الفصل الثاني

هيكل المخاطر

هل أشارت الأزمة المالية العالمية إلى فشل في التنويع؟

فكرة التنويع بسيطة ولكنها مهمة في إدارة الاستثمارات. قد تستثمر كافة أموالك في سهم واحد ويتعثر حظك في النهاية، أو تستثمر في 50 سهم ولا يمكن أن يضرك حدث سيء واحد بشكل قوي. هذه هي ميزة شراء أسهم في صندوق استثمار مشترك (أو الثقة الاستثمارية) – ينوع المستثمر تلقائيا استثماراته من خلال الاحتفاظ بمجموعة من الأسهم المختلفة. ولكن في بعض الأحيان يفشل مبدأ التوزيع: فإذا استثمرت 100٫000 دولار في صندوق استثمار أمريكي في بداية عام 2008، لكنت خسرت 39,500 دولار خلال تلك السنة. فقد هبطت كافة الأسهم بقوة خلال هذا العام، حيث بدأت الأسواق الأمريكية في الهبوط في أكتوبر 2007 حتى مارس 2009، وفي تلك الفترة انخفضت أسواق الأسهم الأمريكية بنسبة 57٪.

لم يفلح تنويع الأسهم الأمريكية في عام 2008. في الواقع، فإن الطريقة الوحيدة لتجنب الخسائر لم يكن من خلال التنويع، ولكن الاستثمار في عدد قليل من الأسهم التي

فاقت أداءها أداء السوق (93٪ من جميع الأسهم الأمريكية خسرت في عام 2008 ولكن ليس جميعها: فعلى سبيل المثال، لم تخسر أسهم ماكدونالدز ووول مارت). لذلك، إذا كان التنويع هو الحل، فإن الاستراتيجية الصحيحة في تلك السنة ستشمل الاستثمار في مجالات غير الأسهم. إذا كنت مستثمرا تعزف عن المخاطرة، سيكون من المنطقي التنويع في العديد من فئات الأصول المختلفة بهدف تجنب الخسائر الكبيرة. ولسوء الحظ، لم تهوي الأسهم فحسب، بل انخفضت أيضا أسعار السلع والعقارات والأسواق الناشئة. والواقع أن كل فئة من فئات الأصول كانت سيئة للغاية، ونتيجة لذلك، تكبدت محافظ متنوعة تنوعا كبيرا وخسائر كبيرة. وهذا ما يفترض أن يقوم به التنويع وهو تجنب الخسارة. لذا فإن السؤال الصعب الذي يجب مواجهته هو: في حال هبوط كافة الأسواق في الأوقات السيئة، فما الهدف من التنويع في المقام الأول؟

من أجل فهم فوائد التنويع وتجنب التضليل من قبل النماذج التي تهمل أجزاء مهمة من الصورة الكاملة، نحن بحاجة إلى العودة إلى المبادئ الأولى.

2-1 مقدمة للاحتمالية والمخاطر

تنبع الأفكار المتعلقة بالاحتمالية إلى ألعاب الفرص. عادة ما يكون هناك مقامرين يضعون رهانات عالية، وكلما كان هناك كمية كبيرة من الأموال كان هناك حافزا قويا لتطوير أدوات للتنبؤ بفرص الفوز أو الخسارة. التاريخ الفكري لأفكار الاحتمالات والمخاطر عريق، ولكن أحد المراجع المبكرة تناولها كتاب لوكا باتشيولي الذي ظهر في عام 1494 بعنوان *Summa de Arithmetic, Geometria et Proportionalita* وهو كتاب عن الرياضيات ولكنه يتضمن وصفا مؤثرا للإدخال المزدوج للاحتفاظ بالسجلات، فضلا عن المشكلة التالية:

> A' وB يلعبون لعبة بالا بشكل عادل. ويوافقون على الاستمرار حتى يفوز أحدهم بست جولات. تتوقف اللعبة عند فوز A بخمسة جولات وB بثلاثة. كيف ينبغي تقسيم الرهانات؟

كيف يمكننا الإجابة على هذه المشكلة ؟ فوز الأول A (آدم) فوزه بجولة إضافية يؤكد فوزه، لكن B (بن) لا يزال لديه فرصة: إذا كان بإمكانه الفوز في الجولات الثلاث المقبلة فسيكون الفائز. التقسيم العادل من الرهانات يحتاج إلى عكس الاحتمال النسبي لفوز لاعب واحد أو لاعب آخر. ولكن في الوقت الذي طرح فيه السؤال لم يكن هناك آلية لوضع إطار لتلك الاحتمالات. ربما ليس من الغريب أن تظل هذه المشكلة ('مشكلة النقاط') دون حل لسنوات عديدة.

في الواقع تمت مناقشة المشكلة في رسائل اثنين من علماء الرياضيات المشهورين في 1650 وفيما بعد، وهما "بليز "باسكال" و"بيير دي "فيرمات"". وكانوا أذكياء للغاية: "باسكال" كان معجزة الأطفال الذين عملوا على كل شيء من حساب الآلات والهيدروليكية وحتى البارومتر، ولكنه ترك عمله العلمي في سن 31 بعد دخوله في تجربة صوفيه. في حين كان "فيرمات" عبقري رياضي فعل أشياء أكثر بكثير من ترك لغز "نظرية "فيرمات" الأخيرة". يصف "باسكال" الشكل الصحيح لتقسيم الرهانات الأولية في مشكلة نقاط بقوله: "القاعدة التي تحدد ما ينتمي إليهم سوف تكون متناسبة مع من لديهم الحق للتوقع من الحظ".

بدلا من ترك مشكلة النقاط معلقة في الهواء، يمكننا أن نوضح بسرعة كيف توصل "باسكال" و"فيرمات" من هذه المسألة. المفتاح هو التفكير فيما قد يحدث خلال الجولات الثلاث المقبلة. اللعبة سوف تنتهي بالتأكيد (بعد 11 جولة) إذا لم تكن قد انتهت بالفعل. ولكن لا ضرر أن نفترض أن جميع الجولات الثلاث تم لعبها، مع ثمان نتائج محتملة، على سبيل المثال. واحدة من النتائج المحتملة هي فوز بن، ثم فوزه مرة أخرى، ثم فوز آدم أخيرًا. يمكننا كتابة التسلسل ممكن AAA, AAB, ABA, ABB, AAB, BAB, ABB, BBB. ثم مسألة كيفية تحديد توزيع عادل يمكن من خلال الطعن في الافتراض بعدالة اللعبة الأساسية. في كل مرة يلاعب فيها "آدم" "بن" هناك فرصة متساوية بفوز أحدهما (مما يجعل كل من هذه النتائج المحتملة الثمانية متساوية). ولكن واحدة من الثمانية هي، BBB ب، بفوز بن بالحصة كاملة، ويكون التقسيم العادل للحصة 8/1 لصالح بن و8/7

لآدم. "باسكال" و"فيرمات" ناقشوا كيف يمكن إجراء هذه العملية الحسابية على نحو فعال لأي بداية وأي عدد من جولات اللعب. ولوحظ أنه حتى من دون معرفة القواعد الدقيقة للعبة المسماة بالا، قد نعارض أن أداء آدم المتفوق حتى الآن يوفر دليلا على أنه هو اللاعب الأقوى، وإذا كان الأمر كذلك، فحينئذ إعطاء بن حصة 1/ 8 كثير جدًا.

جاكوب برنولي وضع هذه المشكلة في الاعتبار عند كتاباته لـ آرس كونجيكتاندي (فن التخمين) الذي نشر بعد وفاته في 1713 (بعد ثماني سنوات من وفاته). في هذه المرحلة بدأت بعض الأفكار الحديثة للاحتمالية في الظهور. وكان "برنولي" واعيا بضرورة استخدام الماضي كمؤشر لاحتمالية وقوع أحداث مستقبلية ولفت الانتباه بشكل خاص إلى الطريقة (إذا لم يتغير شيء في الظروف) التي تتزايد بها عدد الملاحظات المؤدية إلى زيادة اليقين بشأن الاحتمال الفعلي لشيء محتمل الحدوث. وكتب:

> لأنه ينبغي افتراض أن كل ظاهرة يمكن أن تحدث أو لا تحدث في نفس العدد من الحالات التي تكون تحت ظروف مماثلة، لوحظ سابقا أنها قد تحدث أو لا تحدث. في الواقع، فعلى سبيل المثال، لوحظ سابقًا أنه من بين ثلاثمائة رجل من الملاحظين من نفس العمر والبشرة كمان تيتيوس، توفي مائتي رجل بعد عشر سنوات وظل الآخرين على قيد الحياة، وقد نستنتج بكل ثقة بأن تيتيوس لديها أيضا ضعف عدد الحالات لرد جميل الطبيعة خلال السنوات العشر القادمة بدلا من عبور هذه الحدود. ومن جديد، إذا كان شخص ما... كان موجود في لعبة يشارك فيها اثنين من اللاعبين ومراقبة عدد مرات فوز أحد اللاعبين، وبالتالي سوف يكتشف نسبة عدد الحالات التي قد تحدث أو لا تحدث في المستقبل في ظل ظروف مماثلة لتلك الموجودة سابقا."

ومن الواضح أن هناك قيودا في هذا النهج. هناك اختلافات حتمية بين الظروف في المستقبل وتلك التي حدثت في الماضي - فكيف نعرف أن تيتيوس يواجه بالفعل نفس احتمال الوفاة المبكرة لـ 300 رجل من نفس العمر ونفس البشرة؟ لقد كان هناك دائما نزاع حول مدى إمكانية الاعتماد على الحسابات استنادا إلى ما حدث في الماضي لتوجيه أعمالنا

المستقبلية. وعند التعامل مع القرارات اليومية، من المرجح أن نسترشد بفهم ما يحمله بيتر "بيرنشتاين" يتحدث عن "التوتر بين أولئك الذين يؤكدون أن أفضل القرارات مبنية على القياس الكمي والأرقام، التي تحددها أنماط الماضي، وأولئك الذين يتخذون قراراتهم على صعيد شخصي وغير موضوعي حول مستقبل غير مؤكد".

في هذا الكتاب سوف نركز على الأدوات الكمية لنمذجة وإدارة المخاطر. ولكن الطالب الذي يريد تطبيق هذه الأدوات يجب أن يكون على علم بحدودها. لقد وصلنا الآن إلى النقطة في القصة التاريخية التي تنطلق فيها نظرية الاحتمالات الرياضية، ولكن بدلا من الحديث عن مشاركات مختلفة من دي مويفر، بايس، لابلاس، غاوس، دي أليمبرت، بواسون وغيرهم سوف ننتقل إلى تفاصيل المخاطر. ويرد في الملحق (أ) مناقشة قصيرة لكل نظرية احتمالات نحتاج إليها في هذا الكتاب: دروس حول نظرية الاحتمالات.

2-2 هيكل المخاطر

لدينا اعتقاد بأن الاحتمالات واحتمالات التوزيعات هي الأدوات المناسبة المستخدمة في فهم المخاطر. سوف نبدأ بالتفكير في هيكل المخاطر التي نواجهها ونرى كيف ينعكس ذلك في الاحتمالات المعنية.

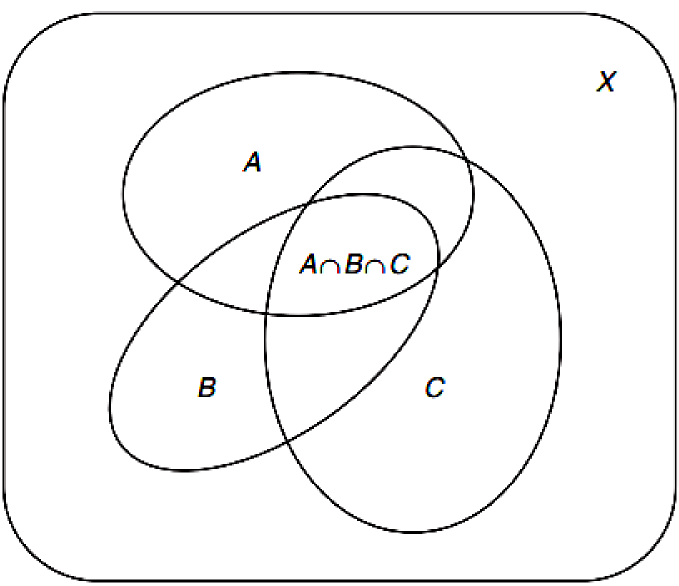
ويتمثل التمييز الأول بين أحداث المخاطر والمخاطر الكمية. حدث المخاطر لديه نموذج بسيط يتكون من نعم أو لا: ما هو خطر إفلاس شركة ما؟ ما هو خطر فشل دواء جديد في اجتياز اختبارات السلامة؟ وتتعلق المخاطر الكمية بتغير القيمة (متغير عشوائي في لغة نظرية الاحتمالات). وفي معظم الأحيان تقاس القيمة من الناحية النقدية. هذا هو نوع من المخاطر لا يمكن أن يكون نموذجه نعم أو لا: هل هي مخاطر تكبد خسائر هائلة في مشروع استثماري؟ ما هو خطر ارتفاع تكلفة مشروع بناء؟ ويمكن دائما تحويل المخاطر الكمية إلى أحداث المخاطر عن طريق إضافة نوع من العقبات: على سبيل المثال، بدلا من السؤال عن الخسائر بشكل عام، قد نسأل عن خطر خسارة أكثر من 500000 دولار.

1-2-2 مخاطر تقاطعية وموحدة

في بعض الأحيان ينطوي حدث المخاطر على عدد من الأشياء المنفصلة تفشل في آن واحد. على سبيل المثال، قد نأخذ في الاعتبار خطر الفشل في إمدادات الطاقة إلى المستشفى كخطر انقطاع التيار الكهربائي وتعطل مولد الطوارئ. ونحن نسمي هذا خطر تقاطعي، لأنه يتعلق بتقاطع الحدثين: "انقطاع التيار الكهربائي الرئيسي" و"تعطل مولد الطوارئ".

من ناحية أخرى، قد نحتاج إلى تحليل المخاطر حيث يوجد عدد من مسارات الفشل المختلفة، كل منها يؤدي إلى نفس النتيجة. إذا نظرنا إلى خطر فشل إطلاق صاروخ سنجد أن عامل من العوامل يمكن أن يحدث به خطأ ما قبل الإطلاق، وكلًا منهما سيؤدي إلى النتيجة النهائية. ونحن نسمي هذا خطر موحد، لأن احتمال الفشل هو احتمال وقوع واحد أو أكثر من الأحداث.

يمكننا القول إن الحدثين مستقلان إذا كان أحدهما لا يحدث فرقا لاحتمالية حدوث الآخر.



الشكل 2-1: مخطط فين Venn يبين ثلاثة مخاطر مختلفة

وهذا يعني أن احتمال حدوث كلًا من A وB ينبع من الاحتمالين الفرديين (انظر الملحق أ: دروس حول نظرية الاحتمالات للمزيد من التفاصيل). وهذا يسمح لنا بحساب الأخطار التقاطعية للأحداث المستقلة.

بالعودة إلى مثال إمدادات الطاقة في المستشفى، لنفترض أننا نعلم أن احتمال انقطاع التيار الكهربائي في أي يوم معين هو 0.0005 واحتمال تعدل مولد الطوارئ في المستشفى وفشل أي محاولة لبدء تشغيل المولد هي 0.002. إذا كان الحدثان مستقلان (كما هو مرجح في هذا المثال)، فإن احتمال حدوث فشل في إمدادات الطاقة في المستشفى في أي يوم هو $0.0005 \times 0.002 = 0.000001$.

الآن ننظر في خطر موحد، وكمثال على هذا هو احتمال فشل كارثي لإطلاق صاروخ. لنفترض أن الأسباب الرئيسة الثلاثة للفشل هي كما يلي: A = الفشل في نظام اشتعال الوقود. B = فشل فصل المرحلة الأولى عن الصاروخ الرئيسي؛ وC = الفشل في أنظمة التوجيه والمراقبة. افترض أن الاحتمالات هي على النحو التالي $Pr(A) = 0.001$ ، $Pr(B) = 0.002$، و$Pr(c) = 0.003$. ما هو الاحتمال العام للفشل إذا كانت الأحداث A وB وC كلها مستقلة؟

الاحتمال الذي نريده هو احتمال أن واحد أو أيًا من A، B وC يحدث. نريد أن تغطي المجموعات A، B وC هذه المنطقة في مخطط فين Venn. فتكون الصيغة:

$$Pr(A) + Pr(B) + Pr(C) - Pr(A \cap B) - Pr(B \cap C) - Pr(A \cap C) + Pr(A \cap B \cap C)$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة الإدراج والإقصاء - تدور الفكرة حول ما إذا أضفنا الاحتمالات A وB وC فإننا سوف نضاعف عدد التقاطعات، وبالتالي فإن المصطلحات الثلاث الثانية صحيحة، ولكن بعد ذلك أي شيء في التقاطع للثلاث مجموعات سيتم حسابها ثلاث مرات في البداية ثم استثنائها ثلاث مرات، وبالتالي فإن المصطلح النهائي يعيد التوازن لجعل جميع مكونات مخطط فيين Venn في نهاية المطاف يتم عدها مرة واحدة فقط. في ضوء الاحتمالات المعطاة واستخدام النموذج المنتج لاحتمال تقاطع الأحداث

المستقلة، نتوصل إلى احتمال الفشل من خلال:

$$10^{-3} + 2 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-7} - 6 \times 10^{-7} - 3 \times 10^{-6} + 6 \times 10^{-10} = 0.004196.$$

يوضح هذا المثال كيفية وتوقيت وجود احتمالات مخاطر ضعيفة وأحداث مستقلة، يمكننا تجاهل المصطلحات الإضافية بعد المجموع $\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C)$. في هذا المثال، ببساطة إضافة الاحتمالات الثلاثة يعطي قيمة 0.0042.

