

## الفصل الرابع الصياغة الرياضية لتوازن المنتج عامة

مقدمة:

يمثل التوازن المذكور هنا التوازن الساكن أو الإستراتيجي Static وهو يبين التصرف الأمثل للمنشأة ، وهو يبين على عدة فروض هي:

١- استمرار الإنتاج أي أن الإنتاج متصل ولا يتوقف على فترة زمنية معينة.

٢- أن الهدف الأساسي لنشاط المنشأة هو تحقيق الحد الأقصى للربح من خلال زيادة الإنتاج ( تعظيم ) وتقليل التكاليف ( تصغيرها لحدها الأدنى) .

٣- أن دالة الإنتاج معروفة .

٤- أن أسعار السلع والخدمات وكذلك عناصر الإنتاج ثابتة ، وذلك في ظل سيادة المنافسة التامة بالطبع .

هذا ويتحقق توازن المنشأة في الحالات المختلفة ( تبعاً لما سبق ذكره من اشتراطات لتوازن المنتج ) على النحو التالي في صيغة رياضية.

١- التوازن بالنسبة لاستخدامات عناصر الإنتاج :

حيث الإيراد الحدي = السعر ، ( م ع هي المرونة السعرية وهي أيضاً مرونة الطلب م ط ) .

$$ر ح - ع \text{ ويساوي أيضاً } = ع \left[ \frac{1}{ع م} + 1 \right] \quad (1)$$

ويفرض أن دالة الإنتاج هي ص = د(س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub>) في حالة استخدام عنصرين إنتاج فقط هما س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> لإنتاج السلعة ص :  
حيث ت ل التكاليف الكلية ، س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> الكميات المستخدمة من العنصرين (1) .

ر<sub>1</sub> ، ر<sub>2</sub> أسعار هذين العنصرين ، م ط س<sub>1</sub> ، م ط س<sub>2</sub> مرونة الطلب لعناصر الإنتاج المذكورة.

وحيث تعتمد الكمية المستخدمة من س<sub>1</sub> على الكمية المستخدمة من س<sub>2</sub>.

$$\therefore د = د(س_2)$$

(1) السعر = الإيراد الحدي أي ع = ر ح ، لأن الإيراد الحدي

$$\frac{د(ع ك)}{د(ك)} = \frac{\text{التغير في الإيراد الكلي}}{\text{التغير في الكمية}}$$

$$\text{مرونة الطلب السعرية} = \frac{د ك}{د ع} \times \frac{ع}{ك}$$

الإيراد الحدي = الإيراد المتوسط في ظل المنافسة أي ر ح = ر م .

$$\therefore \frac{\text{الإيراد المتوسط ( ر م )}}{\text{الكمية}} = \frac{\text{الإيراد الكلي}}{ك . ع}$$

$$\therefore \text{المعر } ع = د(ك)$$

$$\therefore \text{ر م} = \frac{ك د(ك)}{ك} = د(ك) = ع$$

أي أن الإيراد الحدي - الإيراد المتوسط = السعر

$$\left[ \frac{1}{ع م} + 1 \right] ع - ع \text{ والإيراد الحدي في هذه الحالة}$$

حيث ع السعر ، م ع المرونة السعرية للطلب

$$\therefore \frac{1}{ع م} = \text{صفر}$$

@ =

في ظل المنافسة التامة

ولإيجاد علاقة التوازن في المعادلة (1) يؤخذ التفاضل الجزئي بالنسبة لـ  $s_1$ .

$$\frac{d s_2}{d s_1} \left[ \frac{1}{m p_2} + 1 \right] r_2 + \left[ \frac{1}{m p_1} + 1 \right] r_1 - \frac{(ت ل) a}{s_1} = 0$$

وبعد ذلك تساوي المعادلة بالصفر لغرض تقليل التكاليف إلى أقل ما يمكن .

$$\frac{d s_2}{d s_1} \left[ \frac{1}{m p_2} + 1 \right] r_2 + \left[ \frac{1}{m p_1} + 1 \right] r_1 = 0$$

$$\frac{\left[ \frac{1}{m p_1} + 1 \right] r_1}{\left[ \frac{1}{m p_2} + 1 \right] r_2} = - \frac{d s_2}{d s_1}$$

$$\frac{\text{التكاليف الحدية للعنصر س1}}{\text{التكاليف الحدية للعنصر س2}} =$$

وهي شرط التوازن الساكن وفي حالة المنافسة التامة حيث تكون التكاليف الحدية مساوية للسعر:

$$\frac{r_1}{r_2} = - \frac{d s_2}{d s_1} \text{ فإن شرط التوازن الساكن يكون :}$$

وفي حالة المنافسة غير التامة يكون شرط التوازن الساكن هو :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d s_2}{d s_1} \text{ حيث ك التكاليف الحدية}$$

أي أن معدل الإحلال الحدي للعنصر س<sub>1</sub> بدلاً من س<sub>2</sub> يساوي مع مقلوب نسبة التكاليف الحدية للعنصرين .

