الفصل الخامس

اتخاذ القرارات وسط حالة من عدم اليقين

هل نريد أسعار مستقرة؟

ريكو تاسكر هو المسؤول عن مبيعات الفواكه والخضار الطازجة في سلسلة من متاجر البيع بالتجزئة الكبيرة. وتعد الطماطم منتج مهم بالنسبة لريكو. والثمن الذي يدفعه بائع التجزئة ثابت في أسواق الفاكهة بالجملة ويختلف وفقا للطقس والموسم. ويقوم بائع التجزئة بتصنيف ما بين 60٪ و72٪ من المبيعات، مع متوسط ترميز بنسبة 66٪. هناك حاجة إلى هذه العلامات ذات النسب المرتفعة لتغطية تكاليف التخزين والمناولة وغيرها من نفقات البيع بالتجزئة. يتم إزالة أي منتج من الطماطم في حال عدم بيعه لمدة خمسة أيام، وفي المتوسط، تصل نسبتها إلى 10٪ من الطماطم المشتراه. ويبلغ متوسط سعر الجملة من الطماطم 3 دولارات للكيلو الواحد. بعد مناقشات مع المزارع الذي يوفر حاليا حوالي ثلاثة أرباع الطماطم التي يبيعها بائع التجزئة، يذهب ريكو إلى رئيسه، سوفي مارشال، لاقتراح تقديم المزارع سعر ثابت يقدر بـ 3 دولار للكيلو على مدار السنة، وأن بائع التجزئة يبيع المنتج بسعر 4.99 دولار للكيلو. وهذا يضمن نفس الترميز (1.99 / 3 = 0.663)

ومن خلال العمل مع مزارع واحد مع أسعار ثابتة سوف تكون العملية برمتها أكثر بساطة. وقد وافق المزارع على تلبية جميع متطلبات متاجر التجزئة حتى حد معين من قبل الإنتاج الكامل للمزارع في أي أسبوع. يقول ريكو أنه بالإضافة إلى خفض تكاليف الإدارة، فإن هذا القرار سيقلل جزء من المخاطر التي يواجها بائع التجزئة من خلال القضاء على تقلب الأسعار.

قالت "سوفي" ولكن ماذا يحدث عندما يكون هناك معروض كبير من الطماطم والجميع يبيعها بسعر منخفض؟ ألن يسهم ذلك في تراجع مبيعاتنا بشكل كبير؟"

رد ريكو قائلًا "نعم، اعتقد أنه سيكون هناك تراجع ولكن يأتي العديد من الناس إلى متجرنا لشراء كافة احتياجاتهم من الفواكه والخضروات" وأضاف "بأن المبيعات ستظل في النطاق الإيجابي، بالإضافة إلى أن المتجر سوف يحقق المزيد من المبيعات في أوقات نقص المعروض وعندما يبيع الجميع بسعر أعلى."

لم يقتنع سوفي بشكل كامل، وقال "ماذا عن أدنى مستوى للمعروض من المزارع؟" إذا كان هناك نقص عام، ألن نقوم ببيع ما لدينا بشكل عام وبأي حال من الأحوال؟ ولهذا هل سنقوم بالفعل ببيع المزيد في تلك الأوقات؟

من ناحية أخرى، لفتت فكرة تثبيت السعر انتباه سوفي، ورأى أن أوضاع السوق قد تضمن ثبات الأسعار لمدة عام. ولكن هذا الالتزام قد يؤدي إلى عواقب وخيمة. ففي بعض الأوقات تستمر حالة من الطقس لفترة أطول. ماذا لو كان هناك عروض وفير لمدة ستة شهور مع انخفاض أسعار الجملة؟ أو ستة شهور من نقص المعروض؟ بالإضافة إلى ذلك، تعرف سوفي أن الربح الحقيقي يعتمد بشكل كبير على الكمية المهدورة. فإذا ارتفعت النسبة من 10٪ إلى 12٪ أو 13٪ سيكون هناك فارق كبير. بشكل عام تواجه سوفي قرار صعب: ومن المفارقات أنه حالات عدم اليقين بشأن النتائج تجعل الأمر صعبًا، على الرغم من أن التغيير المقترح يهدف إلى تقليل عدم اليقين.

1-5 القرارات والحالات والنتائج

في الفصول السابقة كنا مهتمين بفهم (وقياس) وخصائص المخاطر من حيث الاحتمالات، والعواقب من حيث التكاليف. ننتقل الآن إلى سؤال حول كيفية تصرف المدير في بيئة محفوفة بالمخاطر. في الفصل السادس سنركز على كيفية تصرف الأفراد فعليا عندما تكون هناك شكوك. ولكننا نبدأ مع وجهة نظر معيارية، وليس وصفية: نظرا للحاجة إلى اتخاذ قرار بين البدائل، كل منها يحمل المخاطر، وكيف ينبغي للمدير اتخاذ هذا القرار؟

ومن المفيد أن نميز بعناية بين الأشياء التي يمكننا السيطرة عليها؛ وهي القرارات التي نتخذها، والأشياء التي تحدث خارج نطاق سيطرتنا، وهي الأحداث التي تقع. يمكننا أن نفكر في مشكلة القرار كاملة على أنها خمسة عناصر: القرارات؛ الأحداث، نتائج محتملة مختلفة؛ احتمالات الأحداث المختلفة. والقيمة التي نحددها لنتائج مختلفة.

وسوف نتعامل مع هذه العوامل.

1-1-5 القرارات

القرار هو في الواقع خيار بين الإجراءات الممكن اتخاذها. إذا كان هناك شيء واحد فقط يمكن القيام به، إذاً لا يمكن حينها اتخاذ قرار. في هذا الفصل سوف نركز على القرارات المتخذة في مرحلة واحدة في الوقت المناسب والتي تجعل الأمور أكثر بساطة. (في الفصل السابع سوف ننظر بمزيد من التفصيل في المشاكل الديناميكية التي تحتاج إلى اتخاذ قرارات متتالية). يمكن أن يتضمن القرار اختيار متغير، على سبيل المثال قد نقرر كيفية بناء جدار بحري، أو كم المخزون من منتج ما كافي للاستمرار. في هذه الحالات هناك عدد لا حصر له من الخيارات الممكنة، ولكننا سوف نركز على الوضع الذي لا يوجد سوى مجموعة محدودة من الإجراءات الممكنة. وهذا يجعل مناقشتنا أبسط بكثير، وعمليا يمكن اتخاذ قرار مع خيار حر تماما لبعض المتغيرات المستمرة عادة من خلال إنشاء قائمة كبيرة من الخيارات الممكنة بالقدر الكافي.

5-1-2 الحالات

تعاملنا مع الأحداث على أنها عشوائية. قد يكون لدينا معرفة باحتمال وقوع أحداث مختلفة، ولكن لا يمكننا التنبؤ بالضبط بما سيحدث. نشير إلى الأحداث غير المؤكدة، أو قيم لمتغيرات غير مؤكدة، بـالحالة. وتكون الحالة غير معروفة لصانع القرار في الوقت الذي يتم فيه اختيار إجراء ما. وتسمى قائمة جميع الحالات الممكنة التي يمكن أن تحدث بمساحة الحالة. هناك طريقة واحدة جيدة للتفكير في الحالة وهي تخيل لعبة فيها واحد من اللاعبين وهو صانع القرار واللاعب الآخر هو "الطبيعة". كلا اللاعبين لهم الفرصة في اتخاذ إجراء: صانع القرار يختار أفعاله والطبيعة تختار أفعالها. في هذا المنظور تُعرف الحالة ببساطة ما تختاره الطبيعة من أفعال.

الحالة تمثل عدم اليقين الذي ينطوي عليه مشكلة اتخاذ القرار. على سبيل المثال، لنفترض أننا نريد أن نضع نموذجا لموقف نريد فيه استثمار 1000 دولار في الأسهم يوم الأربعاء إذا كان سعر الإغلاق يوم الثلاثاء أعلى من سعر الإغلاق يوم الاثنين. سوف نحتاج إلى اتخاذ قرار حول ما يجب فعله إذا كانت أسعار الإغلاق في اليومين هي نفسها: لنفرض أننا نقوم برمي عملة (قطعة معدنية) لاتخاذ قرار بشأن الاستثمار في هذه الحالة. قد نقرر نمذجة هذا بالقول إن الحالة هنا هي الفرق في الأسعار بين يومي الاثنين والثلاثاء وهناك ثلاثة إجراءات: الاستثمار، وعدم الاستثمار ورمي العملة (قطعة معدنية). ولكن هذا يترك بعض الشكوك من لصف الحالة، فبدلا من ذلك نحن بحاجة إلى تضمين كل من التغيير في السعر ونتيجة رمي العملة (القطعة المعدنية) ضمن وصف الحالة.

5-1-3 النتائج

الإجراء الذي نتخذه، والأحداث العشوائية التي تحدث، تحدد مجتمعة ما يحدث لنا: هذه هي النتيجة أو العواقب لاتخاذ قرار معين.

وغالبا ما تحتوي النتيجة على عدة أبعاد: على سبيل المثال، سيؤدي قرار الاستثمار إلى تدفق إيرادات توزيعات الأرباح بالإضافة إلى قيمة حافظة نهائية؛ فإن قرار التخلي عن طرح

منتج جديد سوف يؤدي إلى عواقب ليس فقط من أجل الربح ولكن أيضا للسمعة؛ فإن قرار نقل منشأة التصنيع سيترتب عليه تكاليف مباشرة وتكاليف غير مباشرة مرتبطة بأوقات عمل للموظفين وتنقلهم. يجب أن تأخذ النتيجة في الاعتبار كل ما يمكن أن يكون له تأثير على القرار الذي نتخذه.

يمكننا تلخيص هذا الإطار من خلال الرسم البياني للشكل 1.5 الذي يوضح:

- صانع القرار يختار بين مجموعة من الإجراءات المتاحة.
- الحالات المحتملة التي يمكن أن تحدث.
- النتيجة التي يتم التوصل إليها نتيجة الجمع بين اختيار الإجراء من قبل صانع القرار والحالة التي تحدث.

الشكل 5-1: إطار الإجراءات والحالات والنتائج

كل هذا يعد بسيط نسبيا، ولكن هناك ما يجب التنبه إليه. المصطلحات المستخدمة ليست عالمية. في بعض الأحيان يتم استخدام كلمة 'النتيجة' ببساطة للإشارة إلى حالة معينة تحدث بدلا من نتيجة قرار. كما أنه من الشائع جدا للناس استخدام الكلمة "الحالة" للإشارة إلى المعلومات المتاحة لصانع القرار في وقت معين (وهذا يحدث في كثير من الأحيان عند التعامل مع المشاكل التي تتطور مع مرور الوقت). لذا، على سبيل المثال، قد نتبع مبلغ المال الذي يملكه المقامر بعد عدد من المقامرة المختلفة في عجلة الروليت ونشير إلى ذلك بـ "الحالة" في الوقت t. وتعني حالة المقامر وليس حالة الطبيعة. عندما يتم استخدام مصطلح "الحالة" بهذه الطريقة سيتم تحديده من قبل الحالات العشوائية من الطبيعة وكذلك القرارات التي اتخذها المقامر؛ لذلك، في المصطلحات التي لدينا كون هذه أقرب إلى النتيجة من الحالة.

وبمجرد أن نضع إطارا للقرارات ونضع النتائج التي تنشأ عن كل مجموعة من الإجراءات والحالة جنبا إلى جنب، نحتاج إلى عنصرين إضافيين لاستكمال نموذج القرار.

4-1-5 الاحتمالات

نحن بحاجة إلى معرفة احتمال حدوث حالات مختلفة. في الفصول السابقة كنا سعداء بالحديث عن احتمالات الأحداث (مثال، احتمالات لمجموعة من نطاق الحالة). وبذلك قمنا بتجاوز ما هو جدير بالنقاش فعلا. قد يكون الأمر واضحًا عندما نوضح ما نعنيه عندما نقول أن احتمالية رمي النرد وظهور رقم 6 هي 6/1، ولكن عدد قليل من الأحداث الحقيقية يمكن حساب احتمالاتهم ببساطة جدًا. يمكننا القول بأن احتمالية حدوث ركود في الولايات المتحدة (ربعين سنويين من النمو السلبي) في وقت ما خلال العشرة أعوام المقبلة تبلغ 60٪.

ولكن هذا يعد ببساطة توقع غير مستند إلى بيانات: فقد يحدث ذلك أو لا، وفرص حدوث ذلك ترتبط بالعديد من العوامل التي لا تعد ولا تحصى سواء أكانت داخل الولايات المتحدة أو خارجها (على سبيل المثال، القرارات السياسية التي تتخذها الحكومة على الصعيد العالمي). بالإضافة إلى ذلك، هناك عوامل قد تؤثر على احتمالية وقوع ركود تفوق مجرد الأوضاع السياسية مثل التغير المناخي والكوارث الطبيعية والأحداث الإرهابية والحروب.

بالرغم من ذلك، إذا كان علينا أن نتخذ قرارا في مجال الأعمال الذي يتأثر بحالة الاقتصاد في المستقبل، فهذا يعني أن علينا أن نأخذ في الاعتبار إمكانية حدوث ركود. وهذا يقودنا إلى اتخاذ نوع من الحكم الذاتي لهذا الاحتمال، وحتى لو لم نكتب القيم الاحتمالية (أو تضمينها في جداول من البيانات)، وإذا كان لقرار الأعمال نتائج تعتمد على هذا الحدث غير المؤكد، فمن المرجح أن الاحتمالات يجب أن تؤخذ في الاعتبار في عملية اتخاذ قرارنا بطريقة ضمنية في بعض الأحيان – وفي هذه الحالة يكون من الأفضل أن نعرضها ومناقشتها. هنا سنبدأ على افتراض أن صانع القرار لديه مجموعة متفق عليها من الاحتمالات للأحداث التي ينطوي عليها مشكلة اتخاذ القرار.

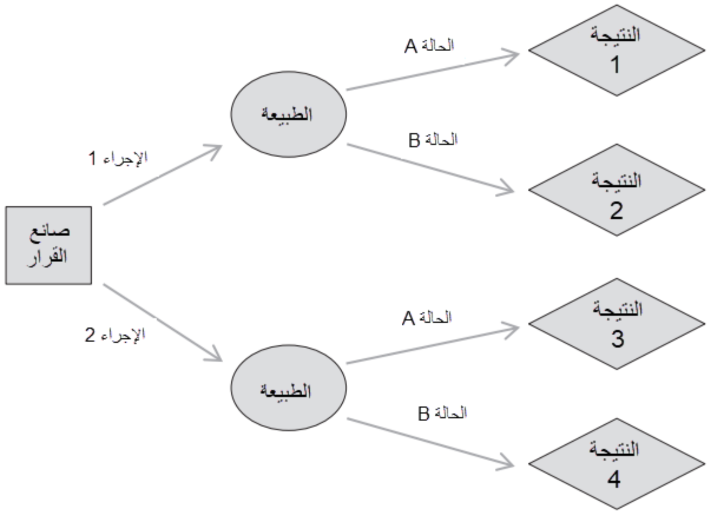
وهناك بعض النهج البديلة لمشاكل القرارات التي يمكن استخدامها عندما تكون حالات عدم اليقين كبيرة بما فيه الكفاية حيث يصبح العمل على احتمال معين أمر خطير: هذه التقنيات للتحسين سيتم مناقشتها في الفصل الثامن.

5-1-5 القيم

وأخيرا، نحن بحاجة إلى معرفة القيمة التي نضعها على نتائج مختلفة. يجب أن يكون لدينا نموذج قرار واضح جدًا لمقارنة النتائج المختلفة. في الواقع، نحن بحاجة إلى تجاوز المقارنة بين النتائج البسيطة؛ قد يكون من المؤكد أن خيار واحد من الإجراءات يؤدي إلى النتيجة A، في حين أن البديل من المرجح أن يؤدي إلى إما نتيجة B أو النتيجة C. إذا كان C هو الأفضل لـ A، ولكن A هو الأفضل لـ B اتخاذ قرار بين الاثنين سيكون صعبًا. هذه هي المشكلة الرئيسة التي نتناولها في هذا الفصل: "كيف يمكن لصانعي القرارات الاختيار بين إجراءات مختلفة عندما يؤدي كل خيار ممكن إلى عدم التوصل إلى نتيجة واحدة بل إلى مجموعة من النتائج ذات الاحتمالات المختلفة؟"

طريقة أخرى لتمثيل مثل هذا الوضع هو رسم شجرة القرار مع إشارة المسارات المختلفة في الشجرة إلى قرارات مختلفة وحالات مختلفة يمكن أن تحدث. وقد تم ذلك نظرًا لمشكلة بسيطة في الشكل 5-2. في هذه الحالة هناك خيارين فقط من الإجراءات لصانع القرار وحالتين يمكن أن يحدثوا. هذا يعطي مجموعة مكونة من أربع نتائج مختلفة. في كثير من الأحيان سوف نكتب الاحتمالات أمام الحالات المختلفة حتى نتمكن من رؤية احتمال نتائج مختلفة.

