 - J_x^2 - J_z^2 \right] = \left[ J_x^2, J^2 \right] - \left[ J_x^2, J_x^2 \right] - \left[ J_x^2, J_z^2 \right]$$

ولكن  $J_x$  يتبادل مع  $J^2, J_x$  أي أن

$$\left[ J_x^2, J_x^2 \right] = \left[ J_x^2, J^2 \right] = 0$$

$$\therefore \left[ J_x^2, J_y^2 \right] = \left[ J_x^2, J_z^2 \right] = \left[ J_z^2, J_x^2 \right] \quad \underline{\quad (1)}$$

وبالمثل وباستخدام الحقيقة أن  $J_y$  يتبادل مع  $J_y^2$ , أي أن

$$[J_y^2, J_y^2] = [J_y^2, J^2] = 0$$

يمكن إثبات أن

$$[J_y^2, J_z^2] = [J_x^2, J_y^2] \quad \text{_____ (2)}$$

من (1) ، (2) نحصل على :

$$[J_x^2, J_y^2] = [J_y^2, J_z^2] = [J_z^2, J_x^2]$$

وهو المطلوب .

**مثال (٢) :** إذا كان المؤثر  $S_r = \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r}$  يمثل مركبة لف الإلكترون في اتجاه  $\vec{r}$

وهو مؤثر قياسي ، أثبت أنه يكون متبادلاً مع مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلي

$$[\vec{L}, S_r], [\vec{S}, S_r] \quad \text{وذلك بحساب المبدولين} \quad [\vec{J}, S_r] \quad \text{، أي أن} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

مستخدماً العلاقات التبادلية لكل من  $\vec{L}, r$  .

**الحل :**

$$[\vec{L}, S_r] = \left[ \vec{L}, \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{r} \right] = \frac{1}{r} [\hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z, \vec{S} \cdot \vec{r}] \quad \text{_____ (1)}$$

والآن :

$$\begin{aligned} [L_x, \vec{S} \cdot \vec{r}] &= [L_x, S_x x + S_y y + S_z z] = [L_x, S_y y] + [L_x, S_z z] \\ &= S_y [L_x, y] + S_x [L_x, z] = i\hbar S_y z - i\hbar S_z y \\ &= -i\hbar (\vec{r} \wedge \vec{S})_x \end{aligned}$$

وبالمثل :

$$[L_y, \vec{S} \cdot \vec{r}] = -i\hbar (\vec{r} \wedge \vec{S})_y , [L_z, \vec{S} \cdot \vec{r}] = -i\hbar (\vec{r} \wedge \vec{S})_z$$

وبالتالي فإن معادلة (1) تعطي :

$$[\bar{L}, S_r] = \frac{1}{r} \{ -i\hbar(\bar{r} \wedge \bar{S}) \} = -i\hbar \frac{(\bar{r} \wedge \bar{S})}{r} \quad (2)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$[\bar{S}, S_r] = i\hbar \frac{(\bar{r} \wedge \bar{S})}{r} \quad (3)$$

من (2) ، (3) نجد أن :

$$[\bar{S}, S_r] = -[\bar{L}, S_r]$$

$$\therefore [\bar{S}, S_r] + [\bar{L}, S_r] = 0 \quad \therefore [\bar{S} + \bar{L}, S_r] = 0 \quad \therefore [\bar{J}, S_r] = 0$$

وهو المطلوب .

**مثال (3) :** أثبت أن المؤثر  $(\bar{L} \cdot \bar{S})$  الذي يمثل التفاعل بين كمية الحركة الزاوية

المدارية  $(\bar{L})$  وكمية الحركة الزاوية اللفية  $(\bar{S})$  له القيمتان الذاتيتان

$-\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2}$  وذلك في الحالة  $p$  للإلكترون [ التي تتميز بالعدد الكمي

$\ell = 1$  ] وحيث العدد الكمي اللفي للإلكترون  $s = \frac{1}{2}$  .

أثبت أيضاً العلاقة الآتية :

$$\bar{L} \cdot \bar{S} = \frac{1}{2} (L_+ S_- + L_- S_+ + 2L_z S_z)$$

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y, S_{\pm} = S_x \pm iS_y \quad \text{حيث :}$$

**الحل :**

الحالة  $p$  ( $p$ -state) للإلكترون هي الحالة التي تتميز بالعدد

الكمي المداري  $\ell = 1$  ، ولما كان العدد الكمي اللفي للإلكترون  $s = \frac{1}{2}$  فإن

العدد الكمي الكلي  $j$  [ المناظر للمؤثر الكلي  $\bar{J} = \bar{L} + \bar{S}$  ] يأخذ القيم

$(\ell \pm \frac{1}{2})$  أي  $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  ، والآن :

$$J^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2(\vec{L} \cdot \vec{S})$$

$$\therefore \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

القيم الذاتية لـ  $(\vec{L} \cdot \vec{S})$  يمكن كتابتها بالصورة :

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} [\langle J^2 \rangle - \langle L^2 \rangle - \langle S^2 \rangle] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \end{aligned}$$

حيث

$$\langle J^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1), \quad \langle L^2 \rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1), \quad \langle S^2 \rangle = \hbar^2 s(s+1)$$

وبالتعويض عن قيمة  $\ell = 1, s = \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ j(j+1) - 1 \cdot (1+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ j(j+1) - 2 - \frac{3}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ j(j+1) - \frac{11}{4} \right] \end{aligned}$$

وعندما  $j = \frac{3}{2}$  فإن :

$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ \frac{15}{4} - \frac{11}{4} \right] = \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ \frac{4}{4} \right] = \frac{1}{2} \hbar^2$$

وعندما  $j = \frac{1}{2}$  فإن :

$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \left[ \frac{3}{4} - \frac{11}{4} \right] = \frac{1}{2} \hbar^2 [-2] = -\hbar^2$$

أي أن القيم الذاتية لـ  $(\vec{L} \cdot \vec{S})$  هي :  $-1, \frac{1}{2}$  ، وهو المطلوب أولاً .