٢- التوازن بالنسبة للعلاقة بين عناصر الإنتاج والنتاج :  
 بفرض أن دالة الإنتاج هي السابق ذكرها للسلعة ك .

$$\text{وهي : ك} = د (س_1 ، س_2) ،$$

وأن الإيراد الكلي ر ك = ك' ع = ك' x ر ح

$$\begin{aligned} ر ح &= ع \left( \frac{1}{ع م} + 1 \right) \\ \therefore \text{الربح (ح)} &= \end{aligned}$$

$$\text{ك} (ع) \left( \frac{1}{ع م} + 1 \right) - س_1 ر_1 - س_2 ر_2 - \left( \frac{1}{م ط س_1} = 1 \right) - \left( \frac{1}{م ط س_2} + 1 \right) ر_2 ر_2$$

حيث ك الكمية المباعة ، ع السعر الخاص بالسلعة .

م ع مرونة الأسعار ، س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> عناصر الإنتاج .

ر<sub>1</sub> ، ر<sub>2</sub> أسعار هذه العناصر ، م ط س<sub>1</sub> ، م ط س<sub>2</sub> مرونيات الطلب

على العنصرين .

ولتحقيق الربح الأقصى، يؤخذ التفاضل الجزئي للمعادلة

بالنسبة لـ س<sub>1</sub> ثم تساوي المعادلة بالصفر .

$$\frac{\partial \text{رح} a}{\partial س_1} = \frac{د (س_1 ، س_2) a}{س_1 a} - \left[ \frac{1}{م ط} + 1 \right] ر_1 - \left[ \frac{1}{م ط س_1} + 1 \right] ر_2 = \text{صفر}$$

$$\text{ثم} \frac{\partial \text{رح} a}{\partial س_1} = \frac{ك a}{س_1 a} - \left[ \frac{1}{م ط} + 1 \right] ع - \left[ \frac{1}{م ط س_1} + 1 \right] ر_1 - \left[ \frac{1}{م ط س_2} + 1 \right] ر_2 = \text{صفر}$$

$$\frac{\left[ \frac{1}{م ط س} + 1 \right] ر}{\left[ \frac{1}{م ط س} + 1 \right] ع} = \frac{ا ك}{ا س}$$

$$= \frac{\text{التكاليف الحدية لـ س}}{\text{الإيراد الحدي من ك}}$$

وفي حالة المنافسة الكاملة في كل من سوق خدمات عناصر الإنتاج وسوق السلعة ك

$$\therefore \frac{ر}{ع} = \frac{ا ك}{ا س}$$

وحيث  $\frac{ا ك}{ا س}$  هي الإنتاج الحدي للعنصر س، ويكتب عادة  $\frac{د ك}{د س}$  إذا كان هو عنصر الإنتاج الوحيد .

$$\therefore \frac{ر}{ع} = \frac{د ك}{د س}$$

أي توازن المنتج هنا في ظل المنافسة الكاملة يتحقق بتساوي الناتج الحدي ( كمية ) لنسبة سعر العناصر إلى سعر الكمية المنتجة.

٣- التوازن في حالة علاقات النواتج ببعضها البعض :

يفترض هنا كمثال أن لدينا سلعتان هما ك ١ ، ك ٢ لذا فإنه يمكن القول بأن:

$$ك ١ = د ( ك ٢ )$$

$$ك ٢ = د ( ك ١ )$$

لأن كمية إنتاج أي منهما تعتمد على كمية إنتاج الأخرى .

وحيث أن الربح ( ح ) = الإيرادات الكلية ( ر ل ) - التكاليف الكلية

( ت ل ) ودالتا الإنتاج في حالة وجود عنصرى إنتاج فقط لإنتاج كلتا

السلعتين هما : ك<sub>1</sub> = ( س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> )

ك<sub>2</sub> = د ( س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> )

أما الإيراد الكلي بصفة عامة فهو :

$$ر ل = ك_1 ع_1 + ( \frac{1}{ط_1 م} + 1 ) ك_2 ع_2 + ( \frac{1}{ط_2 م} + 1 ) ك_3 ع_3$$

وهو ينطبق على حالة عدم وجود منافسة تامة .