في النموذج الذي وصفناه، تشير الأسهم إلى الإجراء في الوقت المناسب. ومن المنطقي أن نبدأ من النقطة التي يتم فيها اختيار الإجراء، لأن اهتمامنا كله حول أفضل خيار لصانع القرار. وأي حالة من عدم اليقين في حالة الطبيعة التي يتم حلها قبل نقطة اتخاذ القرار لن تكون ذات صلة. ويحتاج نطاق الحالة إلى التعامل مع كل حالة عدم اليقين بشأن حالة الطبيعة التي سيتم حلها بعد اتخاذ القرار. غالبا ما يحدد اختيار الإجراء ما يحدث، وبالتالي تتطور الاحتمالات والحالات المحتملة بشكل مختلف اعتمادا على الإجراء الذي يتم اتخاذه



الشكل 5-2: اتخاذ القرار مع إجرائين وحالتين

(سنرى ذلك في بعض الأمثلة التي سننظر فيها لاحقا). من وجهة نظر أشمل، هذا يجعل الأمور أكثر تعقيدا لأنها تقدم الاعتماد بين الإجراءات والحالة (بدلا من التفاعل بين اثنين فقط يحدثون مع النتيجة)، ولكن من الناحية العملية، لا توجد صعوبة مع الرسم وشجرة القرارات المناسبة، وإجراء الحسابات المطلوبة.

5-2 نظرية المنفعة المتوقعة

5-2-1 تعظيم الربح المتوقع

نريد أن نبدأ مع أبسط موقف، لذلك دعونا نفترض أن الشيء الوحيد المهم لعملنا هو الربح الإجمالي. وبالتالي، فإننا نفترض أن هناك رقم واحد بالدولار ومرتبط بكل نتيجة ممكنة، ونحن لسنا بحاجة إلى السماح لأي من الجوانب الأقل قابلية للقياس من القرار. في بعض الأحيان، حتى لو كانت هناك عوامل أخرى جديرة بالمراقبة، يمكننا أن نسعر هذه العوامل لإعطاء النتيجة النهائية بالدولار. على سبيل المثال، إذا كنا نفكر في نقل عملية مركز الاتصال في الخارج ثم انخفض مستوى اللغة الإنجليزية المنطوقة في هذا المكان فمن الممكن

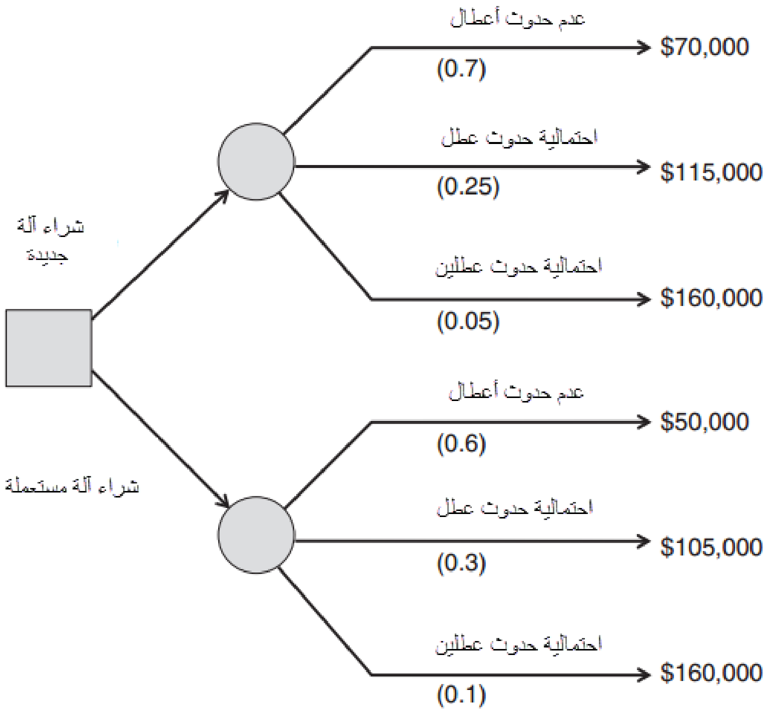
أن يؤدي ذلك إلى تراجع مستويات رضاء العملاء وهذا يجب أن يؤخذ في الاعتبار في عملية اتخاذ القرار. نحن بحاجة إلى أن نسأل أنفسنا ما هي التكلفة الحقيقية الناجمة عن تراجع مستوى الخدمة - ربما يجب أن نفكر في حجم ما نحتاج إنفاقه على مركز اتصال في الخارج مما هو عليه الآن. في أي حال، إذا كنا نستطيع تحويل الأمور المتعلقة بالخدمة إلى قيمة دولارية سيكون لدينا أساس أفضل لاتخاذ هذا القرار.

الاقتراح الأول الذي نحذو حذوه، وربما يكون أبسط خيار لمدير ما، هو تحقيق أقصى قدر من الربح المتوقع. وهذا أمر معقول تماما. ونظرا لعدد من مسارات العمل الممكنة، يقوم المدير بحساب الربح المتوقع لكل منها ثم يختار الإجراء صاحب أعلى قيمة ربح متوقعة. يوفر إطار شجرة القرار طريقة مناسبة لتمثيل المشكلة وأيضا لحساب ومقارنة الربح المتوقع من الإجراءات المختلفة.

مثال 5-1 الاستثمار في آلة لصنع الإنفاق

تفكر شركة ماتشستوك في الاستثمار في آلة حفر جديدة بتكلفة قدرها 520,000 دولار أمريكي وهذه الآلة مطلوبة لأداء وظيفة معينة قبلتها شركة ماتشستوك، وسيتم بيع الجهاز في غضون عامين بـ 450,000 ألف دولار أمريكي. وهناك آلة ثانية ولكن تم استعمالها سابقًا يُمكن أن تباع بقيمة 400,000 ألف دولار أمريكي، وسوف تكون قادرة على القيام بهذه المهمة بشكل مُرض. وبعد عامين، يمكن بيع هذه الآلة (التي تبلغ من العمر أربعة أعوام) بمبلغ 400 ألف دولار. والفرق الرئيسي في الموثوقية واحتمالية تعطلها تمامًا. سيتم تغطية أجزاء الجهاز الجديد طوال العامين الأولين لعملها، وترك فقط تكاليف العمالة وتكلفة فقدان وقت العمل. أخذت ماتشستوك مشورة الخبراء وتعتقد أنه مع الجهاز الجديد سيكون هناك احتمالية تبلغ 0.25 لتعطل الآلة مرة واحدة عن العمل واحتمالية تبلغ 0.05 لتعطل الآلة مرتين خلال المشروع المستمر لمدة عامين (مع احتمال 0.7 لعدم تعطلها على الإطلاق) وسوف يتكلف كل عطل 45,000 ألف دولار في المجموع. وتعتقد الشركة أنه باستخدام هذه الآلة سيكون هناك احتمال 0.3 من لعطل واحد واحتمال 0.1 لعطلين اثنين (مع 0.6 لعدم تعطلها على الإطلاق). وفي هذه الحالة، تقدر التكلفة بمبلغ 55,000 ألف دولار.

ويبين الشكل 5-3 كيف يتم تمثيل ذلك على أنه شجرة قرار. وبالمقارنة مع الشكل 5-2 قمنا بتقليص العُقد ووضع المعلومات (بما في ذلك الاحتمالات) على الأسهم. في هذه الحالة يمكننا حساب إجمالي التكاليف المتعلقة بآلة حفر النفق لكل من النتائج المحتملة، وهذا مبين في العمود الأيمن من الشكل. على سبيل المثال، شراء آلة جديدة والحصول على اثنين من الأعطال يؤدي إلى تكلفة قدرها 70,000 ألف دولار خسارة من قيمة الجهاز على مدى عامين بالإضافة إلى تكلفة قدرها 45,000 ألف دولار مرتين، ليصبح الإجمالي 160,000 ألف دولار أمريكي. يتم أخذ هذه التكاليف الإجمالية من الربح لإعطاء ربح نهائي، وبالتالي فإن تحقيق أقصى قدر من الربح المتوقع يعادل خفض التكلفة المتوقعة. لم نأخذ في الاعتبار القيمة الوقتية للنقود. ولهذا لا يوجد خفض للتكاليف.



الشكل 5-3 : النتائج المرجحة واحتمالاتها لشركة ماتشستوك

ما الذي يجب أن تفعله الشركة لتحقيق أقصى قدر من الربح المتوقع؟ إن شراء آلة حفر نفق جديدة يحملها تكاليف متوقعة تبلغ 0.7 × 70 + 0.25 × 115 + 0.05 × 160 (1000 دولار أمريكي)، والتي تصل قيمتها إلى 85,750 دولار أمريكي. أما شراء آلة مستعملة يجعل التكاليف 0.6 × 50 + 0.3 × 105 + 0.1 × 160 = 77.5، أي 77,500 دولار أمريكي. لذلك، فإن اختيار آلة النفق المستعملة ذات تكاليف أقل وسيزيد الربح المتوقع.

ويمكن تطبيق هذه المنهجية أيضا على القرار الذي يواجه سوفي مارشال في سيناريو شراء الطماطم الذي قدمناه في بداية الفصل. ويتعلق عدم التيقن بالطقس، وبالتالي ظروف النقص أو الفائض. إن النظر في المشكلة بهذه الطريقة سيشجع سوفي على التحقق بشكل أكثر تفصيلا حول أرقام الخسائر المحتملة جنبا إلى جنب مع تقديرات المبيعات لسيناريوهات مختلفة. وحيثما يكون هناك نقص في المعلومات، يمكن إدراج ذلك أيضا في حالة عدم اليقين في التحليل. وفي هذه الحالة، يبدو من المستبعد أن يؤدي تحليل شجرة القرارات إلى تقديم توصية لا لبس فيها بالالتزام بخطة الأسعار الثابتة أم لا، ولكنه سيساعد بالتأكيد في تحديد البارامترات الحاسمة لهذا القرار.

2-2-5 المنفعة المتوقعة

بدلا من التعامل مباشرة مع المال، أو الربح المحقق، فمن المفيد أن نقدم فكرة المنفعة المستمدة من الربح المحقق. لمعرفة سبب قيامنا بهذا، سنظهر لماذا قرارات معظم الناس، لا سيما عند التعامل مع القرارات الشخصية أكثر من القرارات التي يتخذونها كمدراء، لن تؤدي إلى تعظيم الربح المتوقع فقط. على سبيل المثال، لنفترض أنك ترغب في الاختيار بين الخيارين التاليين:

الخيار (أ): مع احتمال 0.5 فإن المكسب 1000 دولار مع احتمال 0.8 أن تخسر 800 دولار.
الخيار ب: التيقن من كسب 99 دولار.

في هذه الحالة يكون الخيار (أ) لديه ربح متوقع قدره 0.5 (1000) + 0.5 (-800) =

100 دولار وهذا أكبر من ربح من الخيار (ب) (ربح مؤكد قيمته 99 دولار) لذا، صانع القرار الذي يسعى إلى تعظيم الربح المتوقع سيختار بالتأكيد (أ) يفضله عن الخيار (ب).

ومع ذلك، بمواجهة الاختيار في الممارسة العملية، فإن معظم الناس لن يترددوا في اختيار الخيار (ب). وهذا لا يعد سوء فهم من الخيارات المتاحة، أو فشلهم بالقيام بالحساب البسيط. ولكنه يمثل رد فعل تجاه احتمالية خسارة 800 دولار في حال خالفت الأمور التوقعات كرمي القطعة المعدنية. وبالنظر إلى أن هناك فارق في التوقعات بمقدار دولار واحد، فإن الغالبية العظمى من الناس سيختارون الربح المؤكد بقيمة 99 دولار. إذا كنا نفكر في ما يحدث هنا سيمكننا أن نرى أن اختيارنا يعتمد جزئيا على ظروفنا المالية الحالية، وجزئيا على ذوقنا للمقامرة.

ويتمثل أحد النهج المتبعة في هذا السؤال في تحديد وظيفة المنفعة الفردية التي تحدد مدى قيمة (أو تكلفتها) بالنسبة لنا لتحقيق مكاسب (أو فقدان) مبالغ مختلفة من المال. في بعض الأشكال يمكن أن تعزى هذه الفكرة إلى أبناء نيكولا ودانيال برنولي الذين اعتبروا كيف يجب على اللاعبين التصرف في ألعاب تعتمد على الفرص. تحدث عالم الرياضيات السويسري دعا غابرييل كرامر، في كتابته لنيكولا برنولي في 1728، عن وظيفة المنفعة على النحو التالي:

"يتوقع علماء الرياضيات المال بما يتناسب مع الكمية، والأشخاص الذين لديهم حدس جيد بما يتناسب مع الاستخدام الذي قد ينتج عنه أرباحًا"

الفكرة هنا هي أننا قد نقدر قيمة 2000 دولار على أنها تمثل قيمة لنا أقل من ضعف 1000 دولار – كل ذلك يعتمد على الطريقة التي من المرجح أن ننفق أموالنا بها. واحدة من المشاكل أو المفارقات التي واجهت أبناء برنولي هي اللعب التي تعتمد على إلقاء القطع المعدنية. إذا كان أول إلقاء نتج عنه ملك وتم ربح الدولار ستنتهي اللعبة. إذا كان أول إلقاء نتج عنه كتابة وثاني إلقاء ملك نربح دولارين وتنتهي اللعبة. ولكن إذا كان أول اثنين من كتابة والقادم هو ملك سنربح 4 دولارات وتنتهي اللعبة. بشكل أعم، إذا كان لدينا عدد معين من الإلقاءات n و $n + 1$ إرم هو ملك، سنفوز بـ 2^n دولار إذا كان هذا هو

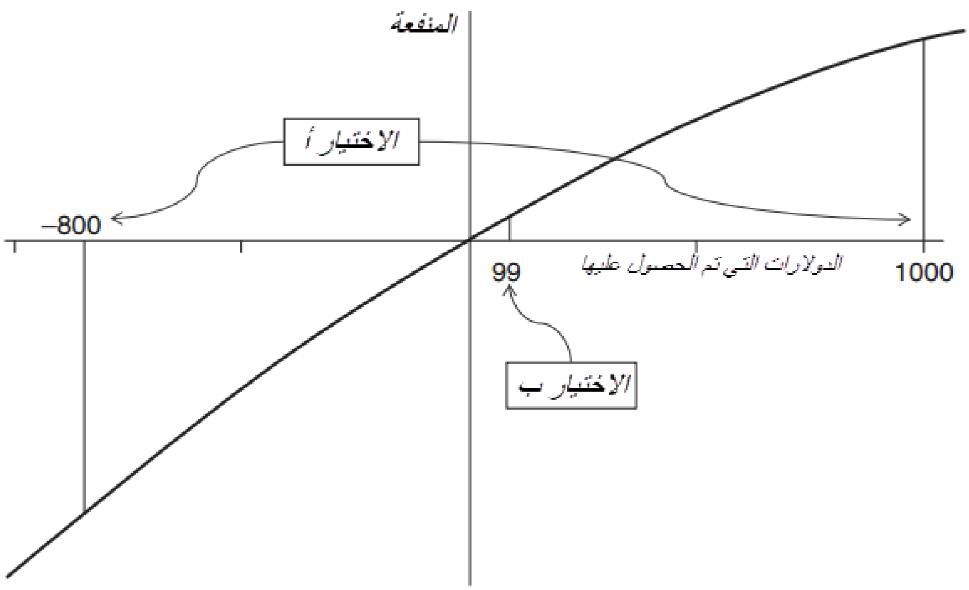
الترتيب، كيف سنكون على استعداد لدفع أموال لتجربة هذه اللعبة؟ قد يدفع معظم الناس 5 دولارات أو ربما 10 دولارات، ولكن ليس أكثر من ذلك.

إن استخدمنا حسابات الربح المتوقع سنكون سعداء لدفع أي مبلغ من المال أقل من الجائزة المتوقعة في اللعبة، ولهذا نحن بالحاجة إلى حساب تلك التوقعات. افترض أننا قمنا باللعب لثلاث جولات. من السهل رؤية أن هناك احتمالية نسبتها ½ للحصول على دولار واحد؛ ونسبة احتمال ¼ للحصول على دولارين ونسبة احتمال $1/8$ للحصول على 4 دولارات. ونسبة الفوز المتوقعة هي $(1/2) + (1/4) \times 2 + (1/8) \times 4 = 3/2$. ولكن إذا لعبنا المزيد من الجولات سنلاحظ أن كل جولة ستضيف $(1/2) \times (1/2^n) \times (2^n) = ½$. بعد خمسون جولة نسبة الفوز المتوقعة قد تكون 25 دولار. كلما استمرينا في اللعب فإن مجموع الربح يصبح أكبر، ولكن احتمالات الفوز بهذا المبلغ المتزايد تتراجع. بوجه عام، من الواضح أن القيمة المتوقعة لا نهائية. (إذا كنا نستخدم مصطلحات الفصل الرابع سيمكننا القول أن هذا الأمر يعد توزيع كثيف للقيم القصوى ولهذا التوقعات لا تعد موجودة.)

قد نعتقد أن حجم الأموال في هذا المثال تبدو جنونية – بعد 30 جولة دون الحصول على "كتابة" فمن الممكن الحصول على 2^{30} دولار الذي يساوي أكثر من مليار دولار. لكن القرار الذي قدمه دانيال برنولي لهذه المفارقة (عادة ما يطلق عليه مفارقة بطرسبورغ) يعتمد على فكرة المنفعة. لكل جولة إلقاء القطعة المعدنية إضافية، فإن حجم المبلغ يتضاعف ولكن الاحتمالية تقل النصف. حسب وجهة نظر الربح المتوقعة فإن مساهمة كل مصطلح متساوية (ويساوي 0.5 في الطريقة التي قمنا بها هذا الحساب أعلاه). ولكن برنولي قال إنه حتى لو كان لدينا 2 دولار إلا أنه ضعف قيمة دولار واحد، فإن الحصول على جائزة قدرها 200 مليون دولار لم يكن ضعف قيمة حصوله على جائزة قدرها 100 مليون دولار. بالنسبة لمعظم الناس، 100 مليون دولار يعد مبلغًا ضخمًا (يكفي للعيش في رفاهية دون الحاجة إلى العمل) وسيكون من الحماقة أن نفكر في أن فائدة إضافية من الحصول على 100 مليون دولار إضافية بنفس قيمة الـ 100 مليون دولار الأولى.