ولإثبات العلاقة :

$$\bar{L} \cdot \bar{S} = \frac{1}{2}(L_+ S_- + L_- S_+ + 2L_z S_z)$$

حيث أن :

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad , \quad S_{\pm} = S_x \pm iS_y$$

$$\therefore L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \quad , \quad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$$

$$S_x = \frac{1}{2}(s_+ + s_-) \quad , \quad S_y = \frac{1}{2i}(s_+ - s_-)$$

$$\therefore \bar{L} \cdot \bar{S} = L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z$$

$$= \frac{1}{2}(L_+ + L_-) \cdot \frac{1}{2}(s_+ + s_-) + \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) \cdot \frac{1}{2i}(s_+ - s_-) + L_z S_z$$

$$= \frac{1}{4}(L_+ s_+ + L_+ s_- + L_- s_+ + L_- s_-) - \frac{1}{4}(L_+ s_+ - L_+ s_- - L_- s_+ + L_- s_-) + L_z S_z$$

$$= \frac{1}{2}(L_+ s_- + L_- s_+ + 2L_z S_z)$$

وهو المطلوب ثانياً .

## إضافة مؤثرات كميات الحركة الزاوية

### Addition of angular momentum Operators

مقدمة :

القيمة الذاتية للمؤثر  $J^2$  في الحالة المميزة بالعدد  $j, m$  والتي يرمز لها بالرمز  $|jm\rangle$  يمكن كتابتها بالصورة :

$$\langle J^2 \rangle = \langle jm | J^2 | jm \rangle$$

وإذا كانت القيمة الذاتية لـ  $J^2$  هي  $\lambda = \hbar^2 j(j+1)$  فإن معادلة القيمة الذاتية لـ  $J^2$  تكتب بالصورة  $J^2 |\lambda m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |\lambda m\rangle$  ، وحيث أن  $\lambda$  تعتمد على  $j$  فيمكن كتابة  $|\lambda m\rangle = |jm\rangle$  وهو متجه كيت لكلاً المؤثرين  $J^2, J_z$  ، وبالتالي فإن معادلتنا القيمة الذاتية لهذين المؤثرين يمكن كتابتها بالصورة :

$$J^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle$$

$$J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle$$

### معاملات كليش - جوردان - Clebsch - Gordan Coeff :

في حالة إذا كان لدينا مجموعتان من متجهات الحالة :

$$(1) |j_1 m_1\rangle \longrightarrow J_1^2, J_{z1}$$

$$(2) |j_2 m_2\rangle \longrightarrow J_2^2, J_{z2}$$

فإضافة متجهات كمية الحركة الزاوية

نكتب المتجهات الذاتية الآتية للمؤثرات الأربع  $J_1^2, J_2^2, J_{z1}, J_{z2}$

كحاصل ضرب مباشر (direct product) بالصورة :

$$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \quad \text{--- (1)}$$

ويمكن كتابة المتجهات الذاتية  $|im\rangle$  أو الحالة  $\psi_{jm}$  للمؤثرين  $J^2, J_z$  كتركيب خطية للمتجهات الذاتية (I) أي متجهات الحالة  $|j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle$  بالصورة :

$$|jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(j_1 j_2 m_1 m_2, jm) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

حيث معاملات المفكوك تكتب بالصورة :

$$C(j_1 j_2 m_1 m_2, jm) = (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm)$$

وتعرف بمعاملات كليش - جوردان .

$$\begin{aligned} \therefore |jm\rangle &= \sum_{m_1, m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \\ &= \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) \quad \text{--- (I)} \end{aligned}$$

حيث

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1 \otimes j_2 m_2\rangle$$

تعطي العلاقة (I) المتجهات الذاتية أو الحالات  $|jm\rangle$  بدلالة معاملات كليش - جوردان .

وللتبسيط يمكن كتابة

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv |m_1 m_2\rangle$$

فتكتب العلاقة (I) بالصورة :

$$|jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} |m_1 m_2\rangle (m_1 m_2 | jm)$$

ويلاحظ أن المجموع يتم على القيم الذاتية  $m_1, m_2$  حيث يفترض أن  $j_1, j_2$  لها قيم ثابتة .

وتؤول مسألة إضافة كميات الحركة الزاوية إلى مسألة حساب معاملات

التحويل  $(j_1 j_2 m_1 m_2 | jm)$  .

أي معاملات كليش - جوردان ، والتي يمكن كتابتها للتبسيط

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) = (m_1 m_2 | jm)$$

وتقيس هذه المعاملات مقدار أحتواء الحالة المركبة  $|j_1 m_1 \otimes j_2 m_2\rangle$  أو  $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$  في الحالة  $|jm\rangle$  .

ويلاحظ أن هناك صور أخرى لمعاملات كليش - جوردان مثل

$$C(j_1 j_2 j ; m_1 m_2)$$

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 jm) \quad \text{أو :}$$

ويلاحظ أن قيم هذه المعاملات التي تختلف عن الصفر ، تخضع للشرط :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

أي أن  $j$  تأخذ القيم من  $|j_1 - j_2|$  إلى  $(j_1 + j_2)$  .

كما أنها تخضع للعلاقة العيارية (normalization condition)

$$\sum_{m_1, m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 m_1 m_2 | j' m') = \delta_{mm'} \delta_{jj'}$$

وللعلاقة

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) = (-1)^{j-j_1-j_2} (j_2 j_1 m_2 m_1 | jm)$$

$$= (j_2 j_1, -m_2, -m_1 | j, -m)$$

وفي حالة الجسيمات ذات اللف  $\frac{1}{2}$  أي الفيرميونات فإن معاملات

كليش - جوردان للقيمة  $j_1 = l, j_2 = \frac{1}{2}$  يمكن كتابتها بالصورة :

$$\left( l \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| l \pm \frac{1}{2}, m \right. \right) = \pm \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l + 1}}$$

$$\left( l \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| l \pm \frac{1}{2}, m \right. \right) = \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l + 1}}$$

حيث القيم المسموح بها لـ  $j$  هي  $j = l \pm \frac{1}{2}$  .