ومن الواضح أن هناك فرقا كبيرا بين النتيجة النهائية للمخاطر الموحدة حيث تضاف (تقريبا) الاحتمالات، والخطر المتقاطع حيث تتضاعف الاحتمالات.

هناك حيلة مهمة سنقدمها هنا والتي غالبا ما تكون مفيدة في حساب احتمالات المخاطر. سنكتب A^C لتكملة A؛ هذا هو الحدث الذي لا يحدث فيه A. على النحو التالي:

$$\Pr(A^C) = 1 - \Pr(A)$$

ومن المفيد أن ننظر إلى مخطط فين Venn في الشكل 2-1 حيث يتوافق الحدث AC مع مجموعة X مع حذف A. لاحظ أن $AC \cap BC = (A \cup B)C$. هذا واضح من خلال النظر في الرسم البياني، ويمكننا أن نضع هذا في كلمات بقولنا أن "تقاطع المكملات هو مكمل للاتحاد". من وجهة نظر حساب احتمالات المخاطر، الاستفادة من إعادة الترتيب تنشأ من الطريقة التي يمكن أن نضاعف بها احتمالات الأحداث المستقلة للحصول على احتمال تقاطعها. إذا كانت A وB مستقلة إذا AC وBC كذلك، وبالتالي سيكون لدينا سلسلة من الآثار المترتبة على الأحداث المستقلة A وB:

$$\begin{aligned}\Pr(A \cup B) &= 1 - \Pr((A \cup B)C \\ &= 1 - \Pr(AC \cap BC) \\ &= 1 - \Pr(AC)\Pr(BC) \\ &= 1 - (1 - \Pr(A))(1 - \Pr(B)).\end{aligned}$$

قد لا يبدو تقدم ملحوظ، ولكن نفس الحيلة يمكن استخدامها في أي عدد من الأحداث المستقلة وهذا أمر مفيد في تجنب تعقيدات صيغة الإدراج والإقصاء. على سبيل المثال، إذا أخذنا مثال احتمال الفشل لعملية إطلاق صاروخ سيكون لدينا:

$$\Pr(A \cup B \cup C) = 1 - (1 - \Pr(A))(1 - \Pr(B))(1 - \Pr(C))$$
$$= 1 - 0.999 \times 0.9998 \times 0.997 = 0.004196.$$

سنصل إلى نفس الإجابة التي حصلنا عليها قبل استخدام صيغة الإدراج والإقصاء.

2-2-2 الحد الأقصى للمتغيرات العشوائية

الآن نحن نأخذ في الاعتبار المخاطر الكمية، التي تنطوي على متغيرات عشوائية بدلا من الأحداث. من جديد نحن بحاجة للبدء مع فهم هيكل المخاطر والطريقة التي يتم الجمع بين المتغيرات العشوائية المختلفة. نحن ننظر أولا إلى الحالة التي يتم فيها تحديد المخاطر التي نريد قياسها من خلال أكبر مجموعة من المتغيرات العشوائية.

مثال 2-1 خسائر أسهم شركة IBM على مدار عشرون يومًا

لنفترض أننا نريد أن نجد احتمال انخفاض سعر أسهم شركة IBM بنسبة تزيد عن 10٪ في يوم واحد في مرحلة ما على مدى الأسابيع الأربعة المقبلة، نظرا لاحتمالية خسارة أكثر من 10٪ في يوم واحد هي 0.01 (لذلك نتوقع أن يحدث ذلك في يوم تداول واحد في 100)، والسلوك السعري في الأيام المتتالية مستقل بذاته.

هناك 20 يوم تداول، والسؤال حول احتمالية أقوى تراجع للقيمة في يوم واحد على مدار عشرون يوميًا أكثر من 10٪. لحساب الإجابة التي نريدها، نبدأ بتحديد الحدث:

A = الخسارة اليومية في سعر سهم IBM أقل من 10٪

لاحظ أن A تشمل جميع الأيام مع ارتفاع الأسعار أيضا. احتمال خسارة أكثر من 10٪ تعني ببساطة $1 - \Pr(A)$، وهذا هو الرقم الموضح لنا وهو 0.01. وبالتالي، نستنتج أن $\Pr(A) = 0.99$. ومع استقلالية كل حدث، فإن احتمالية أن كلاً من الأيام الأول والثاني والخسارة أقل من 10٪ هو احتمال التقاطع:

$$\Pr(A) \times \Pr(A) = 0.99^2 = 0.9801$$

احتمال أن الخسارة اليومية أقل من 10٪ على مدار عشرون يوما

$$\Pr(A)^{20} = 0.99^{20} = 0.8179.$$

ولكن إن لم يحدث ذلك فهناك على الأقل يوم واحد قد تزيد الخسارة عن 10٪ وهو بالضبط الاحتمالية التي نريد إيجادها. وستكون الإجابة هي $1 - Pr(A)^{20} = 0.1821$.

إن مهمة تحديد الخطر المتمثل في أن أكبر مجموعة من المتغيرات العشوائية أعلى من قيمة معينة هي تماما مثل تحليل المخاطر الموحدة: هو احتمال أن واحد أو أكثر من هذه المتغيرات العشوائية أكبر من قيمة معينة.

التحليل الذي قدمناه هنا هو مثال على استخدام حيلة مكملة لتحويل هذه المشكلة إلى مشكلة تقييم خطر تقاطعي. يمكننا إعادة كتابة تحليل الفقرة أعلاه بطريقة رسمية أكثر على النحو التالي. نحدد الحدث:

B_i = تراجع سهم IBM بأكثر من 10٪ في اليوم i.

ولهذا B_i مكمل لـ A_i = تراجع سهم IBM بأقل من 10٪ في اليوم i. A_i هو نفس الحدث A، ولكننا نريد أن نضيف مخطوطة لنشير إلى اليوم الذي نريد معرفته. لدينا إذًا $Pr(B_i) = 1 - Pr(A_i)$. ثم نستنتج من حيلتنا المكملة أن

$$Pr(B_1 \cup B_2) = 1 - Pr(A_1 \cap A_2),$$

ويظهر تعبير مماثل عند النظر في ثلاثة أيام أو أكثر. وبالتالي فإن الرقم الذي نريد أن نجده هو

$$Pr(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{20}) = 1 - Pr(A \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{20}).$$

الآن إذا كانت كافة الأحداث Ai لها نفس الاحتمالات وكانت مستقلة (كما نفترض هنا) إذا هذا يصبح $1 - Pr(A)^{20}$.

يمكننا تحول المناقشات حول الاحتمالات إلى مناقشات حول وظائف التوزيع التراكمي ويرمز إليها بـ CFDs. تذكروا أننا نعرف الـCFD لمتغير عشوائي X بـ $F_x(z) = Pr(X \leq z)$. الآن ننظر في متغير عشوائي U ويُعف بأنه أقصى عدد لمتغيرين عشوائيين X وY. ولهذا U = أقصى (X، Y). ولإيجاد وظائف التوزيع التراكمي (CFD) لـU نحن بالحاجة إلى إيجاد احتمالية أن الحد الأقصى لـ X وY أقل من القيمة المعطاة z. هذه فقط

احتمالية أن كلًا من X وY أقل من z، ولهذا

$$F_U(z) = \Pr(X \le z \text{ and } Y \le z).$$

وعليه عندما يكون كلًا من X وY مستقلين،

$$F_U(z) = \Pr(X \le z) \times \Pr(Y \le z) = F_X(z) \times F_Y(z).$$

ويمكن استخدام نفس الفكرة مع أكثر من متغيرين عشوائيين. عندما نتعامل مع المتغيرات العشوائية التي لها نفس التوزيع، تصبح الصيغة أبسط. افترض أن X_1، X_2،... ، يتم توزيعهم بشكل مماثل وبمتغيرات عشوائية مستقلة، وجميعهم بنفس وظائف التوزيع التراكمي CFD في ضوء Fx (·). إذًا وظائف التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي U= الحد الأقصى ($X_1, X_2, ...X_N$) يعبر عنه

$$F_U(z) = F_X(z)^N.$$

من ضمن أحد الأسئلة الأكثر شيوعا التي نحتاج إلى الإجابة عليه لا تتعلق بأكبر (أو أصغر) متغيرات عشوائية مختلفة، ولكن بدلا من ذلك تتعلق بالمخاطر الناشئة عند إضافة متغيرات عشوائية. وبالتالي نهتم بـ X+Y، بدلا من الحد الأقصى لـ (X، Y). في المثال أعلاه، سألنا عن احتمال انخفاض سعر سهم شركة IBM بنسبة تزيد عن 10٪ في يوم واحد خلال فترة عشرون يوما. لكننا من المرجح أن نهتم بالتغيير الكلي في السعر على مدى فترة عشرون يوما، ولحساب ذلك نحن بحاجة إلى إضافة تحركات الأسعار المتعاقبة خلال فترة العشرين يومًا. النظرة الأساسية هنا هي أن الأحداث القوية في حركة يوم واحد من المرجح جدا أن يتم إلغاؤها من قبل الحركات في أيام أخرى. ونتيجة لذلك، يمكننا القول أنها ما لم ترتبط حركات الأسعار بشكل إيجابي قوي، فإن الخطر المستند على مجموع العوامل المستقلة مجتمعة هو أقل من مجموع المخاطر الفردية. في القسم التالي نوضح هذه الفكرة بمزيد من التفصيل.

3-2 المحافظ والتنويع

بدأنا هذا الفصل بالحديث عن التنويع في محافظ الأسهم والآن نعود للحديث عن هذا الموضوع مرة أخرى. الفكرة الأساسية المتعلقة بهذا النوع من المخاطر يمكن وصفها

من خلال النصيحة التالية: "لا تضع كل البيض في سلة واحدة". إذا كان هناك خيار للقيام بذلك، فمن الأفضل توزيع المخاطر بحيث يكون تأثير المخاطر المختلفة على أجزاء مختلفة من المحفظة. وفي سوق الأسهم، فإن الاستثمار في سهم واحد سيحمل مخاطر فقدان الأموال كافة إذا أفلست تلك الشركة. تقسيم الاستثمار بمحفظة بها العديد من الأسهم المختلفة يقلل تلقائيا من احتمال هذه النتيجة المتطرفة للغاية. والنتيجة النهائية للمستثمر هي مجموع النتائج التي تم الحصول عليها لكل سهم في المحفظة (المرجحة وفقا للمبلغ المستثمر). وتضمن إضافة هذه النتائج معا أن النتيجة السيئة في جزء واحد من المحفظة من المرجح أن تكون متوازنة بنتيجة جيدة (أو اقل سوءًا) في جزء آخر من المحفظة.

1-3-2 إضافة المتغيرات العشوائية

وسوف نبدأ من خلال النظر في مزيد من التفاصيل في ما يحدث عندما تضاف المتغيرات العشوائية معا. إذا نظرنا إلى مجموع متغيرين عشوائيين X وY، كل منهما يمثل خسارة، ثم نسأل: ما هو احتمال أن مجموع الاثنين أكبر من قيمة معطاة؟ للإجابة على هذا السؤال، نأخذ $U = X + Y$ وننظر في المعادلة. $\Pr(U \geq z) = 1 - FU(z)$. هذا ليس حسابا سهلا للقيام به بشكل عام، لأننا بحاجة إلى تحقيق توازن بين قيمة X مع قيمة Y.

مثال 2-2 الجمع بين متغيرين عشوائيين منفصلين.

ولتوضيح ذلك ننظر إلى مثال حيث يمكن لكل من X وY أن يأخذوا القيم بين 1 و5 مع الاحتمالات الواردة في الجدول 2-1.

الجدول 2-1: احتمالية قيم مختلفة بالنسبة إلى X وY.

القيمة	الاحتمالية لـ X	الاحتمالية لـ Y
1	0.1	0.2
2	0.3	0.3
3	0.2	0.3
4	0.2	0.1
5	0.2	0.1

يمكننا حساب احتمال $U = X + Y$ كونهم 8 أو أكثر من خلال النظر في الاحتمالات الثلاثة: $X = 3$ و$Y = 5$؛ $X = 4$ و$Y \geq 4$؛ و$X = 5$ و$Y \geq 3$. عندما يكون X وY مستقلين، فإن هذا يدل على أن احتمال $U \geq 8$ من خلال

$$0.2 \times 0.1 + 0.2 \times (0.1 + 0.1) + 0.2 \times (0.3 + 0.1 + 0.1) = 0.16.$$

من النظرة الأولى نلاحظ أن الاحتمالية هنا أقل مما قد نتوقعه. هناك احتمالية 0.4 أن $X \geq 4$ واحتمال 0.2 أن $Y \geq 4$. ومع ذلك احتمال أن $X + Y \geq 8$ أصغر من كل من هذه الأرقام. هذا هو مثال بسيط على طريقة إضافة متغيرات عشوائية مستقلة تميل إلى الحد من مستويات المخاطر الإجمالية.

ويمكن إجراء نفس النوع من الحسابات للمتغيرات العشوائية الأكثر عمومية مع أخذ القيم الصحيحة 1، 2،... ، M، حيث نكتب $pk = Pr(X = k)$ and $qk = Pr(Y = k)$ ثم

$$\Pr(X + Y \geq z) = pz-M(qM) + pz-M+1(qM-1 + qM) \\ +... + pM(qz-M + ... + qM)$$

نحن بحاجة إلى $M2 > z \geq M$ لهذه الصيغة (بحيث يكون $z - M$ في المدى 1، 2، ...، M).

يمكننا ترجمة هذه الصيغة إلى شكل متكامل للمتغيرات العشوائية المستمرة. لنفرض أن X وY مستقلان والمتغير العشوائي X له دالة الكثافة f_X وCDF FX ، في حين أن المتغير العشوائي Y له دالة الكثافة f_Y وCDF FY. لنبدأ مع افتراض أن كلا المتغيرات العشوائية تأخذ القيم في النطاق [0، M]. كالسابق، ونأخذ $U = X + Y$. ثم

(2.1)

$$1 - F_U(z) = \Pr(X + Y \geq z) = \int_{z-M}^{M} fX(x)(1 - FY(z - x))dx.$$

وبما أن f_X هو كثافة الاحتمالية والاندماج لـ 1، فإن لدينا

$$\int_{z-M}^{M} fX(x)dx = 1 - \int_{0}^{z-M} fX(x)dx = 1 - F_X(z - M).$$

إذا يمكن كتابة المعادلة (2-1) كالتالي

$$1-F_U(z) = 1 - F_X(z - M) - \int_{z-M}^{M} fX(x)FY(z - x)dx,$$

وعليه

$$F_U(z) = F_X(z-M) + \int_{z-M}^{M} f_X(x)F_Y(z-x)dx.$$

هذا يعد أمر منطقيًا من الناحية الحدسية: المصطلح الأول هو احتمال أن X يأخذ قيمة منخفضة بحيث نضمن أن تكون قيمة X + Y أقل من Z.

هناك صيغة مكافئة يمكن تطبيقها عندما لا يكون للمتغيرات نطاقات محددة. مثل أخذ M بلا حدود ونحصل على

$$F_U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(z-x)dx$$

ويسمى التكامل هنا تلازما بين الوظائف f_X وF_Y.

مثال عملي 2-3 مزيج بين الفشل والإصلاح

لنفترض أن الوقت المتبقي لتعطل جزء من آلة موزع كتوزيع أسي بمتوسط 10 أيام. عند تعطل هذا الجزء سيتطلب إصلاح، وقد يستغرق وقتًا ما بين 0 و20 يوما، ومن المرجح أن يأخذ وقت الإصلاح أي قيمة في هذا النطاق. لنفترض أن وقت الإصلاح مستقل عن وقت التعطل. ما احتمال تعطل هذا الجزء وتم إصلاحه بالفعل خلال ثلاثين يومًا (ستحتاج إلى استخدام التوزيع الأسي بمتوسط λ له $F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$)

الحل

رمزنا لوقت الفشل بـ Y = وقت الفشل. ووظائف التوزيع التراكمي CDF لـ Y تعبر عنها $F_Y(x) = 1 - e^{-x/10}$. رمزنا لوقت الإصلاح بـ X = وقت الإصلاح. ثم تكون كثافة X ثابتة وتعطى بواسطة 1/20 ل x في المدى من 0 إلى 20. وهكذا، إذا كان U الوقت المستغرق لدينا لإصلاح الفشل الأول، لدينا U = X + Y ونحن نريد أن نجد احتمال أن $U \leq 30$. لذلك نحن بحاجة إلى تقييم:

$$F_U(30) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(30-x)dx.$$

لأن fX (x) تساوي صفر إلا إذا كان x في النطاق 0 إلى 20، يمكننا أن نأخذ التكامل على هذا النطاق ونحصل على

$$F_U(30) = \int_0^{20} f_X(x) F_Y(30-x)dx$$
$$= \frac{1}{20}\int_0^{20} \left(1 - e^{-(30-x)/10}\right) dx.$$

$e^{-(30-x)/10} = e^{-3}e^{x/10}$ & $e^{x/10}$ يندمج مع $10e^{x/10}$, so

$$F_U(30) = \frac{1}{20}\left[x - 10e^{-3}e^{x/10}\right]_0^{20}$$
$$= \frac{1}{20}\left(20 - 10e^{-3}e^{2} + 10e^{-3}\right)$$
$$= 1 - \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e^{-3}}{2} = 0.84095.$$

هذه الاحتمالية التي نريدها: فرصة عدم تعطل هذا الجزء أو بقائه قيد الإصلاح بعد ثلاثين يومًا هي 16٪.