يعد ذلك ضمنا حساب الربح المتوقع في جوهره؛ يجب أن نكون غير مبالين بين الحصول على 100 مليون دولار بالتأكيد وإلقاء القطعة المعدنية والحصول على 200 مليون دولار إذا فزنا فقط.

تقودنا هذه الحجج إلى نظرية القرارات على أساس المنفعة العامة. بدلا من الربح المتوقع نحن بحاجة إلى النظر في المنفعة المتوقعة، وتسمى هذه النظرية بنظرية المنفعة المتوقعة (EUT). تنص هذه النظرية أنه في حال مقارنة الخيارين A وB في المثال أعلاه، نحن بحاجة إلى معرفة دالة المنفعة التي لدينا للعديد من الاحتمالات المرتبطة بالقيم. ويبين الشكل 5-4 الدالة المحتملة للمنفعة. حددنا الرقم "صفر" للثروة التي لدينا، بحيث يمثل المحور الأفقي الربح (أو الخسارة) وفقًا للاختيار الذي تم اتخاذه. على الجانب الإيجابي، منحنى دالة المنفعة يتجه للأسفل، بحيث يكون كسب 1000 دولار أقل من ضعف كسب 500 دولار. على الجانب السلبي، فإن المنحنى يتجه أيضًا للأسفل، بحيث يكون خسارة 1000 دولار أكثر من ضعف خسارة 500 دولار.



الشكل 5-4: مقارنة الاختيارات أ وب باستخدام دالة المنفعة

بالنظر إلى الشكل 5-4 فمن السهل رؤية أن في هذه الحالة تكون المنفعة سلبية عند – 800 دولار وهي أكبر من المنفعة الإيجابية عند 1000 دولار. بما أن الاختيار أ يعطي فرص متساوية لهذين الاحتمالين، فإن المنفعة المتوقعة للاختيار (أ) سيكون سلبي. بتطبيق نظرية المنفعة المتوقعة (EUT) مع دالة المنفعة هذه فقد لا نختار الخيار أ حتى ولو كان البديل عدم الحصول على شيء. ولهذا، سنفضل بالطبع الخيار (ب) مع مكسب مضمون.

لاحظ إضافة رقم ثابت للكميات الناتجة كافة للنظر في دالة المنفعة في نقاط مختلفة على المنحنى، ولأن دالة المنفعة غير خطية، فإن ذلك قد يؤدي إلى اختيار مختلف في اتخاذ قرار بمشكلة ما.

ولهذا السبب، ينبغي أن نفكر في هذه المنفعة بوصفها دالة للثروة الكلية للفرد، بدلا من أن ارتباطها بالتغيرات التي طرأت على الثروة الحالية فحسب. ومع ذلك، يمكننا دائما إضافة أو طرح رقم ثابت من جميع قيم المنفعة دون تغيير تفضيلات بين خيارات مختلفة. وهذا يعني وضع مقياس للأشياء لجعل المنفعة للثروة التي لدينا حاليًا صفر:

يمكننا العمل مع المنافع للتغييرات في الثروة شريطة أن نضع في اعتبارنا أن كل شيء مرتبط بالنفعة للثروة بأكملها في نهاية المطاف.

مثال عملي 5-2 اختيار بين صندوقين استثمار

لنفترض أن مستثمر يريد الاختيار بين صندوقين استثماريين: صندوق يحقق نمو وصندوق مستقر. في السنوات الثلاث الماضية كان هناك سنة واحدة سيئة حيث فقد الصندوق المستقر 5٪ ، وفقد الصندوق الذي يحقق النمو 25٪. وفي العام الجيد حقق الصندوق المستقر 15٪، وارتفع الصندوق الذي يحقق النمو بنسبة 30٪. وفي العام المتوسط، حقق الصندوق المستقر 5٪، وارتفع صندوق النمو بنسبة 10٪. وليس لدى المستثمر أي وسيلة لمعرفة ما سيحدث في العام المقبل، لكن بالنظر إلى الاحتمالات النسبية للنتائج المختلفة، من المتوقع أن السنوات السيئة تقع في ثلاثة سنوات على مدار عشرة سنوات، وتحدث السنوات الجيدة في ثلاثة سنوات على مدار عشرة سنوات ، وتحدث

السنوات المتوسطة في أربع سنوات على مدار عشرة سنوات. نفترض أن منفعة المستثمر لـ x ألف دولار تًعطى من قبل اللوغاريتمية (x) log(*x*) . وبالنظر إلى أن لدى المستثمر 100000 دولار متاحين للاستثمار، فما الخيار الذي له أعلى منفعة متوقعة؟

الحل

يظهر الجدول 5-1 كل خيار للصندوق سواء النتائج أو المنفعة (يتم حسابه كاللوغاريتمي log للقاعدة *e*) والقيم المتوقعة. ويتم حساب المنفعة المتوقعة لمعدل نمو الصندوق من خلال $0.3 \times 4.317 + 0.4 \times 4.701 + 0.3 \times 4.867 = 4.636$.

يمكننا رؤية أنه بالرغم من أن صندوق النمو الذي يحقق قيمة أعلى من الصندوق المستقر، إلا أن المنفعة المتوقعة أقل بقليل من الصندوق المستقر. يمكننا اختصار ذلك في أنه باستخدام دالة المنفعة يجب على المستثمر اختيار الصندوق المستقر.

5-2-3 لا بديل لنظرية المنفعة المتوقعة

نظرية المنفعة المتوقعة هي طريقة قوية للتفكير في اتخاذ القرارات في بيئة محفوفة بالمخاطر: وهي تمثل نهجا منطقيا عندما يكون تعظيم الأرباح المتوقعة غير ملائم. ولكن من المثير للاهتمام أن نسأل ما إذا كانت هناك تركيبات أخرى قد نستخدمها. على سبيل المثال، قد ننظر في بعض الطرق التي نراعي فيها مباشرة تباين نتائج الدولار بدلا من القيام بذلك بشكل غير مباشر من خلال شكل دالة المنفعة.

القيمة المتوقعة	السنة الجيدة	السنة المتوسطة	السنة السيئة	
	0.3	0.4	0.3	الاحتمالية
105	115	105	95	القيمة
4.651	$\log(115) = 4.745$	$\log(105) = 4.654$	$\log(95) = 4.554$	المنفعة
105.5	130	110	75	القيمة
4.636	$\log(130) = 4.867$	$\log(110) = 4.700$	$\log(75) = 4.317$	المنفعة

الشكل 5-1: نتائج مختلفة للاختيار الاستثماري للمثال 5-1

هل يمثل إقبالنا على المخاطرة أمرا ينبغي النظر فيه أكثر من دالة المنفعة؟ ومن الحقائق الملحوظة أن نظرية المنفعة المتوقعة يمكن أن تًستمد من ثلاثة بديهيات معقولة جدا للخيارات: الترتيب والاستمرارية والاستقلال. والنتيجة هي أنه، إذا قبلنا البديهيات، فإننا لسنا بحاجة إلى النظر في أي خوارزمية قرار أكثر تعقيدا.

قبل الشروع في وصف البديهيات، نحن بحاجة إلى عرض بعض الملاحظات والمصطلحات. سنستخدم مصطلح احتمال لوصف خيار مع مجموعة كاملة من النتائج المحتملة، لكل منها احتمال (مثل الخيارين أ و ب في المثال السابق). كل احتمال هو عقدة واحدة (دائرة) في شجرة القرار، مما يمثل خيارا واحدا لصانع القرار.

وأخيرًا، نفترض أن الاحتمال له عدد لا نهائي من النتائج. احتمال q يتشارك فيه نتيجة x_1 مع احتمالية p_1ونتيجة x2 مع احتمالية p_2، ... ونتيجة x_nمع احتمالية p_n. ومن المفيد اختصار ذلك بكتابة (x_1, p_1,؛p_2 ؛ ....x_n,p_n) بحيث يتبع كل نتيجة احتمالها. في كثير من الأحيان سوف نهمل النتيجة صفر، بحيث يتم أخذ احتمال (100 دولار، 0.3؛ – 200 دولار، 0.2) على أنه يعني احتمال 0.3 للحصول على 100 دولار واحتمال 0.2 خسارة 200 دولار. و0.5 احتمال عدم الحصول على شيء.

وإذا كانت مجموعة من النتائج تحتوي على مبالغ بالدولار، فإن الاحتمال هو مجرد متغير عشوائي منفصل مع توزيع الاحتمالات على نتائج الدولار. هناك مصطلحات أخرى تستخدم بدلا من "احتمال"، (على سبيل المثال، بعض الكتاب يستخدمون مصطلحات اليانصيب). معظم هذا الفصل سوف يناقش التوزيعات المنفصلة. ولن تحتاج للتعامل مع أي نوع من احتمال مستمر.

نستخدم الرمز ≤ للإشارة إلى التفضيل بين نوعين من الاحتمال. ولهذا نقول $q \le r$ عندما نعني أن q مفضلة عن r. طريقة كتابة العلامة (≤ بدلًا من >) يشير إلى ضعف عدم المساواة، ويعني ذلك أن q قد يتم اختيارها في حال كان كلا الخيارين متاحين؛ ولا يعني أنه ما يتم دائمًا اختيار q عندما يكون كلا الخيارين متاحين.وبالتالي، فإنه يتضمن إمكانية عدم مبالاة صانع القرار لأي من الاحتمالين. في الواقع، إذا كنا غير مبالين للاختيار بين q وr إذًا

كلاهما $q \le r$ و $r \le q$.

الآن نقدم ثلاثة بديهيات. في كل حالة قد نرغب في النظر في مدى منطقيتها - إذا قبلناهم جميعا، واتضح أننا يجب أن نقبل نظرية المنفعة المتوقعة كوصفًا كاملا للطريقة التي يجب أن يتخذها صانع القرار العقلاني.

الأمر البديهي 1: الترتيب

الترتيب البديهي ينقسم إلى جزأين: الاكتمال والتعدي. ويستلزم الاكتمال ذلك بالنسبة لجميع الخيارات q، r: إما $r \le q$ أو $q \le r$ أو كليهما. وهذا يعني فقط أن صانع القرار لديه طريقة متسقة لاتخاذ القرارات بين الاحتمالات.

التعدي يتطلب أن كافة الاحتمالات q، r وs: في حال كانت $r \le q$ و $s \le r$، بالتالي $s \le q$. ويبدو هذا واضحا تماما. إذا كان صانع القرار يفضل q عن r، ولكنه يجد r أفضل من s، فمن الصعب أن نرى كيف يمكن أن يكون من الخطأ اختيار q في تفضيل لـ s.

الأمر البديهي 2: الاستمرارية

الاستمرارية تتطلب كل الاحتمالات q، r وs حيث $r \le q$ و $s \le r$: سنجد احتمالية p كون وجود اختلاف بين r والاحتمال (المركب) الذي لديه q مع احتمالية p، وs مع احتمالية $1 - p$. بمعنى أن لدينا $r \le (q, p; s, 1 - p)$ و $(q, p; s, 1 - p) \le r$.

الأمر البديهي 3: الاستقلالية

يتطلب الاستقلال أن لجميع الاحتمالات q، r وs: في حال كان $r \le q$ إذًا $(q, p; s, 1 - p) \le (r, p, s, 1 - p)$ لكل p. بعبارة أخرى، ومع العلم أننا نفضل q عن r، ينبغي لنا أن نفضل خيارا مع q بدلا من r حتى إذا كانت هناك فرصة ثابتة لاحتمال مختلف وحدوث s.

إذا ثبتت الثلاث بديهيات، إذًا يمكن إثبات أن التفضيلات يمكن الحصول عليها من المنفعة المتوقعة لبعض دالة u (·) المحددة على مجموعة من النتائج. هذه الدالة u يمكن بعد ذلك أن تؤخذ على أنها تمثل منفعة صانع القرار. تعد هذه النظرية شهيرة والمهمة وأثبتها

فون نيومان ومورجنسترن. وبشكل أساسي ما تبينه النظريات هو أنه لا يهم كيف يقرر صانع القرار بين الاحتمالات: إذا كانت جميع القرارات متسقة بالطريقة التي تنطوي عليها البديهيات الثلاثة، عندئذ يجب أن تكون هناك بعض دالات المنفعة، u_0 (x) فإن جميع القرارات المتخذة سوف تتطابق تماما مع تلك التي كان يمكن أن تحدث إذا كان صانع القرار عظم المنفعة المتوقعة (باستخدام u_0 لحساب هذه التوقعات). وسوف يكون هذا الأمر صحيحا حتى لو لم ينظر صانع القرار بوعي إلى دالة المنفعة u_0.

سنعرض بيان أكثر رسمية للنتيجة، وكذلك فكرة عن كيفية تثبيته في القسم الفرعي أدناه. ولكن الآن نريد أن نفكر لماذا نتوقع ثبات البديهيات. بديهية الترتيب تبدو واضحة إلى حد ما، ولكن سننظر إلى البديهيات الأخرى بالمزيد من التفصيل.

5-2-3-1 الاستمرارية

بديهية الاستمرارية تفترض أن هناك ثلاثة خيارات. الأولى هناك خيار جذاب q: قد يكون ذلك جائزة رحلة حول العالم لمدة 100 يوم. وهناك خيار أقل جذبًا s: يمكننا التفكير في جائزة غير العطلة إطلاقًا. وأخيرًا هناك بديل r: قد تكون هذه رحلة حول البحر الأبيض المتوسط لمدة 14 يوم. لا ينبغي علينا القلق من حقيقة أن هناك بعض الأشخاص الذين لايحبون قضاء الوقت في البحر سيرون أن خيار الـ 100 يوم q أسوأ من خيار الـ 14 يوم r. بالنظر إلى هذا الاعتقاد، سنجد أننا نتعامل مع شخص يرى أن $r \le q$ و$s \le r$. الاستمرارية هنا كما هو واضح من الاسم تشير إلى أن مراقبة ما قد يحدث للتفضيلات حينما تكون فرصة النتائج الأفضل يتم زيادتها بوتيرة بطيئة.

نفترض أن هناك يانصيب وهناك احتمالية p للفوز بجائزة رحلة حول العالم لـ 100 يوم، ولكن إذا لم نفوز بالجائزة لن نحصل على شيء. هذا الاحتمال $(q, p; s, 1 - p)$. إذا بدأت p عند الصفر إذا لا يمكننا الفوز بالجائزة في اليانصيب ولهذا نفضل الحصول على نتيجة r بدلًا من تذكرة في اليانصيب. من ناحية أخرى، مع وصول p عند 1 بمرور الوقت، لن يكون اليانصيب يانصيب فعلا؛ حيث أنه سوف ينتج عنه الفوز بالجائزة دائمًا. ولهذا، مع p

1 = فإن تذكرة اليانصيب ستكون مفضلة عن الحصول على نتيجة r. تقر البديهية ببساطة بأنه يجب أن يكون هناك دائمًا قيمة متوسطة لـ p التي يكون فيها صانع القرار في وضع اختلاف بين الحصول على تذكرة اليانصيب وكسب الجائزة لـ r، رحلة لمدة 14 يوم. هذه هي فقط قيمة p التي يتم عندها التنقل بين تفضيل النتيجة r على تذكرة اليانصيب.

قد تفشل هذه البديهية إذا كان هناك عدد لا نهائي من النتائج السيئة، لذلك، مهما كان ضعف احتمالية حدوث ذلك، فإن الاحتمالية تصبح سيئة بطبيعة الأمر. وبطبيعة الحال، فإن الموت هنا هو النتيجة السيئة، ولهذا تكون بديهية الاستمرارية قابلة للانهيار. إذا كان q يحصل على دولار واحد؛ r لا يحصل على شيء، ولكن s مصيره الموت، إذًا من الواضح أن q≤ r وr≤ s. ولكن هل يتبع ذلك أن يكون هناك احتمال p قريبة جدا من 1 بحيث نكون غير مبالين بين (أ) عدم الحصول على شيء و(ب) الحصول على دولار مع احتمال p ولكن الموت بدلًا من ذلك؟

من وجهة نظر أخرى قد نلاحظ أننا في كثير من الأحيان، في الممارسة العملية، نتبع هذه الطريقة بالضبط. تكلف القهوة 4 دولارات في أحد المتاجر في الشارع، ولكن تكلفتها 3 دولار فقط بنفس الجودة على الجانب الآخر من الشارع. ومع ذلك، إذا عبرنا الشارع للحصول على القهوة الأرخص ألن يكون هناك خطر طفيف بأن يدهسنا سائق متهور؟ يلاحظ جيلبوا أن ما إذا كنا سنعبر الشارع أو لا قد يعتمد ذلك على كيفية عرض القرار لنا:

> "... إذا أوقفتني وقبلت "ماذا تفعل؟" هل فقدت عقلك وتعرض حياتك للخطر بهذه الطريقة؟ فكر في ماذا قد يحدث! فكر في عائلتك!" سوف أعزف عن ذلك واستسلم (توفير الدولار).

هذا يدل على أهمية الطريقة التي يتم بها وضع الخيار في إطار، سوف نتناول هذا الأمر بشكل أكثر في الفصل التالي: سيكون من الغباء أن نفترض أن صانع القرار الحقيقي دائما ما يتخذ نفس القرار عندما يواجه نفس الخيارين.