## الباب الثالث ————— مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية

**مثال :** لنعتبر إلكترونا ذو كمية حركة مدارية  $l$  ولف يساوي  $\frac{1}{2}$ .

وفي وجود تبادل الفعل اللفي - المداري ( spin-orbit interaction ) فإن القيم المسموح بها لـ  $j$  هي  $l - \frac{1}{2}$  ,  $l + \frac{1}{2}$  . أثبت أن القيم المتوقعة للمركبة  $S_z$  في الحالتين  $j = l \pm \frac{1}{2}$  هما على الترتيب  $(\pm \frac{m\hbar}{2l+1})$  حيث  $m$  هي المركبة  $z$  لكمية الحركة الزاوية الكلية  $j$ .

**الحل :**

بأخذ  $j_1 = l$  ,  $j_2 = \frac{1}{2}$  فإن  $j$  تنحصر بين  $(j_1 + j_2)$  و  $|j_1 - j_2|$  أي تساوي  $l + \frac{1}{2}$  ,  $l - \frac{1}{2}$ .

وإذا كانت المركبة  $z$  لـ  $J$  لها  $(2j+1)$  قيمة ( من  $-j$  إلى  $+j$  ) ويرمز لها بالرمز  $m$  ، فإننا نحصل على مجموعتين من الحالات للإلكترون ، حيث :

$$|jm\rangle \equiv \left| l + \frac{1}{2}, m \right\rangle, \left| l - \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

وتكون معاملات كليش - جوردان لهذه الحالات هي كما في الجدول الآتي :

		$j$	$l + \frac{1}{2}$	$l - \frac{1}{2}$
		$m$	$m$	$m$
$m_1$	$m_2$			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	$-\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \ell + \frac{1}{2}, m \right\rangle &= \sqrt{\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} \left| m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} \left| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \langle S_z \rangle_{j=\ell+\frac{1}{2}} = \frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \left( \frac{1}{2} \hbar \right) + \frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \left( -\frac{1}{2} \hbar \right) = \frac{m \hbar}{2\ell + 1}$$

وبالمثل فإن :

$$\begin{aligned} \therefore \left| \ell - \frac{1}{2}, m \right\rangle &= -\sqrt{\frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} \left| m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} \left| m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \langle S_z \rangle_{j=\ell-\frac{1}{2}} = \frac{\ell - m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \left( \frac{1}{2} \hbar \right) + \frac{\ell + m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \left( -\frac{1}{2} \hbar \right) = -\frac{m \hbar}{2\ell + 1}$$

$$\therefore \langle S_z \rangle_{j=\ell\pm\frac{1}{2}} = \pm \frac{m \hbar}{2\ell + 1}$$

وهو المطلوب .

### حساب معاملات كليش - جوردان :

لحساب معاملات كليش - جوردان  $(m_1 m_2 | j m)$

نعلم أنه لكل قيمة من  $j$  توجد  $(2j+1)$  قيمة لـ  $m$  وأن  $j$  تأخذ القيم من  $|j_1 - j_2|$  إلى  $(j_1 + j_2)$  وبذلك فإن العدد الكلي للحالات  $|j m\rangle$  سوف يكون :

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

وبذلك فإن المصفوفة  $(m_1 m_2 | jm)$  يكون لها عدد من الصفوف قدره  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  ، ونفس العدد من الأعمدة ، ولكنها تنقسم إلى عدة مصفوفات فرعية ( Submatrices ) تبعاً لقيمة  $m = m_1 + m_2$  .  
ويلاحظ أن أكبر قيمة لـ  $m$  هي  $m = j = j_1 + j_2$  تحدث فقط عندما :

$$m_1 = j_1, m_2 = j_2$$

والقيمة التالية لـ  $m$  :  $m = j - 1 = j_1 + j_2 - 1$  تحدث عندما :

$$m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 1$$

$$m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2$$

وعندما :

وهكذا .....

فعندما  $m = j_1 + j_2 - n$  فإن :

$$m = j_1, m_2 = j_2 - n$$

$$m_1 = j_1 - n, m_2 = j_2$$

ولحساب عناصر تلك المصفوفات الفرعية ، نستخدم القواعد التالية :

(١) كل العناصر  $(m_1 m_2 | jm)$  تكون حقيقية .

$$(٢) | jm \rangle = \sum_{m_1, m_2} |m_1 m_2 \rangle (m_1 m_2 | jm)$$

$$\therefore (j' m' | jm) = \sum_{m_1, m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j' m' | j_1 j_2 m_1 m_2)$$

$$= \delta_{j' j} \delta_{m' m}$$

$$\therefore \sum_{m_1, m_2} | (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) |^2 = 1$$

ولأكبر قيمة لـ  $j$  :  $j = j_1 + j_2$  فإن  $m_1 = j_1, m_2 = j_2$

$$\therefore | (j_1 j_2 j_1 j_2 | jj) |^2 = 1 \rightarrow (j_1 j_2 j_1 j_2 | jj) = \pm 1$$

ونأخذ دائماً العدد  $+1$  ، ونهمل  $-1$  .

وباستخدام هذه العلاقات يمكن إيجاد عناصر مختلف المصفوفات الفرعية .