وغالبا ما يكون من الصعب العثور على تعبيرات رياضية للتكاملات المعقدة التي تظهر عند إضافة التوزيعات معا. الصيغة المعادلة إذا أردنا النظر في مجموع أكثر من متغيرين أكثر صعوبة. الطريقة المعتادة للتعامل مع هذه الصعوبات هي العمل مع لحظة توليد دالة التوزيع بدلا من التوزيع نفسه. ولكن للبدء في مناقشة لحظة توليد وظائف سيأخذنا ذلك بعيدا جدا عن هدفنا الرئيسي من هذا الكتاب. وبدلا من ذلك سنقدم نهجا مختلفا لتقييم المخاطر في المحفظة؛ سنتخلى عن شيء من حيث الاحتمالات الدقيقة، ولكننا سنحرز تقدمًا كبيرًا في تسهيل التقييم.

وبدلا من النظر إلى احتمالات محددة ننظر بدلا من ذلك في توزيع القيم، ويقاس الانحراف المعياري (أو التباين). مرة أخرى على اعتبار متغيرين عشوائيين مستقلين. تذكر أنه عندما يكون X وY مستقلين يمكننا إضافة فروقهما، أي بالنسبة إلى X وY المستقلين،

فإن الفرق بين Y + X هو مجموع الفروق بين X وY، والتي يمكننا كتابتها كالتالي:

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y).$$

التغير: Var

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X، الذي نكتبه على أنه σX، هو مجرد الجذر التربيعي للتباين، var(X)، لذلك عندما يكون X وY مستقلين،

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

يمكننا تمديد هذه الصيغة إلى أي عدد من المتغيرات العشوائية. أبسط حالة للجميع المستقلة وأيضا X_N،... ، X_2، X_1هي حينما يكون لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية جميعها لها نفس الانحراف المعياري، حتى نتمكن من كتابة

$$\sigma X = \sigma X_1 = \sigma X_2 = \dots = \sigma X_N.$$

ثم

$$\sigma_{X_1+X_2+\ldots+X_N} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \ldots + \sigma_{X_N}^2} = \sqrt{N\sigma_X^2} = \left(\sqrt{N}\right)\sigma_X.$$

ومن الواضح أن هذه الصيغة تنطبق عندما يكون لكل المتغيرات نفس التوزيع (مما يجعل انحرافاتها المعيارية متساوية). على سبيل المثال، قد تكون المتغيرات العشوائية الفردية هي الطلب على بعض المنتجات في الأسابيع المتعاقبة، عندما لا يكون لدينا سبب لتوقع حدوث تغيرات في متوسط الطلب على مر الزمن. إذاً ينتهي الانحراف المعياري للطلب الإجمالي مثلًا 10 أسابيع من خلال $\sqrt{10\sigma}$ حيث σ هو الانحراف المعياري على مدى أسبوع واحد، شريطة أن يكون الطلب في الأسابيع المتعاقبة مستقل.

النقطة المهمة التي يجب تذكرها هي:

الانحراف المعياري لمجموع N المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة هو الجذر التربيعي لـ N للانحراف المعياري لواحد من المتغيرات العشوائية.

2-3-2 المحافظ ذات الحد الأدنى من التباين

الآن ننظر في حالة حيث يتم إنشاء محفظة من استثمار مبلغ wi في فرصة استثمارية معينة i، حيث i = 1، 2،... ، N. نجعل Xi يكون المتغير العشوائي الذي يعطي قيمة الاستثمار i في نهاية السنة. وبالتالي فإن قيمة المحفظة هي

$$Z = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_N X_N.$$

نريد أن نجد التباين لـ Z، وكنوع من التبسيط سوف نفترض أنه ليس فقط أن Xi مستقلة، ولكن أيضا أن لديهم جميعا نفس التباين، $\sigma\frac{2}{x}$ (لذلك σ_X هو الانحراف المعياري لـ X_i).

عند ضرب متغير عشوائي في w، يتم ضرب الانحراف المعياري في w ويتم ضرب التباين في w_2. وبالتالي فإن الفرق بين قيمة المحفظة بأكملها هو

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Z) &= \mathrm{var}(w_1 X_1) + \mathrm{var}(w_2 X_2) + \ldots + \mathrm{var}(w_N X_N) \\ &= w_1^2 \sigma_{X_1}^2 + w_2^2 \sigma_{X_2}^2 + \ldots + w_N^2 \sigma_{X_N}^2 = \sigma_X^2 \left(w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_N^2\right). \end{aligned}$$

إذا كان لدينا مبلغ إجمالي W للاستثمار، وقمنا بتقسيم استثمارنا بالتساوي (بعد كل شيء، كل فرصة استثمارية لديها نفس التباين)، ثم كل $W / N = w_i$

$$\mathrm{var}(Z) = \sigma_X^2 N (W/N)^2 = (1/N) \sigma_X^2 W^2.$$

وقد نرغب في الحد من الانحراف المعياري لقيمة المحفظة عندما يكون لدى الاستثمارات الفردية انحرافات معيارية مختلفة. وستكون هذه فكرة جيدة إذا لم يكن هناك فرق بين الاستثمارات من حيث متوسط أدائها. ولعل الفكر الأول لدينا هو وضع كل أموالنا في أفضل الفرص الاستثمارية؛ وبعبارة أخرى، وضع كل شيء في استثمار واحد

صاحب الانحراف المعياري الأقل. ومن المؤكد أنه سيكون من المنطقي استثمار المزيد من ثروتنا الإجمالية في الاستثمارات مع انحرافات معيارية صغيرة، ولكن مبدأ التنويع يعني أننا يمكن أن نفعل ما هو أفضل من خلال توزيع استثماراتنا في أكثر من فرصة استثمارية واحدة.

لتوضيح هذا المبدأ يمكن أن ننظر في استثمار مبلغ إجمالي W في الأسهم المستقلة عن بعضها البعض. سوف نفترض أن استثمار دولار واحد في السهم الأول يعطي قيمة نهائية وهو متغير عشوائي مع متوسط μ والانحراف المعياري هو σ_1. من ناحية أخرى، فإن استثمار دولار واحد في السهم الثاني يعطي نفس القيمة النهائية المتوسطة μ، ولكن مع انحراف معياري σ_2. لذلك، أيا كان اختيار الاستثمار، القيمة النهائية المتوقعة هي μW. ثم يمكن كتابة مشكلة التقليل من الانحراف المعياري كمشكلة للتحسين؟

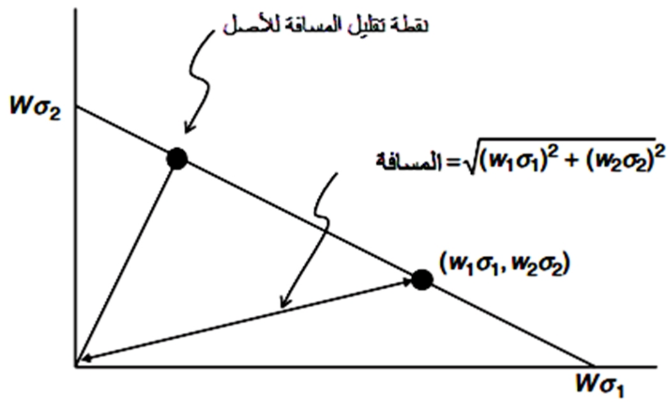
التقليل مرتبط بـ

$$\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2}$$
$$w_1 + w_2 = W,$$
$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0.$$

في هذه الحالة، مع اثنين فقط من الاستثمارات، المشكلة لها تفسير هندسي بسيط، بما أن التعبير $\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\,\sigma_2^2}$ يعطي نفس المسافة من نقطة تتسق مع $(w_1\sigma_1,\ w_2\sigma_2)$ للأصل. يعني أن هذه النقطة تقع في مكان ما على الخط المستقيم بين $(W\sigma_1، 0)$ و$(0، W\sigma_2)$. تتوافق هاتان النقطتان مع ما قد يحدث إذا استثمرنا فقط في واحد أو إحدى الخيارين. ويوضح الشكل 2-2 هذه الحالة مع $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

في الحالة الموضحة في الشكل (مع $\sigma_1=2\sigma_2$) يمكننا أن نجد أفضل خيار من الأوزان ببساطة عن طريق استبدال $w_2 = W - w_1$، مما يعني أن الهدف هو التقليل

$$\sqrt{w_1^2 4\sigma_2^2 + (W - w_1)^2\sigma_2^2}.$$



الشكل 2-2: اختيار حجم الاستثمار لتقليل الانحراف المعياري للعائد

يمكننا استخدام حساب التفاضل والتكامل لإيجاد الحد الأدنى من هذه المسألة، والذي يحدث عندما نقوم بالعملية $w_1 = W/5$ و $W_2 = 4W/5$. ويكون الانحراف المعياري الناتج هو

$$\sqrt{\frac{4}{25}W^2\sigma_2^2 + \frac{16}{25}W^2\sigma_2^2} = \frac{\sqrt{20}}{5}W\sigma_2.$$

مثال عملي 2-4 تقليل التباين مع اثنين من الاستثمارات

أندي لديه 100,000 دولار أمريكي للاستثمار لمدة ثلاث سنوات، ويعتقد أن الاستثمار في الأسهم الأمريكية سيحقق نفس متوسط العائد للاستثمار في صندوق بالأسواق الناشئة. ويريد تقسيم استثماره بين صندوق استثماري في الأسهم الأمريكية بمتوسط عائد يبلغ 120000 دولار بعد ثلاث سنوات مع انحراف معياري 4000 دولار أمريكي وصندوق استثماري في سوق ناشئ يعتقد بأنه سيحقق متوسط عائد 120000 دولار أيضًا بعد ثلاث سنوات بانحراف معياري 12000 دولار. وإذا افترضنا أن العائد من الصندوقين مستقلين، كيف يمكن له أن يقسم استثماراته لتقليل مخاطرته؟

الحل

سنعمل على 1000 دولار ونفترض أن أندي سيستثمر مبلغ X في صندوق الاستثمار في الأسهم الأمريكي و100 – X في صندوق السوق الناشئ. وسيكون العائد المحقق بعد ثلاث سنوات $xU + (100 - x)V$، بحيث U هو العائد المحقق من صندوق الاستثمار في الأسهم الأمريكية وV العائد المحقق من صندوق الاستثمار في السوق الناشئ. ولهذا فإن العائد المتوقع هو

$$xE(U) + (100 - x)E(V) = 120$$

التغير في هذا العائد هو

$$x^2 var(U) + (100 - x)^2\ var(V) = 16x^2 + 144(100 - x)^2$$

نريد هنا اختيار x للحد من الجذر التربيع لهذه المسألة، ولكن الاختيار الصحيح لـ x سوف يقلل أيضًا من التباين. لإيجاد الحد الأدنى أخذنا المشتق وجعلناه يساوي الصفر. ولهذا فإن الـ x المثالية يتم من خلال حل

$$32x - 288(100 - x) = 0.$$

ولهذا فإن $x = 28800/320 = 90$. يجب على أندي استثمار 90000 في الصندوق الاستثماري في الأسهم الأمريكية والـ 10000 المتبقية في الصندوق الاستثماري في السوق الناشئ.

يمكننا أيضًا أن نسأل ماذا يحدث عندما يكون هناك فرص كثيرة للاستثمار، ولهذا الرقم N يكون إلى ما لا نهاية. نبدأ بالتفكير في حالة أن يكون عدد الأسهم N لها نفس الانحراف المعياري. وقد أوضحنا بالفعل الانحراف المعياري لكل العائدات حينما تكون كل الأسهم الفردية لها الانحراف المعياري σ_x من خلال

$$\sigma_X \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_N^2}.$$

هذه المسألة تم اختزالها من خلال تقسيم الاستثمار W بالتساوي، ولهذا $W/N = w_i$

لـ i= 1,2 .... N في ضوء الانحراف المعياري لـ

$$\sigma_X\sqrt{(W/N)^2+(W/N)^2+\ldots+(W/N)^2}=\sigma_X\frac{W}{N}\sqrt{N}=\frac{\sigma_X W}{\sqrt{N}}.$$

وبالتالي، في حالة الاستثمارات المستقلة، حيث أن عدد الاستثمارات المختلفة يكون بلا نهاية والمبلغ المستثمر في كل منها يصبح أصغر، فإن الانحراف المعياري يصبح صفر. ويتم خفض المخاطرة أيضًا لتصبح صفر.

يمكننا استنتاج أن نفس السلوك يحدث في عدد أكثر من المسائل العامة حينما يكون للأسهم انحراف معياري مختلف (انظر التدريب 2-6). إذا كان لا يوجد أيًا من الانحرافات المعيارية أكثر من σ_{max} إذا يمكننا إنشاء محفظة أقل من $W\sigma_{max}/\sqrt{N}$. كلما أصبحت N أكبر وأكبر. ولهذا استنتجنا أنه لا يوجد حد أقصى لفوائد التنويع. وبالنظر إلى المعطيات يمكننا أن نجد فرص استثمارية جديدو والتي هي مستقلة عن المحفظة الحالية ولا يوجد تكلفة زائدة للاستثمار فيها، وعليه يمكن أن نخفض المخاطر دائمًا بإضافة هذه الاستثمارات الإضافية لمحفظتنا وإعادة التوازن وفقًا للمعطيات.

3-3-2 نظرية المحفظة المثلى

الآن سننظر إلى حالة يكون فيها عدد من الاستثمارات المختلفة لها نسبة أرباح متوقعة مختلفة بالإضافة إلى تغيرات مختلفة. ويعد هذا التعبير هو أساس ما يسمى بنظرية المحفظة. عندما يكون هناك اختلافات في الربح المتوقع لاستثمار فردي سيكون هناك اختلاف في الربح المتوقع للمحفظة ولهذا لم يعد بإمكاننا أن نجد محفظة تحقق أقل انحراف معياري. يجب علينا أيضًا أن نضع في اعتبارنا الربح المتوقع من المحفظة. وهذا يعني المعاوضة: كلما زاد التنويع كلما قلت المخاطرة وحتمًا سيؤدي إشراك المزيد من استثمارات ذات عوائد أقل إلى تراجع العائد المتوقع العام.

لشرح هذه الفكرة سنفترض أن لدينا ثلاثة استثمارات محتملة: A وB وC . يمكننا النظر في النتائج بعد تحديد أوزان مختلفة في مكونات مختلفة بالمحفظة والتوصل في النهاية

إلى مجموعة من المعاوضات بين المخاطرة والعائد. سنفترض أن العائد المتوقع من استثمار بقيمة 10000 دولار وانحراف معياري لـ A وB وC كالتالي:

	الربح المتوقع	الانحراف المعياري
A	$R_A = \$1000$	$\sigma_A = 100$
B	$R_B = \$950$	$\sigma_B = 80$
C	$R_C = \$900$	$\sigma_C = 85$

من النظرة الأولى قد يبدو أن الاستثمار C لن يستخدم، حيث يهيمن عليه الاستثمار B: حيث لديه ربح متوقع أعلى وفي الوقت نفسه ذو مخاطرة أقل (في ضوء عائد متغير أقل)، ولكننا سوف نرى مميزات أن يكون لدينا استثمار أو أكثر في المحفظة بحيث تتفوق على حقيقية كونها استثمار غير جذاب.