2-3-2-5 الاستقلالية

وأحد الطرق للتفكير في بديهية الاستقلالية هو رؤيته علاقتها بالقرارات التي اتخذت في وقت مبكر. إذا كنا نفضل q على r، رحلة بحرية لمدة 100 يوم إلى خيار الرحلة لمدة 14 يوما، إذًا يجب أن يكون الأمر صحيحًا حتى لو كان الخيار الثالث وارد الحدوث. في هذا المثال، إذا كان s هو الخيار الذي لا تحصل فيه على أي جائزة على الإطلاق، فإن البديهية تنص على أنه إذا أعطى خيارا واضحًا بين الجوائز q وr سنفضل q، بالنظر إلى كلا الخيارين في اليانصيب، على سبيل المثال، واحد فرصة من الألف للفوز ، قد نفضل الاحتفاظ بتذكرة لليانصيب مع جائزة q بدلًا من الاحتفاظ بتذكرة لليانصيب مع جائزة r؛ ويظل هذا صحيحا بغض النظر عن احتمال الفوز، شريطة أن يكون هو نفسه بالنسبة اليانصيبتين. إذا لعبنا اليانصيب وخسرنا فلن يكون هناك قرار متاح لاتخاذه، وإذا فرزنا سيكون هناك خيار متاح للاختيار بين جائزة q وr، وأوضحنا بالفعل أننا قمنا باختيار q. قد يكون هناك شيء غريب في حال اختيار اليانصيب r، إذا كان اليانصيب q متاح. ومن شأن ذلك أن يشكل نوعا من التناقض الدينامي حيث نتخذ قرارا مختلفا في وقت مبكر بشأن القرار الذي نتخذه عندما يتعلق الأمر بالاختيار النهائي. وبطبيعة الحال، فإن هذا النوع من التناقض يحدث أحيانا في خياراتنا، ولكننا قد نفضل أن نكون أكثر اتساقا وأن بديهية الاستقلال هي ببساطة وسيلة لإنفاذ ذلك. في الفصل التالي سوف نستعرض بقدر أكبر من التفصيل الطريقة التي قد تفشل بها فكرة الاستقلال بالنسبة لصانعي القرار الحقيقيين الذين يواجهون خيارات حقيقية.

* 4-2-5 دليل إثبات النظرية

يمكن ذكر نظرية فون نيومان- مورجنسترن على النحو التالي:

نظرية 1-5 افترض أن علاقة تفضيلية $\preceq$ على مجموعة من جميع الاحتمالات تفي بديهات الطلب والاستمرارية والاستقلال. ثم هناك دالة منفعة u، معرفة على جميع النتائج المحتملة، بحيث دالة المنفعة U على الاحتمالات، المستمدة من u من الصيغة

$$U(x_1, p_1;\ x_2, p_2;\ \ldots;\ x_n, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i),$$

لديه خاصية أن أي احتمالات q وr، $U(q) \geq U(r)$ إذا كانت فقط $q \geq r$. وعلاوة على ذلك، يجب أن تكون أي دالة منفعة أخرى v على النتائج التي لها هذه الخاصية تحولا خطيًا موجبا من u (أي $v(x) = a + bu(x)$ لبعض a وb مع $b > 0$).

لن نعطي دليلا كاملا على نظرية 5-1، ولكن (إذا كان لديك اهتمام من الناحية الرياضية) فمن المجدي النظر في أهم الخطوات في مثل هذا الدليل. ولتحقيق ذلك، نحتاج إلى معالجة الاحتمالات، وأول ما نلاحظه هو أنه عندما تحدث الاحتمالات داخل احتمالات أخرى، يمكننا توسيع نطاقها من أجل الوصول إلى قائمة واحدة من النتائج واحتمالاتها. على سبيل المثال، إذا كان q_1 هو احتمال بقيمة 100 دولار باحتمالية 0.5 و50 دولار مع احتمالية 0.5 وq_2 = (100 دولار، 0.5؛ q_1، 0.5) ثم يمكننا توسيع نطاق احتمال q_1 للحصول على

$$q_2 = (\$100, 0.5;\ 0.5(\$100, 0.5;\ \$50, 0.5)) = (\$100, 0.75; \$50, 0.25).$$

نفترض أن لدينا مجموعة محدودة من الاحتمالات، مما يعني ضمنا أن هناك مجموعة محدودة من النتائج التي من بينها احتمالات مختلفة توزع احتمالاتها. سنعمل على ذلك على مراحل.

الخطوة الأولى: يمكن استخدام بديهية الترتيب لإنشاء أفضل وأسوأ النتائج بين مجموعة من النتائج. نقوم بذلك من خلال أخذ النتائج على حدة ومقارنتها مع الأفضل من بين النتائج التي سبق النظر فيها. أفضل النتائج كان يجب أن يتم مقارنته مباشرة مع كل نتيجة التي جاءت بعد ذلك في الترتيب، عن طريق الانتقالية، سيكون أيضا أفضل مع كل ما جاء من قبل (لن نحاول إعطاء أي تفاصيل). نحن هنا نتعامل مع النتائج بدلا من التوقعات، ولكن النتيجة هي أساسا نفس احتمال أن يعين احتمال 1 لهذه النتيجة. نفس الإجراء يعمل على العثور على أسوأ نتيجة كذلك. ونسمي أفضل نتيجة x^* وأسوأ نتيجة x_*.

الخطوة الثانية: الآن نقوم بتعيين قيمة المنفعة 0 إلى x_* وقيمة المنفعة من 1 إلى x^*. بالنسبة لأي نتيجة أخرى x في القائمة نحدد منفعة u (x) تساوي احتمال p بحيث أننا غير مبالين بين احتمال (x، 1) واحتمال (x^*، p، x_*، $1-p$) (باستخدام بديهية الاستمرارية).

الخطوة الثالثة: بعد ذلك سوف نستخدم بديهية الاستقلال، والذي يسمح الاختيار الحر للاحتمال p والبديل المحدد المختار، s. لنفترض أننا نعطى أرقام α وβ مع $1 > \alpha \geq \beta \geq 0$. نختار $p = \alpha - \beta$ و$s = (x^*, \beta / (1 - p); x_*, (1 - \beta / (1 - p))$ واستبدال هذه القيم في بديهية الاستقلال وهكذا، منذ $x^* \geq x_*$ نحصل على

$$(x^*, \alpha-\beta;\ x^*, \beta;\ x_*, 1-\alpha) \succcurlyeq (x_*, \alpha-\beta;\ x^*, \beta;\ x_*, 1-\alpha),$$

والتي يتم تبسيطها إلى

$$(x^*, \alpha;\ x_*, 1-\alpha) \succcurlyeq (x^*, \beta;\ x_*, 1-\beta). \qquad (1\text{-}5)$$

هذه نتيجة وسيطة مفيدة التي سوف تنطبق حتى عندما x^* وx_* ليسوا أفضل وأسوأ النتائج. لقد أظهرنا أساسا أنه إذا شكلنا آفاقا من نتيجتين، فإن زيادة احتمال الأفضل بينهما تجعل الاحتمال أكثر جاذبية.

الخطوة الرابعة: الآن نبين أن المنفعة تطابق ترتيب الأفضلية بينهما. افترض أن u (x) $\geq$ u (y)، ثم من الصيغة (1-5) يكون لدينا

$$(x^*, u(x);\ x_*, 1-u(x)) \succcurlyeq (x^*, u(y);\ x_*, 1-u(y)).$$

ولكن إذا نظرنا إلى ما سبق في كيفية تعريف u (x) وu (y)، فإننا نرى أن هذا يعادل

$$(x, 1) \succcurlyeq (y, 1).$$

الخطوة الخامسة: افترض الآن أن لدينا احتمال (x، α؛ y، $1-\alpha$): نريد أن نبين أن هذا له منفعة $\alpha u(x) + (1 - \alpha) u(y)$؛ وبعبارة أخرى، نحن نريد أن نعرض اللامبالاة بين (x، α، y، $1-\alpha$) و(x^*، $\alpha u(x) + (1 - \alpha) u(y)$؛ x_* 1 $- \alpha u(x) - (1 - \alpha) u(y)$) نقوم بذلك من خلال ملاحظة:

$$(x, 1) \succcurlyeq (x^*, u(x);\ x_*, 1 - u(x)),$$

ولهذا

$$(x, \alpha; y, (1-\alpha)) \succcurlyeq (x^*, \alpha u(x);\ x_*, \alpha - \alpha u(x);\ y, (1-\alpha)). \qquad (2\text{-}5)$$

ولكن نظرًا لأن لدينا أيضًا

$$(y, 1) \succcurlyeq (x^*, u(y);\ x_*, 1 - u(y)),$$

يمكننا أن نأخذ الاحتمال على الجانب الأيسر والحصول على ما يلي من بديهية الاستقلال

$$\begin{aligned}&(y, (1-a);\ x^*, au(x);\ x_*, a - au(x))\\ &\quad \succcurlyeq (x^*, (1-a)u(y);\ x_*, (1-a)(1-u(y));\ x^*, au(x);\\ &\qquad x_*, a - au(x)).\end{aligned}$$

الاحتمال على الجانب الأيمن يمكن تبسيطه إلى

$$(x^*, \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y); x_*, 1 - \alpha u(x) - (1-\alpha)u(y)).$$

ولهذا، يمكن تجميع الصيغة (2-5) و(1-5) من خلال الانتقالية للحصول على العلاقة:

$$\begin{aligned}&(x, \alpha; y, 1-\alpha)\\ &\quad \succcurlyeq (x^*, \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y);\ x_*, 1 - \alpha u(x) - (1-\alpha)u(y)).\end{aligned}$$

يمكننا تكرار كل هذا مع عكس ترتيب التفضيلات لإظهار

$$\begin{aligned}&(x^*, \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y);\ x_*, 1 - \alpha u(x) - (1-\alpha)u(y))\\ &\quad \succcurlyeq (x, \alpha;\ y, 1-\alpha),\end{aligned}$$

والذي يظهر أخيرًا اللامبالاة المطلوبة.

هناك عدد من الأمور التي يتعين علينا القيام بها لسد الثغرات هنا.

أولا، تثبت النتيجة دون أي قيود على وجود مجموعة محدودة من النتائج أو التوقعات

المحتملة. وهذا يتطلب منا أن نبدأ بمجموعة محدودة من الآفاق ثم نضيف مجموعة أخرى تقع خارج هذا النطاق (على الرغم من أنها أسوأ من النتيجة الأسوأ في المجموعة الأولى) وتجمع بين دالاتا المنفعة التي نولدها.

ثانيا، لم ندرج جميع مكونات الحجة التي نحتاجها في الخطوة الرابعة، مما يدل على أن عدم المساواة في المنفعة للنتائج يترجم إلى ترتيب الأفضلية. وعلينا أن نبين أن الشيء نفسه ينطبق على الاحتمالات، ونحن بحاجة أيضا إلى حجة "إذا وإذا فقط".

وفي الخطوة الخامسة أيضا، أثبتنا ما نريده من احتمال وجود بديلين اثنين فقط – نحتاج إلى توسيع نطاق هذا الأمر ليشمل الاحتمالات مع أي عدد من البدائل.

وأخيرا لم نتناول تفرد دالة المنفعة (حتى التحولات الخطية الإيجابية) – فلن تسمح لنا النظرية بذلك، على سبيل المثال، تربيع جميع قيم المنفعة. وهذا من شأنه أن يترك ترتيب النتائج الفردية دون تغيير، ولكننا سوف نفقد القدرة على الحصول على فائدة احتمال باعتباره مجموع الاحتمالات من نتائج المنفعة الفردية.

5-2-2 ما هو شكل دالة المنفعة؟

عندما تكون النتائج نقدية، فإن دالة المنفعة هي ببساطة دالة قيمة حقيقية محددة على الخط الحقيقي. ومن المفيد استخدام مصطلحات دالات محدبة ومقعرة. دالة المنفعة محدبة لها خاصية تزايد المنحدر (وصف آخر: فإنه يحتوي على مشتق ثاني غير سالب). طريقة أخرى لوصف دالة محدبة هو القول بأن خط مستقيم يصل بين نقطتين على الرسم البياني لمنحنى الدالة ولا يمكن أن يتجه دون الدالة. يمكن وضع هذا في شكل رياضي بالقول أن الدالة $u(\cdot)$ محدبة لأي p بين 0 و 1.

$$pu(x_1) + (1-p)u(x_2) \geq u(px_1 + (1-p)x_2).$$

الجانب الأيسر هو ارتفاع نقطة نسبة p - 1 على طول الخط المستقيم بين النقاط $(x_1, u(x_1))$ $(x_2, u(x_2))$ والجانب الأيمن هو النقطة على منحنى نفسه في القيمة x. ويوضح ذلك الشكل 5-5. هذه الخاصية من دالات محدبة يمكن تعميمها على أي عدد من

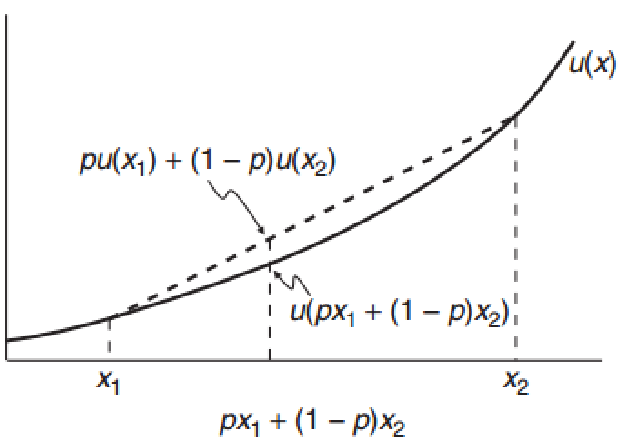
النقاط. لذلك، دالة محدبة لـ u لها الخصائص

$$\sum_{j=1}^{n} p_j u(x_j) \geq u\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right), \qquad (3\text{-}5)$$

في حال كان p_j غير سلبي و $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$

المنفعة المتوقعة هي أن دالة المنفعة المحدبة تدل على الإقبال على المخاطرة. إذا كان هناك احتمال الحصول على احتمالية p_1 من خلال تحقيق x_1 واحتمالية $(1 - p_1)$ من خلال تحقيق x_2 إذا تكون المنفعة المتوقعة $p_1u(x_1) + (1 - p_1)u(x_2)$ والتي نفضلها على (قيمتها أكبر من) المنفعة $u(p_1x_1 + (1 - p_1)x_2)$ والتي نحصل عليها من النتيجة المتوقعة.

وبشكل أعم، يمكننا القول أنه عندما تكون دالة المنفعة محدبة سيكون من الأفضل دائما اختيار احتمال ينطوي على عدم اليقين، $(x_1, p_1; x_2, p_2; \ldots ; x_n, p_n)$ بدلًا من أن يكون لدينا نتيجة متوقعة، $\sum p_j x_j$ مع حالة من اليقين. يمكننا رؤية ذلك من خلال عدم المساواة (3-5) حينما تكون المنفعة المتوقعة للاحتمال على الجانب الأيسر أكبر من المنفعة المتوقعة للنتيجة على الجانب الأيمن.



الشكل 5-5: إذا كان u (x) محدبا، يكون الخط المستقيم الذي يصل نقطتين على الرسم البياني u فوق الدالة u.

العكس صحيح لدالة منفعة مقعرة. الدالة المقعرة هي يكون فيها خط مستقيم يصل بين نقطتين على الرسم البياني لمنحنى الدالة والذي لا يكون أعلى الدالة، وهذا يعادل دالة انخفاض المنحدر. في هذه الحالة، وجود النتيجة المتوقعة $\sum p_j x_j$ مع حالة من اليقين هو دائما الأفضل لمواجهة مقامرة تشارك في احتمال غير مؤكد. وبعبارة أخرى، فإن وظيفة المنفعة المقعرة مثل الوظيفة المبينة في الشكل 5-4 تعني سلوكا مخالفا للمخاطر وهذا هو النمط المعتاد لوظائف المنفعة.

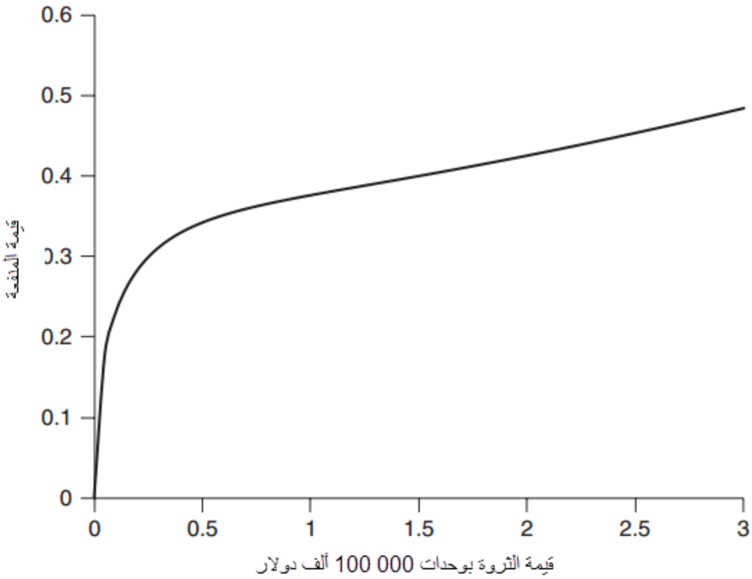
وبطبيعة الحال، يمكن أن يكون لدينا أيضا دالة منفعة محدبة في بعض المناطق ومقعرة مناطق أخرى. على سبيل المثال، لنفترض أن المنفعة لثروة ما x تقاس بوحدات 100,000 دولار هي

$$u_A(x) = \sqrt{x} - 0.9\log(x+1).$$

على الرغم من أنه ليس واضحا، فإن دالة المنفعة تبين أن تكون إيجابية للثروة الإيجابية: نرسم الشكل 5-6 لـ x في نطاق من 0 إلى 3. يمكننا أن نرى أن منحنى مقعر لـ x أدناه حول 1. في الواقع، على الرغم من صعوبة رؤية ذلك من خلال الرسم البياني، لكنه يصبح محدب للقيم أعلى 1. هذه دالة منفعة لها مشتق يقترب من الصفر كلما زادت قيمة x. إذا وضعنا مخطط بياني دالة المنفعة لقيم أعلى من x، يمكننا أن نرى أنه مقعر في الواقع (المشتق الثاني يصبح سلبيا ل $x \geq 8.163$). وبالتالي، فإن الدالة تتحرك من مقعر إلى محدب والعودة إلى مقعرة.

