# الفصل السابع

# تحسين النموذج العشوائي

*تحسين الربح من خلال التخزين الضخي*

يعمل مرفق تخزين الضخ عن طريق ضخ المياه إلى خزان مرتفع عندما تكون الطاقة متوفرة ورخيصة الثمن ثم تترك لتتدفق من الخزان من خلال مولدات طاقة كهرومائية لتوليد الطاقة عندما يرتفع ثمنها. وفي حال وجود عجز في الكفاءة، إذا تم ضخ الماء للأعلى لا يمكنها توليد طاقة بقدر ما يمكن توليده من تدفقها من خلال التوربينات على النحو المطلوب في المرة الأولى. مع ذلك، فإن هذه الممارسة جديرة بالاهتمام لأن التكلفة الفعلية للكهرباء أثناء الليل أقل بكثير من النهار. ومن ثم، يمكن استخدام الطاقة الكهربية رخيصة الثمن لملء الخزان المرتفع أثناء الليل ثم الاستفادة بهذه الطاقة أثناء النهار عندما تكون الأسعار مرتفعة. ومع زيادة كمية الطاقة المولدة من الرياح والتي غالباً ما تمد بأقوى درجات الطاقة في الوقت الذي يكون فيه الطلب غير مرتفع، تصبح الحاجة إلى المخزون الضخي أكبر من أي وقت آخر.

تعتبر محطة جبل الراكون للتخزين الضخي مثال جيد على العملية سابقة الذكر، تم بناءها في السبعينيات، حيث تمتلكها وتقوم على تشغيلها سلطة وادي تينيسي. تبلغ مساحة الخزان أعلى جبل الراكون أكثر من 500 فدان (200 هيكتر)، عند ضخ المياه إلى هذا الخزان يمكن ملأه في 28 ساعة. وعندما يكون الطلب على الكهرباء مرتفعاً يمكن إطلاق المياه لتوليد الطاقة الكهربية حتى 1600 وات في الساعة. وفي حالة كان الخزان ممتلأً، قد يستغرق 22 ساعة ليصبح فارغاً إذا تم تشغيله بشكل مستمر.

ولتحديد سياسة تشغيل محطة التخزين الضخي، يمكن تقسيم كل يوم إلى فترات مختلفة: القمة تستغرق 7 ساعات، الأكتاف تستغرق 8 ساعات، وما قبل القمة تستغرق 9 ساعات. عادة ما تكون فترة ما قبل القمة خلال ساعات الليل ويصبح ممتلأً بنهاية تلك الفترة، ثم يتم إخراج المياه أثناء السبع ساعات في فترة القمة (تسع ساعات من الضخ ستوفر كمية مياه كافية لسبع ساعات من توليد الطاقة). لكن عند زيادة الطلب والأسعار، يمكن استخدام مياه الخزان لوقت أطول ليشمل فترة الأكتاف. من ثم، يصبح مستوى المياه منخفض للغاية بنهاية اليوم، ولا يمكن ملأه مجدداً أثناء الليل ما يؤدي إلى انخفاض منسوب المياه بالخزان بعد عدد من الأيام المتعاقبة. ويصبح الخزان فارغاً بالكامل أثناء النهار، وفي الصباح تتبقى فقط المياه التيتم ضخها في الساعات المتأخرة من الليل، ما يحدد كمية الطاقة المتاحة في أي يوم (بصرف النظر عن مدى ارتفاع سعر الكهرباء).

وتتمثل المسألة التي تواجه مشغل المحطة في إذا كان يمكن الاستفادة من الأسعار المرتفعة اليوم عن طريق تشغيل المولدات لفترة أطول. وما إذا كان السعر مرتفع بشكل كافي للتوليد الطاقة أثناء فترة الأكتاف، وما كمية الطاقة التي يمكن توليدها؟ وكلما زادت فترة تشغيل المولد، انخفض مستوى المياه الناتجة ، وتضاءلت فرصة الاستفادة عند ارتفاع الأسعار مرة أخرى في المستقبل.

## 1-7 مقدمة في تحسين النموذج العشوائي

نطرح في هذا الفصل كيفية استخدام مناهج التحسين لتحديد كيفية اتخاذ قرار جيد في إطار بيئة احتمالية، حيث ألقينا الضوء في الفصل السابق على اتخاذ قرارات من خلال مجموعة

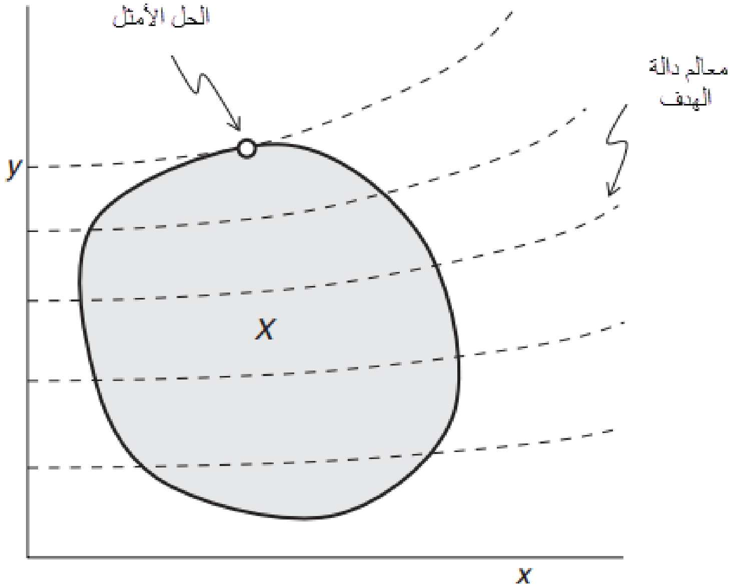
خيارات واضحة، يتضمن كل خيار منهم عدد صغير من الاحتمالات مع الاحتمالات والنتائج المرتبطة بها، أما في هذا الفصل سنناقش مشكلات أكثر تعقيداً. سنكون في حاجة إلى عمل نموذج لما يحدث (مشتملاً على عناصر عشوائية) ثم نقوم بتحليل هذا النموذج. ونظراً لزيادة التعقيد، سنعاود التركيز على الجانب المعياري أكثر من الوصفي. بالتالي سوف نتساءل عن ما يجب على المديرين فعله بدلاً من التساؤل عن ما سوف يفعلونه. وجدير بالذكر أن غالبية النماذج التي تعاملنا معها في هذا الفصل، كان يلزم تحليلها استخدام أداة حسابية مثل جدول البيانات.

أحد الاختلافات المهمة بين مشكلات تحسين النموذج العشوائي يتمثل في حصولنا على فرصة واحدة لصنع قرار والمشكلات التي نمتلك فرصة لصنع قرار بشأنها في أوقات مختلفة. على سبيل المثال، إذا كنا نبيع أزياء وملابس في حين أن الطلب غير مستقر، إذن فنحن بحاجة إلى اتخاذ قرار في بداية الموسم بشأن عدد القطع التي علينا صنعها. رغم ذلك، قد تكون لدينا فرصة لصنع المزيد خلال الموسم عندما نحصل على معلومات عن سير المبيعات: ما يعتبر نقطة اتخاذ قرار ثانية.

وقبل أن نواصل مناقشة تحسين النموذج العشوائي نحتاج لمراجعة بعض الأفكار الأساسية عن مشكلات تعظيم الاستفادة.

## 7-1-1 مراجعة آلية تعظيم الاستفادة

أحد مشكلات تعظيم الاستفادة تتمثل في الحاجة إلى اختيار بعض متغيرات القرار من أجل تعظيم (أو تقليل) دالة الهدف الخاضعة لبعض الشروط على المتغيرات لتحديد القيم المحتملة. ومن ثم، فإن أهم ثلاثة عناصر هي: المتغيرات، الهدف، والشروط. إذا كانت المتغيرات (n) فإننا بحاجة إلى اختيار أرقام حقيقية، ومن ثم يمكننا التفكير في المسألة على النحو الموضح بالشكل 7-1. يشير (x) و(y) إلى متغيرات القرار، محور x يمثل مجموعة النقاط المحتملة المحددة من خلال شروط المسألة، وتشير الخطوط الخارجية إلى دالة الهدف. تقع النقطة المثلى (التي نطلق عليها أيضاً الحل الأمثل) على حد المحور x ويعظم دالة الهدف (مشكلات تحسين الاستفادة قد تشمل تقليل أو تعظيم دالة الهدف).




*الشكل 7-1: رسم تخطيطي لمشكلة التعظيم*

الفئة الأولى من مشكلات التعظيم تميز بين نوعين من المشكلات؛ الأولى ذات عنصر أمثل محلي والثانية ذات عدد من العناصر المثلى المحلية المحتملة، وعلينا المقارنة بينهم لإيجاد الأفضل. وفقاً للرسم البياني 7-1، فإن ميزة امتلاك حد أقصى واحد محتمل تأتي من طبيعة دالة الهدف ومجموعة النقاط المحتملة.

مجموعة النقاط المحتملة تأخذ شكل محدب (ما يعني أن الخط المستقيم بين نقطتين على المحور x لا يمكنها الخروج عن x أبداً) أما دالة الهدف فتأخذ شكل مقعر (تأخذ شكل تل، وهي الخط المستقيم بين نقطتين على السطح المحدد بدالة الهدف والذي يقع أسفل السطح بدلاً من تجاوزه). ويمكن أن يمتد تعريف الدالة المقعرة إلى أي عدد من النقاط، ومن ثم فإن الدالة (x, y) المحددة على مستويات (x, y) المقعرة، في حالة مجموعة النقاط n $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (xn, yn)$، وفي حالة المجموعة w j الغير سلبية، وبما أن $\sum_j^n 1w_j$ إذن:

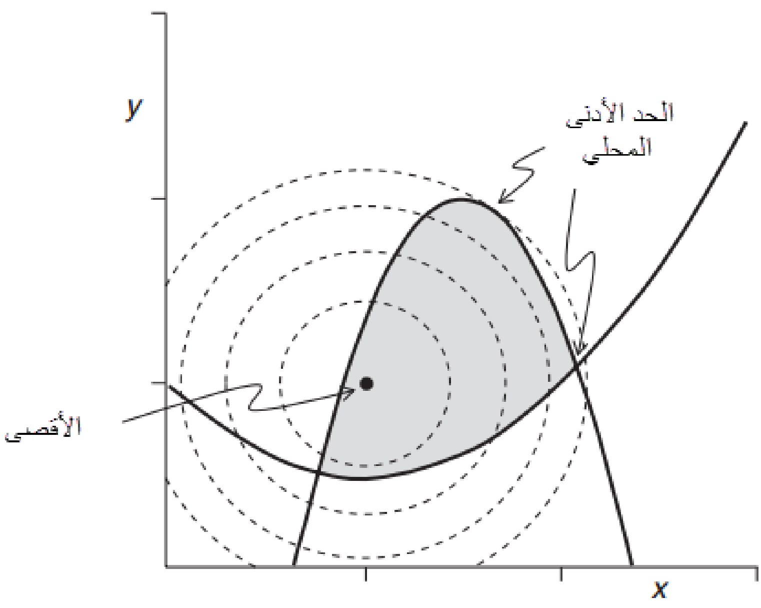
$$\sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j, y_j) \leq f\left(\sum_{j=1}^{n} w_j x_j, \sum_{j=1}^{n} w_j y_j\right).$$

تعريف آخر للدالة المقعرة عندما يتم تحديد الدالة بناءً على ثلاثة متغيرات أو أكثر. أيضاً، الدوال المحدبة لها نفس التعريف بتباين معكوس. وبذلك سوف نجد حد أقصى محلي واحد (وهو أيضاً حد أقصى عالمي). على الجانب الآخر، إذا كان لدينا مسألة تقليل وليس مسألة تعظيم، فيجب أن نحصل على دالة محدبة بدلاً من الدالة المقعرة.

قد تجد مسألة التعظيم المحدب (مع دالة الهدف المقعرة ومجموعة الاحتمالات المحدبة) حلها الأمثل على الحد أو داخل مناطق المحور x. ويوضح الشكل 7-2 مسألة تعظيم من النوع ذو الحد الأقصى

ويمكن صياغة مسألة التعظيم (P 1) كالتالي:

$$P1 : \text{maximize } 4 - (x-1)^2 - (y-1)^2,$$




***شكل 7-2: هذا المثال يتضمن حد أقصى واحد مع أكثر من حد أدنى محلي***

ووفقاً للشروط:

$$2y - (x - 1)^2 \geq 1,$$
$$3y + 2(2x - 3)^2 \leq 6.$$

القيد الأول يحدد الحد السفلي لمنطقة الاحتمالات، أما الثاني يحدد الحد العلوي. وتشير المنطقة المظللة إلى النقاط المحتملة. النقطة التي تعظم الهدف هي x = 1، y = 1، وذلك داخل منطقة الاحتمالات x.