انظر في مشكلة إيجاد أقل مخاطرة لتحقيق الربح الموضح، يمكن كتابة ذلك على هيئة مشكلة التحسين:

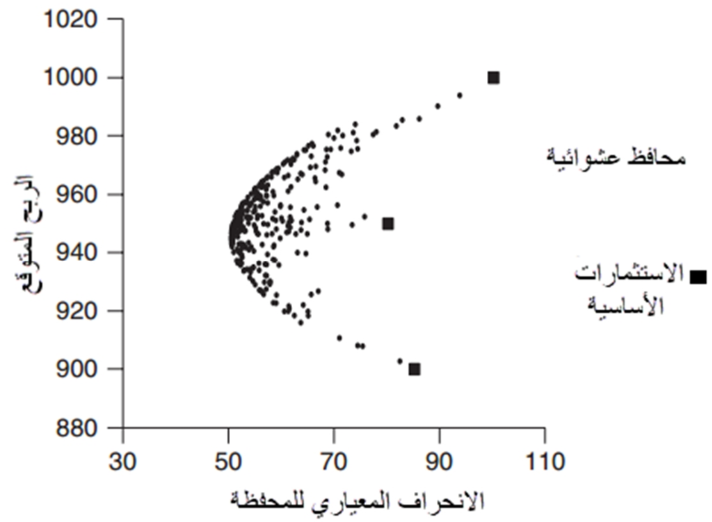
$$\text{التقليل} \quad w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2$$

$$\text{تخضع لـ} \quad \begin{aligned} &w_A + w_B + w_C = W, \\ &w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C = R, \\ &w_A \ge 0, w_B \ge 0, w_C \ge 0. \end{aligned}$$

لدينا W_A، W_B وW_C وهم مجموع ما تم استثماره ولهذا W هو إجمالي المبلغ وتم تحديده لـ 10000، R_A، R_B، R_C وهو الربح المتوقع الذي تم تحقيقه من 10000 في استثمارات مختلفة: وσ_C σ_A, σ_B الانحرافات المعيارية لتلك الأرباح. لاحظ أن الهدف الذي اخترناه هو لتقليل التغير من إجمالي الربح بأكثر من الانحراف المعياري. ولكن الانحراف المعياري هو مجرد الجذر التربيعي للمتغير مهما كان اختيار الأوزان فإن تقليل أحدهما سيقلل الآخر.

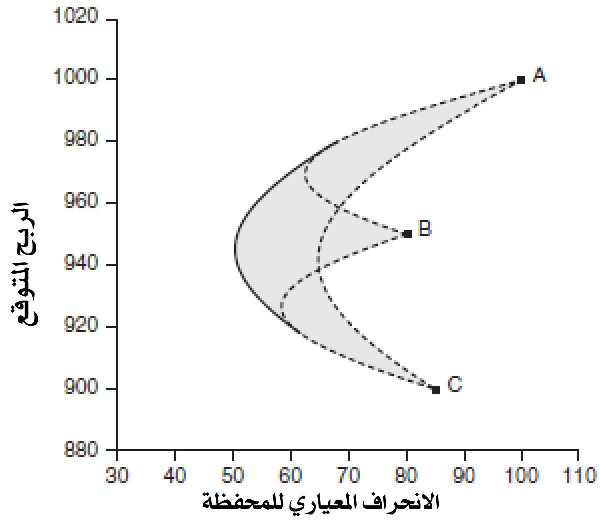
من الممكن كتابة معادلة معقدة للحل الأمثل لهذه المشكلة، ولكن بدلًا من القيام

بذلك سننظر في حل رقمي لهذه المشكلة بناء على البيانات المعطاة أعلاه. يظهر الشكل 2-3 ما يحدث لمجموعة كاملة من الاختيارات العشوائية مع استثمارات مقسمة. يظهر هذا الشكل المعاوضات المختلفة بوضوح والتي يمكن إنشاؤها: يمكننا اختيار نطاق من الانحرافات المعيارية المختلفة للمحفظة بحد أدنى 50 مع ربح متوقع بنحو 945 دولار.



الشكل 2-3: الربح مقابل الانحراف المعياري لمحافظ عشوائية

يمكننا النظر في الحدود بشكل أكثر تفصيلًا لمجموعة من الحلول المحتملة. إذا كنا سنضع أحد الاستثمارين في اعتبارنا إذا يمكننا تحديد الربح المتوقع مقابل الانحراف المعياري، لدينا منحنى يصل بين النقطتين. في هذا المثال يوجد ثلاث منحنيات بناء على ما هو زوج الاستثمارات الأساسية المختارة. هذه هي الخطوط المتقطعة في الشكل 2-4 والمنطقة المظللة بشكل طفيف تعبر عن مجموعة من النتائج المحتملة من محافظ مختلفة. الخط المتصل هو الحد في ضوء الانحراف المعياري الأدنى الذي يمكن تحقيقه من خلال أي قيمة معطاه للربح المتوقع العام. على سبيل المثال، النقطة عند الربح المتوقع 960 وانحراف معياري عند 3.95 هو أفضل احتمال لهذا الربح ويمكن تحقيقه من خلال $W_A = 0.3924$، $W_B = 0.4152$ و $W_C = 0.1924$.



الشكل 2-4: حدود المنطقة التي يمكن تحقيقها من خلال محفظة من ثلاثة استثمارات

2-3-4 عندما تتبع المخاطرة توزيع طبيعي

مناقشتنا في مخاطر المحافظ حتى الآن تناولت الانحرافات المعيارية للربح الإجمالي (تم الحصول عليه من خلال متغيرات عشوائية). هناك افتراض مهم حول استقلالية الاستثمارات المختلفة ولكن لا يوجد افتراض حول التوزيعات. حينما يكون التوزيع معروف، وحينما يمكننا القول المزيد حول المخاطر المنطوية وبالأخص يمكننا حساب احتمالية الحصول على نتائج أسوأ من المستوى القياسي.

التوزيع الأكثر أهمية وهو النظر في التوزيع الطبيعي. وتنبع أهميته من الطريقة التي يقارب بها نتيجة متغيرات عشوائية مختلفة مهما كان توزيعهم الأصلي. هذه هي نظرية الحد المركزي التي تم مناقشها في الملحق (A): دروس حول نظرية الاحتمالات. وفي الوقت نفسه، فإن التوزيع الطبيعي سهل العمل لأن مجموع متغيرين عشوائيين أو أكثر لكل منهما مع توزيع طبيعي له أيضا توزيع طبيعي. إذا كان توزيع الأرباح يتبع توزيع عادي، يمكننا استخدام الجداول أو جدول بيانات لحساب أي من الاحتمالات التي قد نحتاج إليها.

مثال 2-5 حساب الاحتمال مع توزيعات عادية

انظر في مثال يكون في استثمارين مختلفين، لهم توزيع عادي للربح بعد عام واحد. الأول لديه ربح متوقع قدره 1000 دولار مع انحراف معياري قدره 400 دولار والثاني لديه ربح متوقع 600 دولار مع انحراف معياري قدره 200 دولار. إذا احتفظنا بهذين الاستثمارين، ما هو احتمال خسارتنا الأموال؟ بدون معلومات عن توزيع الربح، لا يتم تحديد هذا الاحتمال، ولكن مع العلم بأن الأرباح تتبع التوزيع الطبيعي يصبح من السهل الإجابة على السؤال. مجموع العائدين هو أيضا توزيع طبيعي بمتوسط قدره 1000 دولار + 600 دولار = 1600 دولار، ونظرًا لأنهم مستقلين فإن الانحراف المعياري هو:

$$\sqrt{400^2 + 200^2} = \sqrt{200000} = 447.21$$

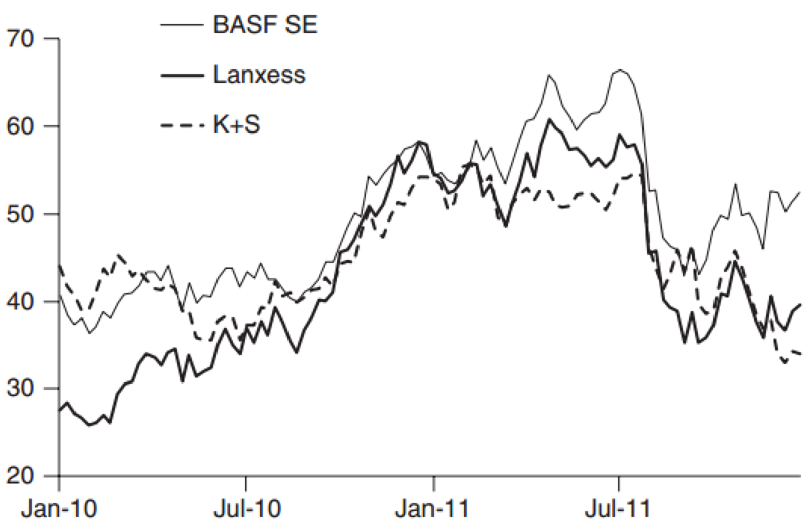
احتمالية الحصول على قيمة أقل من 0 دولار يمكن الحصول عليها من خلال الجدول (هو احتمال أن يكون أكثر من الانحرافات المعيارية z عن المتوسط، حيث $z = 1600 / 447.21 = 3.5777$) أو، ببساطة أكثر، باستخدام الدالة نورمديست NORMDST في جدول بيانات. على وجه التحديد لدينا نورمديست (0، 1600، 447.21، 1) = 0.00017329.

4-2 تأثير الارتباط

ناقشنا الطريقة التي يمكن من خلالها تقليل المخاطرة من خلال التنويع ولكن يجب أن يكون هذا التنويع دقيق. يمكن أن تسوء الأمور في حال كان هناك علاقة قوية بين الاستثمارات المختلفة. لإيضاح تلك النقطة، تخيل وجود مستثمر يرغب في الاستثمار في أسهم قطاع كيماويات في ألمانيا. وهناك ثلاثة أمثلة بهذا الصدد K+S AG، التي تعد موردا رئيسيا للبوتاس للأسمدة وأيضا أكبر منتج للملح في العالم؛ لانكسيس AG، هي شركة ألمانية متخصصة في المواد الكيميائية وكانت في الأصل جزءا من شركة باير. وأخيرا BASF SE، وهي أكبر شركة للمواد الكيميائية في العالم. كل هذه الشركات هي جزء من مؤشر داكس الألماني.

يظهر الرسم 2-5 سعر السهم على الإطار الزمني الأسبوعي (المصدر Yahoo) للثلاث

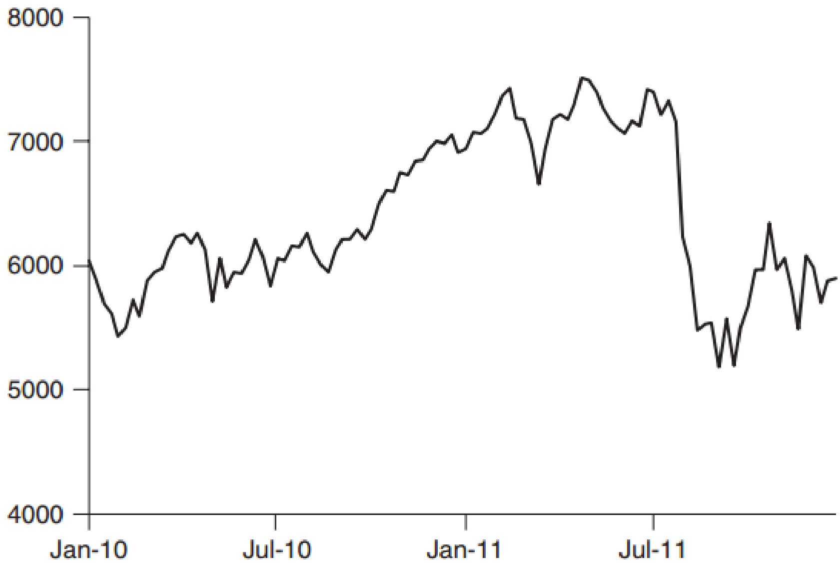
أسهم لفترة عامين بداية من 2010. وجود علاقة قوية بين أسعار الأسهم ليس مفاجئًا. بالنظر إلى الرسم البياني، يمكن أن نلاحظ ارتفاعهم خلال النصف الثاني من عام 2011 وتراجعهم فيما بعد بشكل ملحوظ خلال يوليو 2012. ولهذا فإن الاستثمار في محفظة تتكون من تلك الأسهم بالتساوي لن يختلف كثيرًا عن الاستثمار في سهم واحد منهم بسبب تشابه سلوكهم السعري بشكل كبير خلال تلك الفترة، ولهذا فإن تنويع الاستثمار بهذا الشكل لن ذو فائدة كبيرة.



الشكل 2-5: أسعار الأسهم الثلاثة بقطاع الكيماويات الألماني: أسعار الأسهم على الإطار الزمني الأسبوعي باليورو.

ففي حقيقة الأمر، العلاقة الأساسية هنا لا ترتبط بصناعة الكيماويات ولكن بتحرك سوق الأسهم الألماني بوجهٍ عام، كما واضح في الشكل 2-6 الذي يبين السلوك السعري لمؤشر داكس الألماني خلال نفس الفترة.

في هذا الجزء ننظر في الطريقة التي تؤثر بها طريقة ارتباط المتغيرات العشوائية على السلوك العام. ويحظى هذا الموضوع بأهمية كبرى حينما يتم تقييم المخاطر بشكل عملي، ولكن أيضا من الأفضل التعامل معها من خلال بعض الأدوات الرياضية أكثر تعقيدا من المستخدمة في بقية هذا الكتاب (وخاصة المصفوفة الجبرية). ولذا فإننا سوف نعالج الأمر بشكل أكثر شمولًا هنا.



الشكل 2-6: مؤشر الداكس الألماني خلال الفترة ما بين 2010 و2011.

2-4-1 استخدام التباين في الجمع بين المتغيرات العشوائية

يظهر الشكل 2-7 المتوسط الشهري للأسعار على مدار 20 عام، بداية من عام 1980 الرصاص والنحاس في بورصة لندن للمعادن. لوحظ أن أسعار هاتين السلعتين بنهاية هذه الفترة في ديسمبر 1999 لم تختلف كثيرًا عن يناير 1980. على افتراض أننا نعرف أنه يجب علينا شراء كمية معينة من الرصاص والفضة في سنة ما. تكمن المخاطرة في السعر الإجمالي لعملية الشراء. بناء على نقاشنا السابق، في حال كانت أسعار كلًا منهما مستقلة عن

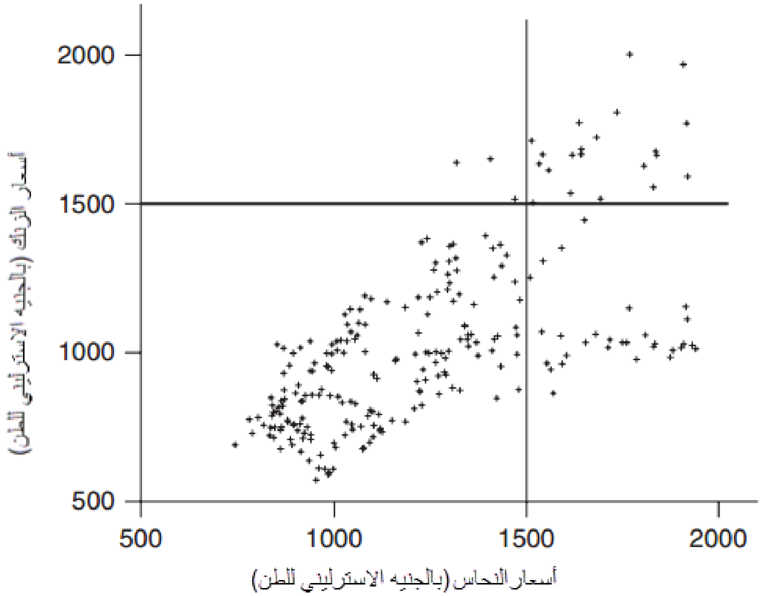
الأخرى فالمخاطرة المرتبطة بعملية الشراء الإجمالية ستكون أقل مقارنة بشراء واحدة فقط منهما حيث أن ارتفاع أسعار أحدهما يمكن أن يوازنه تراجع أسعار الأخرى. لكن الشكل 2-7 يظهر أن هناك علاقة قوية بين المتغيرين ولهذا الاستفادة من التنويع سيكون ضعيفًا.

لكي نكون أكثر تحديدًا، نفترض أننا نرغب في شراء طن من الفضة وطنين من الرصاص (أرخص ثمنًا). النهج الجيد للتفكير في هذا هو تعرُّف النقاط التي لها نفس القيمة لـ X+2Y وكلها تقع على خط مستقيم على (X, Y). ولهذا إذا نظرنا إلى السعر الشهري لشراء طن واحد من الفضة وطنين من الرصاص ستكون التكلفة 1900 جنيه إسترليني سواء كان سعر الفضة (A) 1500 جنيه إسترليني وسعر الرصاص 200 جنيه إسترليني أو كان سعر الفضة (B) 500 جنيه إسترليني وسعر الرصاص 700 جنيه إسترليني. ويعد نفس السيناريو صحيحًا لأي نقطة تقع على خط مستقيم بين هاتين النقطتين. يوضح الشكل 2-8 الأسعار مجمعة التي تؤدي إلى نفس السعر العام لعملية الشراء. التأثير سيكون إسقاط المجمعات الشهرية على الخط المتصل. اختيار الخط المتصل هنا لا يهم: عادة يعني الإسقاط رسم تفصيلي على الخط والذي هو زاوية صحيحة للخط المتقطع للأسعار المساوية ككل، ولكن في هذه الحالة هناك اختيارات أخرى للخط المستقيم ويؤدي فقط إلى التحجيم الخطي للنتائج.