فمثلاً في حالة المصفوفات  $2 \times 2$  :

نلاحظ أن  $m = j_1 + j_2 - 1$  ،  $j$  تأخذ القيمتين  $j_1 + j_2$  ،  $j_1 + j_2 - 1$  وتكون العناصر المختلفة كما هو موضح بالجدول :

	$j$	$j_1 + j_2$	$j_1 + j_2 - 1$
$m_1$	$m_2$	$j - 1$	$j - 1$
$j_1$	$j_2 - 1$	$(j_1, j_2 - 1   j, j - 1)$	$(j_1, j_2 - 1   j - 1, j - 1)$
$j_1 - 1$	$j_2$	$(j_1 - 1, j_2   j, j - 1)$	$(j_1 - 1, j_2   j - 1, j - 1)$

ولحساب المعاملات في هذا الجدول نستخدم العلاقات الآتية :

$$(j_1, j_2 - 1 | j, j - 1) = \sqrt{\frac{j_2}{j}} = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \quad \text{_____ (1)}$$

حيث :  $m_1 = j_1$  ،  $m_2 = j_2 - 1$  ،  $j = j_1 + j_2$  ،  $(j_1 j_2 | j j) = 1$

وباستخدام العلاقة التعمدية  $\sum_{m_1, m_2} |(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m)|^2 = 1$  يمكننا كتابه :

$$|(j_1, j_2 - 1 | j, j - 1)|^2 + |(j_1 - 1, j_2 | j, j - 1)|^2 = 1$$

$$\therefore \frac{j_2}{j_1 + j_2} + |(j_1 - 1, j_2 | j, j - 1)|^2 = 1 \quad \text{وباستخدام (1) :}$$

$$\therefore (j_1 - 1, j_2 | j, j - 1) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \quad \text{_____ (2)}$$

وبالمثل يمكن الحصول على العلاقتين الآتيتين :

$$(j_1, j_2 - 1 | j - 1, j - 1) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \quad \text{_____ (3)}$$

$$(j_1 - 1, j_2 | j - 1, j - 1) = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \quad \text{_____ (4)}$$

المعادلات (1)، (2)، (3)، (4) تعطي العناصر المختلفة المبينة بالجدول السابق .

فمثلاً : باستخدام الجدول السابق والعلاقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) .

وفي حالة  $j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2}$

$$(1) \quad m_1 = j_1 = 1, \quad m_2 = j_2 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$j = j_1 + j_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad m = j - 1 = j_1 + j_2 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$(j_1, j_2 - 1 | j, j - 1) = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}$$

$$\therefore (1, -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2(\frac{3}{2})}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(2) \quad m_1 = j_1 - 1 = 0, \quad m_2 = j_2 = \frac{1}{2}$$

$$j = j_1 + j_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad m = j - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (j_1 - 1, j_2 | j, j - 1) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}$$

$$\therefore (0, \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(3) \quad m_1 = j_1 = 1, \quad m_2 = j_2 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$j = j_1 + j_2 - 1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}, \quad m = j - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$(j_1, j_2 - 1 | j - 1, j - 1) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}$$

$$\therefore (1, -\frac{1}{2} | -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(4) \quad m_1 = j_1 - 1 = 0 \quad , \quad m_2 = j_2 = \frac{1}{2}$$

$$j = j_1 + j_2 - 1 = \frac{1}{2} \quad , \quad m = j - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$(j_1 - 1, j_2 | j - 1, j - 1) = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}$$

$$\therefore (0, \frac{1}{2} | -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = -\sqrt{\frac{1}{2(\frac{3}{2})}} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

**مثال تطبيقي :** لنعتبر ذرة هيدروجين في الحالة p- ( p-state ) التي تتميز بالأعداد الكمية  $\ell = 1, s = \frac{1}{2}$  ، أوجد الدوال الموجية للذرة بدلالة التوافقيات الكروية  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  والحالات اللفية .

**الحل :** الدوال الموجية لذرة الهيدروجين يمكن كتابتها بالصورة :

$$\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) \psi(s)$$

حيث  $\psi(s)$  تمثل الحالة اللفية (spin state) ،  $R_{n\ell}$  هي الدالة الموجية القطرية ،  $Y_\ell^m$  هي التوافقيات الكروية .

**وإحساب الحالات اللفية :** نلاحظ أن هناك حالتان للـ f :

(1) حالة اللف لأعلى spin up state وهي التي تناظر القيمة  $(+\frac{1}{2})$

$$\cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ وتمثل بالملفوف } |jm\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

(2) حالة اللف لأسفل spin down state وهي التي تناظر القيمة  $(-\frac{1}{2})$

$$\cdot \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ وتمثل بالملفوف } |jm\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

## الباب الثالث ————— المؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية

والآن : نأخذ  $j_1 = \ell = 1$  ,  $j_2 = s = \frac{1}{2}$  وبذلك فإن حالة الذرة يمكن

كتابتها بالصورة  $|jm\rangle = \psi_{jm}$  .

حيث  $j$  هو العدد الكمي لكمية الحركة الزاوية الكلية للذرة ،  $m$  هي المركبة  $z$  لـ  $j$  .

الحالات  $|jm\rangle$  يمكن كتابتها كمفكوك بدلالة الحالات  $|j_1 m_1\rangle$  ,  $|j_2 m_2\rangle$  وذلك بإستخدام معاملات كليش - جوردان بالصورة :

$$|jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) \quad \text{--- (1)}$$

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1 \otimes j_2 m_2\rangle \quad \text{حيث}$$

للقيمة  $j_1 = 1$  فإن  $m_1 = 1, 0, -1$

للقيمة  $j_2 = \frac{1}{2}$  فإن  $m_2 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

وتصبح الحالات  $|j_1 m_1\rangle$  الممكنة هي :  $|1,1\rangle$  ,  $|1,0\rangle$  ,  $|1,-1\rangle$

والحالات  $|j_2 m_2\rangle$  الممكنة هي :  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  ,  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

أما  $j$  فتأخذ القيم من  $|j_1 - j_2|$  إلى  $j_1 + j_2$  ، أي  $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

وفي حالة  $j = \frac{3}{2}$  فإن  $m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

وفي حالة  $j = \frac{1}{2}$  فإن  $m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

وتكون الحالات  $|jm\rangle$  الممكنة هي :

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$$

**ولحساب تلك الحالات :**

نستخدم العلاقة (1) وقيم معاملات كليش - جوردان المناظرة

لـ  $j_1 = 1$  ,  $j_2 = \frac{1}{2}$  ، وقد سبق حسابها .