وبهذا النوع من دالة المنفعة يمكننا أن نتوقع سلوكا معتدلا للمخاطر فيما يتعلق بالثروة بين 100 ألف دولار و8163 ألف دولار والسلوك الذي يعزف عن المخاطرة عندما تكون مستويات الثروة أقل من 100000 دولار. يوضح المثال 5-3 أن هذا سيحدث بالفعل من خلال إظهار ذلك مع دالة المنفعة، يمكن أن يستعد الفرد ذاته على اختيار التأمين (وهو سلوك عزوف عن المخاطرة) وأيضا المشاركة اليانصيب للحصول على جائزة كبيرة (وهو سلوك إقبال على المخاطرة).

$$u'_A(x) = (1/2)x^{-0.5} - 0.9/(x+1)$$



الشكل 6-5: منحنى يظهر المنافع لقيم ثروة مختلفة، باستخدام الصيغة

$$u(x) = \sqrt{x} - 0.9\ln(1+x)$$

مثال عملي 5-3: التأمين واليانصيب يمكن أن يتوافقوا

لنفترض أن فرد مع دالة منفعة $u_A(x)$ لديه حاليا ثروة تقدر بـ 100000 دولار (تساوي1 = x). هناك مخاطرة قليلة صغير من حريق يتسبب في خسائر بقيمة 75,000 دولار من الممتلكات. احتمالية حدوث هذا العام المقبل هي 1/ 1000 وشركة التأمين تحصل على رسوم بقيمة 100 دولار للتأمين ضد هذه الخسارة. هناك أيضا فرصة لدخول اليانصيب حيث تكلف تذكرة واحدة 500 دولار، ولكن هناك واحد في ألف فرصة للفوز بجائزة بقيمة 500,500 دولار (أي نحصل على 500,000 دولار، وأيضا نسترجع ثمن سعر تذكرة). تبين أن الفرد سوف يأخذ ضمان التأمين وأيضا خوض اليانصيب، على الرغم من أن أي خيار لن يزيد الثروة المتوقعة.

الحل

فكر أولا في خيار التأمين. الخسارة المتوقعة تبلغ 50,000 دولار× (1/ 1000) = 75 دولار، لذلك، مع قسط يبلغ 100 دولار، وشركة التأمين تصنع الكثير من الأموال ومن منظور الثروة المتوقعة، يجب على الفرد ألا يأخذ خيار التأمين. الآن انظر في حساب المنفعة المتوقعة. المنفعة الحالية هي

$$u_A(1) = \sqrt{1} - 0.9\log(2) = 0.37617.$$

يمكن حساب المنفعة المتوقعة إذا أخذنا التأمين بعد دفع قسط التأمين:

$$u_A(1 - 0.001) = \sqrt{1 - 0.001} - 0.9\log(2 - 0.001) = 0.37612.$$

هذا أقل من المنفعة المتوقعة إذا لم نختار التأمين، ولذلك خيار التأمين يبدو منطقيًا.

الآن ننظر في اختيار اليانصيب. عدم شراء تذكرة اليانصيب يترك لنا فائدة حالية من 0.37617. إذا اشترينا التذكرة سيكون لدينا 0.001 احتمال الفوز بـ 500000 دولار واحتمالية 0.999 لخسارة 500 $. هذا يعطي فائدة متوقعة من

$$\begin{aligned}
&0.001u(6) + 0.999u(0.99500)\\
&\quad = 0.001 \times (\sqrt{6} - 0.9\log(7)) + 0.999 \times (\sqrt{0.995} - 0.9\log(1.995))\\
&\quad = 0.37624.
\end{aligned}$$

لذلك، المشاركة في اليانصيب يعطي فائدة متوقعة أعلى بقليل. الشخص نفسه يعزف عن المخاطرة بشأن الخسائر (يكفي لشراء خدمة تأمين مكلفة نوعا ما)، ولكن المقبل على المخاطرة يسعى إلى تحقيق مكاسب بالشكل الكافي للمشاركة في اليانصيب.

إذا كانت دالة المنفعة خطية (رسم بياني مستقيم) فلا يوجد عزوف عن المخاطرة ولا إقبال على للمخاطرة، ويمكننا القول إن صانع القرار محايد من حيث المخاطر. ليس من الصعب أن نرى أن تعظيم توقع الدالة في الشكل $u(x) = a + bx$ له نفس الحل الذي يزيد من توقع x (حيث $b > 0$)، لذلك صانع القرار المحايد للمخاطرة سيعظم الربح المتوقع فقط.

عندما يكون هناك عزوف عن المخاطرة، فإن درجة عزوف صانع القرار عن المخاطرة تعتمد على انحناء دالة المنفعة. إذا كانت دالة المنفعة تكاد تكون خطية، فإن مقدار العزوف عن المخاطرة سيكون ضئيلا. لتحديد درجة العزوف عن المخاطرة نحن بحاجة إلى النظر في $u''(x)$ وهو مشتق الثاني من $u(x)$، أي المعدل الذي يتغير عليه درجة الميل u. مع العزوف عن المخاطرة، يتناقص ميل دالة المنفعة ولهذا يكون المشتق الثاني سلبي. ومن الشائع تحديد حجم العزوف عن المخاطرة باستخدام مقياس أرو–برات للعزوف المطلق عن المخاطر *of absolute risk aversion Arrow–Pratt measure*، الذي يعطى من خلال

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

نكتب $u'(x)$ لمشتقة u وتقسيم ذلك من خلال تطبيع $A(x)$. مع هذا التطبيع، والتحجيم u من قبل ثابت لن يؤثر على العزوف المطلق للمخاطرة.

على سبيل المثال، النظر في دالة المنفعة اللوغاريتمية المعرفة بواسطة $u(x) = \log(x)$.

ثم $u'(x) = 1/x$ و $u''(x) = -1/x^2$. ولهذا، مقياس أرو–برات للعزوف المطلق عن المخاطر سيكون

$$A(x) = \frac{(1/x^2)}{(1/x)} = \frac{1}{x}.$$

ينخفض ذلك نحو الصفر كلما أصبحت x أكبر. فكرة أن الأفراد أقل عزوف عن المخاطرة حيث يصبح المستوى العام للثروة أكبر يتم تحديده من خلال دالة المنفية اللوغاريتمية.

6-2-5 * المنفعة المتوقعة عندما تكون الاحتمالات غير موضوعية

تطوير نمط فون نيومان – مورجنسترن لنظرية الفائدة المتوقعة أساسية لفهمنا لاتخاذ القرار في ظل حالات عدم اليقين، ولكنها، بطريقة ما، تطورت بشكل غير متوازن. الافتراض هو أن المنافع غير معروفة (يتم استخلاصها من الخيارات التي يتم اتخاذها بين الاحتمالات) ولكن هذه الاحتمالات معروفة على وجه التحديد.

كما أشرنا سابقا، غالبا ما تتضمن القرارات خيارات تتأثر بالأحداث التي لا يمكن أن نتحكم فيها، بالإضافة إلى ضرورة معاملة فكرة الاحتمالية بعناية. ومن المثير للاهتمام أن نسأل كيف يمكن لصانع القرار أن يتصرف إذا لم يكن مستعد لتحديد احتمالات ثابتة لمختلف الأحداث. بعد كل شيء، في الحياة اليومية نتخذ قرارات بشكل روتيني دون توقف لتسأل عن الاحتمالات. لذلك، إذا اتخذ مدير قرارا دون التفكير بوعي في الاحتمالات، ولكن في الوقت نفسه يتخذ إجراء عقلاني تماما ومدروس حول تلك القرارات، يمكن أن نستنتج أن هناك إطار قرار ثابت لا يستخدم الاحتمالات؟

الجواب على هذا السؤال هو "لا". ذكر ليونارد جيمي سافاج في عمل مهم تم نشره في عام 1954، يظهر أنه إذا كانت الخيارات تفي ببعض البديهيات المنطقية إذا يجب على صانع القرار التصرف كما لو كان هو أو هي يعين الاحتمالية الذاتية لكل من النتائج المحتملة التي يمكن أن تنشأ عن اختيار التصرف، فضلا عن دالة المنفعة على تلك النتائج، ثم يقرر بين الخيارات على أساس تعظيم المنفعة المتوقعة كما تحددها الاحتمالات غير الموضوعية.

وضع كل هذا في نظرية واحدة يتطلب قدرا كبيرا من الدقة. في نموذج سافاج فإن صانع القرار لديه خيار بين مختلف الإجراءات وهذه الإجراءات سوف تحدد النتائج التي تتفق مع الحالات. من الناحية النظرية، نضع قائمة لجميع الحالات الممكنة كما مجموعة S ويتم التعامل مع الإجراء كدالة تأخذ الحالات ضمن الاعتبار، حيث X هو مجموعة من النتائج. يجب على مجموعة الحالات أن تحل كل عدم اليقين، بحيث يحدد الإجراء ببساطة ما هي النتيجة التي تحدث في كل حالة من الحالات المحتملة. هذه الطريقة في التفكير لا تتناسب بشكل جيد مع إطار شجرة القرار، حيث نتصور اتخاذ القرار أولا يليه عدم اليقين يتم حلها لتؤدي إلى نتيجة معينة. في بعض النواحي، تكون مثل عكس هذه العملية: نفكر في عدم اليقين الذي يتم حله في حالة واحدة ثم خريطة القرارات لكل حالة تؤدي إلى نتيجة. إن طريقتي التفكير ليستا مختلفتين حقا. في كل نهج اتخاذ قرار وحالة الطبيعة معا تنتج نتيجة. السبب في المضي قدما في فكرة أكثر تعقيدا من الإجراءات كخرائط من

الحالات إلى النتائج هو أننا سوف نحتاج إلى إجراء مقارنات بين جميع الإجراءات الممكنة. وهذا يعني أننا نحتاج إلى أن نكون قادرين على تصور إجراء يحدد نتائج معينة لكل حالة ممكنة من الطبيعة، دون أن يقيد بأي شكل من الأشكال النتائج التي تتسق مع الحالة. تخيل مرة واحدة مثل هذا الإجراء، سنكون بحاجة إذًا إلى مقارنة أي عمل آخر متصور والإجابة على السؤال: ما الذي سيكون مفضل؟

للحصول على البديهيات، سنصف ثلاثة منهم (الإجمالي سبعة).

البديهية الأولى P1

تقر بوجود أمر ضعيف في الإجراءات. لهذا، للإجراءات $f : S \rightarrow X$ و$g : S \rightarrow X$، $f \leq g$ أو $g \leq f$ لكلاهما، وهذه العلاقة انتقالية.

البديهية الثانية P2

تظهر هذه البديهية أنه بمقارنة الإجراءات نتهم فقط بالحالات التي يكون ينتج فيها عن الإجراءين نتائج مختلفة. ولهذا في حال كانت $f \leq g$ وهناك مجموعة من $A \subset S$ مع $f(s) = g(s)$ لكل الحالات s في A، ثم التفضيل بين f وg يحدده ما يحدث لـ $s \notin A$.

بشكل أكثر دقة، يمكننا القول أن في حال $f'(s) = f(s)$

لـ $f(s) = g(s) = h(s)$ و $s \notin A$ لـ $g'(s) = g(s)$ و $s \notin A$

لـ

$$s \in A, \quad \text{ثم} \quad f' \succcurlyeq g'.$$

قبل إعطاء البديهية الثالثة نحن بحاجة إلى اثنين من التصفيات. علينا أولا أن نكون قادرين على إجراء مقارنة بين النتائج بدلا من الإجراءات. هذا يعد بسيط بما فيه الكفاية، نقول أنه بالنسبة للنتائج $x, y \in X, x \succcurlyeq y$ إذا كان الإجراء الذي يأخذ كل حالة إلى x مفضل للعمل الذي يأخذ كل حالة إلى y. إذا كنا نعلم أننا سوف ننتهي بـ x تحت بعض الإجراءات ونعلم أننا سوف ننتهي بـ y في إطار العمل g، فإن ما يحدث مع الحالات لم يعد مهمًا.

ثانيا نحن بحاجة إلى تحديد خاصية مجموعة من الحالات (أي حدث) $S \supset A$ الذي يقال أن هناك احتمال لا يكاد يذكر أن واحدة من الحالات في A ستحدث. الطريقة الأكثر طبيعية لوصف هذا هو القول أن احتمال A أكبر من الصفر، ولكن مع نظرية سافاج ليس لدينا احتمالات للتعامل معها. وبدلا من ذلك نقول إن الحدث A لاغي إذا كان أي من هذين الفعل متساويين. $g \succcurlyeq f$ و $f \succcurlyeq g$ كلا) . وبعبارة أخرى، ما يحدث للأحداث لا يشكل فارقًا في تفضيلاتنا.

البديهية الثالثة P3

تنص على أنه إذا كانت النتيجة x مفضلة على النتيجة y، وأن الإجراءين f وg يختلفان فقط على مجموعة من الحالات A التي لا تكون خالية، وعلاوة على ذلك، تنتج A وx f و g y، فيجب أن تكون f مفضلة عن g. في الواقع، تنص البديهية على أكثر من ذلك، لأنها تنص أيضًا على أن عكس هذه العملية صحيحًا (وبالمثل نحن بحاجة إلى أنه إذا كان x مفضل عن y ثم f مفضلة عن g). رسميا، يمكننا كتابة هذا على النحو التالي. بالنسبة إلى الحدث A الذي لا يكون خاليا، إذا كان

$$f(s) = x \text{ ل } s \in A, g(s) = y \text{ ل } s \in A, \text{ و } f(s) = g(s) = h(s) \text{ ل } s \notin A, \text{ اذا}$$

إذًا

$$f \succcurlyeq g \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad x \succcurlyeq y$$

عند هذه النقطة قد تشعر جيدا أننا قد قمنا بمد عقولنا بما فيه الكفاية دون الحاجة للنظر إلى مزيد من التفاصيل. البديهيات الأربعة المتبقية هي مجموعة مختلطة. وتتعلق البديهية P4 بالوضع الذي تفضل فيه النتيجة x بشكل صارم على y، والنتيجة z مفضلة تماما عن w. وتنص العبارات البديهية على أنه إذا كان الإجراء الذي يأتي بـ x على A وy خلاف لذلك مفضل على الإجراء الذي يأتي بـ x على B وy خلاف ذلك، فإن الإجراء الذي يأتي بـ z على A وw خلاف ذلك يفضل الإجراء الذي يأتي بـ z على B وw خلاف ذلك.

هذا هو تقريبا نفس القول بأن A تحدث في كثير من الأحيان عن B، ولكن بالطبع لا يمكننا استخدام هذه المنطق لأننا لا نملك فكرة محددة عن الاحتمال. تشير البديهية P5 ببساطة إلى أنه يجب أن يكون هناك عملين لا يعادلان بعضهما البعض. وترتبط البديهية P6 بالاستمرارية وتعني أنه يمكننا دائما تقسيم مجموعة من الحالات S بدقة بحيث يكون التغيير في مكون واحد للاحتمال يترك المفضل دون تغيير.

يعد هذا الافتراض قويًا، ويمكن أن تعمل فقط إذا كان هناك مساحة للحالات بشكل لا نهائي S، وكل حالة على حدة في s في S لا يعد قائمًا. في كثير من الأحيان لا ينطبق ذلك على المشاكل ذات الاهتمام، ولكن يمكننا أن نجعل ذلك صحيحا من خلال توسيع نطاق الحالات التي لدينا للنظر في مجموعة لا حصر لها من الأحداث الأخرى (ليست ذات صلة) التي تحدث بالتوازي مع الحالات الأصلية لدينا. تكون البديهية P7 مطلوبة فقط عندما تكون مجموعة النتائج X لانهائية، ولن نناقش ذلك بالتفصيل.

لنقر نظرية سافاج Savage علينا أن نفهم المقصود بتعيين الاحتمالات لجميع الحالات في S. وهذا يتطلب قياس μ الذي يعين احتمال لكل حدث $A \subset S$. يجب أن يكون القياس المضاف ($\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ إذا كان A وB منفصلين)، كما يجب أن يكون إيجابي(نظرية non-atomic) بمعنى أنه إذا كان هناك حدث A مع μ (A)> 0 نختار أي r، وأي عدد بين 0 وμ (A)، ثم يمكننا العثور على مجموعة فرعية من $B \subset A$ مع r = μ (B). بمجرد أن يكون لدينا مقياس μ على الحالات S ودالة عددية محددة على الحالات، يمكننا تقييم توقعات هذه الدالة عن طريق كتابة تكامل فيما يتعلق بـ μ. وهكذا، الآن نحن على استعداد لتأكيد النظرية.