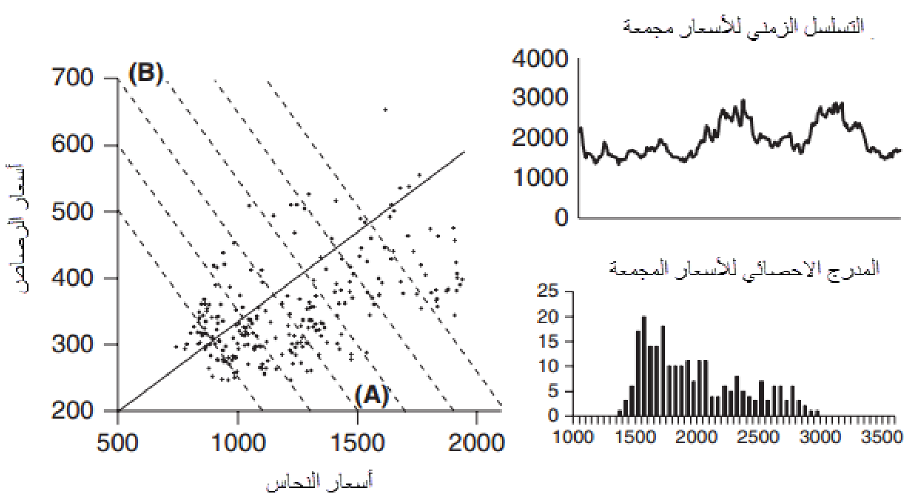
الجزء الأيمن من الشكل 2-8 يظهر كيف يتغير سعر طن واحد من الفضة وطنين من الرصاص على مر الزمن معًا مع المدرج الإحصائي للأسعار. لاحظ كيف كيفية انتشار هذا التوزيع: التغير كبير والتوزيع نفسه لا يظهر شكل جيد للتوزيع العادي.

هذا هو التباين الذي يقيس مدى ارتباط هاتين السلسلتين من البيانات. القيم الإيجابية للتغاير تتوافق مع ارتباط إيجابي، وسوف يكون التباين صفرا إذا كان المتغيران مستقلان. تذكر أن التباين بين المتغيرين العشوائيين X وY هو

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$



الشكل 2-7: أسعار الرصاص والفضة من 1980 إلى 2000



الشكل 2-8: توزيع الأسعار لطن واحد من الفضة وطنين من الرصاص

إذا كنا مهتمين في فهم خصائص محفظة من الأوزان wx وwy إذا يمكننا استخدام التباين بين X وY لإيجاد تباين المحفظة (لمزيد من التفاصيل حول الصيغة هنا، انظر الملحق أ: دروس حول نظرية الاحتمالية).

$$\mathrm{var}(w_X X + w_Y Y) = w^2 X\ \mathrm{var}(X) + w^2 Y\ \mathrm{var}(Y) + 2 w_X w_Y\ \mathrm{cov}(X, Y).$$

يمكننا أن نرى كيف يعمل هذا على مثال الرصاص والنحاس. متوسط سعر النحاس يساوي 1231.16 دولار والانحراف المعياري هو 312.40 دولار (مما يعني تباين قدره 97 590.80). متوسط سعر الرصاص يعني 350.99 دولار والانحراف المعياري هو 69،65 دولار (مما يعني تباين قدره 4851.55). ترتبط مجموعتا الأسعار بشكل إيجابي مع التباين 11 281.00. وعليه، فإن الصيغة تعني أن الفرق بين 1 طن واحد من النحاس و2 طن من الرصاص هو

$$97\ 590.80 + 4 \times 4\ 851.55 + 4 \times 11\ 281.00 = 162\ 121.00,$$

مما يعطي انحرافا معياريا قدره 402.64 دولار. وإذا كان السعران مستقلان، فإن المصطلح الثالث لن يظهر ولكان الانحراف المعياري الإجمالي يساوي 342.05 دولارا.

2-4-2 محفظة بحد أدنى من التباين مع التغاير

يمكننا تغيير تركيزنا من التفكير في توزيع القيم لشراء مجموعة معينة إلى تحديد كيف يمكننا أن نستثمر إذا كان بإمكاننا اختيار المحافظ بدلًا من الأصول المرتبطة ببعض. لنفترض أن الأسعار الأولية هي X_0 وY_0 وسوف نبيع بعد سنة واحدة بالأسعار X وY. كيف يمكننا تقسيم المبلغ الاستثماري المتاح W؟ سيعتمد القرار هنا على العلاقة بين أسعار الشراء X_0 وY_0 والقيم المتوقعة لـ X وY. للقضاء على مسألة العائدات النسبية المختلفة، دعونا نفترض أن μ_X، القيمة المتوسطة لـ X، هي مضاعفات معينة من X_0، وμ_Y، القيمة المتوسطة لـ Y، هي نفس مضاعفات Y_0، لذلك $\mu_X = kX_0$ و$\mu_Y = kY_0$. وبالتالي، فإن النتيجة المتوقعة من هذا الاستثمار بعد سنة واحدة هي أن الاستثمار الأولي مضروبا في k، بغض النظر عن كيفية تقسيم الاستثمار بين X وY. في هذه الحالة من المنطقي للاستثمار

بطريقة تقلل من التباين في العائد. نظرا لشراء وحدات من w_x من الأصول X سيكون المتبقي لدينا $W - w_x X_0$ للاستثمار. وهذا يعني أننا يمكن شراء وحدات w_x من الأصول Y حيث

$$w_y = (W - w_X X_0)/Y_0$$

إذًا تبيان المحفظة سيكون

$$w_X^2 \operatorname{var}(X) + (W - w_X X_0)^2 \operatorname{var}(Y)/Y_0^2 + 2w_X(W - w_X X_0) \operatorname{cov}(X, Y)/Y_0,$$

والتي (باستخدام حساب التفاضل والتكامل) يمكن أن نظهرها بالحد الأدنى

$$2w_X \operatorname{var}(X) - 2X_0(W - w_X X_0) \operatorname{var}(Y)/Y_0^2 \\ + \left(-2X_0 w_X + 2(W - w_X X_0)\right) \operatorname{cov}(X, Y)/Y_0 = 0.$$

وبعد تبسيطها نحصل على

$$w_X \operatorname{var}(X) - X_0(W - w_X X_0) \operatorname{var}(Y)/Y_0^2 + (W - 2w_X X_0) \operatorname{cov}(X, Y)/Y_0 = 0,$$

ويمكن أن نحل ذلك لإيجاد W_x التي تقلل التباين:

$$w_X = \left(\frac{W}{Y_0}\right) \frac{(X_0/Y_0) \operatorname{var}(Y) - \operatorname{cov}(X, Y)}{\operatorname{var}(X) + (X_0^2/Y_0^2) \operatorname{var}(Y) - 2(X_0/Y_0) \operatorname{cov}(X, Y)}.$$

المثال 2-6 أوزان الحافظة المثلى مع التباين

نتظر مرة أخرى في مثال أسعار الرصاص والنحاس. افترض أن نرغب في استثمار 1000 دولار، والأسعار الحالية للرصاص والنحاس هي في المتوسط لفترة 20 عاما المبينة في الشكل 2-7، لذلك X_0 (للنحاس) هو 1231.16 دولار وY_0 (للرصاص) هو 350.90 دولار. $\alpha = X_0 / Y_0 = 3.51$. ثم نحصل على أن الوزن الأمثل للمحفظة في النحاس نحصل عليه من خلال

$$w_{\text{النحاس}} = \left(\frac{W}{Y_0}\right)\frac{\alpha\ \mathrm{var}(\text{الرصاص}) - \mathrm{cov}(\text{النحاس الرصاص})}{\mathrm{var}(\text{النحاس}) + \alpha^2\ \mathrm{var}(\text{الرصاص}) - 2\alpha\ \mathrm{cov}(\text{النحاس الرصاص})}$$
$$= \left(\frac{1000}{350.99}\right)\frac{3.51 \times 4851.55 - 11\,281.00}{97\,590.80 + (3.51)^2 \times 4851.55 - 2 \times 3.51 \times 11\,281.00}$$
$$= 0.2095,$$
$$w_{\text{الرصاص}} = \frac{W - w_{\text{النحاس}}\ \mu_{\text{النحاس}}}{\mu_{\text{الرصاص}}} = \frac{1000 - 0.2095 \times 1231.16}{350.99} = 2.1142,$$

مع إنفاق 0.2095 × 1231.16 = 257.93 دولار على النحاس و2.1142 × 350.99 = 742.06 دولار على الرصاص (أقل من 1000 دولار بسنت واحد الذي اختفى في تقريب هذه الحسابات).

وقد تعطي نتيجة هذه الحسابات قيمة سالبة لأحد الأوزان w_X أو W_Y. وهذا يعني ضمنا فائدة من بيع سلعة واحدة لشراء المزيد من السلع الأخرى. وقد تكون عملية القيام بذلك متاحة في السوق: فبالنسبة إلى مفهوم التمويل، يكون هذا المبلغ لبيع سلعة واحدة وشراء الأخرى. ولكننا لن نتناول هذه الفكرة هنا.

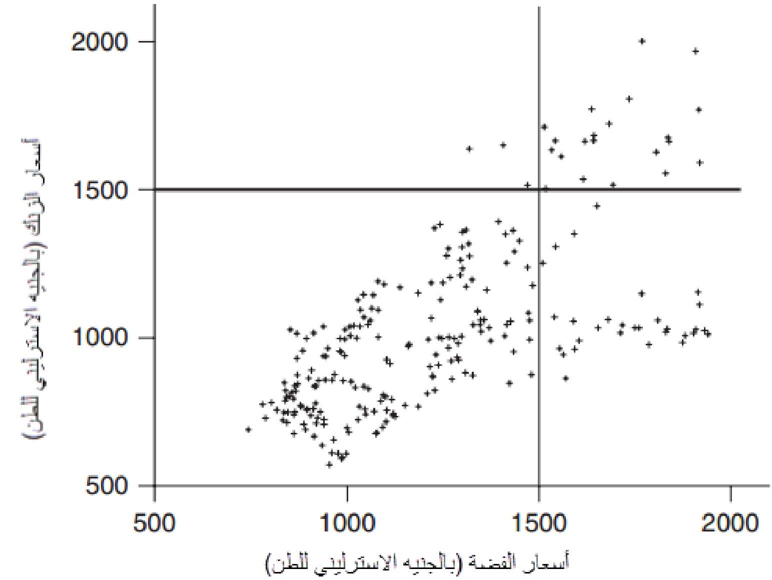
لقد رأينا كيف أن الارتباط الإيجابي بين استثمارين يقلل من منافع التنويع على المخاطر إذا تم الاحتفاظ بالاستثمارات. بالضبط نفس الشيء يحدث مع أكثر من استثمارين.

3-4-2 الحد الأقصى للمتغيرات التي ترتبط ارتباطًا إيجابيًا

ننظر الآن في السيناريو الآخر الذي تكون فيه القيمة القصوى لمتغيرين عشوائيين محل اهتمام (بدلا من مجموعهما)، ونرى كيف يؤثر الارتباط الإيجابي على هذا المقياس.

احتمالية أن يكون X و Y أقل من z تعطى بواسطة $F_X(z) \times F_X(z)$ إذا كان المتغيران مستقلان. سيكون الاحتمال أكثر من ذلك إذا كانت مترابطة بشكل إيجابي، حيث أن انخفاض قيمة أحدهما مرجح أن تكون بالتزامن مع انخفاض قيمة الأخرى. وبالتالي، إذا حددنا U = الحد الأقصى (X، Y) إذًا

$$F_U(z) = \Pr(\max(X, Y) < z)$$
$$> F_X(z) \times F_Y(z).$$



الشكل 2-9: كيف يؤثر الارتباط على المخاطر للحد الأقصى لأسعار الزنك والفضة؟

يمكننا أن ننظر إلى هذا بطريقة أخرى ونقول أن احتمال أن تكون قيمة U أعلى من قيمة ما تقل عندما ترتبط X وY ارتباطا إيجابيا.

لرؤية كيف يمكن أن يكون هذا المثال، ننظر في السلوك السعري لأسعار الزنك والفضة في الشكل 2-9. نؤكد مرة أخرى على أن تلك الأسعار على الإطار الزمني الشهري على مدار 20 عامًا بداية من عام 1980. ارتفعت أسعار الفضة أعلى 1500 دولار للطن في 51 مناسبة من أصل 240 بينما ارتفعت أسعار الزنك أعلى من ذلك في 24 مرة. ولهذا (بالتقريب) F الفضة (1500) = 240/189 = 0.7875 F الزنك (1500) = 240/216 = 0.9. إذا كانوا مستقلين فإن FU (1500) = 0.7875 X0.9 =0.709. ونتوقع 240X0.709 = 170 مرة يكون فيها أعلى سعرين دون 1500 و70 عندما تكون أعلى من 1500. في الواقع هناك ثلاث مناسبات فقط كان فيها سعر الزنك أعلى من 1500 والنحاس أقل من ذلك، مما يعني أن المجموع 51 + 3 = 54 مناسبة عندما الحد الأقصى

للاثنين أعلى من 1500 (أقل بكثير مما قد نتوقعه عند 70 في حال كانوا مستقلين). وهكذا، في هذه الحالة، أدى الترابط بين السعرين إلى الحد من مخاطر ارتفاع الحد الأقصى بشكل قوي، وهو عكس ما يحدث عند النظر إلى مجموع (أو متوسط) الأسعار.

4-4-2 متعدد المتغيرات الطبيعية

وإذا لم تكن الكميات المختلفة مستقلة، فإن الحساب المفصل لاحتمالية القيمة المرتفعة، إما للمجموع أو الحد الأقصى، لن يكون ممكنا ما لم نعرف أكثر من مجرد التغاير بينهما. نموذج واحد يمكننا أن ننظر فيه وهو متعدد المتغيرات الطبيعية. كما يمكننا حساب الاحتمالات الدقيقة من المتوسط والانحرافات المعيارية وحدها عندما يكون التوزيع الأساسي للمخاطر عاديًا، يمكننا أن نفعل الشيء نفسه عندما يكون التوزيع المشترك هو متعدد المتغيرات الطبيعية بشرط أن نعرف الوسائل والانحرافات المعيارية والتغايرات.

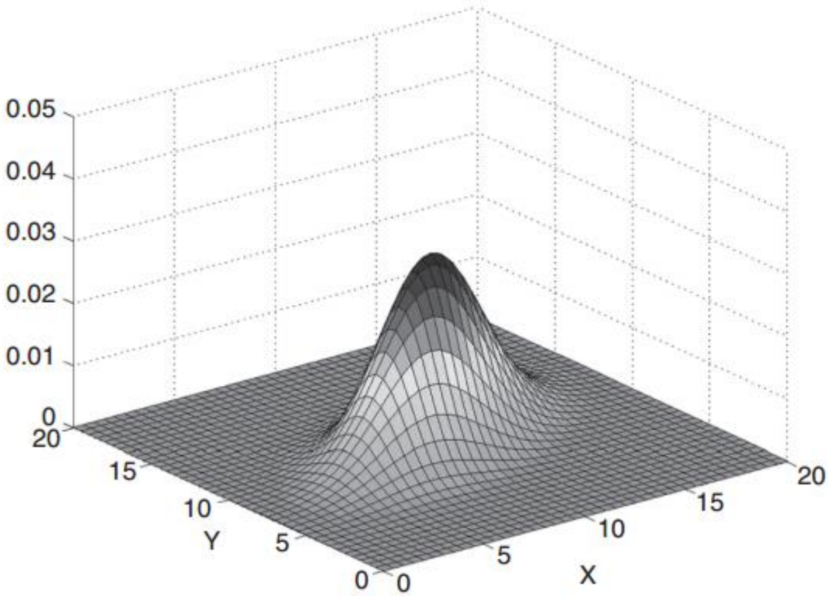
$$f(x,y) = K \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right),$$

حين يكون

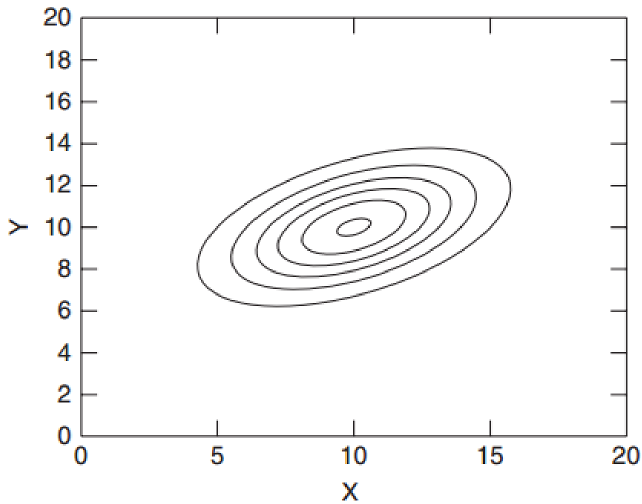
$$K = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \text{ and } \rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

(K ثابت التطبيع وρ هو الارتباط بين X وY). وتظهر الأرقام مثالا مع $\mu_X = \mu_Y =$ 10 و$\sigma_X = 3$ و$\sigma_Y = 2$ و$\rho = 0.5$. المخططات كلها محذوفة في الشكل 2-11.