لكن إذا فرضنا تغير المسألة الآن من تعظيم دالة الهدف إلى تقليلها، وحدود دالة الهدف الموضحة بالخطوط المنقطة، فيمكن أن نرى اثنين من الحدود القصوى المحلية على الجانب الأيمن للرسم البياني (وحد أقصى آخر على الجانب الأيسر). الحد الأدنى المحلي هو نقطة أقل من كل النقاط المحتملة التي تقع بالقرب منها. وفي حال حدوث تغير طفيف في متغيرات القرار قد يؤدي ذلك إلى أحد الاحتمالات إذا تم كسر الشروط، لكن التغيرات الطفيفة في الحد الأدنى المحلي التي تحتفظ بالاحتمالات يمكنها عمل دالة هدف أكبر. ولإيجاد الحد الأدنى العالمي نحتاج للمقارنة قيم دالة الهدف عند حد أدنى مختلف. نرى في هذا المثال أن أعلى نقطة على الحد تمثل الحد الأدنى العالمي، مثلما نرى من الخطوط الخارجية.

إذا كانت المسألة لها حد أمثل محلي واحد (وبالتالي فإنه أيضاً يمثل الحد الأمثل العالمي)، من ثم يصبح الوصول له معيارياً بشكل أكثر سهولة. يمكننا البدء بنقطة احتمال أولية (مجموعة من متغيرات القرار التي تكفي كل الشروط) ومن ثم نأخذ في الاعتبار التغيرات التي تحسن دالة الهدف دون كسر أي من الشروط. ما يعطينا نقطة احتمال جديدة ومتطورة، ثم نكرر عملية البحث عن التغير الذي يحسن الهدف. في واقع الأمر إننا نصل إلى الحد الأمثل المحلي عندما يكون التغير غير محتمل.

عندما يكون هناك عدد من الحدود القصوى المحلية تصبح المسألة أكثر صعوبة. ويمكننا إيجاد حد أقصى محلي باستخدام منهج التطورات المتكررة، لكن عندما نكتشف ذلك لن نعرف كم يوجد من الحدود القصوى المحلية. أحد الأفكار تتمثل في استخدام منهج التحسين

المتكرر مرة أخرى، لك لنبدأ عند نقطة جديدة: قد يؤدي بنا ذلك إلى نفس الحد الأمثل المحلي، أو إلى حد آخر. لكن عند التعامل مع مسألة معقدة قد نلجأ لتجربة المئات من نقاط البدء المختلفة، ويظل إيجاد كل الحدود المثلى المحلية أمر غير مؤكد.

لمعرفة آلية التعظيم، من الضروري تجربة الأفكار عملياً. وهناك عدد كبير من البرامج المتاحة والمناسبة لمختلف أنواع مساءل التعظيم. أحد الأدوات لحل مساءل التعظيم البسيطة أداة سولفر آد إن في برنامج إكسيل، حيث يعتبر حل مسألة تقليل دالة الهدف P 1 باستخدام سولفر تمرين جيد، ذلك ما تم عمله في جدول البيانات BRMch7-P1.xlsx. جرب بدء عملية التعظيم عند نقاط مختلفة، ولا يلزم أن تكون نقاط احتمالات، سيبدأ سولفر في إيجاد حل محتمل قبل تحسينها. ستجد أنه يمكن الحصول على ثلاثة من الحدود الدنيا المحلية بناءً على القيم الأولية التي يعطيها سولفر.

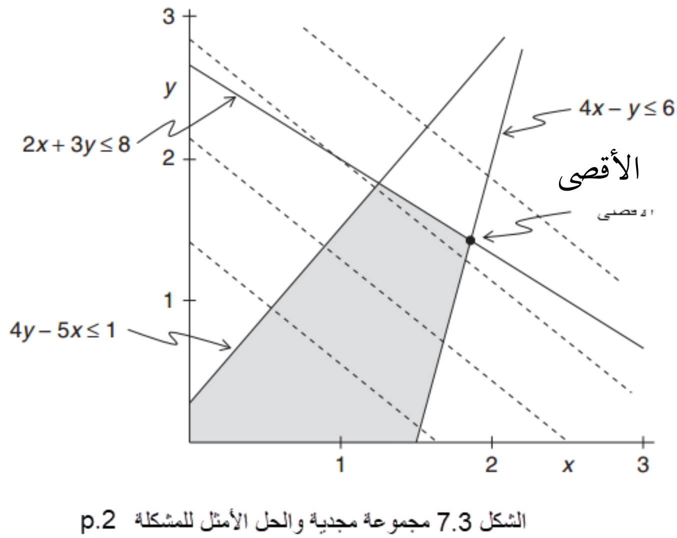
أحد الفئات المهمة لحل مساءل التعظيم يُدعى البرنامج الخطي، والتي تحدث عندما تكون الشروط ودالة الهدف خطية، ما ينتج عنه سهولة حل المسألة حيث تأخذ نقاط الاحتمالات شكل منحنى محدب وتظهر منحيات الهدف بشكل ممحدب ومقعر. للوهلة الأولى، قد يعتقد الفرد أن حل مثل هذه المساءل قد يكون شديد السهولة، لكن من الناحية العملية، عندما يمتلك البرنامج الخطي عدد كبير من المتغيرات وعدد كبير من الشروط، فالأمر يطلب حاسب آلي لإيجاد الحل الأمثل. أحد الأمثلة على البرنامج الخطي توضحه المسألة P2 بالأسفل.

$$P2 : \text{maximize } 6x + 7y + 2,$$

ووفقاً للشروط:

$$\begin{aligned} &2x + 3y \le 8,\\ &4x - y \le 6,\\ &4y - 5x \le 1,\\ &x \ge 0,\\ &y \ge 0. \end{aligned}$$

يوضح الشكل 7-3 نقاط الاحتمالات للمسألة P2. تشير الخطوط المنقطة إلى حدود دالة الهدف، ويحدث الحد الأقصى عند النقطة (x = 1.857 and y = 1.429)




***الشكل 7-3 : مجموعة مجدية والحل الأمثل للمشكلة P.2***

يمكن حل المساءل الخطية في حالة المساءل واسعة النطاق باستخدام برنامج مخصص لهذا الغرض. يحتوي إكسيل سولفر على إعداد "افتراض النموذج الخطي" وإعداد آخر "افتراض غير سلبي" حيث يمكن استخدامهما لحل المساءل الصغيرة مثل P2. ويعطينا ملف BRMch7-P2.xlsx جدول بيانات لهذا النموذج.

## 2-1-7 المساءل ذات المرحلتين

نقطة البداية في التفكير بشأن آلية التحسين العشوائي هي النظر في المسألة ذات المرحلتين. في المرحلة الأولى، القرار الذي يتم اتخاذه ليس من شأنه معرفة ما سيحدث في المستقبل، بل معرفة عدد متنوع من الأحداث المحتملة. وبعد قرار المرحلة الأولى يحدث الحدث العشوائي ويتم حل الغموض. ثم في المرحلة الثانية، يتم صنع مزيد من القرارات التي تعتمد على ما حدث، ذلك ما يسمى "مسألة عشوائية ذات مرحلتين"، حيث يشير ها المصطلح إلى ما هو مطلوب عمله في المرحلة الثانية نتيجة الحدث العشوائي. ويشبه إطار العمل هنا لتحليل شجرة القرارات الذي استعرضناه في الفصل الخامس، بل أن الفارق

الأساسي أننا سوف نفكر بشأن القرارات، حيث نختار قيمة متغيرات القرار المستمرة بدلاً من الاختيار بين خيارات منفصلة.

ولتوضيح بعض الأفكار المهمة وتوضيح مدى الحاجة إلى الاهتمام بصيغة تلك المساءل، سوف نبدأ بتحليل نموذج بسيط.

**مثال 7-1: شركة بارثينون للنفط**

تعمل شركة بارثينون على بيع الوقود للمنازل مستخدمة تخطيط أفقي يتعلق بموسم البيع في فصل الشتاء، حيث يزداد الطلب في الفترة ما بين أكتوبر ومارس. تمتلك الشركة خزانات لتخزين زيت الوقود وتقوم بشرائه من شركات إنتاج النفط التي تبيعه بسعر سوقي قد يتغير من شهر لآخر. بالتالي، تستطيع شركة بارثينون توفير طلبات العملاء إما من المخزون أو من خلال الشراء بالسعر السوقي، حيث تنص عقود العملاء مع الشركة على سرعة الاستجابة للطلب. لتبسيط الأمر ننظر إلى المشكلة التي واجهت الشركة في فبراير، حيث قامت بشراء النفط من السوق وتوصيل كمية إلى العملاء مباشرة وتخزين المتبقي للشهر التالي. من ثم تستطيع الشركة في شهر مارس تلبية الطلب من المخزون أو الشراء من السوق.

يجب أن نقرر كمية النفط المطلوب شراءها في فبراير ($x_1$) والكمية المطلوب شراءها في مارس ($x_2$)، واتخاذ قرار صحيح يعتمد على سعر النفط في فبراير ومارس، تكلفة التخزين، والطلب في كل منهما. يمكن صياغة المسالة على غرار مسألة التعظيم الخطية البسيطة مع الهدف لتقليل التكلفة الإجمالية. من الناحية العملية، لن يكون السعر في فبراير ومارس مستقراً. نفترض أن الطلب في فبراير 1000 برميل والسعر 160 دولار. علاوة على ذلك، هناك ثلاثة احتمالات متساوية في فرصة الحدوث، فإما أن يكون الجو عادي، أو بارد، أو بارد جداً. إذا كان الجو بارد فذلك يعني زيادة الطلب على الوقود لكن سعر شراء الوقود سيرتفع. يوضح الجدول في الشكل 7-1 الطلب وبيانات الأسعار وفقاً لكل سيناريو

حرف d يشير إلى الطلب في مارس، وحرف c يشير إلى التكلفة في مارس، وهم غير معروفين حتى تتخذ الشركة قرار بشأن x1، أي كمية الوقود المطلوب شراءها في فبراير.

وبما أن الطلب في فبراير يبلغ 1000 برميل فإن المخزون بنهاية فبراير سيصبح $x_1 - 1000$، وتقوم الشركة بسداد 5 دولار للوحدة . إذن نحتاج لتقليل التكلفة الإجمالية:

$$\text{minimize } 160x_1 + 5(x_1 - 1000) + cx_2,$$

وفقاً للشروط:

$x_1 \geq 1000$ (مخزون كافي لتغطية الطلب في فبرار)،

$x_1 - 1000 + x_2 \geq d$ (مخون كافي لتغطية الطلب في مارس)،

$x_2 \geq 0$ (لا يمكن إعادة البيع للسوق إذا كان لدينا مخزون كبير).

***جدول 7-1: بيانات السيناريوهات المحتملة في شهر مارس***

| السيناريو | الاحتمالية | تكلفة النفط (دولار) | الطلب (وحدات) |
|---|---|---|---|
| عادي | 3 /1 | 160 | 1000 |
| بارد | 3 /1 | 164 | 1200 |
| بارد جداً | 3 /1 | 174 | 1400 |

نبحث في هذه المسألة عن d وc قبل $x_2$ الذي نحتاج لتحديده، لكننا بحاجة لاختيار $x_1$ قبل معرفة d وc.

إذا عرفنا مقدماً أي من هذه السيناريوهات سوف يحدث، نستطيع حل البرنامج الخطي لإيجاد الحل الأمثل (موضح في جدول بيانات BRMch7-Parthenon1.xlsx). يمكننا الحساب إذا كان الطقس في مارس عادياً، $x_1 = 1000$، $x_2 = 1000$. وإذا كان الطقس في مارس بارد، $x_1 = 1000$، $x_2 = 1200$. وأخيراً إذا كان الطقس بارد جداً، فالأمر يستحق شراء كمية الوقود المطلوبة في فبراير بالكامل، $x_1 = 2400, x_2 = 0$. لكن المسألة التي نحن بصددها الآن تتطلب اختيار $x_1$ الآن. حيث أن هناك احتمالات متساوية أن يكون الطقس عادي أو بارد. وفي حال حدوث أحد السيناريوهين فالحل الأمثل هو شراء 1000 برميل وربما يكون ذلك الخيار الأفضل لـ $x_1$، ويمكننا تحديد $x_2$ بعد تحديد الطلب في شهر مارس.