نظرية 5-2: (سافاج Savage) عندما يكون X هو محدود، تكون العلاقة $\succcurlyeq$ تتسق مع البديهية P1 إلى P6 إذا وإذا فقط احتمالية مضافة محددة إيجابية لقياس μ على S ودالة غير ثابتة u (x)، ل $x \in X$ بحيث، لأي إجراءات f وg

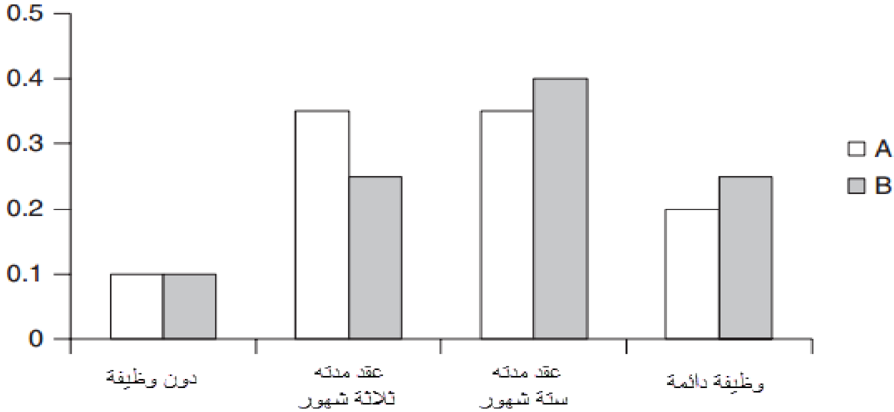
$$f \succcurlyeq g \quad \text{إذا وإذا فقط} \quad \int_S u(f(s))d\mu(s) \geq \int_S u(g(s))d\mu(s).$$

وعلاوة على ذلك، في هذه الحالة μ فريدة من نوعها وu هي فريدة من نوعها تصل إلى التحول الخطي إيجابي.

3-5 الهيمنة العشوائية والمخاطر

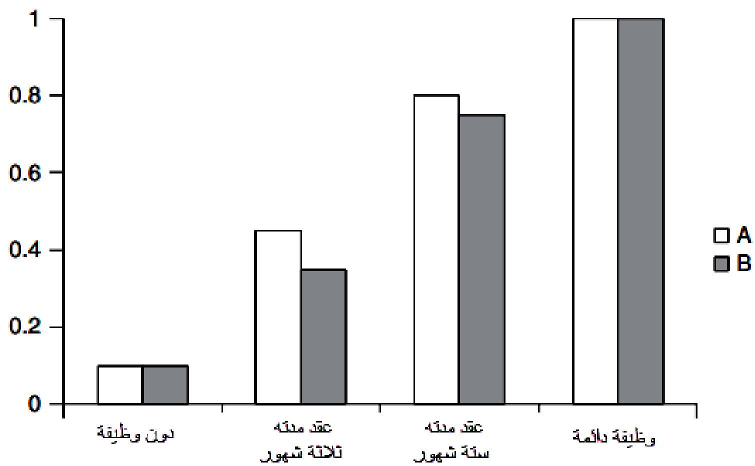
لنفترض أن هناك احتمال له n من النتائج المحتملة ونقوم بترتيب هذه الاحتمالات من الأسوأ x_1 إلى x_n. يمكننا أن نفعل ذلك حتى لو لم تكن النتائج لها قيم نقدية. يمكننا بعد ذلك رسم موجز للمخاطر واستخدام هذا لمقارنة اثنين من إمكانات مختلفة. على سبيل المثال، لنفترض أن راج وهو موظف له عقد قصير الأجل لمدة ستة شهور، وكان راج لا يفعل شيئا، ويعتقد أن هناك احتمالية نسبتها 10٪ ألا يتم تجديد العقد في نهاية فترة العقد، وهناك احتمالية نسبتها 35٪ لتجديد العقد لمدة ثلاثة أشهر أخرى، واحتمالية نسبتها 35٪ لتجديد العقد لمدة ستة أشهر أخرى، واحتمالية نسبتها 20٪ لتثبيته في الوظيفة. ما يحدث سيعتمد على كل من أداء راج وأداء النشاط التجاري للشركة. لا يزال هناك شهرين متبقين في عقد راج ، لكنه يعتقد أن لديه بعض المهارات التي من شأنها أن تساعد في الحصول على تثبيته والتي يمكن التغاضي عنها في العملية العادية، حتى أنه يفكر في الذهاب إلى رئيسه ومناقشته في تثبيته. يعتقد راج أن هذا سيزيد من فرصة تثبيته إلى 25٪، وفي هذه الحالة احتمالات النتائج الأخرى هي 10٪ بألا يتم تجديد العقد؛ و25٪ لتجديد لمدة ثلاثة أشهر؛ و40٪ لتجديد العقد لمدة ستة أشهر إضافية. ماذا ينبغي أن يفعل راج؟ يظهر الشكل 5-7 ملخصات المخاطر لهذين الخيارين.

ليس من الواضح كيفية إجراء مقارنة بين الإجراءات A = "عدم فعل شيء" وB = "طلب وظيفة دائمة" من هذه المخاطر وحدها. التعقيدات هنا تتمثل في أننا لم نحدد مدى قيمة تعيين دائم أكثر من تعيين ستة أشهر. وعلينا أيضا أن ننظر في علاقة تعيين لمدة ستة أشهر إلى ثلاثة أشهر؛ كل ما نعرفه هو أن هناك ترتيب الأفضلية: دائم هو الأفضل، ثم ستة أشهر أفضل من ثلاثة أشهر وفقدان العمل هو الأسوأ. وأفضل طريقة هنا هي رسم موجز للمخاطر التراكمية، كما هو مبين في الشكل 5-8.



الشكل 5-7: المخاطر للخيارين المتاحين لـ راج.

وهنا يتضح أن الإجراء (A) ينطوي على خطر تراكمي (نتيجة أسوأ) يكون دائما أعلى أو يساوي الخطر التراكمي للعمل (B)؛ هناك نوع من الهيمنة بين الاثنين. في وقت لاحق سوف نبين أن هذا يعني أنه من الأفضل لراج اختيار الخيار B والسعي للحصول على تعيين دائم، بغض النظر عن قيم المنفعة التي يضعها على نتائج مختلفة. ولكن علينا أولا أن نحدد بدقة ما المقصود بالهيمنة العشوائية.



الشكل 5-8: المخاطر التراكمية للخيارين المتاحين لـ راج.

وبالنظر إلى اثنين من الإمكانات q وr يمكننا أن نأخذ مجموعة مشتركة من جميع النتائج الممكنة وترتيبهم حسب الزيادة في القيمة أو المنفعة. لاحظ أنه لا يوجد فقدان للعمومية في مقارنة احتمالين بافتراض أن لديهم نفس مجموعة من النتائج المحتملة، وإذا كان أحد التوقعات لا تتضمن واحدة من النتائج، سنقوم بتعيين احتمال صفر لهذه النتيجة.

نقول أن q تهمين عشوائيًا على r إذا أخذنا مجموعة من النتائج مجتمعة مع الاحتمالات q_i لـ q وr_i لـ r (وحيث q_i وr_i ترتبط بنفس النتيجة x_i)، التفاوتات التالية تعد قائمة مع وجود واحدة على الأقل من هذه التفاوتات. كل من هذه النتائج تتسق مع نتيجة m من خلال كافة النتائج الجيدة إلى أفضلها. وبالتالي، احتمال q يعطي احتمالات أعلى إلى x_i العالي التي هي الأفضل.

$$\sum_{j=m}^{n} q_j \geq \sum_{j=m}^{n} r_j \text{ for } m = 2, 3, \ldots, n \qquad (4\text{-}5)$$

هناك تعريف بديل يستخدم حقيقة أن مجموع كل قيم q_j هو 1 (حيث أنها احتمالات). باستخدام هذا، نرى أن عدم المساواة (5.4) يمكن إعادة كتابتها كالتالي

$$1 - \sum_{j=1}^{m-1} q_j \geq 1 - \sum_{j=1}^{m-1} r_j \text{ for } m = 2, 3, \ldots, n.$$

يمكن إعادة ترتيب هذا (من خلال مبادلة المجموع إلى الجانب الآخر مع عدم المساواة وإعداد $l = m - 1$) لتصبح

$$\sum_{j=1}^{l} r_j \geq \sum_{j=1}^{l} q_j \text{ for } l = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (5\text{-}5)$$

وهكذا، قمنا بتحويل تعبير ينطوي على احتمالات "أفضل من شيء" في تعبير ينطوي على "أسوأ من شيء"، وهذا يعني تغيير في علامة عدم المساواة. هذا التعريف البديل للهيمنة العشوائية مشروط الآن بالمخاطر المتراكمة. يمكننا أن نرى من الشكل 5-8 أنه في حالة اختيار راج بين الإجراءين (A)و(B)، فإن الاحتمالات التراكمية لـ (A) أكبر من تلك

الخاصة لـ (B)، وهذا يعني أن (B) يهيمن عشوائيا على (A).

تعمل هذه الطريقة عندما لا تكون هناك قيم نقدية مرتبطة بالنتائج، ولكن بالطبع يمكننا أيضا تطبيق الطريقة نفسها عندما تكون هناك قيم بالدولار. عندما تكون النتائج عبارة عن قيم، يمكننا أن نفكر في احتمال q كما يعادل متغير عشوائي منفصل، X ، وأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$. إذا أخذنا إمكانية r بشكل مساوي لمتغير عشوائيY ، إذن عدم المساواة (5-5) يمكن كتابتها كالتالي

$$\Pr(Y \leq x_l) \geq \Pr(X \leq x_l), \quad \text{for } l = 1, 2, \ldots, n-1,$$

والتي تحول الهيمنة العشوائية إلى بيان دالة التوزيع التراكمي لمتغيرين عشوائين. بشكل عام، يمكننا القول أن متغيرين عشوائين X وY:

تهيمن X عشوائيًا على Y في حال دالة التوزيع التراكمي F_x وF_y لـ X وY تتسق مع $F_X(x) \leq F_Y(x)$ لكل x، وتلك عدم المساواة ترتبط بواحد على الأقل منx.

لاحظ أنه في بعض الأحيان ينسى الناس الطريقة التي تتأثر بها عدم المساواة أو التفاوت هنا: هو المتغير العشوائي (أو الإمكان) مع توزيع تراكمي أقل والذي يسيطر عشوائيا على الآخر. ولا يحتاج تعريف الهيمنة العشوائية هذا إلى متغيرات عشوائية التي يجب تحديدها بناء على مجرد مجموعة محدودة من النتائج، ويمكننا تطبيقها بشكل جيد على حد سواء عندما يكون X وY متغيران عشوائيان بدلا من متغيرات عشوائية منفصلة.

نقطة أخرى جديرة بالملاحظة أنه إذا كان $X = Y + k$ لبعض k الثابتة> 0 إذاً

$$F_X(x) = \Pr(Y + k \leq x) = F_Y(x - k) \leq F_Y(x),$$

مثال عملي 5-4: التحقق من الهيمنة العشوائية

تحقق ما إذا كان هناك هيمنة عشوائية بين الإمكانات A وB المعرفين كالتالي:

$$A = (\$100, 0.2; \$160, 0.2, \$200, 0.6),$$

$$B = (\$100, 0.3; \$120, 0.1; \$180, 0.1; \$200, 0.5).$$

الحل

نبدأ بتشكيل مجموعة كاملة من مبالغ مالية تحدث في أي من الاحتمالين التاليين: {$ 100، $ 120، $ 160، $ 180، $ 200} . من خلال صفوف الجدول أعلاه، احتمال الحصول على هذا المبلغ أو أقل من ذلك. ويظهر ذلك في الجدول 5-2 الذي يوفر لكل احتمال مبالغ الشكل في شكل عدم مساواة أو تفاوت (5-5). كل عنصر في العمود الذي يعرض مجموع A هو أقل من أو يساوي العنصر المقابل في المجموع ل B، ومن ثم يهمين A عشوائيا على إمكانية B. (لاحظ أن هناك نهجا بديلا وهو النظر في مجموع احتمالات وتلقي أكثر من مبلغ معين واستخدام عدم المساواة أو التفاوت (5-4)).

الجدول 5-2: مقارنة بين إمكانات A وB.

المبلغ بالدولار	احتمالات A	المجموع لـ A	احتمالاتB	المجموع لـ B
$100	0.2	0.2	0.3	0.3
$120	0	0.2	0.1	0.4
$160	0.2	0.4	0	0.4
$180	0	0.4	0.1	0.5
$200	0.6	1.0	0.5	1.0

النتيجة الرئيسة هي أنه في ظل نظرية المنافع المتوقعة، إذا كان احتمال أن يهيمن q عشوائيًا على احتمال r، إذا q سيكون المفضل على r بغض النظر عن الفائدة المعطاة لكل نتيجة منفردة.

والشرط الوحيد هو أن المنافع تتزايد ، لذا $u(x_1) < u(x_2) <\ldots u(x_n)$. وفي الواقع، فإن هذا الأثر يعمل أيضا في الاتجاه الآخر. إذا كانت المنفعة المتوقعة من احتمال أن يكون q أكبر من المنفعة المتوقعة لاحتمال r لكل خيار ممكن من المنفعة المتوقعة المتزايدة (التي لها $u(x_1) < u(x_2) <\ldots u(x_n)$.) إذاً q تهيمن عشوائيا على r. وسوف نوضح كيفية إثبات هذه النتيجة في القسم الفرعي التالي. في بعض الأحيان يتم استخدام هذه الخاصية (من الهيمنة لأي دالة منفعة متزايدة) كتعريف للهيمنة العشوائية.

وإلى جانب إثبات هذه النتائج، يقدم القسم التالي أيضا نوع ثان من الهيمنة العشوائية

– يسمى الهيمنة العشوائية الثانية. ويمكن تعريف ذلك بالقول إن المتغير العشوائي X من الدرجة الثانية يسيطر عشوائيا على Y إذا كان $E(u(X)) \geq E(u(y))$ لكل دالة فائدة مقعرة متزايدة لـ u (أي عندما يكون صانع القرار غير مقبل على المخاطرة). وكما سنبين لاحقا، فإن الشرط لتحقيق الهيمنة العشوائية الثانية هو أضعف من تحقيق الهيمنة العشوائية ('الدرجة الأولى'). بدلا من الحاجة إلى $F_y(x) \geq F_X(x)$ لكل x، نحن بحاجة

$$\int_a^x F_X(z)dz \leq \int_a^x F_Y(z)dz, \text{ for every} x,$$

حيث a هو الحد الأدنى للتوزيع. لذلك نقارن تكاملات دوال التوزيع التراكمي بدلا من دوال التوزيع التراكمي نفسها.

5-3-1 المزيد من التفاصيل حول الهيمنة العشوائية

سنعمل مع المتغيرات العشوائية بدلا من الإمكانات. ثم ذكر النتيجة كما يلي

نظرية 5-3: للمتغيرات العشوائية X وY، كلًا منهم يحمل قيمة في نطاق لا نهائي $[a, b]$ شرط الهيمنة العشوائية سيكون:

$$F_X(x) \leq F_Y(x) \text{ for all } x \in [a, b],$$

يكون قائم إذا وإذا فقط

$$E(u(X)) \geq E(u(Y))$$

لكل الدوال المتزايدة لـ u

الدليل

سوف ننتقل إلى المتغير العشوائي المستمر، حيث تكون أسرع طريقة لإثبات هذه النتيجة من خلال استخدام التكامل الجزئي، مثال نستخدم حقيقة أن

$$\int_a^b g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)dx.$$

وبالتالي، فإننا نفترض أن مشتق u موجود وهناك كثافات محددة F_x وF_y. والنتيجة تكون عمومية، ويمكن تمديد الأدلة التوضيحية التي نقدمها إلى هذه الحالات الأخرى (على سبيل المثال عندما تكون X وY منفصلتين). باستخدام التكامل من خلال الأجزاء التي لدينا

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_a^b u(x) f_X(x) dx - \int_a^b u(x) f_Y(x) dx \\ &= \int_a^b u(x)(f_X(x) - f_Y(x)) dx \\ &= [u(x)(F_X(x) - F_Y(x))]_a^b - \int_a^b u'(x)(F_X(x) - F_Y(x)) dx \\ &= -\int_a^b u'(x)(F_X(x) - F_Y(x)) dx. \end{aligned} \qquad (6\text{-}5)$$

استخدمنا هنا حقيقة أن $F_x(b)= F_y(b) =1$ و $F_x(a) =F_y (a) = 0$.

الآن افترض أن $F_X(x) \leq F_Y(x)$ على مدار النطاق $[a, b]$ و $u'(x) \geq 0.$

ثم التكامل في المعادلة (6-5) تكون غير سلبية كما هو الحال مع $E(u(X)) \geq E(u(Y)).$

لكي نظهر ما نريده في الاتجاه الآخر، نفترض أن $F_X(c) > F_Y(c).$ بالاستمرار بهذا الافتراض بأن الدوال موجودة، فإن دوال التوزيع التراكمي تتواجد أيضًا، ولهذا سيكون هناك نطاق صغير $c - \delta$ to $c + \delta$، فيه تكون F_x أكبر من F_y. على وجه التحديد نفترض أن $F_X - F_Y > \varepsilon > 0$ على هذا النطاق. الآن ضع في اعتبارك دالة المنفعة المعرفة لكي تكون $u'(x) = \varepsilon/(b - a)$ مستثناه من النطاق $c - \delta$ إلى $c + \delta$ حيث تكون $u'(x)$ $= 1/\delta$. بعبارة أخرى، دالة المنفعة تكون مستقرة في الأغلب حينما تكون Fx أكبر من Fy حيث ترتفع دالة المنفعة بقوة. إذًا

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_a^b u'(x)(F_Y(x) - F_X(x)) dx \\ &\leq \int_a^{c-\delta} u'(x) dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} u'(x)(-\varepsilon) dx + \int_{c+\delta}^b u'(x) dx \\ &\leq \varepsilon - (2\delta)\frac{\varepsilon}{\delta} < 0. \end{aligned}$$

وهكذا، فقد أظهرنا أنه كلما كان هناك نقطة تكون فيها Fx أكبر من Fy، يمكننا أن نجد دالة المنفعة التي تجعل Y مفضلة عن X.