فللتعرف على توازن المنتج بالنسبة للسلعتين ، يؤخذ التفاضل

الجزئي لدالة الإيراد الكلي أولاً ثم يساوي بالصفـر لتقليل التكاليف إلى أدنى

حد ممكن .

فبأخذ التفاصيل الجزئي لدالة الإيراد الكلي بالنسبة للسلعة ك<sub>1</sub> .

$$\frac{د ك_1}{د ك_1} = \frac{ر ل}{ك_1} = ع_1 + ( \frac{1}{ط_1 م} + 1 ) ك_2 ع_2 + ( \frac{1}{ط_2 م} + 1 ) ك_3 ع_3$$

؛ بمساواة المعادلة بالصفـر .

$$\therefore ع_1 + ( \frac{1}{ط_1 م} + 1 ) ك_2 ع_2 + ( \frac{1}{ط_2 م} + 1 ) ك_3 ع_3 = \frac{د ك_1}{د ك_1} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{ع_1 + ( \frac{1}{ط_1 م} + 1 ) ك_2 ع_2}{( \frac{1}{ط_2 م} + 1 ) ك_3 ع_3} = \frac{د ك_1}{د ك_1}$$

أي أن معادلة الإحلال الحدي للسلعة ك<sub>١</sub> بدلاً من ك<sub>٢</sub> يتساوى مع نسبة الإيراد الحدي من السلعة ك<sub>١</sub> إلى الإيراد الحدي من السلعة ك<sub>٢</sub> .  
 وحيث يتساوى الإيراد الحدي للسلعة مع سعرها في ظل المنافسة التامة فإنه في ظل المنافسة التامة يكون :

$$\frac{١٤}{٢٤} = \frac{٢ \text{ د ك}}{١ \text{ د ك}} =$$

٤- توازن المنشأة بالنسبة لكافة العلاقات الإنتاجية :

وهو عبارة عن التوازن للعلاقات الثلاث السابقة ، وهو يجمع التوازنات الثلاث لأنها تمثل مع التصرف الأمثل للمنشأة الهادفة نحو تحقيق أقصى ربح ممكن .

وفيما يلي خلاصة توازنات هذه العلاقات الثلاث في ظل كل من المنافسة التامة والمنافسة غير التامة .

أ\_ في حالة المنافسة التامة :

$$١ - \frac{٢ \text{ د س}}{١ \text{ د س}} = \frac{١ \text{ ر}}{٢ \text{ ر}}$$

حيث س العناصر ، ر سعر العناصر .

أي تساوي معدل الإحلال الحدي بين العناصر مع مقلوب النسبة السعرية للعنصرين .

$$٢ - \frac{١ \text{ د ك}}{١ \text{ د س}} = \frac{١ \text{ ر}}{٢ \text{ ر}}$$

حيث ك هي الناتج ، ع سعر السلعة .

أي تساوي الناتج الحدي مع نسبة سعر العنصر (أي التكاليف الحدية) إلى سعر الكمية المنتجة (الإيراد الحدي) .

$$\frac{١٤}{٢٤} = \frac{٢ \text{ دك}}{١ \text{ دك}} - ٣$$

أي تساوي معدل الإحلال الحدي بين السلعتين ك١ ، ك٢ مع النسب  
السعرية للسلعتين .

ب - في حالة المنافسة غير التامة :

$$\frac{١}{\left(\frac{١}{\text{م ط س}_١} + ١\right) \text{ ر}_١} = \frac{٢ \text{ س}_٢}{١ \text{ س}_١} - ١$$

$$\frac{١}{\left(\frac{١}{\text{م ط س}_٢} + ١\right) \text{ ر}_٢}$$

$$\frac{١}{\left(\frac{١}{\text{م ط س}_١} + ١\right) \text{ ر}_١} = \frac{\text{دك}}{١ \text{ س}_١} - ٢$$

$$\frac{١}{\left(\frac{١}{\text{م ط ك}} + ١\right) \text{ ع}}$$

$$\frac{١}{\left(\frac{١}{\text{م ط}_١} + ١\right) \text{ ١ع}} = \frac{٢ \text{ دك}}{١ \text{ دك}} - ٣$$

$$\frac{١}{\left(\frac{١}{\text{م ط}_٢} + ١\right) \text{ ٢ع}}$$