مع ذلك، استخدام منهج آخر يمكن أن يؤدي إلى حل مختلف. حيث أن أحد الأفكار يتمثل في النظر إلى السلوك المتوسط بدلاً من النظر إلى سيناريوهات فردية. وغالباً ما يقترن ذلك باختبار الحساسية، الذي ننظر من خلاله إلى مدى حساسية القرار الأمثل بالنسبة إلى معاملات التغير. إذا كانت نتيجة التحليل تشير إلى الحساسية، علينا النظر بعين الاعتبار إلى عدد من الحلول المحتملة الموافقة لعدد من القيم المتوقعة، لكن إذا أشار التحليل إلى حساسية نسبية، قد يمكننا الالتزام بالسلوك "المتوسط".

في هذا المثال الخاص بشركة بارثينون، كل واحد من السيناريوهات الثلاثة له فرصة مساوية للحدوث. والقيم المتوسطة هي .c = 166 and d = 1200.

بهذه القيم يمكننا حل البرنامج الخطي وإيجاد الحل الأمثل x1 = 2200 and x2 = 0. بالتالي، إذا استخدمنا الأرقام المتوسطة فمن المفترض أننقوم بالشراء قبل فبراير وترك 1200 في المخازن بنهاية الشهر.

كلا المنهجين سابقي الذكر غير صحيح، بل أن المنهج المناسب لاتخاذ القرار يتمثل في عمل مسألة تعظيم وتضمين الصيغة الصحيحة للقرارات التي سوف نتخذها داخل هذه المسألة. هنا علينا السماح باختيار قيم مختلفة لـ x2 بناءً على السيناريو المحتمل، ونطلق عليهم x2A, x2B, and x2C. كذلك نرمز إلى سيناريوهات الطلب والتكاليف بـ dA, dB, and dC; cA, cB, and cC. ومن ثم يمكننا صياغة المسألة كالتالي:

$$\text{minimize } 160x_1 + 5(x_1 - 1000) + (1/3)(c_A x_{2A} + c_B x_{2B} + c_C x_{2C}) \qquad (1\text{-}7)$$

وفقاً للشروط:

$x_1 \geq 1000$ (كمية كافية للطلب في شهر فبراير)

$x_1 - 1000 + x_{2A} \geq d_A$ (كمية كافية للطلب في شهر مارس في كل سيناريو)

$x_1 - 1000 + x_{2B} \geq d_B$

$x_1 - 1000 + x_{2C} \geq d_C$

$x_{2A} \geq 0, x_{2B} \geq 0, x_{2C} \geq 0$ (المشتريات كلها غير سلبية)

ما سبق برنامج خطي توصلنا من خلاله إلى الحل الأمثل باستخدام أداة سولفر في جدول البيانات. تم كتابة المسألة في جدول البيانات BRMch7-Parthenon2.xlsx. وباستخدام أداة سولفر وجدنا أن الحل الأمثل هو $x_1 = 2000$. ما يعني أن هناك 1000 برميل في المخازن ببداية شهر مارس، لن يتم شراء المزيد إذا تحقق السيناريو A، بينما سيتم شراء 200 برميل إضافية إذا تحقق السيناريو B، في حين سيتم شراء 400 برميل إضافية في حال تحقق السيناريو C.

المثال الخاص بشركة بارثينون من المفترض أنه يمثل تحذير ضد المنهجين الشائعين لدى المخططين لفك الغموض. أحد الخيارات يبدأ بحساب حل أمثل لكل سيناريو على حدة، ثم يقارن الحلول ويختار القرار الأفضل قدر الإمكان لعدد من السيناريوهات. الحلول المرشحة لمسألة بارثينون هي إما تخزين 0 أو 1400 وحدة من الوقود للمرحلة القادمة، تتمثل السياسة المثلى الحقيقية (كما حصلنا عليها من خلال البرنامج العشوائي) في تخزين 1000 وحدة وذلك لن يتوافق مع الحل الأمثل في حال تحقق أي سيناريو. المنهج الشائع الثاني هو أخذ متوسط القيمة كالمتوقع وحل المسألة دون عنصر عشوائي، لكن في مثال بارثينون أدى ذلك إلى اختيار خاطئ $x_1$ ومن ثم تخزين كمية كبيرة جداً من النفط.

مثال بارثينون يقع تحت فئة المسائل متعددة المراحل، حيث يجب اتخاذ قرار في المرحلة الأولى، ثم بمرور الوقت، يتم فك غموض المسألة (في حالة بارثينون تم معرفة الطقس في شهر مارس)، ثم يتم اتخاذ القرار الثاني الذي سوف يعتمد على القرار الأول ونتيجة الحدث الغامض، فهناك نوع من التداخل في هذه المسألة.

سنوضح كيف يتم وضع هذا النوع من المساءل في إطار عمل عام، سنبدأ بالمرحلة الثانية حيث نحتاج إلى اختيار متغير القرار y (إذا كان هناك أكثر من متغير فإن y سيكون ناقل). سيتم اختيار المتغير y لتقليل التكاليف، مع معرفة قرار المرحلة الأولى، نفترض أنه x، ونتيجة الحدث العشوائي. سنكتب ع للإشارة إلى العنصر العشوائي بهذه المسألة، إذن ع هو متغير عشوائي قيمته غير معروفة مقدماً. في مثال بارثينون y هي $x_2$، تشير إلى الكمية المطلوبة في مارس، وع تشير إلى الطقس في مارس والتي قد تكون لها ثلاثة قيم مختلفة.

سوف ننظر في مسألة يكون عنصر المخاطرة فيها هو صانع القرار وتهدف إلى تعظيم الأرباح المتوقعة، أو تقليل التكاليف المتوقعة. بشكل عام، يمكن القول أنه يتم تحديد التكاليف إما في المرحلة الأولى أو الثانية. في المرحلة الأولى تعتمد على قرار المرحلة الأولى فقط، ومن ثم يمكننا كتابتها $C_1(x)$، لكن في المرحلة الثانية تعتمد على قرارات المرحلة الأولى والثانية وعلى نتيجة المتغير العشوائي ξ. ، بالتالي، نكتب دالة تكاليف المرحلة الثانية كالتالي $C_2(x, y, \xi)$.

الصيغة الكاملة للمسألة سوف تتضمن ليس فقط دوال التكلفة $C_1$ and $C_2$، لكن أيضاً نقاط احتمالات x لقرار المرحلة الأولى x، ونقاط احتمالات y لقرار المرحلة الثانية y. بوجه عام، قد تعتمد y على قيم x وξ، رغم أننا لم نرى ذلك في ترميز المسألة.

$Q(x, \xi)$ تشير إلى أقل تكلفة في المرحلة الثانية بناءً على x وξ.

إذن:

$$Q(x, \xi) = \min_{y \in Y}\{C_2(x, y, \xi)\}.$$

قرار المرحلة الأولى يتمثل في اختيار قيمة x التي تقلل التكاليف الإجمالية المتوقعة على افتراض اتخاذ قرار المرحلة الثانية على النحو الأمثل. وللوصول إلى قيمة المتغير العشوائي ξ، نفترض أن التكلفة الإجمالية للخيار xهي $C_1(x) + Q(x, \xi)$. إذن، المسألة الشوائية التي نريد حلها هي:

$$\min_{x \in X}\{C_1(x) + E_\xi[Q(x, \xi)]\},$$

حيث نستخدم الرمز $E_\xi[\cdot]$ للإشارة إلى التوقعات فيما يتعلق بالمتغير العشوائي ξ.

**مثال 7-1: (متابعة) شركة بارثينون للنفط**

نعود مرة أخرى إلى مثال شركة بارثينون لكي نضعه في إطار العمل المذكور. علينا الاختيار بين تضمين تكلفة تخزين النفط إما في المرحلة الأولى أو المرحلة الثانية. نفترض اختيار المرحلة الأولى، إذن

$$C_1(x_1) = 160x_1 + 5(x_1 - 1000),$$
$$C_2(x_1, x_2, \xi) = c\xi\, x_2,$$

حيث يأخذ المتغير العشوائي $\xi$ القيم A, B, C. وبالتالي

$$Q(x1, \xi) = \min \{c\xi\, x_2 : x_2 \geq d\xi + x_1 - 1000,\ x_2 \geq 0\}.$$

وبما أن $c\xi$ $(c_A, c_B \text{ or } c_C)$ إيجابي، فإن الحد الأدنى لـ Q يحدث عند أقل قيمة محتملة لـ $x_2$. ونلاحظ أن كل قيمة لـ $x_2$ يجب أن تكون صغيرة قدر الإمكان. سيتم تحديدها لتوافق الطلب في مارس، أو سيتم تصفيرها إذا كان مخزون النفط يكفي الطلب، إذن

$$x_{2A} = \max(0, d_A - x_1 + 1000),$$
$$x_{2B} = \max(0, d_B - x_1 + 1000),$$
$$x_{2C} = \max(0, d_C - x_1 + 1000).$$

ما يعني أن

$$Q(x_1, \xi) = c\xi \max(0, d\xi - x1 + 1000).$$

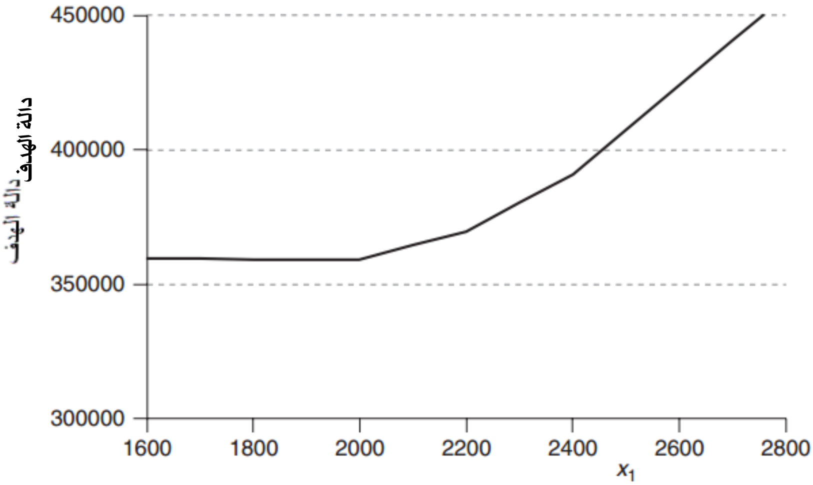
وتشمل التوقعات متوسط $Q(x1, \xi)$ في قيم $\xi$ الثلاثة، ومن ثم فإن الصيغة التي نحتاجها لتقليل (over x1) هي

$$160x_1 + 5(x_1 - 1000) + (1/3)cA \max(0, dA - x_1 + 1000)$$
$$+ (1/3)c_B \max(0, d_B - x_1 + 1000) + (1/3)c_C \max(0, d_C - x_1 + 1000).$$

إذن قمنا بتغيير المسألة بحيث يكون لدينا متغير قرار واحد هو $x_1$ وأكثر من دالة هدف معقدة. ويمكن حلها من خلال تقييم دالة الهدف بناءً على قيم مختلفة لمتغير القرار x1، وليس هناك حاجة لحل مسألة البرمجة الخطية. يوضح الشكل 7-4 الطريقة التي تعمل بها هذه الدالة (بقيم d و c من الجدول 7-1). كل قيمة من $\max(0, \cdot)$ تتوافق مع أحد الأركان في الدالة. يتراجع الجزء الأولي بشكل طفيف ونستطيع أن نرى الوصول إلى نفس الحل الذي وصلنا إليه من قبل بالحد الأدنى المحقق عند $x_1 = 2000$.

نرى أن هناك منهجين مختلفين لحل المسألة. في المنهج الأول، نستخدم البرنامج الخطي لتعظيم القيم القليلة في كلا المرحلتين الأولى والثانية في خطوة واحدة. في المنهج الثاني، نجد أن الخيارات المثلى للمرحلة الثانية بديلة لتكاليف المرحلة الثانية.. وغالباً ما يؤدي المنهج الأول، الذي يقوم على جمع كل الأشياء في مسألة تعظيم واحدة، إلى صياغة

أكثر سهولة، وأرشح هذا المنهج في حالة الدوال الخطية والغموض المتعلق بمجموعة صغيرة من السيناريوهات.