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad \text{--- (2)}$$

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

نلاحظ أن كل الحالات الممكنة لـ  $|j, m\rangle$  نتجت بدلالة الحالتين

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  ،  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  ، حيث الحالة  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  تمثل الحالة اللفية لأعلى

ويمثلها الملفوف  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  والحالة  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  تمثل الحالة اللفية لأسفل

ويمثلها الملفوف  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = R_{n1}(r)Y_1^1(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n1} Y_1^1 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{وبذلك يمكننا كتابة :}$$

وبالمثل :

$$\begin{aligned} |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}R_{n1}(r)Y_1^1(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}}R_{n1}(r)Y_1^0(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}R_{n1} Y_1^1 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}R_{n1} Y_1^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

وهكذا بالنسبة لكل الحالات الباقية حيث يمكن كتابتها كمصفوفات ذات مركبتين

بدلالة التوافقيات الكروية .

الدوران وكمية الحركة الزاوية :

(١) تعرف العملية التماثلية (Symmetry operation) بأنها العملية التي تسم من خلال تحويل لا يغير من العلاقات المتبادلة بين مكونات أي منظومة فيزيائية .

وكمثال لتلك العمليات : عملية الانتقال ( translation ) الهندسي ، عملية دوران ( rotation ) الأنظمة أو المنظومات الفيزيائية .

(٢) إذا كان لدينا نظاماً كميّاً ذو متجه حالة  $|\psi\rangle$  وتعرض لعملية دوران في الفراغ خلال زاوية ما  $(\theta)$  ، فإن متجه حالته يصبح  $|\psi'\rangle$  فبفرض أن عملية الدوران قد تمت من خلال مؤثر  $U_R$  ، فإن  $|\psi'\rangle = U_R |\psi\rangle$  . يسمى مؤثر الدوران (rotation operator) .

وهناك قاعدة نسبية تقول أنه عند الدوران فإن حواصل الضرب القياسية لا تتغير ، أي أن  $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$

$$\therefore \langle \psi | U_R^+ U_R | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\therefore U_R^+ U_R = 1 \longrightarrow$$

$$\therefore U_R \text{ هو مؤثر واحد}$$

وهذا يعني أن عملية الدوران في ميكانيكا الكم تتم من خلال مؤثر واحد  $U_R$  أو أن عملية الدوران تمثل بتحويل واحد ( unitary transformation ) .

أيضاً : فإن المتغيرات الديناميكية (A مثلاً) تتغير في عملية الدوران بواسطة تحويلات واحدة .

$$A = U_R^+ A' U_R , A' = U_R A U_R^+$$

(٣) إن الدوران حول محور في إتجاه متجه الوحدة  $\hat{n}$  (الواقع في إتجاه المحور) خلال زاوية صغيرة  $\theta$ ، يمكن تمثيله بمصفوفة واحدة

$$u_R = I - \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})\theta \quad \text{صورتها :}$$

حيث  $\vec{J}$  هو المؤثر الهيرميتي لكمية الحركة الزاوية، ويطلق عليه إسم مولد الدوران (generator of rotation).

المركبة  $(\hat{n} \cdot \vec{J})$  هي مركبة  $\vec{J}$  في إتجاه  $\hat{n}$ .

ومن الخواص الواحدة للمؤثر  $u_R$  فإن :

$$\begin{aligned} I = u_R^+ u_R &= \left[ I + \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})^+ \theta \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})\theta \right] \\ &= I + \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})^+ \theta - \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})\theta \end{aligned}$$

وذلك مع إهمال مربعات  $\theta$  والقوى الأعلى (نظر الصغر قيمة  $\theta$ ).

$$\therefore \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})^+ \theta - \frac{i}{\hbar}(\hat{n} \cdot \vec{J})\theta = 0 \quad \therefore (\hat{n} \cdot \vec{J})^+ = (\hat{n} \cdot \vec{J})$$

وهذا يعني أن مركبة  $\vec{J}$  في إتجاه  $\hat{n}$  هي هيرميتية، وبالتالي فإن  $\vec{J}$  نفسه هو مؤثر هيرميتي، وتخضع مركباته التي هي مؤثرات هيرميتية للعلاقات التبادلية الآتية :

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

(٤) يمكن إثبات أن  $\vec{J}$  هو مؤثر إتجاهي (vector operator) كالتالي :

حيث أن

$$|\psi'\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{J} \theta\right) |\psi\rangle \quad \therefore \langle \psi | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle - \frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \langle \vec{J} \rangle$$

حيث  $\langle \vec{J} \rangle$  هو القيمة المتوقعة لـ  $\vec{J}$  في الحالة  $|\psi\rangle$ .

إذا تعرضت الحالة لدوران ما ، فإن حواصل الضرب القياسية  $\langle \psi | \psi \rangle$  ،  $\langle \psi | \psi' \rangle$  لا تتغير ، وبذلك فإن حاصل الضرب القياسي  $\langle \bar{J} \rangle$  هو أيضاً لا متغير دوراني أي يظل كما هو قياسياً ، وحيث أن  $\hat{n}$  هو متجهه ، فإن  $\langle \bar{J} \rangle$  أيضاً يجب أن يكون متجهياً ، وبهذا فإن  $\bar{J}$  هو مؤثر إتجاهي .