واحدة من أهم خصائص متعددة المتغيرات الطبيعية هو أن أي تركيبة خطية من المتغيرات لديها أيضا التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات. فمن السهل أن نتصور أن أي شريحة عمودية مستقيمة من خلال دالة الكثافة في الشكل 2-10 من شأنه أن يعطي منحنى التوزيع العادي على شكل جرس. ولكن هذا الشكل يظهر شيئًا مختلفًا، لأنه ينطوي على نوع من الإسقاط وصولا إلى خط مستقيم الذي وصفناه في الشكل 2-8.



الشكل 2-10: دالة الكثافة للتوزيع العادي ثنائي التغير.



الشكل 2-11: مخطط كثافة التوزيع العادي ثنائي التغير.

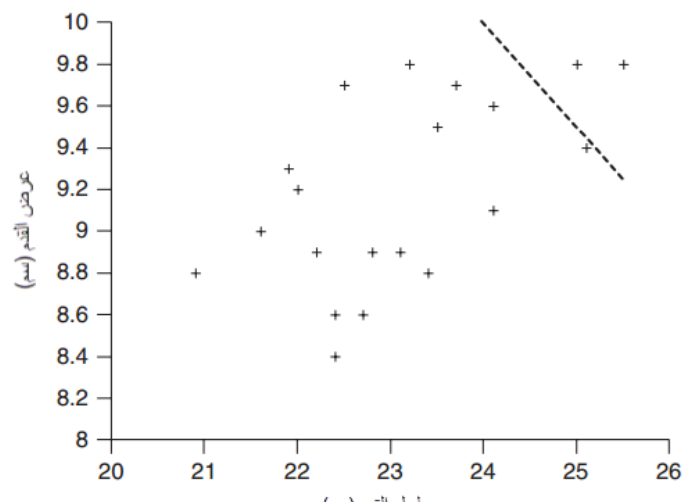
مثال 2-7 أحذية الأطفال ومجموعات خطية من القيم

ننظر في الشركة المصنعة لأحذية الأطفال المهتمة في توزيع أحجام قدم الأطفال (العرض والأطوال). ويوفر الجدول 2-2 البيانات التي تم جمعها لـ 20 صبيا من الصف الرابع.

ويبين الشكل 2-2 حقل توزيعي للبيانات الواردة في الجدول 2-2. نجد أن متوسط الطول هو 23.105 (عينة الانحراف المعياري = 1.217) ومتوسط العرض هو 9.19 (نموذج الانحراف المعياري = 0.452). التغاير هو 0.299. إذا كنا نتناسب مع متعدد المتغيرات العادية، فإننا نتوقع أن توزيع أي مزيج من الارتفاع والعرض أمر طبيعي أيضا.

الجدول 2-2 بيانات أحجام أقدام الأطفال

الطول	العرض	الطول	العرض	الطول	العرض	الطول	العرض
20.9	8.8	22.4	8.4	23.1	8.9	24.1	9.6
21.6	9.0	22.4	8.6	23.2	9.8	24.1	9.1
21.9	9.3	22.5	9.7	23.4	8.8	25.0	9.8
22.0	9.2	22.7	8.6	23.5	9.5	25.1	9.4
22.2	8.9	22.8	8.9	23.7	9.7	25.5	9.8



الشكل 2-12: بيانات أحجام الأقدام لعشرين ولد بالصف الرابع

على سبيل المثال، (الطول) + 2 × (العرض) يجب أن يكون توزيع عادي مع متوسط 23.105 + 2 × 9.19 = 41.485. بكتابة L وW لمتغيرين عشوائيين، التباين L + 2W هو

$$var(L) + 4\ var(W) + 4\ cov(L, W) = 1.2172 + 4 \times 0.4522 + 4 \times 0.299 = 3.494,$$

بانحراف معياري لـ $\sqrt{3.494}$ = 1.869. يمكننا من خلال ذلك حساب احتمالية الحصول على نطاقات مختلفة من القيم لهذا الجمع الخطي. على سبيل المثال، نفترض أننا نرغب في توقع احتمالية أن يكون هناك فرد لديه L+2W قيمة أعلى من 44 سم. هذا يتوافق مع الخط المتقطع في الشكل 2-12. قيمة z هي (44 – 41.485) / 1.869 = 1.346. في إطار الافتراض العادي هذا يعني احتمال $1 - \Phi (1.346) = 1 - 0.9108 = 0.0892$ لتحقيق هذه القيمة. هنا، Φ تمثل دالة التوزيع التراكمي للتوزيع العادي N (0، 1) القياسي. وبالنظر إلى العشرين ملاحظة فهذا من شأنه أن يقودنا إلى توقع حوالي 1.8 من الأفراد بهذه الشروط. في الواقع، ننظر في شخصين – يتوافقون بشكل كبير مع توقعاتنا.

القيمة في نموذج واضح يمكن أن تساعدنا في جعل التوقعات حول احتمالية الأحداث الواقعة في أوقات معينة (أو التي لا تقع أبدًا) يمكن النظر فيها. فعلى سبيل المثال، في مثال أحذية الأطفال يمكن أن نتوقع احتمالية أن يكون هناك فرد نتيجته المركبة أعلى من 4.5 والتي لا تحدث في المجموعة المكونة من عشرين فرد هنا. بالرغم من ذلك، يجب أن نكون حذرين من استقراء ما هو أبعد من البيانات التي لاحظناها، ومن الممكن أن يفشل التقريب الطبيعي لمتعدد المتغيرات كمؤشر للنتائج الأكثر شذوذًا. وسوف نتناول هذا بالمزيد من التفصيل في الفصل الرابع حول وضع نموذج منحنيات التوزيعات.

مثال عملي 2-8 متغير واحد أكثر من x مرة أعلى من الآخر

نعود إلى مثال النحاس والرصاص من الشكل 2-7. نعلم بالفعل أنه بالنسبة لهذه البيانات متوسط سعر النحاس يساوي 1231.16 دولار والانحراف المعياري 312.40 دولار؛ متوسط سعر الرصاص يساوي 99,350 دولار والانحراف المعياري 65,69 دولار ويساوي التباين للسعرين 11 281.00. لنفترض أن التوزيع هو متعدد المتغيرات الطبيعية. ما هو احتمال أن يكون سعر النحاس أكثر من خمسة أضعاف سعر الرصاص؟

الحل

سنرمز للنحاس بالرمز X وY لسعر الرصاص. نريد إيجاد احتمالية أن يكون X> 5Y. ولهذا، إذا افترضنا أن W= X-5Y سنريد أن تكون احتمالية W>0. وفي ضوء افتراضية التوزيع المتعدد التغيرات، W هو متغير عشوائي طبيعي بمتوسط وتباين كالآتي:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - 5E(Y) \\ &= 1231.16 - 5 \times 350.99 = -523.8, \\ \mathrm{var}(W) &= \mathrm{var}(X) + 25\,\mathrm{var}(Y) - 10\,\mathrm{cov}(X, Y) \\ &= (312.40)^2 + 25(69.65)^2 - 11\,2810 = 106\,062. \end{aligned}$$

وهذا يعطي انحرافا معياريا لـ W لـ $\sqrt{106062}$ = 325.7.. بهذا المتوسط فإن الاحتمالية أكبر من 0 ستكون من خلال 1 – Φ (325.7 /523.8) = 0.0539. في هذه البيانات هناك 7 من أصل 240 من البيانات تشير إلى نقاط عدم المساواة، مما يعطي احتمالا تجريبيا قدره 0.029، وليس أقل مما توقعه النموذج العادي متعدد المتغيرات.

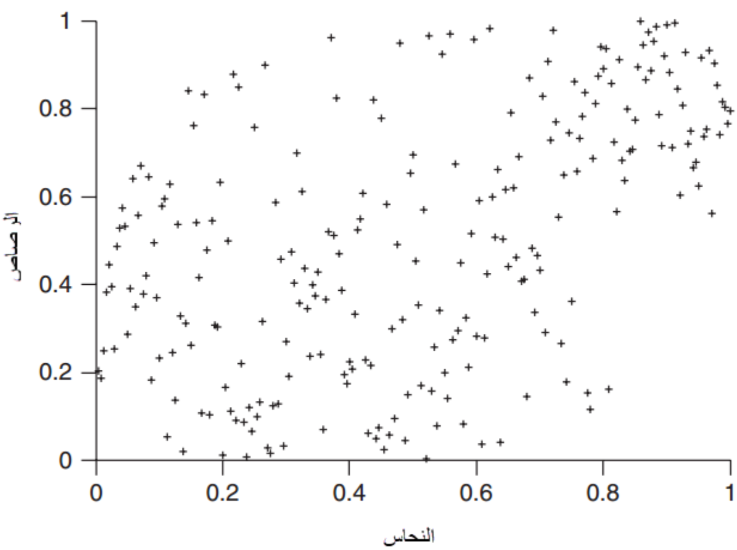
2-5 استخدام كوبولا (نظرية الاحتمالات) لنموذج التوزيعات متعدد المتغيرات

في كثير من الأحيان، تعدد المتغيرات لا يعد تقريب جيد لتبعية متغيرين أو أكثر، وذلك نحن بحاجة إلى البحث عن نموذج أكثر مرونة. هناك خيار جيد هو استخدام نماذج "كوبولا"، والتي تعد تطور حديث نسبيا في نظرية الاحتمالات. سنتحدث عن نموذج كوبولا ثنائي الأبعاد يصف السلوك المشترك للمتغيرين X وY، ولكن يمكن تطبيق نفس الطريقة على النماذج متعددة المتغيرات مع ثلاثة متغيرات أو أكثر. تتمثل الفكرة في النظر إلى توزيع قيم (x، y) المعبر عنه من حيث الموضعين x وy ضمن التوزيعات لـ X وY على التوالي. يوفر ذلك وسيلة للتمييز بين ما يحدث نتيجة لتوزيع المتغيرات الأساسية X وY، وما يحدث نتيجة لتبعية متغير واحد من جهة أخرى. وهذا يعني أنه يمكننا تطبيق النموذج كوبولا نفسه لتوزيعات مختلفة من المتغيرات الأساسية.

نبدأ بالنظر مرة أخرى في بيانات أسعار الرصاص والنحاس. بدلا من النظر في رسم

بياني بالنقاط المبعثرة في الشكل 2-7 سنقوم برسم النقاط بترتيب قيمها لأسعار النحاس على المحور الأفقي وترتيب قيمها لسعر الرصاص على المحور الرأسي. هناك 240 نقطة وسنضع قياس للترتيب من خلال قسمة 240، بحيث يكون المقياس بين 0 و1. ولهذا، فإن أدنى سعر للنحاس له قيمة X من 1/240 وأعلى سعر للنحاس يترجم إلى 240/ 240 = 1 (ونفس الشيء مع أسعار الرصاص). وتظهر النتيجة في الشكل 2-13، ويسمى هذا النوع من الرسم البياني بـ رسم بياني تجريبي للترابط (كوبولا).

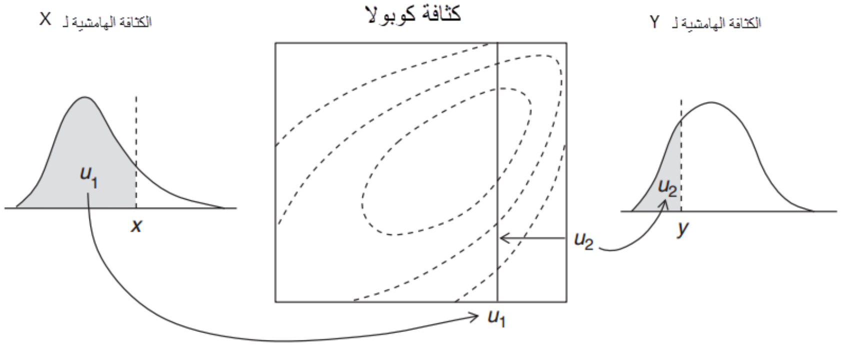
ويبين الشكل 2-13 بعض سمات البيانات بشكل أوضح من الرسم البياني الأساسي باستخدام النقاط المبعثرة في الشكل 2-7. في هذا الرسم البياني يمكننا أن نرى أن تبعية الأسعار أقوى عند الحد الأعلى بأكثر مما هي عليه عن الحد الأدنى. على سبيل المثال، يمكننا أن نرى أن سعر النحاس الذي هو في أعلى 10٪ يتوافق مع سعر الرصاص الذي هو في أعلى 40٪ (تقريبا) من القيم المحتملة. من ناحية أخرى، ومع العلم أن سعر النحاس في أدنى 10٪ من القيم المحتملة هو أقل بكثير: أن سعر الرصاص هو في أدنى 70٪ (تقريبا) من القيم المحتملة.



الشكل 2-13: رسم بياني تخطيطي تجريبي (كوبولا) لأسعار النحاس والرصاص على مدار 20 عامًا منذ 1980.

الرسم التخطيطي التجريبي باستخدام النقاط المبعثرة، هو في الحقيقة عينة من نموذج كوبولا الأساسي، وهي طريقة لوصف التبعية بين متغيرين. وكثافة كوبولا هي الدالة الأساسية التي تعطي الاحتمالات النسبية لنقاط مختلفة تحدث في المربع (0، 1) × (0، 1). قد نتوقع أن تكون تلك الكثافة لكوبولا على نحو سلس وسلوك جيد، ولكننا سوف نقوم بعمليات خصم على أساس عينة منه. ومن المفيد أن نفكر في نموذج كوبولا كجزء من تحليل توزيع ثنائي المتغير. والفكرة هي أن تأخذ التوزيع العام للقيمتين معا وتقسيم هذا من خلال النظر في توزيع كل قيمة على حدة. وغالبا ما تسمى هذه العملية بالتوزيعات المهمشية. ويصف نموذج كوبولا الطريقة التي توضع بها التوزيعات المهمشية معا في التوزيع الكلي.

إذا كان لدينا التوزيعات المهمشية (على سبيل المثال، لأسعار النحاس والرصاص) ودالة كوبولا التي تربط بينهما، ثم عملية توليد عينة لتوزيع ثنائي المتغير الكامل موضح في الشكل 2-14. نأخذ عينة، x، من توزيع النحاس وفقا للتوزيع هامشي. لنفترض أن له نسبة u1 من التوزيع دونه، ثم ننظر إلى الكثافة كوبولا على خط عمودي من خلال النقطة u_1 على المحور الأفقي واستخدام هذه الكثافة لعينة نقطة U_2. هذا سوف يعطي نسبة من أسعار الرصاص تحت نقطة العينة المطلوبة لدينا ويمكن تحويلها إلى سعر الرصاص Y. ثم يكون للزوج (x، y) التوزيع المشترك الصحيح.



الشكل 2-14: التجزئة باستخدام كوبولا. عينة لـ x أولا، ثم عينة من كوبولا للحصول على u_2، والتي يتم إيجاد Y من خلالها.

الشيء المهم حول كوبولا هو أنه يمكن أن يشير إلى توقيت زيادة التبعية. فهي نماذج مرنة بما فيه الكفاية للتعامل بشكل مختلف مع منحنيات التوزيع أكثر من الأجزاء المركزية. والسؤال الجيد الذي يجب طرحه عند التعامل مع البيانات متعددة المتغيرات التي تتضمن بعض الارتباط هو، ما إذا كان الارتباط سيكون أكبر أو أقل بقيم شاذة. قد يكون طرح هذا السؤال أسهل الإجابة عليه، ولكن إعارته اهتمامًا سوف يضمن تجنب بعض المخاطر المهمة لإدارة المخاطر على الأقل. على سبيل المثال، إذا كان هناك متغيران يرتبطان ارتباطا ضعيفا مع تغاير قريب من 0، فربما نستنتج أن تأثير التنويع سيعني وجود انخفاض كبير في مخاطر متوسط قيمهم (على سبيل المثال، تقسيم محفظة متساوية بينهما) خاصة. وهذا عادة ما يكون استنتاجا صحيحا، ولكنه سيفشل إذا كان الترابط بينهما منخفضا جدا، إلا في النقاط التي تحمل قيم كبيرة للغاية، عندما تصبح مترابطة ترابطا وثيقا. وفي هذه الحالة فإن خطر أن يصبح متوسطها كبيرا جدا سيكون قريبا من خطر أن يصبح المتغير الفردي كبيرا، ومنافع التنويع التي قد نتوقعها لن تحدث.