الشكل 7-4: تكاليف شركة بارثينون النفطية كدالة $x_1$

## 7-1-3 الطلب في حالة الطلب العشوائي

الآن نريد النظر في الحالة التي تنطوي على شكل عشوائي مستمر، إضافة إلى متغيرات قرار مستمرة. إذن، بدلاً من عدد سيناريوهات محددة محتملة الحدوث، هناك عدد من المتغيرات العشوائية المستمرة، والتكاليف تتوقف على نتائجها. أحد الطرق الأكثر شيوعاً التي نرى فيها حدوث ذلك عندما تتوقف التكاليف على الطلب على بعض المنتجات التي تبيعها شركة ما، ويكون الطلب متغير عشوائي.

نفترض أن الشركة تحتاج إلى تحديد كمية المشتريات التي تلبي الطلب دون معرفة الطلب بالتحديد. على سبيل المثال، قد يحتاج بائع ملابس بالتجزئة إلى إجراء الطلب مقدماً قبل بداية الموسم. إذا كان الطلب أكثر من الكمية التي تم شراءها، فإن البائع يتمكن من بيع كل القطع. لكن إذا كان الطلب أقل من الكمية المطلوبة، سيتبقى مخزون حتى نهاية

الموسم. عادة ما يتم بيع هذا المخزون بأسعار منخفضة، وبعض الأحيان بأسعار أقل من سعر التكلفة. يتم تحديد الكمية الصحيحة للطلب بناءً على توزيع الطلب والفارق بين كم الأموال الناتجة عن البيع بالسعر كاملاً مقابل البيع بأسعار تخفيضات نهاية الموسم. تشيع هذه المشكلة بين إدارة العمليات وعادة ما تُعرف بإسم مشكلة بائع الصحف.

نصيغ ذلك في نموذج تعظيم عشوائي، حيث يمكن صنع القرار بشأن عدد القطع من منتج معين عند بسعر $c للقطعة من قبل بائع التجزئة يتم بيع القطعة بسعر $p أثناء الموسم، والقطع المتبقية لنهاية الموسم يتم خفض سعرها إلى $s ليتم بيعها في تخفيضات نهاية الموسم.

نفترض أن القطع x يتم شراءها من قبل بائع التجزئة، وبالتالي فإن تكاليف المرحلة الأولى هي cx. فإن أرباح المرحلة الثانية تعتمد على كل من x والطلب العشوائي D.قد يتمكن البائع من تحقيق أرباح px إذا كان x أقل من D، إذا تم بيع كل المنتجات، وتحقيق أرباح $pD + s(x - D)$ if $x > D$، وبالتالي، تم خفض العناصر $x - D$ في نهاية الموسم.

في هذه المسألة يوجد قرار واحد فقط يجب صنعه. قبل ذلك، نظرنا إلى التكاليف وقمنا باستخدام الدالة ( $Q(x, \xi)$ للإشارة إلى أقل تكاليف في المرحلة الثانية، بناءً على قرار المرحلة الأولى x والقيمة المحددة للمتغير العشوائي $\xi$. الآن سوف ننظر إلى الأرباح ونستخدم $Q(x,D)$ للإشارة إلى أرباح بائع التجزئة، بناءً على كمية الطلب x(قرار المرحلة الأولى) والقيمة المحددة للطلب العشوائي D، وننتقل من تقليل التكاليف إلى تعظيم الأرباح. إذن :

$$Q(x,D) = px - (p - s) \max(x - D, 0).$$

(يمكنك التأكد من أن هذه الصيغة صحيحة للحالتين سواء كانت x أقل أو أكبر من D). ويمكن إيجاد أقصى قيمة متوقعة للأرباح الإجمالية من خلال الدالة

$$\max_{x} \{-cx + E_D[Q(x,D)]\},$$

التي تعادل الصيغة في شكل (7-2)، لكن مع استبدال الأرباح بالتكاليف.

نفترض أن الطلب D يمكن أن يأخذ القيم بين 0 وM ويأخذ دالة الكثافة f. نشير إلى الأرباح المتوقعة في حالة طلب كمية x بـ Π(x): تلك ما سوف نعظمها بالنسبة إلى x. إذن بعد استبدالها بـ Q، يصبح لدينا

_(x) = −cx + _ M [px − (p − s) max(x − z, 0)]f (z)dz
= (p − c)x − _ M (p − s) max(x − z, 0)f (z)dz
= (p − c)x − (p − s) _ x (x − z)f (z)dz . (3-7)

هنا نستند إلى الحقيقة، $\int_0^M f(z)dz|$ ثم نصل إلى الخطوة النهائية من افتراض أن القيمة المتكاملة لـ x < z هي صفر.

ولإيجاد الخيار الأفضل لـ x نريد الحصول على مشتق *Π(x)*، هنا نحتاج نتيجة عن كيفية الحصول على مشتق التكامل عندما يعتمد كلاهما والقيمة المتكاملة على المتغير المطلوب. ما سبق يُطلق عليه قاعدة إيبنتز وتقول أن

$$\frac{d}{dx}\int_0^{f(x)} g(x,z)dz = \int_0^{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} g(x,z)dz + f'(x)g(x,f(x)).$$

بمعنى آخر، يمكننا الحصول على المشتق داخل التكامل المعطى حيث نضيف عبارة للسماح لنقطة النهاية بالتحرك بشكل صحيح. وعند إضافة العبارة يجب الأخذ في الاعتبار كل من السرعة التي تتحرك بها النقطة *f (x)*، وقيمة التكامل عند هذه النقطة.

نستنتج ما سبق أنه يتم الحصول على الخيار الأفضل لـ x عندما يكون ناتج المعادلة التالية صفر:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Pi(x) &= \frac{d}{dx}\left\{(p-c)x-(p-s)\int_0^x (x-z)f(z)dz\right\}\\ &= p-c-(p-s)\int_0^x f(z)dz.\end{aligned}$$

العبارة الإضافية (إيبنيز) هي صفر لأن التكامل *(x − z)f (z),* يأخذ القيمة صفر عندما تكون *z = x.*

*F(x)* هي دالة التوزيع التراكمي لتوزيع الطلب، ومن ثم، يمكن كتابة شرط

الحصول على الحد الأقصى كالتالي

$$p - c - (p - s)F(x) = 0.$$

وبالتالي، يجب اختيار x ولذلك

$$F(x) = \frac{p - c}{p - s}. \tag{4-7}$$

حتى لو كنت تجد أن الأمر يتطلب براعة في علم التفاضل والتكامل والتخمين لفك الغموض، يمكننا أن نرى ما يحدث بشكل أكثر وضوحاً عند تطبيق مثال.

**مثال 7-2: تروي فاشونز**

تروي فاشونز المحدودة تبيع نوع من المعاطف الشتوية بثمن 200 دولار، وتتعامل مع مصنع ملابس يقوم بتوريد القطعة بثمن 100 دولار. المعطف الذي لا يتم بيعه في فصل الشتاء سيتم خفض قيمته إلى 75 دولار. وبالتالي، $c$ = \$100, $p$ = \$200, and $s$ = \$75. نفترض أن تروي فاشونز يواجه نسبة مخاطرة محايدة ويرغب في تعظيم الأرباح المتوقعة. إذا كان يتم توزيع الطلب بشكل موحد بين 0 و200 ، ما الخيار الأنسب للكمية *x وما الربح المتوقع إذا استخدمنا *x.

**الحل**

بما أن الطلب غير موحد على [0, 200]، لدينا $F(x) = x/200$ for $0 \le x \le 200$. إذن بالاستبدال بالمعادلة (7-4 ) ، نحصل على الخيار الأمثل للطلب *x من

$$\frac{x^*}{200} = \frac{p - c}{p - s} = \frac{100}{125} = 0.8.$$

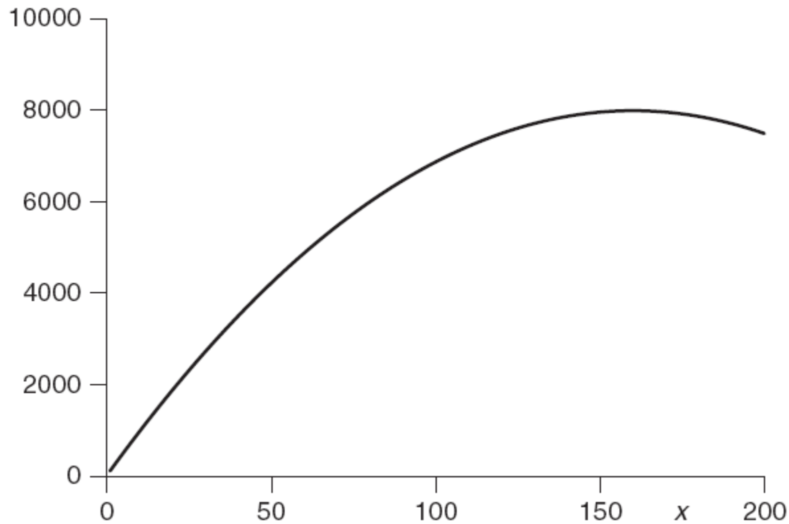
إذن $x^* = 200 \times 0.8 = 160$، وتحتاج تروي فاشونز المحدودة لطلب 160 معطف ببداية الموسم.

للتأكد من النتيجة وإيجاد الأرباح المتوقعة المثلى ، ننظر إلى ما حدث للأرباح المتوقعة في الدالة x. وباستخدام المعادلة (7.3) نجد أن

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= (p-c)x - (p-s)\int_0^x (x-z)f(z)dz \\ &= (200-100)x - (200-75)\int_0^x (x-z)\frac{1}{200}dz \\ &= 100x - \frac{125}{200}\left[\left(xz - \frac{z^2}{2}\right)\right]_0^x \\ &= 100x - \frac{125}{200}\frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

هذه الدالة موضحة في الشكل 7-5 حيث نستطيع أن نرى الوصول إلى الحد الأقصى عند النقطة 160. ونتوصل إلى الأرباح المتوقعة عندما تكون x=160 من خلال المعادلة التالية

$$100 \times 160 - \frac{125}{200}\frac{(160)^2}{2} = 8000.$$




***الشكل 7-5: الربح المتوقع كدالة x***

## 7-2 اختيار السيناريو

نظرنا في نوعين من التعظيم العشوائي حتى الآن، ولدينا نوعين مختلفين من الغموض. في المثال الخاص بشركة بارثينون كان هناك عدد صغير من السيناريوهات، بينما في مسألة بائع الصحف في مثال تروي فاشونز كان الطلب دائما غير معروف أي أنه متغير عشوائي دائم. مسألة بائع الصحف عادة لا تسمح بحساب حل معين.

على سبيل المثال، مع الغموض الذي يحيط بمتغير عشوائي دائم أو أكثر يصعب الوصول إلى حل معين. نحتاج التعامل بشكل مختلف مع هذا النوع من المساءل ويعتبر المنهج الأفضل هو تقريب المتغيرات العشوائية الدائمة من خلال خلق عدد من السيناريوهات لتقدير الأرباح المتوقعة مع القرارات المختلفة. سنستعرض في هذه الجزئية محاكاة مونت كارلو كوسيلة لخلق السيناريوهات، ونستعرض في الجزئية التالية كيفية تطبيق هذه الأفكار على المساءل المعقدة متعددة المراحل.