(5) **ولتحديد  $\bar{J}$**  : نفرض  $\bar{A}$  أي مؤثر إتجاهي إختياري ، بمعنى أنه عند أي دوران فإن القيمة المتوقعة له تتحرك كمركبات متجه .  
يمكن كتابة القيمة المتوقعة الجديدة ( بعد الدوران ) بالصورة :

$$\langle \psi' | \bar{A} | \psi' \rangle = \langle \psi' | A_i | \psi' \rangle = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \langle \psi | A_j | \psi \rangle$$

حيث  $i = 1, 2, 3$

$R_{ij}$  تمثل مصفوفة  $(3 \times 3)$  تعطي التحويل من قيم  $\bar{A}$  في الحالة  $|\psi\rangle$  إلى القيم في الحالة  $|\psi'\rangle$  ، وهذه المصفوفات هي مصفوفات واحدية (unitary matrices) ويمكن إختيارها كمصفوفات قطرية مكونة من عدد من المصفوفات الفرعية (submatrices) بالصورة :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{ij}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & R_{ij}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & R_{ij}^{(3)} \end{pmatrix}$$

وبذلك فإن التمثيل الأصلي يمكن إختزاله (reduced) إلى عدد من التمثيلات البسيطة ، ويقال أن التمثيل مختزل أو قابل للإختزال (reducible) .

وإذا لم يكن هناك تمثيلاً مكافئاً يختزل المصفوفات  $R_{ij}$  للتمثيل إلى تمثيلات أبسط ، قيل أن التمثيل غير مختزل أو غير قابل للاختزال (irreducible) .

ويمكن إثبات أن أي تمثيل قابل للاختزال يمكن إختزاله بطريقة معينة إلى مركبات غير قابلة للاختزال .

### المركبات الكروية أو العيارية للمؤثر الإتجاهي :

إذا كان  $\vec{A}$  مؤثر متجه (vector operator) فإن المركبات الكروية (spherical component) أو المركبات القياسية أو العيارية (standard component) له تعرف كالتالي :

$$A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}A_+ \quad , \quad A_0 = A_z$$

$$A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}A_-$$

وتخضع هذه المؤثرات للعلاقات التبادلية الآتية :

$$\left. \begin{aligned} [A_0, A_1] &= \hbar A_1 \\ [A_0, A_{-1}] &= -\hbar A_{-1} \\ [A_1, A_{-1}] &= 2\hbar A_0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} [A_z, A_+] &= \hbar A_+ \\ [A_z, A_-] &= -\hbar A_- \\ [A_+, A_-] &= 2\hbar A_z \end{aligned}$$

وإذا كان  $\vec{J} = \vec{A}$  فإن المركبات الكروية لـ  $\vec{J}$  هي :

$$J_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x + iJ_y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}J_+ \quad , \quad J_0 = J_z$$

$$J_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x - iJ_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}J_-$$

ويخضع للعلاقات التبادلية :

$$[J_0, J_1] = \hbar J_1 \quad , \quad [J_0, J_{-1}] = -\hbar J_{-1} \quad , \quad [J_1, J_{-1}] = 2\hbar J_0$$

وبوجه عام فإن :

$$[J_\mu, J_\nu] = \sum_{\mu'} J_{\mu'} \langle 1\mu' | J_\mu | 1\nu \rangle$$

حيث :

$$\langle 1\mu' | J_0 | 1\mu \rangle = \langle 1\mu' | J_z | 1\mu \rangle = \mu \hbar \delta_{\mu\mu'}$$

$$\begin{aligned} \langle 1\mu' | J_{\pm 1} | 1\mu \rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1\mu' | J_{\pm} | 1\mu \rangle \\ &= \mp \left[ 1 - \frac{1}{2} (\mu^2 \pm \mu) \right]^{\frac{1}{2}} \hbar \delta_{\mu', \mu \pm 1} \end{aligned}$$

### المؤثرات الممتدة ( Tensor operators ) :

يعرف المؤثر الممتد بأنه مجموعة من  $n$  مؤثر  $T_1, T_2, \dots, T_n$  بحيث أن التحويلات الدورانية (rotational transformation) لها هي دوال خطية في المؤثرات  $n$ .

$$T'_m = U_R T_m U_R^\dagger = \sum_{\ell} T_\ell R_{\ell m} \quad (1)$$

وتعتمد المعاملات  $R_{\ell m}$  على الدوران ، وتتحول بواسطة تمثيل غير مختزل (irreducible representation) ، بمعنى أن المعاملات  $R_{\ell m}$  هي عناصر مصفوفية لتمثيل غير مختزل .

والآن نعرف ما يسمى بالمؤثر الممتد الكروي غير المختزل

### (irreducible spherical tensor operator)

من المرتبة ( $j$ ) ويكتب  $T_m^{(j)}$  ، حيث  $m = j, j-1, \dots, -j$  وهو عبارة عن ممتد له عدد  $(2j+1)$  من المركبات ( التي هي مؤثرات ) المناظرة لقيم  $m$  التي هي  $(2j+1)$  قيمة .

ويحقق هذا الممتد معادلة التحويل الآتية :

$$U_R T_m^{(j)} U_R^+ = \sum_{m'=-j}^j T_{m'}^{(j)} R_{m'm}^{(j)} \quad (2)$$

ويلاحظ أن المؤثر  $T_m^{(j)}$  يتبادل مع المؤثر  $J_\mu$  طبقاً للعلاقة :

$$[J_\mu, T_m^{(j)}] = \sum T_{m'}^{(j)} \langle jm' | J_\mu | jm \rangle \quad (3)$$

هذه العلاقة تعطي تعريفاً آخر للممتد  $T_m^{(j)}$  طبقاً للعالم راكا (Racah) .