المشكلة المتعلقة بإنشاء بيانات حول العلاقة في المنحنيات هي أن هذه الأحداث نادرة الحدوث، ولهذا من غير المرجح وجود أدلة تاريخية لتوجيهنا. يجدر التفكير في الأسباب الكامنة وراء القيم الكبيرة جدا في واحد أو آخر من المتغيرات. على سبيل المثال، النظر في العلاقة بين اثنين من الأسهم على حد سواء ببورصة نيويورك، مثل أمازون وفورد. وهي أسهم تتأثر بمعنويات السوق والظروف الاقتصادية العامة، وهذا سيؤدي إلى وجود ارتباط بين أسعارهما. ولكن هل سيتم تضخيم هذا الارتباط عندما ينخفض أحدهم بشكل حاد؟ على سبيل المثال، هل تعلم أن سعر سهم أمازون قد انخفض بنسبة 30٪ في يوم واحد في المقابل يعطي مزيد من المعلومات حول سعر سهم فورد أكثر من معرفة أن سعر سهم أمازون قد انخفض بنسبة 15٪؟

ربما يكون الانخفاض المفاجئ في الأسعار بنسبة 30٪ في يوم واحد ناجم عن عوامل محددة جدا (مثل إعلان الأرباح) وأقل عرضة للارتباط بالعوامل العامة (مثل انهيار السوق) التي من شأنها أن تؤدي إلى انخفاض في سعر سهم فورد أيضا. وأيا كانت سير

تلك العملية، كوبولا يعطينا وسيلة لنموذج حول ما يجري.

والآن نعود إلى مناقشتنا في بداية هذا الفصل حول فشل التنويع في حماية المستثمرين خلال الأزمة المالية العالمية في 2008. يمكننا أن نعتبر ذلك على أنه زيادة مفاجئة في الترابط مع زيادة الخسائر. ويعني ذلك أن تغاير التبعية بين أسعار الأصول المختلفة قد لا يكون مماثلًا بين المكاسب والخسائر. إذا تحركت بورصة وول ستريت بشكل قوي، فإن التأثير المقابل في بورصة لندن للأوراق المالية قد يكون أقل مما لو انخفضت وول ستريت بشكل حاد. هناك أدلة تجريبية جيدة لدعم فكرة هذا السلوك بالضبط. قد يرى البعض أن شعور الخوف سريع الانتشار أكثر من شعور الطمع، ولكن أيا كانت الآلية، فمن الواضح من عدد من الدراسات التجريبية أن هذا التماثل موجود. نهج كوبولا هو وسيلة جيدة لجعل هذا الأمر واضحًا، على سبيل المثال من خلال استخدام نموذج للخسائر مع منحنى علوي تبعي، ولكن ليس منحنى سفلي تبعي.

يناقش القسم التالي تفاصيل أكثر حول الرياضيات المستخدمة في نموذج كوبولا.

1-5-2 [*] تفاصيل عن نموذج كوبولا

كثافة نموذج كوبولا c (u1، u2) هي كثافة معرفة في مربع الوحدة $0 \geq 1 \leq u1$، $0 \leq u2 \leq 1$، مع الخاصية أن التوزيع (المهمشي) الناتج عن u_1 يكون موحدا على [0، 1]، والتوزيع ل u2 موحد أيضًا على [0، 1]. يمكننا كتابة هذه الشروط كتالي:

$$\int_0^1 c(u,u2)du = 1, \text{ لكل } u2 \text{ في } [0,1],$$

$$\int_0^1 c(u1,u)du = 1, \text{ لكل } u1 \text{ في } [0,1],$$

أبسط طريقة لجعل هذه الشروط قائمة هو جعل موحدة الكثافة كوبولا على مربع الوحدة، بحيث c(u1،u2) = 1 لكل u_1 وu_2.

قبل أن نتحدث عن أمثلة مختلفة لكثافة كوبولا وكيفية ارتباطها بأنواع مختلفة من

التبعية علينا أن نعرض كيفية تحويل كثافة كوبولا والمعلومات المتعلقة بالتوزيعات الأساسية في توزيع التوزيع متعدد المتغيرات ككل. للقيام بهذا سننتقل من الكثافات (التي هي أسهل في عرضها) إلى وظائف التوزيع التراكمي (والتي من السهل التعامل معها). لذلك تُعرَّف كوبولا (توزيع كوبولا التراكمي) باعتبارها دالة التوزيع $C(u_1, u_2)$ من خلال دالة كثافة كوبولا $c(u_1, u_2)$. ولهذا $C(u_1, u_2)$ هي احتمالية أن كلًا من $u_1 \leq v_1$ و$u_2 \leq v_2$ عندما (u_1, u_2) يكون لها دالة كثافة c أو بشكل رسمي أكثر

$$C(v_1, v_2) = \int_0^{v_1} \left(\int_0^{v_2} c(u_1, u_2) du_1 \right) du_2.$$

ثم يتم الحصول على التوزيع التراكمي للتوزيع متعدد المتغيرات من الدالة C ودالة التوزيع الأساسية Fx وFY بالنسبة إلى X وY من خلال معادلة كوبولا الأساسية:

$$\Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \qquad (2.2)$$

نأخذ x وy ونحولها إلى كميات للتوزيعات المناسبة، F (x) وF (y)، ومن ثم استخدام الدالة كوبولا لتحديد احتمال وجودها في المستطيل مع (x، y) عند في الزاوية العلوية اليمنى.

لتوضيح كيفية عمل ذلك، دعونا نعود إلى كثافة موحدة لكوبولا: $C(u1, u2) = 1$. ويمكن تحويل ذلك إلى كوبولا

$$C(v_1, v_2) = \int_0^{v_1} \left(\int_0^{v_2} du_1 \right) du_2 = v_1 v_2,$$

لتصبح في هيئة منتج. ثم المعادلة من الشكل (2-2) يكون لدينا

$$\Pr(X \leq x \text{ and } Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y) = \Pr(X \leq x) \Pr(Y \leq y).$$

هذا هي صيغة الاحتمال بالضبط إذا كان المتغيران مستقلان. من هذه الملاحظة نستنتج كثافة موحدة لكوبولا (أو منتج كوبولا) تعادل المتغيرات كونها مستقلة.

ويمكننا أيضا الانتقال من كوبولا إلى كثافتها عن طريق أخذ المشتقات؛ بشكل أكثر دقة

$$c(v_1, v_2) = \partial^2 C(v_1, v_2)/\partial v_1 \partial v_2.$$

أخذ المشتقات سيتعلق بـ x و y من المعادلة (2.2) نحصل على الصيغة

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(F_X(x), F_Y(y)) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y),$$

حيث f هي الكثافة المشتركة على X و Y وFx، FY هي دالة الكثافة الفردية. يمكننا إعادة كتابة هذا كالتالي:

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{f(x, y)}{f_X(x) f_Y(y)}. \tag{3-2}$$

المعادلة هنا تظهر كيف يمكن الحصول على كثافة كوبولا من خلال دالة الكثافة العادية F من خلال رفعها إلى أماكن يكون فيها X و Y لديهم احتمالات منخفضة ونشرها في أماكن يكون فيها X و Y لديهم احتمالات مرتفعة.

استخدام كوبولا أكثر من كثافة كوبولا يجعلها أسهل من خلال التحكم في بعض المعادلات، ولكننا نريد أن نتحقق من الثلاثة خصائص المطلوبة لكوبولا من أجل تنسيق الخصائص لكثافة كوبولا:

- *زيادة في كل متغير:* C لا ينخفض في كل متغير، ولهذا في حال $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$ و $0 \leq a2 \leq b2 \leq 1$ ثم

$$C(a_1, a_2) \leq C(b_1, b_2)$$

- *مستطيل عدم المساواة:* في حال كان $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$ و $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 0$ إذًا فإن احتمالية وجودها في المستطيل $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ يمكن الحصول عليه من خلال النظر في المجموعة الصحيحة لأربعة مستطيلات محتملة بزاوية 0. بالنسبة لـ C أن تكون كثافة، فإن ذلك يجب أن يكون سالب ونشتق عدم المساواة

$$C(a_1, a_2) + C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) \geq 0.$$

- *التوزيع المهمشي غير الموحد:* مع ملاحظة أن C (v,1) هي ببساطة احتمالية أن يكون U1 أقل من v. ولهذا فإن الشرط هو أن يكون توزيع كلًا من u1 وu2 موحدين: C(1, v) = C(v, 1) = v للكل. $0 \le v \le 1$.

من النظرة الأولى قد يبدو أنه بالرغم من أن مستطيل عدم المساواة يمكن أن يتبع حقيقة أن الكوبولا ترتفع في كل متغير ولكن ليست هذه القضية (انظر مثال 2-10).

نموذج كوبولا هو ما يمثل سلوك التبعية الواضح في توزيع متعدد المتغيرات، وهذا ما يسمى بـ كوبولا غاوسي. ترتبط كثافة كوبولا بكثافة التوزيع الطبيعي لمتعدد المتغيرات ولكن كل مكون يمكن قياسه لضمان أن الهوامش موحدة. نبدأ من خلال القيام بالحسابات التي تعمل مع دالة كوبولا (التراكمية). من خلال أسس معادلة كوبولا ودالة الكثافة. ومن خلال أسس معادلات كوبولا ودالة الكثافة لتوزيع متعدد المتغيرات مع الترابط P بالإضافة إلى كل متغير له متوسط صفري وانحراف معياري 1 يكون لدينا

$$
\begin{aligned}
&C(F_X(x), F_Y(y)) \\
&= C(\Phi(x), \Phi(y)) = \Pr(X \le x \text{ and } Y \le y) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(s_1^2 + s_2^2 - 2\rho s_1 s_2\right) \right) ds_1 \right) ds_2.
\end{aligned}
$$

استخدمنا هنا الرمز المعتاد الذي فيه Φ (x) مكتوب لدالة التوزيع العادي التراكمي بمتوسط صفر وانحراف معياري يساوي 1. إن الكمية المتكاملة التي تأتي من خلال متعدد المتغيرات الطبيعية مع $\mu_X = \mu_Y = 0$ و $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ للحصول على معادلة C (v1، v2) سنطرح قيم X وY لأي من $F_x(x) = v1$ و$F_y(Y) = v2$. ولهذا سنضع $x = \Phi^{-1}$ (v1) و$y = \Phi^{-1}$ (v2) للحصول على

$$
\begin{aligned}
C(v_1, v_2) = &\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_1)} \\
&\times \left(\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_2)} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(s_1^2 + s_2^2 - 2\rho s_1 s_2\right) \right) ds_1 \right) ds_2.
\end{aligned}
$$

الصيغة المساوية لدالة كوبولا من معادلة (2-3) هي

$$
\begin{aligned}
c(F_X(x), F_Y(y)) &= \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2+y^2-2\rho xy\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2+y^2-2\rho xy\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\rho^2 x^2+\rho^2 y^2-2\rho xy\right)\right).
\end{aligned}
$$

إذًا

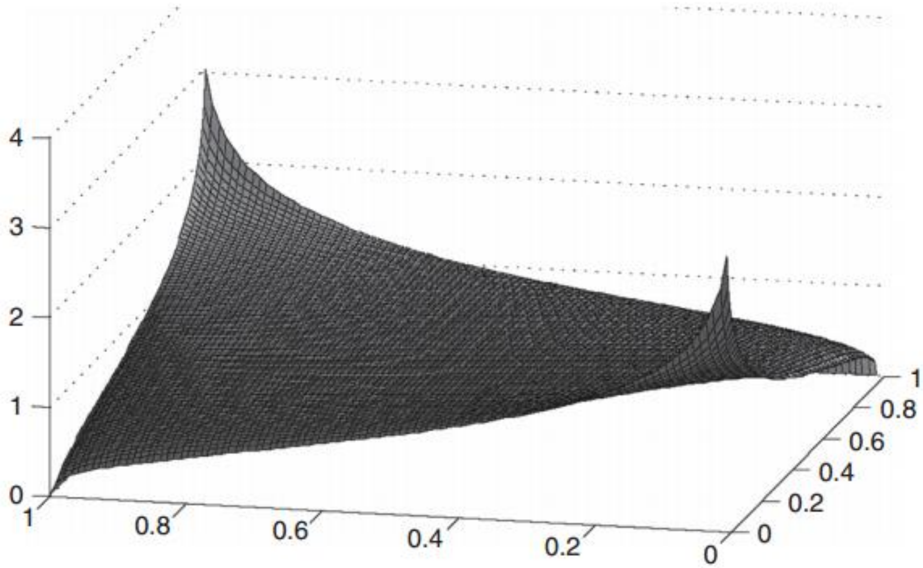
$$
\begin{aligned}
c(v_1, v_2) = &\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\rho^2\Phi^{-1}(v_1)^2+\rho^2\Phi^{-1}(v_2)^2-2\rho\Phi^{-1}(v_1)\Phi^{-1}(v_2)\right)\right).
\end{aligned}
$$

هناك عدة أشكال من هذه الصيغة لعدد أكبر من المتغيرات. لقد أصبحت من غير الشائع نوعًا ما منذ أن تم إلقاء اللوم في بعض الأوساط على استخدام الكوبولا الجوسية (Gaussian copulas) كنهج معياري في قياس المخاطر بسبب إخفاقات وول ستريت في التنبؤ بالمخاطر النظامية المرتفعة في السندات المدعومة بالرهن العقاري التي كانت سبب رئيسي في الأزمة المالية في عام 2008 (فينانسيال تايمز، S. جونز، 24 أبريل 2009) في عام 2009، نشرت صحيفة فاينانشال تايمز مقالا يناقش استخدام نماذج كوبولا الجوسية بعنوان "الصيغة التي أضرت وول ستريت".

للمساعدة في فهم صيغة كوبولا الجوسية نحن بحاجة لتحديدها، ومن المفيد للغاية تحديد دالة كثافة كوبولا. هذا يعني ببساطة تحديد الدالة من خلال وحدة مربعة كما هو موضح في الشكل 2-15.

في الشكل التالي تمثل الزوايا (0، 0) و(1، 1) ما يحدث للعلاقة عندما يكون كل من المتغيرات كبير وإيجابي جدا أو كبيرة وسلبي جدا. وجود ارتباط يدفع هذه الزوايا إلى أعلى

والزوايا المعاكسة (0، 1) و(1، 0) إلى أسفل. تذكر أن هناك شروط على كثافة التكامل إلى 1 على طول الخط الذي يستقر عليه متغير ما أو آخر، لذلك يمكن اعتبار رفع زاوية واحدة موازن لدفع الزاوية المجاورة لأسفل.



الشكل 2-15: كثافة كوبولا الجوسي Gaussian copula مع $\rho = 0.25$.

وعندما يكون $\rho = 0$، فإن المتغير متعدد المتغيرات له ملامح دائرية، والمتغيرات تكون مستقلة – كما ذكرنا سابقا – وهذا يعني أن كثافة كبولا تكون مسطحة عند القيمة 1 (التي هي بمثابة تذكير بأن خلاصات كوبولا بعيدة عن توزيعات المتغيرات الأساسية)

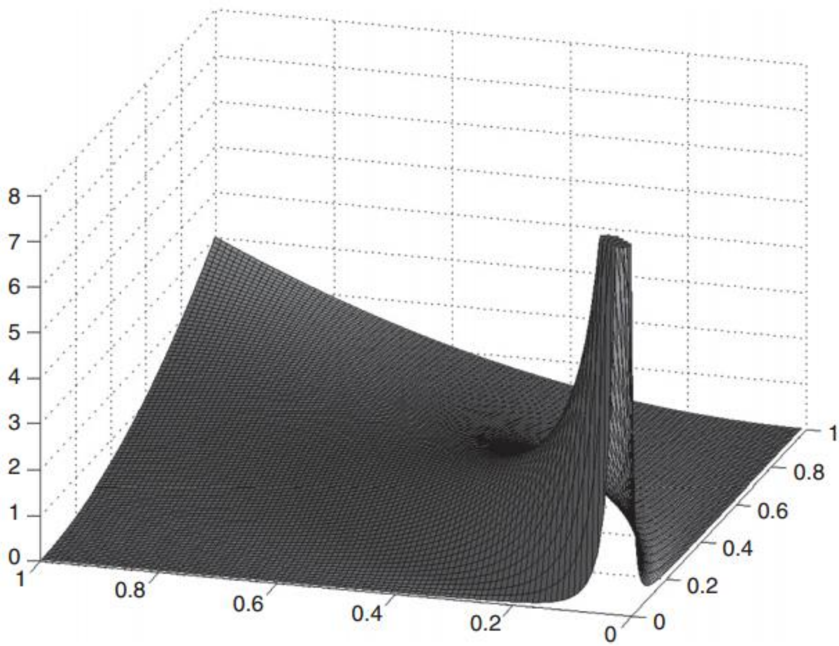
هناك العديد من الصيغ كوبولا المختلفة التي تم توضيحها سابقاً. أحد الأمثلة على ذلك هو كوبولا كلايتون لمتغيرين، من خلال الصيغة:

$$C_\theta(v_1, v_2) = \left(\frac{1}{v_1^\theta} + \frac{1}{v_2^\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}},$$

حيث تعد θ مقياس لأي متغير أكثر من الصفر (يمكننا جعل هذه الصيغة صحيحة

أيضًا في حال كانت θ أقل من الصفر وأكثر من −1). يوضح الشكل 2-16 كيف تكون الكوبولا عندما θ = 2. تكون دالة الكوبولا كالتالي

$$c_\theta(v_1, v_2) = \frac{3}{v_1^3 v_2^3}\left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} - 1\right)^{-\frac{5}{2}}.$$



*الشكل 2-16: كثافة كوبلا كلايتون **Clayton copula** لـ 2. θ = 2.*

في الشكل، تظهر القمة عند (0، 0) علاقة ضعيفة جدا بين قيم المنحنى السفلي من التوزيعين الأساسيين. في الواقع، تم تقسيم هذه القمة بقيمة 8 لأغراض رسمها.