لتوضيح الفكرة نعود إلى مسألة بائع الصحف مرة أخرى لنرى ماذا يحدث إذا كان هناك كمية محددة للطلب في سيناريوهات الطلب المختلفة التي يمكن حدوثها، بدلاً من وجود نطاق متغير للطلب. بالتالي فإن الأرباح المتوقعة في المرحلة الثانية $Q(x,D)$ تتحول إلى قيمة متوسطة في مختلف السيناريوهات المحتملة. إذا كان لدينا احتمالات $D1, D2,...,DN,$ للطلب N، وكل منهم متساوي في فرصة الحدوث، فيمكن الوصول إلى الأرباح المتوقعة من خلال:

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= -cx + E_D[Q(x, D)] \\ &= -cx + \sum_{i=1}^{N}(1/N)Q(x, D_i).\end{aligned}$$

**مثال 7-2: (متابعة) تروي فاشونز**

عودة إلى مسثال تروي فاشونز، بدلاً من إجراء مسألة تعظيم كاملة، سننظر إلى الحل الأمثل عندما يكون كل سياريون من الأربعة متساوي في فرصة الحدوث: نفترض أن الطلب هو 170 ,120 ,80 ,30، فتصبح المسألة كالتالي:

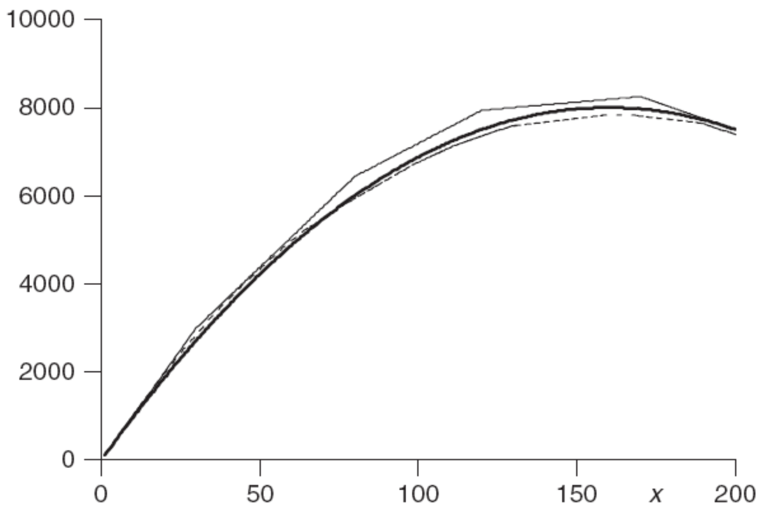
$$\max_x -100x + (1/4)Q(x,30) + (1/4)Q(x,80) + (1/4)Q(x,120) + (1/4)Q(x,170)$$

مع

$$Q(x,D) = 200x - 125\max(x - D, 0)$$

إذن يمكن كتابة المسألة

$$\max_x \left[100x - \frac{125}{4}\left(\max(x-30,0) + \max(x-80,0) + \max(x-120,0) + \max(x-170,0)\right)\right].$$




***الشكل 7-6: يوضح استخدام عدد من السيناريوهات المحتملة لتقريب قيمة الأرباح المتوقعة***

يوضح الشكل 7-6 الهدف والهدف المقارب (الخط الرفيع المقسم).

وبإضافة مزيد من السيناريوهات وإعطاءهم فرص متساوية للحدوث سنصل إلى أفضل المقاربات. أحد الطرق لخلق سيناريوهات هي اختيارهم بصورة عشوائية (تُعرف

فكرة خلق سيناريوهات عشوائية بإسم مونت كارلو وسوف نتحدث عنها أكثر في الجزئية القادمة). هنا تصبح أي قيمة بين 0 و200 ذات فرصة متساوية الحدوث، من ثم قمنا باختيار الرقم 15 بشكل عشوائي (بالتقريب إلى أقرب رقمين عشريين): 110.59، 57.42, 24.18, 158.13, 35.12, 188.80, 42.81, 130.29, 190.82, 98.77, 17.57, 168.24، 62.61, 128.20, 72.81. بالتالي نجد أن الشكل المناسب لدالة الهدف:

$$100x - \frac{125}{15}(\max(x - 110.59, 0) + \max(x - 57.42, 0) + \ldots$$
$$+ \max(x - 62.61, 0)).$$

يصبح الخط المقسم في شكل 7-6 أقرب إلى دالة الهدف كلما قمنا بتجربة مزيد من السيناريوهات.

## 7-2-1 كيف يمكن تنفيذ نموذج محاكاة مونت كارلو؟

يعتبر نموذج محاكاة مونت كارلو أحد النماذج المهمة في نمذجة المخاطر. حتى لو لم نستطيع كتابة فقرات ضمنية لتقييم الأداء المتوقع لقرار ما، فيمكننا عمل تقديرات باستخدام نموذج المحاكاة. فالطريقة التي يتم تنفيذ محاكاة مونت كارلو بها تستحق التفكير بعناية.

كل سيناريو يختار قيم للمتغيرات العشوائية التي توافق العملية العشوائية الحقيقية من خلال ما سيتم تحديده. إذن القيمة المتوسطة لعدد كبير من السيناريوهات، كل منهم تعادل التوزيع الاحتمالي المناسب، ستؤدي إلى قيمة متوقعة حقيقية. هذه هي نمذجة مونت كارلو.

في كل مساءل التعظيم العشوائي تقوم على بنية متعددة المراحل تنطوي على تطور عشوائي مع المتغيرات العشوائية التي تحدث في كل مرحلة وتغذي ما يحدث في المرحلة التالية، ومن ثم سيكون هناك متغيرات قرار نحتاج اختيارها عند كل مرحلة.

سنناقش ذلك في الجزئية التالية، لكن في الوقت الحالي نود التركيز على استخدام محاكاة مونت كارلو حيث هناك مرحلة واحدة فقط لن يظهر عندها أي احتمالات عشوائية.

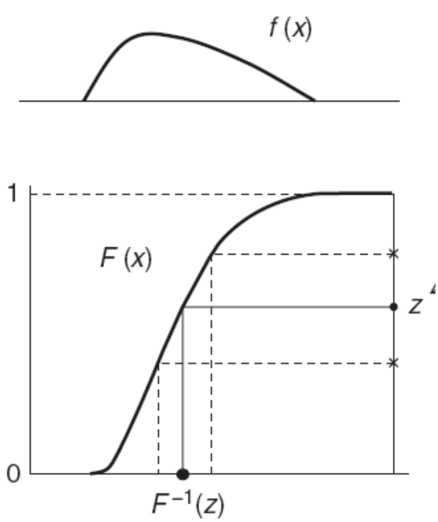
لدينا العديد من البرامج القائمة على جدول البيانات والتي تسمح بتنفيذ نموذج مونت كارلو بطريقة بسيطة وتلقائية، لكن بدلاً من تلك البرامج سوف نستخدم أبسط منهج

ممكن باستخدام الدوال المتاحة داخل برنامج إكسيل نفسه. قد يكون الأمر مرهق مع كبر حجم جدول البيانات، لكن ميزته البساطة والوضوح.

لكي نحصل على سيناريوهات عشوائية من داخل جدول البيانات سوف نستخدم دالة RAND، وتُكتب RAND().تنتج المعادلة رقم عشوائي غير موحد موزع بين 0 و1. وينتج رقم عشوائي جديد في كل مرة يتم فيها حساب البيانات أو الضغط على F9. إذن للحصول على الطلب مع رقم غير موحد موزع بين 0 و100، يمكننا وضع الصيغة RAND()*100= في أحد الخانات.

عملياً، من النادر وجود رغبة في خلق سيناريوهات باستخدام توزيع غير موحد. من ثم فإننا نحتاج إلى وسيلة للحصول على توزيع غير موحد لبعض التوزيعات الأخرى، يتم ذلك باستخدام منهج التحويل العكسي كما هو موضح في الشكل 7-7.

نفترض أننا نريد رسم نموذج لأحد المتغيرات العشوائية بدالة الكثافة *f*، مع دالة التوزيع التراكمي *F*. نبدأ بإيجاد رقم عشوائي z وهو غير موحد بين 0 و1 ثم تحويل الرقم z إلى النقطة y بحيث *F(y) = z..*. إذا كانت دالة الكثافة *f* إيجابية في النطاق الخاص بها




***شكل 7-7: تحويل المتغير العشوائي الموحد z إلى توزيع معين من خلال F−1(z).***

بالتالي سوف تتزايد F وسيتم تحديد نقطة واحدة Y من خلال هذا الإجراء. يمكن القول أن y تأتي من عكس الدالة f التي يتم تطبيقها على الرقم z، نكتب الصيغة هكذا $y = F{-}1(z)$. (لاحظ أن الدالة العكسية ليس لها علاقة بـ $1/F(z)$).

يوضح الشكل 7-7 أن هذا العملية من المحتمل أن تسفر عن رقم تصبح عنده الدالة F شديدة الانحدار، حيث تمتلك دالة الكثافة قيمة مرتفعة، وذلك بالضبط ما نريده. الآن نحن بصدد صيغة أكثر رسمية، حيث يؤدي التحويل العكسي إلى متغير عشوائي مع دالة التوزيع الصحيحة.

نفترض أن X تمتلك توزيع موحد على الامتداد (0,1) وأن الحصول على المتغير العشوائي من خلال $F{-}1(X)$. إذن نحصل على نموذج من y بأخذ نموذج x من التوزيع X ثم نختار قيمة y وبالتالي $F(y) = x$. ولإيجاد توزيع y لاحظ أن

$$\begin{aligned}\Pr(y \le a) &= \Pr(F(y) \le F(a)) \\ &= \Pr(x \le F(a)) \\ &= F(a).\end{aligned}$$

التكافؤ الأولي رجع إلى أن F دالة تصاعدية، أما الباقي يرجع إلى الطريقة التي يتم بها اختيار y وحقيقة أن x يمثل نموذج من توزيع موحد. إذن احتمالية أن تكون y أقل من a تتماشى مع قد يكون إذا أخذت y دالة التوزيع F. من ثم، نرى أن y تأخذ التوزيع الذي نرغب فيه.

**مثال 7-3**

نريد خلق سيناريو يتخذ فيه الطلب توزيع مع كثافة $f(x) = 2 - x$ في النطاق $0.5 \le x \le 1.5$. ما الصيغة التي من المفترض وضعها في خانة جدول البيانات للحصول على نموذج من هذا التوزيع؟

**الحل**

نحتاج أن نبدأ بإيجاد دالة التوزيع التراكمي لدالة الكثافة المذكورة. الدالة F تساوي صفر أدنى 0.5، F تساوي 1 أعلى0.5 وبين هذه القيم نجد أن

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{0.5}^{x} f(z)dz \\ &= \int_{0.5}^{x} (2-z)dz = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{0.5}^{x} \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{8}\right). \end{aligned}$$

يمكننا التأكد من أن الوصول إلى النتيجة 1 عندما $x = 1.5$. حصلنا على النتيجة $2 \times (3/2) - (9/8) - (7/8) = 1$ كالمطلوب.

بناءً على القيمة z التي يتم توزيعها بشكل موحد على [0,1]، يمكننا الحصول على قيمة جديدة من عكس هذه الدالة . بالتالي نريد الحصول على قيمة x التي تؤدي إلى حل ما يلي:

$$2x - \frac{x^2}{2} - \frac{7}{8} = z.$$

وبالتالي

$$x^2 - 4x + \frac{7}{4} + 2z = 0$$

و

$$x^2 - 4x + \frac{7}{4} + 2z = 0$$

والآن نحتاج لاتخاذ قرار ما إذا كان الشق الأعلى أم الأسفل صحيحاً، هل يجب الجمع أم الطرح في هذه العبارة ؟ نحن بحاجة للحصول على قيم x بين 0.5 و1.5، ومن ثم نحتاج إلى الطرح (الشق الأسفل) بالتالي، نتوصل إلى العبارة التالية في خانة جدول البيانات

=2-0.5*SQRT(9-8*RAND())

**مثال 7-4: تروي فاشونز في حالة الطلب الطبيعي**

نعود مرة أخرى إلى مثال تروي فاشونز ، لكن نفترض أن توزيع الطلب طبيعياً بمعنى أن $\mu = 100$ وانحراف معياري لـ .20 = $\sigma$، يمكننا استخدام المعادلة (7.4) لتحديد كمية الطلب المثلى التي تغطي الاحتياجات

$$F(x) = \frac{p-c}{p-s} = 0.8.$$

الدالة F هي دالة توزيع تراكمي عادية، غالباً ما تكتب ϕ. ولحل هذه المعادلة للوصول إلى x يمكن استخدام جداول بتوزيع طبيعي، لكن سيكون الأمر أكثر سهولة مع استخدام دالة جدول البيانات NORMINV، المصممة لإيجاد قيمة x التي تعطينا احتمالية للتوزيع الطبيعي أدناها، وهي بالضبط المسألة التي نريد حلها. الدالة NORMINV$(y,\mu, \sigma)$، تتوصل إلى القيمة x حيث يحقق التوزيع العادي للقيمة المحددة $\mu$ وانحراف معياري $\sigma$ احتمالية أن تكون y أقل من x. بكتابة المعادلة =NORMINV(0.8,100,20) في جدول البيانات نحصل على القيمة 116.832، أ أن x=117، ما يعد الخيار الأمثل لـx في هذه المسألة.