**تعريف راكا :** " المؤثر الممتد  $T_m^{(j)}$  يقال أنه مؤثر ممتد كروي غير مختزل ، إذا حققت مركباته مع مؤثر كمية الحركة الزاوية الكلية  $\vec{J}$  ، العلاقة التبادلية (3) . "

ومن هذه العلاقة يمكن إثبات العلاقات التبادلية الآتية :

$$\begin{aligned} [J_z, T_m^{(j)}] &= m \hbar T_m^{(j)} \\ [J_+, T_m^{(j)}] &= [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \hbar T_{m+1}^{(j)} \\ [J_-, T_m^{(j)}] &= [j(j+1) - m(m-1)]^{\frac{1}{2}} \hbar T_{m-1}^{(j)} \end{aligned}$$

### نظرية فيجنر - إيكارت ( Wigner - Eckart )

إن العناصر المصفوفية للمؤثرات الممتدة بين حالات ذاتية مختلفة يمكن

$$\langle \alpha_1 j_1 m_1 | T_m^{(j)} | \alpha_2 j_2 m_2 \rangle$$

كتابتها بالصورة :

حيث  $j_1, j_2, m_1, m_2$  هي الأعداد الكمية لكمية الحركة الزاوية ،  $\alpha_1, \alpha_2$  تعبر عن أي أعداد كمية أخرى لازمة لوصف الحالة رصفاً تاماً .

وتعطي نظرية فيجنر - إيكارت العناصر المصفوفية للمؤثر الممتد  $T_m^{(j)}$

بدلالة معاملات كليش - جوردان ، وصورتها هي :

$$\langle \alpha_1 j_1 m_1 | T_m^{(j)} | \alpha_2 j_2 m_2 \rangle = \langle \alpha_1 j_1 || T^{(j)} || \alpha_2 j_2 \rangle \langle j_2 j m_2 m | j_1 m_1 \rangle$$

حيث معاملات التناسب  $\langle \alpha_1 j_1 || T^{(j)} || \alpha_2 j_2 \rangle$  يسمى بالعنصر المصفوفي المختزل (reduced matrix element) أو العنصر المصفوفي ذو الخطين (II) للمؤثر الممتد الكروي غير المختزل  $T^{(j)}$ ، ويعتمد هذا المعامل على طبيعة المؤثر الممتد، وعلى الأعداد الكمية  $\alpha_1, \alpha_2, j_1, j_2, m$ ، ولا يعتمد على الأعداد  $m_1, m_2$  والتي تحدد إتجاه الدوران للمنظومة في الفراغ، أما المعاملات  $\langle j_2 j m_2 m | j_1 m_1 \rangle$  فهي معاملات كليش - جوردان، وهي لا تعتمد على طبيعة المؤثر الممتد.

ويمكن كتابة نظرية فيجنر - إيكارت بالصورة الآتية :

" إن العنصر المصفوفي للمركبة الكروية -  $m$  للمؤثر  $T^{(j)}$  بين الحالتين الذاتيتين :  $|\alpha_1 j_1 m_1\rangle$  و  $|\alpha_2 j_2 m_2\rangle$  يساوي حاصل ضرب معامل كليش - جوردان  $\langle j_2 j m_2 m | j_1 m_1 \rangle$  مع عدد لا يعتمد على  $m, m_1, m_2$  (الأعداد الكمية المغنطيسية) "

وحساب المعاملات  $\langle \alpha_1 j_1 || T^{(j)} || \alpha_2 j_2 \rangle$  نظرياً ليس سهلاً، وعادة ما يتم حسابه من نظرية فيجنر - إيكارت وذلك بحساب عنصر مصفوفي معين عملياً، ويتم ذلك باختيار بسيط، مثل إختيار  $m_1 = m_2 = m = 0$  طبقاً لكون المنظومة ذات كمية حركة زاوية عدد صحيح أو نصف صحيح.

## أمثلة محلولة :

مثال (1) : أوجد العناصر المصفوفية للمؤثر المتجه  $\bar{A}$  ، الذي مركباته الكروية هي  $A_\ell$  وذلك بدلالة العناصر المصفوفية لحاصل الضرب القياسي  $(\bar{J} \cdot \bar{A})$  ، حيث  $\bar{J}$  مؤثر متجه كمية الحركة الزاوية الكلية .

## الحل :

إن النسبة بين العنصرين المصفوفين للمؤثرين  $\bar{A}, \bar{J}$  هي :

$$\frac{\langle \alpha' j' m' | A_\ell | \alpha j m \rangle}{\langle \alpha' j' m' | J_\ell | \alpha j m \rangle} = \frac{\langle \alpha' j' | | \bar{A} | | \alpha j \rangle}{\langle \alpha' j' | | \bar{J} | | \alpha j \rangle}$$

$$\begin{aligned} \therefore \langle \alpha' j' m' | A_\ell | \alpha j m \rangle \\ = \frac{\langle \alpha' j' | | \bar{A} | | \alpha j \rangle}{\langle \alpha' j' | | \bar{J} | | \alpha j \rangle} \langle \alpha' j' m' | J_\ell | \alpha j m \rangle \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

وبوضع  $j' = j$  واستخدام خواص  $\bar{J}$  ، فإننا نحصل على العلاقة الآتية للمؤثر القياسي  $\bar{J} \cdot \bar{A}$  :

$$\langle \alpha' j m' | \bar{J} \cdot \bar{A} | \alpha j m \rangle = C \langle \alpha' j | | \bar{A} | | \alpha j \rangle \quad \text{--- (2)}$$

حيث  $C$  لا يعتمد على طبيعة  $\bar{A}$  أو  $\alpha$  أو  $\alpha'$  ، وبذلك يمكن إيجاده بوضع  $\bar{A} = \bar{J}$  :

$$\therefore \langle \alpha' j m' | J^2 | \alpha j m \rangle = C \langle \alpha' j | | \bar{J} | | \alpha j \rangle \quad \text{--- (3)}$$

ولحساب  $\langle \alpha' j | | \bar{J} | | \alpha j \rangle$  :

من نظرية فيجنر - إيكارت :

$$\langle \alpha' j j | J_z | \alpha j j \rangle = \langle \alpha' j | | \bar{J} | | \alpha j \rangle (j_1 j_0 | j j)$$