هناك نهج آخر يمكننا استخدامه حينما تكون المتغيرات العشوائية مرتبطة بشكل قوي عن أعلى قيم لقياس استقلالية المنحنى بشكل مباشر. الجدير بالذكر أننا نعلم أن

الاستقلال يعني أن المعلومات عن متغير واحد لا تعني أي شيء بالنسبة لمتغير آخر. لذلك يمكننا القول أن احتمال وجود X في العشرية العليا (مثال X تأخذ قيمة حينما تكون Fx(X)> 0.9) دون تغيير (عند 0.1 بالضبط) حتى لو كنا نعلم أيضا أن Y في عشريتها العليا أيضًا. وهكذا، مع استقلال المتغيرات

$$\Pr(X > F_X^{-1}(0.9)|Y > F_Y^{-1}(0.9)) = \Pr(X > F_X^{-1}(0.9)) = 0.1.$$

تقريب 0.9 في هذا المثال إلى 1 من شأنه أن يجعل الحد من الاحتمال الشرطي صفر. ومع ذلك، إذا كانت المتغيرات غير مستقلة، وهناك علاقة قوية بين المتغيرات عند القيم المرتفعة، فإن هذا الحد سيكون أكبر من الصفر. لاحظ أيضا أننا يمكن إعادة كتابة هذا النوع من الاحتمال الشرطي على النحو التالي (باستخدام صيغة بايز) كما يلي

$$\begin{aligned}\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha)|Y > F_X^{-1}(\alpha)) &= \frac{\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y > F_X^{-1}(\alpha))}{\Pr(Y > F_Y^{-1}(\alpha))}\\ &= \frac{\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y > F_X^{-1}(\alpha))}{(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

هذا يحفزنا على تحديد معامل المنحنى العلوي من خلال

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{\alpha\to 1} \Pr(X > F_X^{-1}(\alpha)|Y > F_X^{-1}(\alpha))\\ &= \lim_{\alpha\to 1} \frac{\Pr(X > F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y > F_X^{-1}(\alpha))}{(1-\alpha)}\end{aligned}$$

ومعامل المقابلة من تبعية المنحنى السفلي كالتالي

$$\begin{aligned}\lambda_\ell &= \lim_{\alpha\to 1} \Pr(X \le F_X^{-1}(\alpha)|Y \le F_X^{-1}(\alpha))\\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\Pr(X \le F_X^{-1}(\alpha) \text{ and } Y \le F_X^{-1}(\alpha))}{\alpha}.\end{aligned}$$

يمكننا القول هنا أن X وY لديهم تبعية منحنى العائد العلوي في حال $\lambda u > 0$ ولا يوجد تبعية للمنحنى العلوي في حال $\lambda u = 0$. نفس التعريف ينطبق على تبعية المنحنى السفلي باستخدام $\lambda\ell$ بدلاً من λu. يمكننا تحويل ذلك إلى بيان حول دالة الكوبولا بما أن

$$\frac{lim}{a-0} \ (C(a,a)/a) = \lambda_\ell$$

يعد وجود تبعية المنحنى خاصية قوية جدا، وبالتأكيد أقوى بكثير من اعتبار أن القيم المرتفعة (أو المنخفضة) للمتغيرات تفشل في اختبار التبعية. إذا كان هناك تبيعة المنحنى إذاً كثافة كوبولا سوف تكون إلى ما لا نهاية في الزاوية المناسبة. لن نثبت ذلك بطريقة رسمية، ولكن يمكننا أن نلاحظ أن تبعية منحنى سفلي فإن تعريف $\lambda\ell$ يشير إلى أن حد α الصغرى ثم $\lambda\ell$ $C(a,a) \simeq \alpha$. ولكن عند هذا الحد

$C(a,a) \simeq \alpha 2c(\alpha, \alpha)$ α سيكون لدينا $\alpha / \lambda\ell\ c(\alpha, \alpha)$. حيث أن α تتجه للصفر، فإن الجانب على اليسار يقترب من $C(0,0)$ والجانب على اليمين يتجه إلى مالا نهاية إلا إذا كانت $\lambda\ell = 0$.

ولهذا، يمكننا أن نستنتج أن $C(X,Y) \to \infty$ حينما يكون $x,y \to 0$ و$\lambda\ell > 0$. يمكن تطبيق ما سبق على نفس الحالة لتبعية المنحنى العلوي. لذلك، في الحالات ثنائية الأبعاد يمكننا أن ننظر إلى مخطط كثافة كوبولا والحصول على نظرة جيدة عما إذا كان هناك تبعية منحنى. ويشير الشكل 2-15 إلى أنه لا يوجد تبعية أعلى أو أدنى للذيل للكوبولا الجوسية لهذه القيمة من ρ، ومن الشكل 2-16 نرى أنه لا يوجد تبعية منحنى علوي لكوبولا كلايتون. ومع ذلك، يبدو أن تبعية منحنى سفلي لهذا كوبولا، يمكننا تأكيد ذلك لكوبولا كلايتون.

$$\begin{aligned} C(\alpha,\alpha)/\alpha &= (1/\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^\theta}+\frac{1}{\alpha^\theta}-1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= (\alpha^\theta)^{-\frac{1}{\theta}}\left(\frac{2}{\alpha^\theta}-1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \\ &= (2-\alpha^\theta)^{-\frac{1}{\theta}} = \frac{1}{(2-\alpha^\theta)^{\frac{1}{\theta}}}. \end{aligned}$$

$$\lambda_\ell = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{(2-\alpha^\theta)^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\theta}}} > 0.$$

ملاحظات

المقدمة التاريخية لنظرية الاحتمالات استمدت بشكل كبير من كتاب *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk* (ضد الآلهة): بقلم بيتر برنشتاين. " باشيولي" هو مصدر الاقتباس في بداية هذا الفصل، ويقدم برنشتاين وصفا رائعا لتاريخ نضال العلماء لإيجاد الإطار الصحيح للتعامل مع المخاطر. وتم نقل اقتباس جاكوب برنولي من ترجمة أوسكار شينين لعمله: *The Art of Conjecturing* (فن التخمين). الجزء الرابع، عرض استخدام وتطبيق العقيدة السابقة للشؤون المدنية والأخلاقية والاقتصادية.

إن مناقشتنا لنظرية الحافظة المثالية في هذا الفصل قصيرة جدا. يناقشها لونبرجر (1998) بشكل أكثر شمولية. وضع" هاري ماركويتز" النظرية في الأساس وتم نشرها لأول مرة في عام 1952؛ في عام 1990 حصل ماركويتز على جائزة نوبل في الاقتصاد عن عمله.

المراجع

Ang, A. and Chen, J. (2002) Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, 63, 443-494.

Bernoulli, J. *Ars Conjectandi* . Translated by Oscar Sheynin, NG Verlag, 2005.

Bernstein, P. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk* , John Wiley & Sons. Chua, D., Kritzman, M. and Page, S. (2009) The myth of diversification. *Journal of Portfolio Management* , 36, 26-35.

Luenberger, D. (1998) *Investment Science*. Oxford University Press.

McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005) *Quantitative Risk Management* . Princeton University Press.

Schmidt, T. (2006) Coping with copulas. In *Copulas: From theory to application in finance*, Jorn Rank (ed.), Bloomberg Financial.

تماريـن

1-2 مشكلة النقاط

حساب التقسيم العادل للحصة في 'مشكلة النقاط " الموضح في القسم 1.2 إذا افترضنا أن الرقم القياسي الحالي لنجاح A ضد B هي توقعات دقيقة لاحتمال فوز ألعاب المستقبل.

2-2 تغيير معدل الفشل اليومي إلى معدل فشل سنوي

على سبيل المثال، هناك سيارة أجرة تُستخدم سبعة أيام في الأسبوع، نفترض أن احتمال حدوث عطل ميكانيكي لهذه السيارة هو 0.001 وأن هذه النسبة تبقى ثابتة مع مرور الوقت.

(أ) إيجاد العدد المتوقع للأعطال خلال سنة (365 يوما).

(ب) على افتراض أن الأعطال مستقلة خلال أيام مختلفة، قم بإيجاد احتمال حدوث عطل مرة واحدة على الأقل خلال 365 يوما (ووضح أن هذا الاحتمال أقل من 0.365).

3-2 تأخر على الفصل الدراسي

يجب أن يصل جيمس إلى صفه في الوقت المحدد، مما يعني وصوله إلى الجامعة الساعة العاشرة صباحا، والخيارات المتاحة هي أن يأخذ الحافلة رقم 12 التي تستغرق 40 دقيقة، أو رقم 15 التي تستغرق 30 دقيقة أو الحافلة السريعة التي تستغرق 20 دقيقة. ما هو احتمال وصوله للصف في الوقت المحدد إذا وصل إلى محطة الحافلات في الساعة 9:15 صباحا، وإذا كان من المرجح أن تصل الحافلة رقم 12 في أي وقت بين 9:10 و9:30، وإذا كان من المرجح أن تصل الحافلة رقم 15 في أي وقت بين 9:20 و9:40، وهناك نوعان من الخدمات السريعة التي من الممكن أن يحصل عليها جيمس: الأول هو أنه من المرجح أن يصل في أي وقت بين 9:05 و9:2، والثاني هو أنه من المرجح أن يصل في أي وقت بين 9:35 و 9:50 ؟ ونفترض أن جميع الحافلات لديها أوقات وصول مستقلة.

4-2 الجمع بين مخاطر الاتحاد والتقاطع

هناك مشروع بناء متأخر عن الوقت المحدد له، إذا استمر هذا التأخير أكثر من أربعة أسابيع سيتعين إيجاد مكان بديل من أجل إقامة الحدث المخطط له في المبنى الجديد، وهناك احتمال بنسبة 20٪ بأن تسوء الأحوال الجوية مما سيتسبب في تأخير لمدة ثلاثة أسابيع، وهناك احتمال بنسبة 10٪ بأن يتأخر تسليم عنصر أساسي وهذا من شأنه أن يؤدي إلى تأخير ما بين أسبوعين إلى أربعة أسابيع، هذا بالإضافة إلى أي تأخير يمكن حدوثه بسبب الأحوال الجوية. ويتضمن البناء بعض الحفر لإنشاء شبكة الصرف في منطقة ذات أهمية أثرية، وأيضاً يتضمن هذا العمل بعض علماء الآثار وهناك احتمال ضئيل بنسبة (5٪) بأن يتم العثور على اكتشافات مهمة والتي قد تؤدي إلى حدوث تأخير لمدة شهرين.

(أ) استخدام مخطط فين لعرض الأحداث التي ستؤدي إلى تأخير لأكثر من أربعة أسابيع.

(ب) بافتراض أن جميع الأحداث الثلاثة مستقلة، احسب احتمالية حدوث تأخير لأكثر من أربعة أسابيع.

5-2 احتمال الحد الأقصى من التوزيع التجريبي

لقد لاحظت كميات الأمطار خلال شهر أبريل على مدار الثلاث سنوات الماضية، وهناك 90 نقطة من البيانات وأكبر 10 نقاط هي كما يلي (ملم): 305، 320، 325، 333، 340، 342، 351، 370، 397، 420. على افتراض أن معدل هطول الأمطار خلال أيام متتالية مستقل، استخدم البيانات التجريبية لتقدير احتمال أن الحد الأقصى للأمطار اليومية خلال فترة خمسة أيام في العام المقبل أقل من 350 ملم (أي هطول الأمطار أقل من 350 ملم على مدار كل يوم من الأيام الخمسة) .

6-2 المحافظ ذات الأعداد الكبيرة والفروق المختلفة

هناك عوائد N من الأسهم المستقلة Xi وσi هو الانحراف المعياري لـ Xi، إذا كان

σmax هو الحد الأعلى على مقياس أي من σi يظهر أنه من خلال استثمار مبلغ W بطريقة تعطي السهم i الوزن النسبي لـ $\sigma i/1$ ويكون الانحراف المعياري الإجمالي للمحفظة هو أقل من وتقترب هذه النتيجة $W\,\sigma_{max} / \sqrt{N}$ من الصفر كلما كبرت قيمة N.

7-2 المحفظة المثالية

هناك ثلاثة أسهم للاستثمار في: أ، ب، ج وكانت الزيادات المتوقعة في السعر خلال عام واحد هي: 10٪ للمخزون أ، و15٪ للمخزون ب، و5٪ للمخزون ج. الانحرافات المعيارية لهذه الأرقام هي 2٪ لـ أ وب و1٪ ل ج. وبعبارة أخرى، إذا كان X هو المتغير العشوائي الذي يعطي الزيادة في القيمة لـ أ المقاسة في النسبة المئوية، فإن الانحراف المعياري لـ X هو 2. وإذا كانت جميع العائدات مستقلة، فما هي حافظة التباين الدنيا التي تحقق عائد 10٪؟ (استخدم جدول بيانات وأداة "السولفر" لهذه العملية الحسابية).

8-2 محفظة مثالية وأصول خالية من المخاطر.

باستخدام نفس الطريقة في التمارين 2-7، افترض أن هناك استثمار خالي من المخاطر يدعى ج والذي تزيد قيمته بشكل دائم بنسبة 4٪ على مدار السنة.

(أ) أعد حساب حافظة التباين الدنيا لعائد نسبته 10٪، وعائد بنسبة 7٪، وعائد بنسبة 5٪. (استخدم جدول البيانات وأداة "السولفر" لهذه العملية الحسابية).

(ب) وضح أن هذه المحافظ الثلاثة تقع على نفس الخط الثابت في الانحراف المعياري مقابل الرسم البياني للربح المتوقع.

(ج) وضح أن كل من المحافظ الثلاث هم عبارة عن مزيج يشتمل على نسبة من ج ونسبة معينة من محفظة ثابتة من مخزونات أ وب وج (وهذا مثال على "نظرية الصندوق الواحد" في نظرية المحفظة).

9-2 متعدد المتغيرات الطبيعية.

ترغب شركة في تقدير احتمال أن تؤدي العواصف وارتفاع المد إلى الفيضانات في

منشأة ساحلية ذات أهمية، والعنصران الحرجان هنا هما سرعة الرياح في اتجاه الشاطئ وارتفاع الموجة، وتعتبر حركة الرياح سريعة عندما تبلغ 10 كم في الساعة ويكون الانحراف المعياري 8 كم في الساعة وارتفاع الموجة 2 متر والانحراف المعياري 1 متر، وأن التباين المقدر بين هذين المتغيرين هو 4. بافتراض أن هذا التوزيع طبيعي متعدد المتغيرات (تجاهل قضايا ارتفاع الموجة السلبية). قم بتقدير احتمال أن يكون هناك فيضانات في العام المقبل على افتراض أن الفيضانات تحدث عندما يكون ارتفاع الموجة جمع (+) 0.05 × (سرعة الرياح) أكبر من 6.

10-2 خصائص نظرية الاحتمالات "كوبولا"

نفترض أننا نرغب في تعريف دالة الكثافة لكوبولا $c(u_1, u_2) = 2/3$ عندما يكون $u_1<3/4$

و $u_2<3/4$؛ $c(u_1, u_2) = 2$ عندما يكون واحد من $u_1<3/4$ و $u_2<3/4$ و $c(u_1, u_2) = -2$

وضح إذا كانت C(u1, u2) معرفة بالطريقة العادية من زيادة c في كلا المعادلتين ولها هوامش موحدة ولكنها لن تكون كافية لعدم مساواة المستطيل (حيث أن كثافة الدالة سلبية في جزء من المربع).

11-2 كوبولا جامبل

قياس كوبولا جامبل المساوي لـ 2 ناتج من

$$C(u_1, u_2) = \exp\left(-\sqrt{(\log(u_1))^2 + (\log(u_2))^2}\right).$$

إذا كان لكل متغيرين توزيعا أسيا بالقياس 1 (بحيث يكون لديهما $\text{CDF } F(x) = 1-$ e^{-x} $x \geq 0$) ويتم تحديد سلوكهما المشترك بواسطة كوبولا جامبل مع القياس 2، احسب احتمال أن الحد الأقصى للمتغيرين له قيمة أكبر من 3 ومقارنتها مع الحالة التي يكون فيها المتغيران العشوائيان مستقلين.

12-2 تبعية المنحنى العلوي

وضح أن المعادلة لـ λ_u الموضحة في النص يمكن تحويلها إلى

$$\lambda_u = 2 + \lim_{\delta \to 0} \frac{C(1-\delta, 1-\delta) - 1}{\delta},$$

واستخدم هذه الصيغة للتحقق من أن كوبولا كلايتون مع $\theta = 2$ ليس له تبعية للمنحنى العلوي. سوف تجد أنه من المفيد تعيين $g(x) = C(x, x) - 1$ واستخدام حقيقة أن

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{g(1-\delta) - g(1)}{\delta} = -\frac{dg(x)}{dx} \text{ evaluated at } x = 1.$$