سنوضح محاكاة مونت كارلو باستخدام هذا المنهج لتقدير الأرباح المتوقعة عندما تكون x=117. تمثل هذه الفكرة متوسط عدد من السيناريوهات المختلفة للطلب، مع السيناريوهات المستمدة من الشريحة السكانية المستهدفة.

جدول البيانات BRMch7-TroyFashions.xlsx يحمل 1000 رسم عشوائي من التوزيع العادي للطلب لتقدير متوسط الأرباح. في كل صف من جدول البيانات سيناريو عشوائي مختلف للطلب. أنظر الخلية B4 التي تعطينا أحد سيناريوهات الطلب العشوائي مع صيغة المعادلة =NORMINV(RAND(),100,20). وكما قلنا من قبل، الدالة NORMINV$(y,\mu, \sigma)$ تأتي من عكس دالة التوزيع التراكمي

للحصول على توزيع عادي، ومن ثم هي الدالة التي نحتاجها لمنهج التحول العكسي من أجل الحصول على الطلبات مع توزيع عادي.

يبلغ متوسط الأرباح نحو 9300 دولار. حتى مع أخذ متوسط ما يزيد عن 1000 عملية متكررة ، والذي من المتوقع أن يقترب من القيمة الحقيقية المتوقعة، مازال هناك كثير من المتغيرات (جرب الضغط على F9 بشكل متكرر ليعيد حساب كل الأرقام العشوائية، وقد ترى ارتفاع متوسط الأرباح من أقل من 9200 دولار إلى أكثر من 9400 دولار).

## 2-2-7 بدائل لنموذج مونت كارلو

في مثال تروي فاشونز نجد مدى تغير تقديرات الأرباح المتوقعة حتى مع 1000 سيناريو تم تحليله . يرجع السبب في ذلك إلى عشوائية النموذج. وبشكل أساسي، غالباً سوف ينتج عن الفرصة تجميع النموذج في مناطق الطلب حيث يوجد إما أعلى أو أدنى متوسط الأرباح.

هناك منهج بديل تنتشر نقاط النموذج بشكل منتظم، ويظهر في الجانب الأيمن من جدول البيانات BRMch7-TroyFashions.xlsx.

وبدلا من عمل تقديرات بأخذ 1000 رقم عشوائي بين 0 و1 واستخدام التحويل العكسي لهم للحصول على 1000 قيمة للطلب، هذه الطريقة الحسابية سوف تأخذ 98 قيمة 0.01, 0.02, 0.03, ... , 0.98, 0.99 . ويتم استخدام هذه الأرقام بدلاً من الأرقام العشوائية للحصول على مجموعة من قيم الطلب ويتم تقدير الأرباح المتوقعة بإيجاد القيمة المتوسطة لهم.

وباستخدام منهج التحويل العكسي نحصل على قيم الطلب الموزعة بشكل غير موحد، في المقابل تصبح النقاط أقرب إلى بعضها عند قيم الطلب مع احتمالية عالية للحدوث (كثافة عالية). يعطينا هذا المنهج تقدير أكثر وضوحاً عن منهج مونت كارلو ، وننصح باستخدامه دائماً عندما يكون هناك متغير عشوائي واحد أو اثنين في المحاكاة.

رغم ذلك، يظهر منهج مونت كارلو بشكل تلقائي عندما يكون هناك عدد مختلف من المتغيرات العشوائية كل منهم له توزيع (أو داخل توزيع مشترك). نفترض أن هناك ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة في هذه العملية الحسابية، فإن المنهج الذي يتخذ عدد من الأرقام العشوائية يتطلب الآن 1000 إعادة، لنحصل على 10 قيم مختلفة لكل متغير من الثلاثة.

بشكل أساسي، نحاول تقييم الأرباح المتوقعة من خلال الحصول على متوسط النتائج التي تحدث في شبكة ثلاثية الأبعاد، مع مباعدة الشبكة التي تم تحديدها بواسطة دالة الكثافة للمتغيرات العشوائية الفردية.

وبما أن عدد المتغيرات تصاعدي، يصبح العمل بمنهج قائم على الشبكة أمر أكثر صعوبة. على سبيل المثال، إذا كان هناك متغير عشوائي مختلف، كل منهم سيتم توزيعه بشكل موحد على (0,1)، إذن ربما نحتاج إلى نمذجة ذلك من خلال إعطاء كل متغير عشوائي 3 قيم: .0.25, 0.5 and 0.75. لكن مع 15 متغير سيصبح لدينا 348 14 = 315 907 سيناريو وهو عدد كبير للوصول إلى حل دقيق.

بالتالي، إذا كانت المسألة متعددة الأبعاد فإننا مضطرين لاستخدام منهج مونت كارلو، الذي قد يكون الطريقة الوحيدة للتقدم في الحل. في واقع الأمر، يعمل منهج مونت كارلو بشكل جيد في معظم الحالات مع دقة الحلول المحددة عن طريق عدد من السيناريوهات بناءً على عدد من المتغيرات العشوائية.

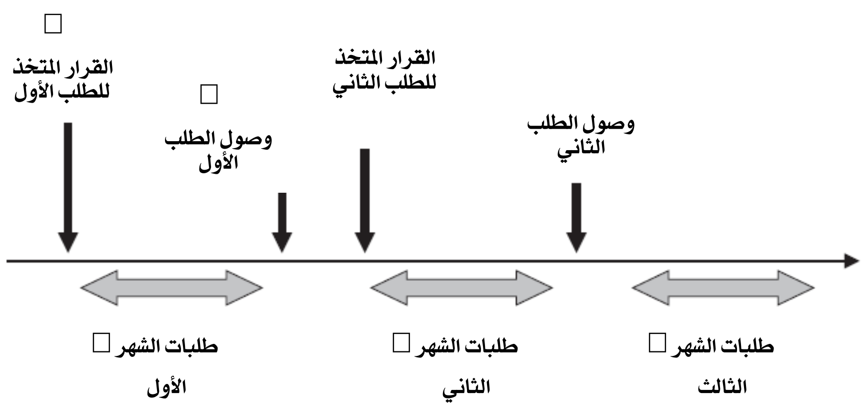
## 3-7 التعظيم العشوائي متعدد المراحل

الآن نعود مرة أخرى إلى حل مساءل التعظيم العشوائي حيث يجب على صانع القرار صنع سلسلة من القرارات المتعاقبة في ظل زيادة المعلومات المتاحة مع مرور الوقت. نهدف إلى استخدام محاكاة مونت كارلو في هذه البيئة متعددة المراحل. إعطاء وصف للمسألة داخل إطار عمل عام قد يكون محيراً، ومن ثم سوف نستخدم نموذج بسيط للتوضيح.

**مثال 7-5 اليكسندر باتو للتوريدات**

يستخدم الفريق الإداري لألكسندر باتيو خطة أفقية .$T$ = 3 months. في بداية كل شهر، تقوم الشركة بعمل طلب لكراسي الحديقة من المورد ثم يصل في بداية الشهر التالي. يتم عمل الطلب خلال الشهر، وإذا كان الطلب أكبر من المخزون المتاح فإن العملاء سوف يذهبوا لمكان آخر (لذلك فإن الطلب الزائد خسارة). يوضح الشكل 7-8 التسلسل الزمني.

تهتم الشركة بسياسة الطلب لنوع معين من كراسي الحديقة. يخضع الطلب في كل شهر على توزيع عادي بمتوسط 50 وانحراف معياري 10، والطلب في الشهور المتعاقبة مستقل. يتم شراء الكراسي بسعر 100 دولار للكرسي ويتم بيعه بسعر 140 دولار. ولكي تحتفظ بكرسي من شهر للشهر التالي سيكون الأمر عالي التكلفة – تصل تكلفته 10 دولار. نفترض أن لدينا مخزون بمبلغ $y1 = 50$ في بداية الفترة الأولى، سيكون الخيار الأول هو اختيار x1، عدد الكراسي المطلوبة في أول شهر. وإذا كان الطلب في أول شهر $D_1$ إذن يتم بيع $\min(y_1,D_1)$ والاحتفاظ بكمية $\max(y_1 - D_1, 0)$. ونبدأ المرحلة الثانية بكمية $y_2 = \max(y_1 - D_1, 0) + x_1$. ويتم تكرار كل العملية. نسمح بإضافة تكلفة الاحتفاظ بالمخزون في نهاية الأشهر الثلاثة ولكننا لا ننظر إلى أي تكاليف أخرى.




*الشكل 7-8: الجدول الزمني للوازم اليسكاندر باتيو*

نجد في جدول البيانات الخاص بمحاكاة مونت كارلو في ملف BRMch7-Alexander.xlsx، أن كل صف في جدول البيانات يمثل سيناريو مختلف، وكل سيناريو ينطوي على ثلاثة طلبات عشوائية مختلفة. هناك 1000 سيناريو مختلف، وتم إنشاء جدول البيانات على أساس مخزون أولي 50 وطلب 55 في بداية الأسبوع الأول، وطلب 40 في بداية الأسبوع الثاني.

تحتوي الخلية B6 على الصيغة =ROUND (NORMINV (RAND( ),$M_u$,Sigma), 0)، حيث أن الدالة NORMINV تعمل على تحويل الرقم العشوائي الموزع بشكل موحد (RAND) إلى توزيع طبيعي بمتوسط من الخلية التي تحمل إسم Mu وانحراف معياري من الخلية التي تحمل إسم Sigma. قامت الدالة ROUND(.,0) بتحويل الناتج إلى أقرب رقم صحيح. ثم تكررت نفس الصيغة في طلبات الشهور الأخرى في العواميد E وH. ويتم الحصول على كمية المبيعات الشهرية (عواميد C، F، I) من خلال الحد الأدنى للمخزون في بداية الشهر والطلب. كان المخزون في بداية الشهر 2 في الخانة D6 هو =Inv_S+Order1-C6، الذي يمثل المخزون الأولي (من الخانة التي تحمل إسم Inv_S) إضافة إلى طلب الشهر 1 (من الخانة التي تحمل إسم Order1) بطرح مبيعات الشهر 1 من الخانة C6. كما يحتوي العمود G على صيغة مشابهة.

نحصل على التكاليف من العمود J والذي يتكون من التكلفة الإجمالية للمنتجات المطلوبة بسعر 100 دولار للكرسي وتكلفة المخزون بسعر 10 دولار × (المخزون الأولي – المبيعات) في كل شهر من الشهور الثلاثة. ونحصل على الأرباح من مبيعات 3 شهور بسعر 140 دولار × (المبيعات) – التكاليف الإجمالية.

لاحظ أن الأرباح الناتجة عن السيناريوهات المختلفة تتنوع بشكل كبير، حتى بعد الحصول على متوسط 1000 إعادة، ما قد يقترب من القيمة الحقيقية المتوقعة، مازال هناك كثير من المتغيرات (يمكنك الضغط على F9 ورؤية ما يحدث لمتوسط الأرباح).

الآن نتساءل عن أفضل القيم لطلبات الشهر 1 والشهر 2؟ هذه المسألة تشبه قليلاً مثال شركة بارثينون حيث يمكننا إنشاء برنامج خطي بمتغيرات القرار $x_1$ و$x_2$. يمكننا استخدام سولفر كأسهل طريقة للوصول إلى الحد الأقصى لمتوسط الأرباح في ملف BRMch7-Alexander.xlsx. ولكن من أجل عمل ذلك علينا تحديد قيم الطلب للحصول على نتائج محددة لـ 1000 سيناريو بعد تقييم التغيرات في كمية الطلب. ونستخدم دالة "لصق القيم" التي تم استخدامها في كتاب الأعمال الثانية في ملف BRMch7-Alexander.xlsx. حاول استخدام سولفر لإيجاد الخيار الأفضل من الطلبين، ينتج عن ذلك عدد من

السيناريوهات، ونحصل على الخيار الأفضل بكتابة $x_1 = 49$ and $x_2 = 36$.

نظراً لأحجام الطلبات المثلى الخاصة بمسألة ألكسندر باتيو، نحن بحاجة إلى استخدام دوال مثل الحد الأدنى (المخزون، الطلب) لحساب المبيعات. ما يظهر في أركان الدوال (الأماكن التي ترتفع عندها المشتقات) ويجعل حل مسألة التعظيم أكثر صعوبة. وتكمن هذه الصعوبة فيما يحدث "بعيداً عن الأنظار" في سولفر.