حيث معاملات كليش - جوردان :

$$(j1j0 | jj) = \sqrt{\frac{j}{j+1}}$$

أيضاً فإن :

$$\langle \alpha' jj | J_z | \alpha jj \rangle = \hbar j \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\therefore \langle \alpha' j | | \vec{J} | | \alpha j \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1)} \delta_{\alpha\alpha'} \quad \text{--- (4)}$$

أيضاً :

$$\langle \alpha' jm' | J^2 | \alpha jm \rangle = \hbar^2 j(j+1) \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{mm'} \quad \text{--- (5)}$$

بالتعويض في (3) :

$$\hbar^2 j(j+1) \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{mm'} = C \cdot \hbar \sqrt{j(j+1)} \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$\therefore C = \frac{\hbar j(j+1)}{\sqrt{j(j+1)}} \delta_{mm'} = \hbar \sqrt{j(j+1)} \delta_{mm'}$$

وتصبح العلاقة (2) :

$$\langle \alpha' jm' | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha jm \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1)} \delta_{mm'} \cdot \langle \alpha' j | | \vec{A} | | \alpha j \rangle$$

$$\therefore \langle \alpha' j | | \vec{A} | | \alpha j \rangle = \frac{1}{\hbar \sqrt{j(j+1)}} \langle \alpha' jm | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha jm \rangle$$

وبالتعويض في (1) نحصل على العلاقة المطلوبة :

$$\begin{aligned} \langle \alpha' j' m' | A_\ell | \alpha jm \rangle &= \frac{\langle \alpha' jm | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha jm \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \langle \alpha' j' m' | J_\ell | \alpha jm \rangle \quad \text{--- (I)} \end{aligned}$$

وهي علاقة تعبر عن العناصر المصفوفية للمؤثر المتجه  $\vec{A}$  بدلالة العناصر المصفوفية لحاصل الضرب القياسي  $(\vec{J} \cdot \vec{A})$ .

مثال (٢) : الإرتباط (L-S) [ L-S coupling ] لذرة الهيدروجين :

يعرف المؤثر المتجه للعزم المغنطيسي للذرة بالعلاقة :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2\mu c} (g_L \vec{L} + g_S \vec{S})$$

حيث  $\vec{L}, \vec{S}$  مؤثرات إتجاهيان يرتبطان بالمؤثر  $\vec{J}$  بالعلاقة  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  ،  
أثبت أنه في حالة الإرتباط (L - S) الذي يمثل الحالة الأرضية للذرة ، فإن  
قيمة العزم المغنطيسي للذرة يعطي بالعلاقة :

$$m = -\frac{e\hbar}{2\mu c} j L_g$$

حيث :

$$L_g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

يعرف بمعامل لاندي ( Lande' - factor ) .

**الحل :**

القيمة المتوقعة لـ  $\vec{m}$  يمكن كتابتها بإستخدام نظرية فيجنر - إريكارت  
بالصورة :

$$m = \langle \alpha j j | m_z | \alpha j j \rangle = \langle \alpha j | | \vec{m} | | \alpha j \rangle (j 1 j 0 | j j)$$

وحيث أن معامل كليش - جوردون :

$$(j 1 j 0 | j j) = \sqrt{\frac{j}{j+1}}$$

$$\therefore m = \langle \alpha j j | m_z | \alpha j j \rangle = \sqrt{\frac{j}{j+1}} \langle \alpha j | | \vec{m} | | \alpha j \rangle$$

وباستخدام العلاقة (I) في المثال رقم (1) وتطبيقها على المؤثر المتجه للعزم المغنطيسي  $\vec{m}$  فإننا نحصل على :

$$m = \langle \alpha j j | m_z | \alpha j j \rangle = \frac{-e}{2\mu \hbar C(j+1)} \langle \alpha j j | g_L (\vec{L} \cdot \vec{J}) + g_S (\vec{S} \cdot \vec{J}) | \alpha j j \rangle$$

ولكن :

$$\vec{L} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}(J^2 + L^2 - S^2) , \quad \vec{S} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2}(J^2 + S^2 - L^2)$$

ولكن

$$\therefore m = \frac{-e}{2\mu \hbar C(j+1)} \cdot \frac{1}{2} \langle \alpha j j | (g_L + g_S) J^2 + (g_L - g_S) (L^2 - S^2) | \alpha j j \rangle$$

وإذا كان الارتباط (L-S) [ أي L-S coupling ] يصف الحالة الأرضية للذرة ، وباعتبار الحالة  $|\alpha j j\rangle$  هي حالة ذاتية تتميز بالعددين الكميين  $l, s$  حيث :

$$\langle J^2 \rangle = \hbar^2 j(j+1)$$

$$\langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$$

$$\langle S^2 \rangle = \hbar^2 s(s+1)$$

ولما كان  $g_L, g_S$  هي معاملات الارتباط المغناطيسية المرتبطة بكميتي الحركة  $\vec{L}, \vec{S}$  ، وقيمتهما :  $g_L = 1, g_S = 2$  فإن :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{-e}{2\mu \hbar C(j+1)} \cdot \frac{1}{2} \langle \alpha j j | 3J^2 - L^2 + S^2 | \alpha j j \rangle \\
&= \frac{-e}{2\mu \hbar C(j+1)} \cdot \frac{1}{2} [3\hbar^2 j(j+1) - \hbar^2 \ell(\ell+1) + \hbar^2 s(s+1)] \\
&= \frac{-e\hbar}{2\mu C} j \left[ \frac{3j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \right] \\
&= \frac{-e\hbar}{2\mu C} j \left[ 1 + \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \right] \\
&= \frac{-e\hbar}{2\mu C} j L_g
\end{aligned}$$

حيث :

$$L_g = 1 + \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

يعرف بمعامل لاندي ( Lande' g - Factor ) .  
وهو المطلوب .