الآن ننتقل إلى النتيجة الثانية للهيمنة العشوائية التي توازي نظرية 5-3 ولكنها تنطبق على دالة المنفعة المقعرة. تماما كما في نظرية 5-3 ، وسنقدم نسخة مستمرة منها، ولكن تكون النتيجة صحيحة أيضا لمتغير عشوائي منفصل.

النظرية 5-4: بالنسبة للمتغيرين العشوائيين X وY، فكلاهما يحملان قيم في نطاق محدود [a، b]، حالة الهيمنة العشوائية الثانية تكون:

$$\int_a^x F_X(z)dz \leq \int_a^x F_Y(z)dz \text{ for all } x \in [a, b], \qquad (7\text{-}5)$$

تكون قائمة إذا وإذا فقط

$$E(u(X)) \geq E(u(Y))$$

لجميع دوال المنفعة المقعرة المتزايدة u

الدليل

سوف نستخدم التكامل الجزئي مرة أخرى لإثبات هذه النتيجة. نكتب F (x) ~ لتكامل F. ولهذا

$$\tilde{F}_X(x) = \int_a^x F_X(z)dz, \text{ and} \tilde{F}_Y(x) = \int_a^x F_Y(z)dz.$$

ثم، التكامل الجزئي للمعادلة (5-6) يعطي:

$$E(u(X)) - E(u(Y)) = \int_a^b u'(x)(F_Y(x) - F_X(x))dx$$

$$= \left[u'(x)(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))\right]_a^b - \int_a^b u''(x)(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))dx.$$

$$\tilde{F}_X(a) = \tilde{F}_Y(a) = 0,$$

$$E(u(X)) - E(u(Y)) = u'(b)(\tilde{F}_Y(b) - \tilde{F}_X(b)) - \int_a^b u''(x)(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))dx \qquad (8\text{-}5)$$

$\tilde{F}_Y(x) \geq \tilde{F}_X(x) \qquad u''(x) < 0 \qquad x \in [a, b] \qquad (b) \geq 0,$
$E(u(X)) \geq E(u(Y)).$

لإثبات النتيجة في الاتجاه الآخر، نفترض أن $\tilde{F}_X(c) > \tilde{F}_Y(c)$ على C. ثم يمكننا إيجاد $\varepsilon, \delta > 0$ مع $\tilde{F}_X(x) - \tilde{F}_Y(x) > \varepsilon$ $x \in (c - \delta, c + \delta)$. ، الآن قم ببناء دالة المنفعة u مع

$$u(x) = x, \text{ for } a \leq x < c - \delta,$$
$$u(x) = x - (x - c + \delta)^2/(4\delta), \text{ for } c - \delta \leq x < c + \delta,$$
$$u(x) = c, \text{ for } c + \delta \leq x \leq b.$$

مع هذا الاختيار لـ u يكون المشتق مستمر، وله

$$u'(x) = 1 \text{ لـ } x \leq c - \delta, u'(x) = 0 \text{ لـ } x \geq c + \delta \text{ و } u'$$

برسم خطي منخفض من 1 إلى 0 في النطاق $(c - \delta, c + \delta)$. ولهذا، يكون ”u سلبي على $(c - \delta, c + \delta)$ وصفر خارج النطاق.

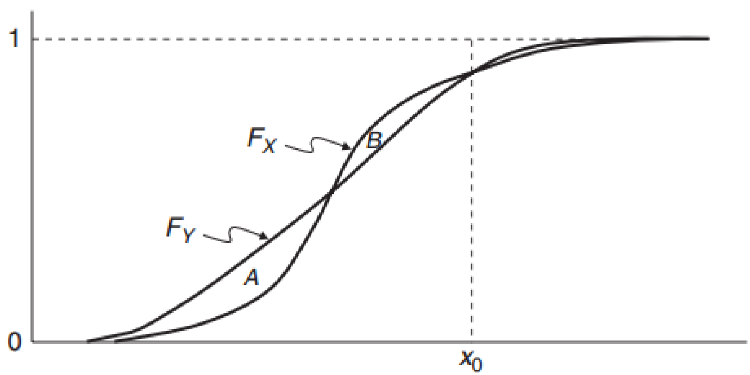
ولهذا، بما أن u’(b) =0 يكون لدينا من المعادلة (5-8).

$$\begin{aligned} E(u(X)) - E(u(Y)) &= \int_{c-\delta}^{c+\delta} (-u''(x))(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_X(x))dx \\ &\leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} (-u''(x))(-\varepsilon)dx \\ &= \varepsilon(u'(c + \delta) - u'(c - \delta)) \\ &= -\varepsilon \end{aligned}$$

والمتغير العشوائي y له منفعة متوقعة أعلى من X.

إذا كان X المهين الثاني عشوائيًا على Y، إذًا الشرط في (5-7) يعني أن Fx يبدأ بكونه أقل Fy. بالنسبة للهيمنة العشوائية العادية (التي تسمى أحيانا الهيمنة العشوائية الأولى)، يظل Fx أقل من Fy. ولكن مع الهيمنة العشوائية الثانية، يمكن أن يصبح Fx أعلى من Fy،

بشرط أن يبقى التكامل جزءا لا يتجزأ من Fy. وبعبارة أخرى، المنطقة تحت الرسم البياني من Fx تصل إلى نقطة x fأقل من المنطقة تحت الرسم البياني لـ Fy حتى نفس النقطة x. ويمكن النظر إلى هذا على أنه بيان حول ما يحدث لنطاق المنطقة بين الرسمين من Fx وفي Fy ويتضح الوضع في الشكل 5-9. في هذا الرسم البياني، المنطقة المظللة A أكبر من المنطقة المظللة (B). ليس من الصعب أن نرى أن $A - B$ تساوي $\bar{F}_Y(x) - \bar{F}_X(x)$ = x (نقطة التقاطع الثانية) وأكبر من ذلك بالنسبة إلى x على جانبي x_0. وهكذا، مع دالة التوزيع التراكمي المبينة في الرسم التخطيطي ، المتغير العشوائي X الترتيب الثاني X يهيمن عشوائيا Y.

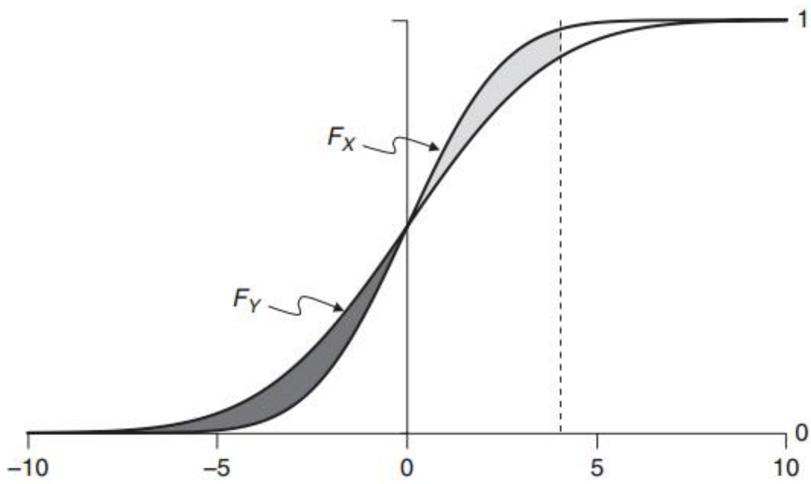


الشكل 5-9: التوزيع التراكمي لـ X المهيمن الثاني العشوائي للتوزيع التراكمي لـ Y.

وأخيرا... سوف نبين أنه بالنسبة للتوزيع المتماثل حول متوسطه (مثل التوزيع الطبيعي)، فإن عملية تقلص التوزيع قرب المتوسط سوف ينتج متغيرا عشوائيا يهيمن على الأول عشوائيًا في الترتيب الثاني. ولتحقيق ذلك، نستفيد من الرسم البياني المبين في الشكل 5-10. في هذا الشكل، التوزيع التراكمي لـ Fx هو لمتغير عشوائي X مع توزيع طبيعي (متوسط 0 وانحراف معياري 2)، بينما Fy لمتغير عشوائي Y له توزيع طبيعي مع انحراف معياري أكبر (3 في هذه الحالة) ولكن نفس النهج يظل قائمًا بغض النظر عن التوزيع المتماثل

المستخدم. التماثل يوضح أن المنطقة المظللة على يمين المحور لديها مساحة أصغر من المنطقة المظللة المظلمة على يسار المحور. وعلاوة على ذلك، لا يزال هذا صحيحا بغض النظر عن أين يتم رسم خط عمودي متقطع (بعيدا بما فيه الكفاية إلى اليمين والمجالين كما هما). وهذا يكفي لإظهار، باستخدام نهج الشكل 5-9 ، أن X تهمين عشوائيًا من الترتيب الثاني على Y.

إن عملية التقلص نحو المتوسط سوف تنتج، في الحد الأقصى، كتلة واحدة في المتوسط، ونحن نعلم بالفعل أن هذا سيكون المفضل للتوزيع الأصلي من قبل صانع القرار الذي يعزف عن المخاطرة (أي اليقين من الحصول نتيجة متوسط هي إمكانية يكون فيه الهيمنة العشوائية الثاني على الإمكانية الأصلية).



الشكل 5-10: التوزيع الطبيعي بتباين أقل هو مهيمن عشوائي ثاني.

4-5 قرارات المخاطرة للمدراء

ركزت العديد من الأمثلة التي قدمناها في هذا الفصل على الشخص الذي يختار خيارا له يؤثر عليهم فقط. ننتقل الآن إلى القرارات التي تتخذها الشركات وعلى وجه التحديد مديري

أو مجالس تلك الشركات. بداية من التساؤل عما ستبدو عليه دالة المنفعة بالنسبة لقرارات الأعمال بدلا من القرارات الشخصية. نتيجة فون نيومان مورجنسترن تشير إلى أنه يجب أن يكون هناك دالة منفعة أساسية، ولكن ما هي؟ هناك عدد من النقاط التي ينبغي النظر فيها.

1-4-5 المدراء والمساهمين

نحن بحاجة إلى البدء بالتفكير في من الذي يتخذ القرارات وما الأهداف التي يسعون إلى تحقيقها. من المعتاد أن نفكر في الإدارة باعتبارها تعمل لصالح المساهمين، الذين هم أصحاب الشركة، ولكن في الواقع لدينا أنظمة معقدة من حوكمة الشركات مع مجلس إدارة مسؤول عن التوظيف ومراقبة الإدارة العليا في حماية مصالح المساهمين.

معظم المساهمين لديهم الفرصة لتنويع حيازاتهم عبر شركات متعددة. هناك استثناءات لذلك عندما يرغب المساهمون في الحفاظ على السيطرة أو التأثير من خلال الاحتفاظ بجزء كبير من الأسهم، على سبيل المثال في الشركات التي تسيطر عليها مصالح الأسرة. غير أن معظم الأسهم تكون مملوكة عادة للمؤسسات أو للمستثمرين الأفراد الذين يتمتعون بتنوع جيد ومن ثم يشهدون تغيرات نسبية طفيفة في ثرواتهم الإجمالية من التغيرات التي تحدث في قيمة شركة بعينها. من هذا يمكننا أن نستنتج أن المساهمين سوف يكونون محايدين من حيث المخاطر في نظرهم من أعمال شركة فردية.

لمعرفة السبب في ذلك، ننظر في شركة يمكن أن تدفع K$ مليون لاتخاذ إجراءات محفوفة بالمخاطر التي توفر إما لا شيء أو مليون دولار، كل خيار له احتمالية 0.5. إذا كان المساهم بنسبة δ من أسهم الشركة يمكن أن يتخذ القرار بشأن القيمة العادلة لـ k، عندئذ يجب على المساهم بالثروة الحالية W ودالة المنفعة u أن يقارن u (W) (المدير لا يقوم بشيء) مع $0.5u(W\text{-}\delta k) + 0.5u(W + \delta(1\text{-}k))$ (مدير يأخذ قرارات محفوفة بالمخاطر). ويحتاج المساهم الذي يعمل على أساس المنفعة المتوقعة أن يقوم المدير بالمخاطرة من خلال

$$0.5u(W - \delta k) + 0.5u(W + \delta(1 - k)) > u(W).$$

ولكن لصغر δ يمكننا تقريب الجانب الأيسر لهذا التعبير من خلال استخدام المشتق لـ u عند W (والذي نكتبه كـ (u'(W)) للحصول على

$$\begin{aligned}&0.5u(W) - 0.5\delta ku'(W) + 0.5u(W) + 0.5\delta(1-k)u'(W)\\ &\quad = u(W) + 0.5\delta(1-2k)u'(W).\end{aligned}$$

وبالتالي، أي k أقل من 0.5 يعد استثمار جدير بالاهتمام من وجهة نظر المساهمين، ولكن ليس مجدي إذا كان k أكبر من 0.5. في نهاية المطاف نجد أن القيمة حيادية للمخاطرة بالنسبة لهذا الاستثمار.

وعلى صعيد آخر، علينا أن نلاحظ أن هذه الحجة لا ينبغي النظر إليها على أنها تشير إلى أن المستثمرين غير مبالين تماما للمخاطر. يقوم نموذج (تسعير الأصول الرأسمالية) باستكشاف كيف يمكن لمكون في تباين أصل ألا يتم تنويعه (قيمة β أو مخاطر نظامية) ينعكس على سعر الأصل. ولكن نوع القرار الإداري الذي نناقشه هنا والذي هو أيضًا خاص بهذه الشركة بالذات، قد لا يظهر في β.

ولكن إذا كان التنويع يجعل المساهمين محايدين للمخاطرة، نفس الشيء لا يمكن أن ينطبق على المديرين. يلتزم مدير الشركة بقواعد لا تنطبق على المستثمر، ويرتبط نجاح مهنة المدير بأداء الشركة. وعلاوة على ذلك، يمكن للمدير الأقدم الاحتفاظ بعقود الأسهم التي تعطي له أيضا مصلحة مباشرة في سعر سهم الشركة. ومن المتوقع أن يؤدي ذلك إلى سلوك منفوذ للمخاطر من جانب المدير، وهذا يختلف عن السلوك المحايد للمخاطر الذي يفضله المستثمرون. لذلك هناك مشكلة محتملة للوكالة حيث أن المديرين الذين يعملون، من الناحية النظرية، بوصفهم وكلاء لأصحابها، يخضعون في الواقع لحوافز مختلفة.

2-4-5 وجهة نظر شركة من نطاق واسع حول المخاطرة

في كثير من الحالات يكون من المناسب النظر إلى الشركة ككيان واحد. وربما يرتبط هذا بنوع من الخيال القانوني للشركة باعتبارها فرد. ولكن من الناحية العملية من الواضح أنه سيكون هناك اختلافات بين نوع الإجراءات والخيارات التي يتخذها مدير واحد مقارنة مع

نوع آخر داخل الشركة نفسها. يتوافق ذلك مع مختلف الشخصيات المعنية: قد يكون هناك مدير يعزف عن المخاطرة بطبيعته، في حين يكون زميله في المكتب المجاور هو مقامر بطبيعته. وعندما يحدث ذلك، هناك خطر من عدم الكفاءة، حيث أن أحد المديرين قد يدفع علاوة مخاطر لتحقيق قدر من اليقين، إلا أن ذلك يًنفي على مستوى الشركة بسبب السلوك الخطر نسبيا للمدير الثاني. نهج دينيس ويذرستون في J.P. مورغان (الذي تم مناقشته في بداية الفصل الثالث) يحاول جلب الشركة بأكملها تحت مظلة واحدة من المخاطر. ويكمن الدافع نفسه وراء الفكرة القائلة بأن الشركات بحاجة إلى تحديد الرغبة في المخاطرة المناسبة للشركة ككل (واحدة من مبادئ إدارة المخاطر المؤسسية)، مما يعني أنه يمكن مناقشة نهج مشترك للمخاطر والموافقة عليه في فريق الإدارة العليا. ولكن من الناحية العملية، ليس من السهل الحصول على نهج موحد للمخاطر للشركة بأكملها.

وتكمن أحد المشاكل في أنه إذا أردنا أن يكون هناك مستوى موحد لشهية المخاطرة للشركة ككل هي أنه إذا كان مستويات شهية المخاطرة مرتبطة بشكل دالة المنفعة، فقد تعتمد حينها على عوامل مثل حجم الرهان والاحتياطي النقدي الحالي للشركة. هذا يفسر أسباب صعوبة إعطاء تعريف مبسط لشهية المخاطرة: لا يمكن النظر إليها كنقطة على مقياس تتحرك من العزوف عن المخاطرة إلى الإقبال على المخاطرة.