هناك عدد من الطرق لإنشاء المسألة لتجنب هذه الدوال الصعبة. بوجه عام، مسألة التعظيم التي تظهر فيها عبارة مثل $\min(x, y)$ لكن ما زال منحنى نقاط الاحتمال محدب و(إذا كنا نريد الحصول على الحد الأقصى) منحنى دالة الهدف مقعر، يمكن أن يحل محلها نسخة من نفس الشيء دون الدوال غير السلسة. حيث يمكن استبدال الشرط $A \le \min(x, y)$، بإثنين من الشروط $A \le x$ و$A \le y$. لاحظ أن إذا كان لدينا شرط مثل $A \ge \min(x, y)$، إذن فمنطقة الاحتمال لن تظل محدبة وتفقد المسألة التي تمتلك حد أقصى محل واحد خواصها . إذا كان الهدف ينطوي على الحصول على الحد الأقصى لـ $\min(x, y)$ ، فنحن بحاجة إلى خلق متغير جديد v ومن ثم الحصول على الحد الأقصى لـ v وفقاً للشروط الأصلية إضافة شرطين جديدين: $v \le x$ and $v \le y$.

محاولات حل هذه المسألة تساعدنا على تذكر قواعد العمل مع min and max (نحتاج إلى هذه القواعد في فصل 9 عند مناقشة الخيارات الحقيقية).

$$\max(x, y) = -\min(-x, -y)$$
$$a \min(x, y) = \min(ax, ay) \text{ if } a \ge 0$$
$$\min(\min(x, y), z) = \min(x, y, z)$$
$$z + \min(x, y) = \min(z + x, z + y).$$

## 1-3-7 الشروط غير قابلة للتوقع

أثناء الحديث عن مساءل التعظيم العشوائي متعددة المراحل لم ننظر بعد إلى المعلومات التي تصبح متاحة بمرور الوقت. بشكل أساسي، نرى صعوبة المسألة ترجع إلى الحاجة لاختيار متغيرات القرار في بداية الحل، لكن لا يبدو ذلك صحيحاً. على سبيل المثال في المسألة

الخاصة بألكسندر باتيو، من الجدير بالإدراك أن عندما يتم اختيار القيمة $x_2$ (الطلب الذي تم تحديده في بداية الشهر 2)، فالشركة لديها معلومات بالفعل عن الطلب أثناء الشهر الأول. إذا كان الطلب قوي ما أدى إلى بيع المخزون بالكامل، فمن المعقول أن يتم طلب المزيد، لكن إذا كان الطلب ضعيف وهناك مخزون كبير نسبياً متبقي في بداية الشهر 2، فمن الأفضل تقليل الطلب.

نحتاج إلى إنشاء نموذج لمسألة متعددة المراحل مع الانتباه إلى المعلومات الدقيقة التي قد يتم استخدامها في حال اختيار أي قرار. الجدير بالذكر أن الصيغة التي تجبرنا على اختيار متغيرات القرار في البداية تمنحنا القليل من المرونة، لكن كما نرى، من السهل عمل أخطاء في الصياغة بسبب زيادة المرونة .

قد يسمح لنا النموذج القائم على عدد من القرارات بالاستجابة إلى سيناريوهات مختلفة متضمناً أحداث مختلفة. رغم ذلك، يمكننا الاستجابة فقط إلى ما يحدث بالفعل، وذلك يعني اشتماله على شرط قد يمنعنا من النظر في الكرة الكريستالية لتحديد القرار الأفضل. ما سبق يُعرف بـ "الشرط غير المتوقع" ولاحظ أننا نريد استخدام أي معلومة نعرفها عما قد يحدث في المستقبل، على سبيل المثال، من خلال فهم توزيع متغير عشوائي غير معلوم. رغم ذلك، لا يمكن توقع القيمة الدقيقة للمتغير العشوائي، ولمعرفة المزيد حول هذه الفكرة نعود إلى مثال ألكسندر باتيو.

**مثال 7-6: (متابعة) ألكسندر بايتو للتوريدات**

نفترض حدوث أو ثلاثة سيناريوهات في الجدول الثاني من كتاب الأعمال BRMch7-Alexander.xlsx. من ثم، يوضح الجدول التالي قيم الطلب في الثلاث سيناريوهات التيتم اختيارها:

| Scenario: | A | B | C |
|---|---|---|---|
| $d_1$ | 60 | 41 | 52 |
| $d_2$ | 48 | 58 | 36 |
| $d_3$ | 34 | 66 | 53 |

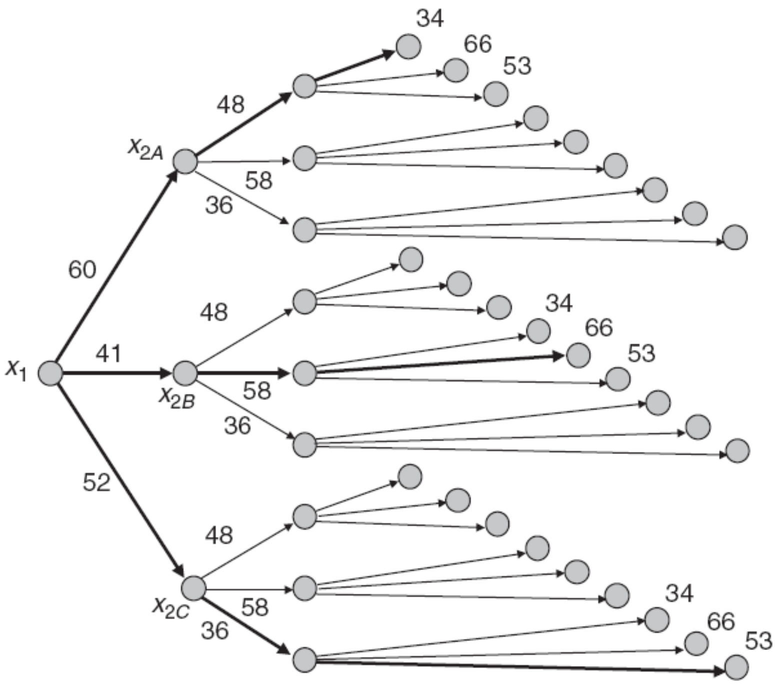
الصيغة الطبيعية تتضمن اختيار قيم مختلفة لـ $x_2$ في سيناريوهات مختلفة. السيناريو الأول يحتوي على قيمة عالية للطلب في الشهر الأول من ثم قد تكون قيمة $x_2$ أعلى من سيناريو B حيث يبلغ الطلب في الشهر الأول 41، ويظهر ذلك في الجدول الثالث من كتاب الأعمال. حاول استخدام سولفر لإيجاد الخيار الأفضل بين أربعة متغيرات مختلفة لـ $x_1$ وقيم $x_2$ في الثلاث سيناريوهات $(x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}.)$، قد تجد أن القيم المثلى هي $x_1 = 49,$ $x_{2A} = 33, x_{2B} = 66, x_{2C} = 40$. تبدو النتيجة مثيرة للدهشة، بدلاً من زيادة الطلب في الشهر الثاني في السيناريو A، نجد أن الطلب أقل مع إيجاد أن $x_{2A}$ أصغر من $x_{2B}$ و$x_{2C}$. يرجع ذلك إلى أن الطلب في الشهر الثاني مطلوب للشهر الثالث، أي أن انخفاض قيمة $d_3$ في السيناريو A ما يجعل القيمة المثلى للطلب هي كمية صغيرة في الشهر الثاني.

نستطيع أن نرى ذلك من خلال السماح لقيمة المتغير $x_2$ بالاعتماد على السيناريو $A, B$ or $C$، *بالتالي تخضع قيمة* $x_2$ *لتأثير* $d_1$ و$d_2$ و$d_3$ ، والتي تكون المعلومات عنها غير متاحة وقت اتخاذ القرار. وباختيار سيناريو بعينه فإننا نحدد المتغيرات المستقبلية أيضاً. لذلك، من خلال الوضوح في المنهج المستخدم يمكن القول أن القرار في نهاية الشهر 1 يعتمد على أحداث لم تحدث بعد، وذلك يكسر الشرط غير المتوقع.

ربما تتضمن صيغة مسألة التعظيم العشوائي شرط غير متوقع ما يجعل القرارات التي يتم اتخاذها بناءً على نفس المعلومات المتاحة متشابهة. بالتالي، إذا بدأ كلا السيناريوهين بطلب 60 في الفترة الأولى، إذن فإن الشرط سيؤدي إلى نفس كمية الطلب في بداية الفترة الثانية. مع ذلك، وكما نرى في مثال ألكسندر باتيو في السيناريوهات الثلاثة، مازالت هناك احتمالية للخروج بصيغة خاطئة بسبب اختيار السيناريوهات التي تتيح المعلومات المستقبلية من ملاحظة الطلب العشوائي في الفترة الأولى. عادة ما يكون بناء الشرط غير المتوقع بشكل مباشر في المسالة أكثر أماناً.

وبالتالي، أفضل منهج هو العمل مع "شجرة سيناريوهات" بدلاً من تحديد عدد من السيناريوهات، ما يسمح لنا بتجنب إدخال الاعتماد الضمني عندما لا نرغب في ذلك. فالعمل وفق نظام "شجرة السيناريوهات" يؤدي إلى قيم متعددة للمتغير العشوائي في المرحلة

2، بناءً على ما حدث في المرحلة 1، وهكذا. عندما تكون الأحداث في المراحل المختلفة مستقلة، يمكننا تمثيل ذلك في "شجرة السيناريوهات" من خلال فصل نتائج المجموعة 2 عن الفرع الحالي. (فصل نتائج المرحلة 1).




*شكل 7-9: مثال على شجرة السيناريوهات*

يوضح الشكل 7-9 مسألة ألكسندر باتيو، حيث يتم تحديد احتمالات الطلب، لكل شهر ثلاثة قيم محتملة. بالطبع يعمل ذلك على تبسيط الاحتمالات بشكل شديد، بما أن القيمة المحتملة لكل شهر بين 30 و70.

تشير الأسهم السميكة في الشكل 7-9 إلى كمية الطلب في كل من السيناريوهات A, B, C التي تم اختيارها من بين 27 سيناريو محتمل. باستخدام مجموعة الـ 27 سيناريو يمكن إنشاء نموذج مناسب تصبح فيه قيمةx2 مختلفة في نقاط الالتقاء الثلاثة الأولى إذا كان الطلب 60، 41، أو 52.

في نموذج "شجرة السيناريوهات" كالمثال الموضح، كلما كان المكون العشوائي دقيق كلما زادت السيناريوهات الفرعية في كل مرحلة. الأمر الذي قد يؤدي إلى شجرة هائلة من السيناريوهات وبالتالي صعوبات حسابية في إيجاد الحلول المثلى. أحد الخيارات المتاحة يتمثل في تقليل دقة النموذج لتقليل الخطوات المستقبلية بتقليل عدد الأفرع مع ارتفاع مستويات الشجرة.

هناك بحث دائم على كيفية حل هذا النوع من المساءل عددياً. يمتد هذا البحث إلى نطاق أوسع مما يتم تقديمه في هذا الكتاب، لكن يمكننا تقديم فكرتين، الأولى تدور حول تقسيم المسألة إلى مساءل فرعية منفصلة لكل نتيجة من نتائج المرحلة الأولى، وقد يكون ذلك ممثلاً في الشجرة الفرعية الثالثة في شكل 7-9.

إذا استطعنا تخمين قيمة $x_1$ فيمكننا إيجاد القيم المثلى لـ $x_{2A}$, $x_{2B}$, $x_{2C}$ بسهولة. غالباً ما ستؤدي طريقة الحل إلى توليد معلومات الحساسية (خاصة عندما تكون المسألة خطية)، لذلك يمكن اختبار نتيجة حدوث تغيرات صغيرة في $x_1$ لكل شجرة فرعية. يمكن استخدام هذه المعلومات لإيجاد التغير في $x_1$ الناتج عن تحسن الأرباح المتوقعة. في المساءل الخطية يمكن تحويل هذه الفكرة إلى عملية توليد شروط إضافية في المسألة الأساسية والتي تستطيع أن تكون فعالة عددياً.