في الفصل الأول علقنا على الطريقة التي استخدمت في عمليات التداول في أوقات مختلفة من المخاطر بأكثر من المكتب الخلفي، ومن الشائع أن يكون هناك مستويات مختلفة مفضلة من المخاطرة بشكل هرمي أو بأقسام مختلفة. على مستوى ما يمكن أن يعزى هذا ليس فقط إلى مختلف تفضيلات المخاطر الفردية (كما نرى في كاريكاتير يمثل المتداول كونه شاب يعيش حياته بوتيرة سريعة والأدرينالين يجري في عروقه بملايين الدولارات تعتمد على قرارات مستمرة) ولكن أيضا إلى الاختلافات في هياكل المكافأة، إما بشكل صريح من خلال العلاوات أو ضمنا من خلال ما يتم تقييمه ضمن ثقافة فريق العمل.

كل هذا سيجعلنا نخشى من تحديد مستوى واحد من الرغبة في المخاطرة للشركة ككل. ونادرا ما يكون الأمر بسيطا. إن التعقيدات التي تنشأ عند التعامل مع هذه المسألة

تجعل النهج "السريع وغير الدقيق" لقياس القيمة المعرضة للخطر واستخدام هذا على أساس الشركة بأكملها يبدو أكثر جاذبية.

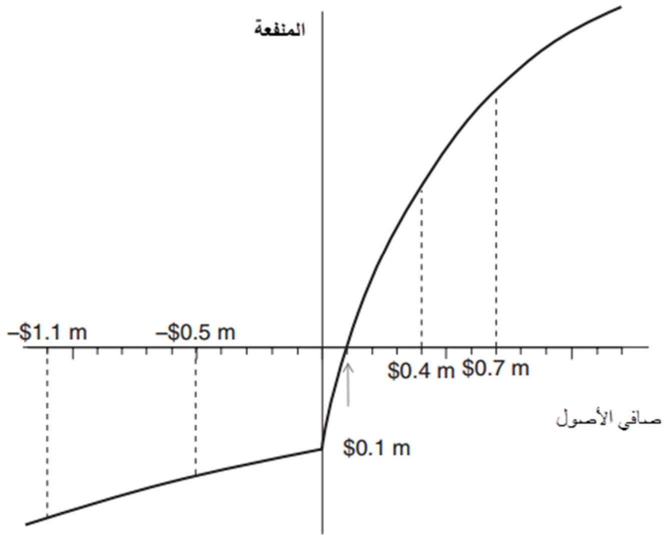
3-4-5 مخاطر الإفلاس

سواء كان المديرون عازفين عن المخاطرة معظم الأحيان، فإنهم سيتحققون بالتأكيد من خطر الإفلاس. وهذا من شأنه أن يشير إلى أن هناك دالة منفعة مقعرة تنخفض بشكل حاد حيث يصبح خطر إفلاس الشركة يشكل تهديدًا. في الواقع، عندما تدخل الشركة ما يسمى بمنطقة الإفلاس (أي عندما يكون الإفلاس احتمالا حقيقيا)، فإن المجلس (أو ينبغي له) أن يغير الطريقة التي يتصرف بها وسير العملية التي يتم بها اتخاذ القرار. وقد يشترط قانون الشركات أن يصبح الأفراد في مجلس الإدارة مسؤولين شخصيًا إذا فشلت الشركة، ولذلك ليس غريبًا أنه إذا كان الإفلاس وشيكًا ، فسوف يتصرف المجلس على الفور. أحد جوانب ذلك هو أنه إذا كانت الشركة مفلسة، فإن الدائنين لهم أولوية المطالبة بأصول الشركة أكثر من المساهمين، ولهذا، بالنسبة للشركة التي تقع في منطقة الإفلاس، يجب على أعضاء مجلس الإدارة ألا يتصرفوا بطريقة من شأنها الإضرار بمصالح الدائنين على المساهمين إذا وقع الإفلاس.

ما الذي ستبدو عليه الدالة لمجموع صافي الأصول (الأصول مطروحًا منها الالتزامات) للشركة التي تواجه احتمالية الإفلاس؟ تقترح المناقشات هنا أن دالة المنفعة قد تبدو مثل المنحنى المبين في الشكل 5-11. وبمجرد توقف الشركة عن العمل، فإن درجة الإفلاس (مدى ديون الشركة) ستحدد المبلغ الذي يحصل عليه الدائنون. وسيكون للمديرين بعض الاهتمام في رؤية الدائنين الذين يقدمون صفقة معقولة، ولكن منحدر دالة المنفعة في هذه المنطقة سيكون ثابتا نسبيا. من النظرة الأولى، دالة المنفعة المبينة في الشكل تشير إلى إمكانية سلوك الإقبال على المخاطرة. ولأخذ مثال مبسط، لنفترض أن الشركة ذات الأصول الصافية الحالية التي تبلغ 100000 دولار فقط إذا سمح لها بمواصلة التداول تنتج فرصة بنسبة 10٪ من صافي الأصول إلى 0.5 مليون دولار، وفرصة 70٪ من صافي الأصول المتبقية عند 100000 دولار أمريكي 20٪ فرصة صافي الأصول زيادة إلى 0.4 مليون

دولار. ومن ثم، فإن القيمة المتوقعة لصافي الأصول تظل 000 100 دولار، بما أن

$$0.1(-0.5) + 0.7(0.1) + 0.2(0.4) = 0.1$$



الشكل 5-11: دالة المنفعة

من وجهة نظر المنفعة المتوقعة، فإن نتائج التداول هذه إيجابية (نظرا لسلوك المنفعة الموضح في الشكل 5-11). بما أن u (0.1) = 0، المنفعة المتوقعة هي

$$0.1u(-0.5) + 0.2u(0.4),$$

نلاحظ أن القيمة تكون إيجابية، لذلك فإن الشركة لديها حافز لمواصلة عملها حتى ولو كان هذا ينطوي على خطر الإفلاس. في الواقع، إذا كانت استراتيجية التداول أكثر مخاطرة يمكن أن يزيد ذلك من حجم المكاسب والخسائر مع ترك القيمة المتوقعة دون تغيير، وقد يكون ذلك مفضلًا. على وجه التحديد، لنفترض أن استراتيجية بمخاطر أعلى تعطي فرصة 10٪ من صافي الأصول للتحرك إلى – 1.1 مليون دولار، فرصة 70٪ من صافي الأصول المتبقية عند 100000 $ وفرصة 20٪ من صافي الأصول زيادة إلى 0.7 مليون دولار. وبالنظر إلى شكل دالة المنفعة المبينة في الشكل 5-11، من السهل النظر إلى

استراتيجية التداول الأكثر مخاطرة على أنها ذات فائدة أعلى من ذلك بكثير، حيث أن الكسب في المنفعة في الانتقال من 0.4 إلى 0.7 مليون دولار يتجاوز خسائر المنفعة في الانتقال من –0.5 دولار إلى – 1.1 مليون دولار ويحدث ذلك مع احتمال أكبر. وعموما، يمكننا أن نرى أن الزاوية في دالة المنفعة تنتج منطقة من التقارب، وبالتالي سلوك الإقبال على المخاطرة.

غير أنه من الناحية العملية، من غير المرجح أن يحدث السيناريو الموضح أعلاه، لأنه يفترض أن الاستراتيجية الأكثر مخاطرة يمكن أن ينتج عنها صافي عجز أعلى بكثير، في حين أن الشركة يجب أن تتوقف عن التداول بمجرد أن يصبح صافي الأصول صفرا. وعلاوة على ذلك، فإن المديرين قد يتحملوا مخاطر شخصية عالية تكون فيها الاستراتيجية ذات المخاطرة العالية غير ملائمة، ومن ثم يتحلمون بعض الالتزامات بشكل شخصي للديون.

ملاحظات

كتاب بيتر "بيرنشتاين" يعطي المزيد من التفاصيل حول تطوير فكرة المنفعة من قبل دانيال برنولي وغيره. أفكار شجرة القرار التي نقدمها هي المعيار الأساسي ويمكن العثور عليها في أي كتاب عن نظرية القرار.

كتاب اسحق جيلبوا يعد كتاب ممتاز بتعمقه الكبير في الأطر المختلفة التي تكمن وراء استخدام نظرية المنفعة المتوقعة ويقدم نظرية القرار في حالات عدم اليقين من قبل. هذا هو الكتاب الذي يعطي مقدمة يمكن الوصول إليها لبعض من الأسس الفلسفية والمفاهيمية المهمة لنظرية القرار. لاحظ، جيلبوا يعطي شكلا مختلفا قليلا من بديهية الاستمرارية في وصف نظرية فون نيومان مورجنسترن. يمكن القول إن هذا افتراض أضعف، ولكن يزيد قليلا من تعقيد فهم ما يجري.

إن مناقشة دالة المنافع مثل تلك التي تم توضيحها في الشكل 5-6 تعمل كتفسير للتعايش بين القمار في اليانصيب والتأمين (كما تمت مناقشته في المثال العملي 5-3) تعود إلى

بحث كتبه فريدمان وسافاج في عام 1948. ومع ذلك، نقدم تفسير موضح أكثر وأكثر اقناعًا في الفصل الثالث حو نظرية الإمكانات.

مناقشة نظرية سافاج مستمدة من كتاب جيلبوا. تم تصميم هذه النظرية حول الوضع مع مساحة الحالات (لانهائية مع كل عنصر فردي فارغ). هناك نهج بديلة يحتاج إلى مساحة نتائج غنية، ولكن مساحة الحالات أبسط، ويوضح واكر (2010) هذا التطور.

لقد قدمنا بتقديم أدلة قصيرة على نتائج الهيمنة العشوائية القائمة على افتراض المتغيرات العشوائية المستمرة المحددة على نطاق محدود، ودوال المنفعة المختلفة (انظر بحث هدار وراسيل، 1971 لنهج مماثل). وهو يتطلب المزيد من العمل لإثبات هذه النتائج في شكل أكثر عمومية. شيلدون روس (2011) يغطي بعض هذه المواد في كتابه عن التمويل الرياضي التمهيدي.

ومناقشتنا لقرارات المخاطر وفائدتها على مستوى الشركة هي نظرة مبسطة لموضوع معقد. على سبيل المثال، لم نأخذ في الاعتبار ضرائب الشركات) التي غالبا ما يكون لها أثر في جعل الدخل بعد الضريبة دالة مقعرة للدخل قبل الضريبة (، كما أننا لم نضع في الاعتبار تكاليف معاملة الإفلاس. سميث أند ستولز (1985) يناقشون ذلك بشكل أكثر تفصيلا.

المراجع

Bernstein, P. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*. John Wiley & Sons.

Friedman, M. and Savage, L. (1948) The utility analysis of choices involving risk. *Journal of Political Economy*, 56, 279–304.

Gilboa, I. (2009) *Theory of Decision under Uncertainty*. Cambridge University Press.

Hadar, J. and Russell, W. (1971) Stochastic dominance and diversification. *Journal of Economic Theory*, 3, 288–305.

Ross, R. (2011) *An Elementary Introduction to Mathematical Finance*, 3rd edition.Cambridge University Press.

Smith, C. and Stulz, R. (1985) The determinants of firms' hedging policies. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20, 391–405.

Wakker, P. (2010) *Prospect Theory for Risk and Ambiguity*. Cambridge University Press.

تمارين

1-5 عرض السعر المناسب

تقوم شركة Xsteel بتقديم عطاءات لتوريد صفائح من الصلب المموج لمشروع بناء رئيسي. ومعلوم أن Yco هو المنافس الوحيد بين مقدمي العطاءات الجادين. هناك متغير سعر واحد وسوف يفوز مقدم العرض الأقل سعرًا، وإذا كان كلا السعرين متساويين سيتم تحديد الفائز بالعطاء على عوامل أخرى، احتمالية فوز Xsteel أو Yco متساوية. وتعتقد شركة Xsteel أن شركة Yco ستقدم عرضا بقيمة 800 دولار أو 810 دولار أمريكي أو 820 دولارا أمريكيا أو 830 دولارا أمريكيا للطن، مع تساوي احتمالات تلك الإمكانات كافة. تبلغ تكلفة إنتاج Xsteel 790 دولارا للطن، ولا يمكن تقديم عروض أسعار إلا بمضاعفات 10 دولارات للطن الواحد. ما هو عرض السعر الذي سيعظم ربح Xsteel المتوقع؟

2-5 نظرية المنفعة المتوقعة ومشروع تجاري

جيمس لديه 1000 دولار ويرغب في استثمارهم لمدة عام. يمكن له أن يضع المال في حساب توفير، الذي يدر فائدة بمعدل 4٪. صديقته كيت تطلب منه استثمار المال في مشروع تجاري الذي يكلف 100 دولار بالضبط. ومع ذلك، فإن احتمالية فشل مشروع كيت هي 0.3 وفي حال حدوث ذلك لن يحصل جيمس على شيء. ومن ناحية أخرى، في حال نجاح المشروع ستجني 2000 دولار ويمكن استخدام أرباحها لسداد قرض جيمس. وجدير بالذكر أن فترة سماح سداد القرض هي عام واحد.

(أ) باستخدام نظرية الفائدة المتوقعة وافتراض أن جيمس حيادي للمخاطرة، ما هو المبلغ الذي تحتاج كيت سداده لجيمس لإقناعه بإقراضها الأموال؟

(ب) افترض أن جيمس شخص لا يقبل على المخاطرة مع دالة منفعة مقعرة $u(x) = \sqrt{x}$. كم المبلغ الذي يتوجب على كيت سداده في حال نجاح المشروع التجاري من أجل إقناع جيمس بإقراضها المال؟

3-5 حساب المنفعة من الخيارات

يحاول باحث فهم دالة المنفعة من رجل أعمال يملك شركة تبلغ قيمتها مليون دولار. ويقوم بذلك من خلال وصف مختلف المشاريع المحتملة ويسأل المدير عما إذا كانت ستتخذ هذا المشروع بموجب الشروط الموصوفة. من خلال تغيير الاحتمالات المخصصة للنجاح والفشل، يجد ثلاثة مشاريع لا يبالي بها المدير من حيث بدأها أو لا. وترد الاحتمالات على مختلف النتائج في الجدول 5-3.

استخدم هذه المعلومات لتقدير المنافع على مختلف قيم الشركة: 1.5 مليون دولار و2 مليون دولار و2.5 مليون دولار على افتراض أن المنفعة على قيمة الشركة 0.5 مليون دولار هي 1، والمنفعة على قيمة الشركة مليون دولار هي 2. (يمكن أن تكون هاتان القيمتان تم تعيينها بشكل عشوائي لأن المنافع يتم تعريفها فقط من الخيارات حتى التحول الخطي الإيجابي: انظر نظرية 5-1). رسم دالة منفعة لرجل الأعمال.

الجدول 5-3: نتائج لمشاريع تجارية مختلفة للتمرين 5-3

النتائج	خسارة $0.5 مليون	ربح $0.5 مليون	ربح $1 مليون	ربح $1.5 مليون
	الاحتمالات			
A المشروع التجاري	0.4	0.6	0	0
B المشروع التجاري	0.6	0	0.4	0
C المشروع التجاري	0.7	0	0	0.3

4-5 الهيمنة العشوائية والإمكانات السلبية

أظهر أنه في حال الإمكانية $A = (x_1,p_1\ x_2,p2\ \ldots\ldots\ x_n,\ p_n)$ تهيمن عشوائيًا على الإمكانية $B = (y_1,q_1,\ y_2,\ q_2,\ldots\ldots y_n,q_n)$ إذًا الإمكانية $-B = (-y_1,\ q_1;\ -y_2,\ q_2;\ .\ .\ .\ ;\ -y_n,\ q_n)$ تهيمن عشوائيًا $-A = (-x_1,\ p_1;\ -x_2,\ p_2;\ .\ .\ .\ ;\ -x_n,\ p_n)$.

5-5 الهيمنة العشوائية والتوزيع الطبيعي

الأرباح من مبيعات المنتج تعتمد على الطلب، الذي يتبع توزيع طبيعي. متوسط الطلب في الأسبوع الأول له توزيع بمتوسط 1000 وانحراف معياري 100. الطلب في الأسبوع الثاني له متوسط 1010.

(أ) افترض أن الانحراف المعياري للطلب في الأسبوع الثاني هو 100. اشرح لماذا يهيمن الربح في الأسبوع الثاني عشوائيًا على الربح في الأسبوع الأول، وهذه النتيجة لا تعتمد على العلاقة الدقيقة بين الربح والمبيعات.

(ب) اظهر إذا كان الطلب في الأسبوع الثاني له انحراف معياري 105، إذا الربح في الأسبوع الثاني لن يهيمن عشوائيًا على الربح في الأسبوع الأول.

(ج) اظهر إذا كان الطلب في الأسبوع الثاني له انحراف معياري 95، إذًا الربح في الأسبوع الثاني لن يهيمن عشوائيًا على الربح في الأسبوع الأول.

6-5 فشل الهيمنة عشوائيًا

فكر في الاحتمالين التاليين: q = (100 دولار , 0.1 و300 دولار , 0.2 و400 دولار , 0.2 و700 دولار , 0.3 و900 دولار , 0.2) وr = (300 دولار , 0.3 و500 دولار , 0.3 و700 , 0.2 و900 دولار , 0.1 و1000 دولار , 0.1). وتبين أن كلاهما لا يهيمن عشوائيا على الآخر وأجد مجموعة من تعيينات المنفعة حيث q مفضل ومجموعة من تعيينات المنفعة حيث r مفضل. يجب أن تفي قيم المنفعة الخاصة بك بشرط أن وجود المزيد من المال يعطي منفعة أعلى.

7-5 الهيمنة العشوائية الثانية (الترتيب الثاني)

بالنظر إلى الاحتمالين الموضحين في تمرين 5-6، اظهر أن r تهيمن عشوائيًا من حيث الترتيب الثاني على q.