فكرة مهمة أخرى على المستوى العملي هي استخدام أشجار السناريوهات حيث تؤدي السيناريوهات المختلفة إلى احتمالات مختلفة للحدوث بدلاً من احتمالات الحدوث المتساوية. هذه الفكرة تتعلق بالطريقة التي يتم بها توليد محاكاة مونت كارلو – فمن الممكن الحصول على تقديرات الكميات عن طريق التأكد أن مجموعة النماذج المستمدة من التوزيعات العشوائية ذات خصائص محددة.

يجب أيضاً ذكر نقطتين مهمتين فيما يتعلق بمساءل التعظيم العشوائي متعددة المراحل. النقطة الأولى نلاحظ أن عادة ما يكون قرار المرحلة الأولى هو ما نريد الوصول إليه. من الناحية العملية، يمكننا توقع أن مسألة التعظيم العشوائي التي يتم حلها على أساس متجدد. على سبيل المثال، في مسألة ألكسندر باتيو يشمل الحل قرار حجم الطلب في الشهر

1، إضافة إلى القرارات المتخذة للشهر 2 بناءً على الطلب في الشهر 1. التنفيذ المتجدد هنا يستخدم الحل لتحديد الطلب في الشهر 1، لكنه غير ملتزم بما يحدث في الشهر 2. بالتالي، في نهاية الشهر عندما يكون الطلب لذلك الشهر معلوم، يمكن حل المسألة مرة أخرى، لكن هذه المرة يتم تقديم شهر.

النقطة الثانية تتمثل في أن هناك علاقة وثيقة بين هذا النوع من المسائل والنوع الذي يتم حله باستخدام "البرمجة الديناميكية". ينطوي هذا المنهج على النظر عن كثب لما قد يؤثر على القرارات المتخذة عند أي نقطة في الوقت المناسب. بهذه الطريقة يعتبر القرار دالة الظروف في الوقت المناسب t. على سبيل المثال، في مسألة ألكسندر باتيو قد يعتمد قرار حجم الطلب في بداية الشهر الثاني على كمية المخزون المتبقي من الشهر الأول، إذا افترضنا أن الطلب الذي نلاحظه في كل شهر مستقل عن الطلب في الشهور السابقة.

يرجع ذلك إلى أن في الوقت الذي نتخذ فيه القرار قد نتجاهل التكاليف والأرباح المحققة وننظر إلى تعظيم الأرباح المتبقية. هذه الأرباح المتبقية قد تعتمد فقط على حالة النظام ما يعني الاعتماد فقط على مستوى المخزون الحالي. إذا استطعنا إيجاد صيغة المسألة بحيث تكون القرارات عند كل مرحلة ممثلة في دالة الحالة عند هذه المرحلة، إذن ربط ما سبق بطريقة الحل من خلال بعض أنواع البرمجة الديناميكية المتكررة غالباً سيكون جدير بالاهتمام.

الآن نعود إلى المسألة التي تحدثنا عنها في بداية الفصل، حيث تساءلنا حول أفضل طريقة لتشغيل مرفق تخزين ضخي مثل الذي يقع على جبل الراكون. العنصر العشوائي هنا يتعلق بغموض الأسعار، ومن ثم فإن شجرة السيناريوهات تتوافق مع احتمالات مختلفة للأسعار والتي قد تتغير مع مرور الوقت. سنجد ترابط معقد في سلسلة الأسعار، حيث تعتمد الأسعار على الطلب، والطلب يعتمد على درجات الحرارة. نريد تفريغ الخزان عند ارتفاع الأسعار وملأه عند انخفاضها، ومن ثم هناك حدين للأسعار، حد أعلى إذا صعد السعر أعلاه نستطيع توليد الطاقة، وحد أدنى يشير إلى استخدام الطاقة لملأ الخزان.

رغم ذلك، يمكننا أن نتوقع تغير هذه الحدود مع تغير كمية المياه في الخزان. إذا قاربت مياه الخزان على الانتهاء في بداية اليوم، قد نحتاج إلى أسعار مرتفعة لتشغيل

المولدات، كذلك، إذا كان هناك كمية كبيرة من المياه متبقية في الخزان في بداية اليوم قد ننتظر انخفاض الأسعار قبل بدء ضخ المياه إلى الخزان. ومن ثم ربما تساعدنا هذه الأفكار على تحديد سياسة معاملات التغير التي يمكن تعظيمها باستخدام محاكاة مونت كارلو الخاص بأسعار الكهرباء.

## 4-7 القيمة عند شروط المخاطرة

حتى الآن نفترض أنه يمكن طرح المسألة كمسألة تعظيم (أو تقليل) القيمة المتوقعة لدالة الهدف. يمكن استخدام نفس المنهج للتعامل مع حالة يتم اتخاذ القرار فيها بناءً على عنصر تجنب المخاطرة. في هذه الحالة، نحدد دالة المنفعة المقعرة لصانع القرار ونربط بين دالة المنفعة ودالة الهدف. لكن في بعض الأحيان قد يكون استخدام مختلف أكثر نفعاً.

نفترض أن صنع القرار يتوقف على المخاطرة وخاصة الرغبة في تجنب النتائج السلبية. إذا كان هناك مستوى محدد للخسارة غير مقبول إذن أحد الخيارات يتمثل في تعظيم الأرباح المتوقعة كما سبق لكن الإصرار على أي حل يتم اختياره يجنب احتمالية حدوث خسارة أكبر من القيمة المختارة. على سبيل المثال، إذا حاولنا حل مسألة متعددة المراحل بالشكل التالي:

$$\min\{C_1(x) + E\xi\,[Q(x, \xi)]\},$$

ثم يمكن إضافة شرط

$$C_1(x) + Q(x, \xi) < M \text{ for all } \xi.$$

بما أننا بصدد مسألة تعظيم، نحصل على قيم كبيرة للتكاليف من الصيغة $Q(x, \xi)$ والتي يجب تجنبها.مع ذلك، في عدد من المساءل يكون من الضروري تجنب احتمالية التكاليف الكبيرة بالكامل فقط للتأكد من قوة احتمالية تكبد تكاليف كبيرة. بالتالي نصل إلى الشرط

$$\Pr\{C1(x) + Q(x, \xi) > M\} \leq \alpha$$

ما يُعرف بـ "شرط الفرصة"

سوف نناقش نسخة من المسألة حيث نحاول تعظيم الأرباح المتوقعة $E\xi\,[\Pi(x, \xi)]$ من القرار x بسلوك عشوائي نصفه بالمتغير العشوائي $\xi$. إذن، يمكن كتابة شرط الفرصة المعادل كالتالي

$$\Pr\{\Pi\ (x,\ \xi) < -M\} \le \alpha.$$

لاحظ أننا مازلنا نستخدم دالة الهدف ذاتها لكن مع إضافة شرط. من ثم، إذا كانت $\alpha = 0.01$ and $M = \$1\ 000\ 000$ إذن يمكن التعبير عن الشرط بقول أن تعظيم الأرباح المتوقعة تخضع لشرط أن القرار x لا يعطينا أكثر من 1٪ فرصة لخسارة مليون أو أكثر.

ولكي نتمكن من حل هذه المسألة نحتاج إلى الحصول على معلومات حول توزيع الأرباح $\Pi\ (x,\ \xi)$. إذا كنا نعلم أن دالة التوزيع التراكمي لـ $\Pi$ يتم الحصول عليها من خلال دالة $F_x$ (.) التي تعتمد على x ، إذن يمكننا إعادة كتابة الشرط كالتالي

$$Fx(-M) \le \alpha.$$

يرتبط ذلك بمقاييس القيمة عند المخاطرة التي ناقشناها في الفصل الثالث. على سبيل المثال، نفترض أن الشركة تريد تعظيم الأرباح المتوقعة لكن يجب أن تعمل تحت شروط المخاطرة التي تفرض حد 500000 دولار على 95٪ من قيمة المخاطرة. بالتالي يمكن وصف ذلك كمسألة ذات شرط فرصة واحتمالية أن تتجاوز الخسائر 500000 دولار أقل من 5٪.

$$\begin{aligned}&\text{maximize } E_\xi\ [\Pi\ (x,\ \xi)]\\&\text{subject to } \Pr\{\Pi\ (x,\ \xi) < -500\ 000\} \le 0.05.\end{aligned}$$

**مثال 7-7: تعظيم المحفظة مع شرط القيمة المعرضة للخطر**

نعود إلى مسألة تعظيم المحفظة التي طرحناها في الفصل الثاني، نفترض أن هناك اثنين من الاستثمارات، كل منهما حصل على توزيع طبيعي للأرباح بعد عام واحد. الاستثمار الأول بقيمة 1000 دولار وتبلغ أرباحه المتوقعة 1000 دولار بانحراف معياري 400 دولار، في حين أن الاستثمار الثاني بنفس القيمة بينما تبلغ الأرباح المتوقعة منه 600 دولار بانحراف معياري 200 دولار. من خلال مسألة تعظيم عشوائي مع شرط فرصة يفترض أن لدينا 1000 دولار لاستثمارهم والرغبة في تعظيم العائد المتوقع وفقاً لاحتمالية فقدان الأموال بأقل من 5٪. بدلاً من ذلك، يمكن القول أن 99.5٪ من القيمة المعرضة للخطر أقل من 0 دولار.

نفترض أننا نستثمر $1000\ w_1$ في الاستثمار الأول و$1000w_2$ في الثاني. إذا افترضنا أن أداء

الاستثمارات مستقل، إذن الأرباح تتبع توزيع عادي بمتوسط $1000w_1 + 600w_2$، ومن ثم يمكن كتابة المسألة

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1000w_1 + 600w_2 \\ \text{subject to} & \Pr\{w_1X_1 + w_2X_2 < 0\} \leq 0.005 \\ & w_1 + w_2 = 1, \\ & w_1 \geq 0,\, w_2 \geq 0. \end{array}$$

حيث أن $X_1$ و$X_2$ هم المتغيرات العشوائية التي تعطينا العائدات المتوقعة لكل من الاستثمارات. والتغير في إجمالي العائد نحصل عليه من

(400w1)2 + (200w2)2

ونحصل على الانحراف المعياري من الجذر التربيعي لما سبق.

ويمكن حساب احتمالية حدوث خسارة من قيمة z مما يعطينا عدد من الانحرافات المعيارية بمتوسط أعلى الصفر، حيث لدينا

$$z = \frac{1000w_1 + 600w_2}{\sqrt{(400w_1)^2 + (200w_2)^2}}.$$

ويمكن استخدام جداول التوزيع العادي أو دالة norminv في جدول بيانات لإظهار أن $z \geq 2.5758$ لكي نتأكد أن احتمالية أن القيمة أقل من صفر لا تتجاوز 0.005. بالتالي، يصبح الشرط

$$\frac{1000w_1 + 600w_2}{\sqrt{(400w_1)^2 + (200w_2)^2}} \leq 2.5758.$$

نستطيع القسمة على 100 وتربيع هذا التباين لنرى أن المسألة يمكن كتابتها كالتالي

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1000w_1 + 600w_2 \\ \text{subject to} & (10w_1 + 6w_2)^2 \geq (2.5758)^2(16w_1^2 + 4w_2^2), \\ & w_1 + w_2 = 1, \\ & w_1 \geq 0,\, w_2 \geq 0. \end{array}$$

وبما أن الهدف خطي، فنصل إلى الحل الأمثل عند حد منطقة الاحتمالات، ما يعني أن شرط عدم التكافؤ سيكون ملزماً (مع الاحتفاظ بالتكافؤ) وبما أن يمكننا استبداله باستخدام $w_2 = 1 - w_1$، نتوصل إلى

$a(16w2\ 1 + 4(1 - w1)2) - (10w1 + 6(1 - w1))2 = 0$

حيث أن $a = (2.5758)^2 = 6.6349$ وبضرب ذلك نستنتج أن

$(20a - 16)w2\ 1 - (48 + 8a)w1 + 4a - 36 = 0$

يتم تحقيق الحد الأقصى أعلى جذور المعادلة التربيعية، لذلك

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{5a-4}\left(a + 6 + \sqrt{a(61-4a)}\right) \\ &= \frac{1}{29.1745}\left(12.6349 + \sqrt{228.6413}\right) \\ &= 0.95137 \end{aligned}$$

إذا قسمنا قيمة الاستثمارات إلى 951 دولار في الاستثمار الأول والمتبقي 49 دولار في الاستثمار الثاني. في هذه الحالة، أي وزن أقل من 951 دولار في الاستثمار الأول سيحقق 99.5٪ قيمة معرضة للخطر أقل من الصفر (احتمالية أقل من 0.5%).

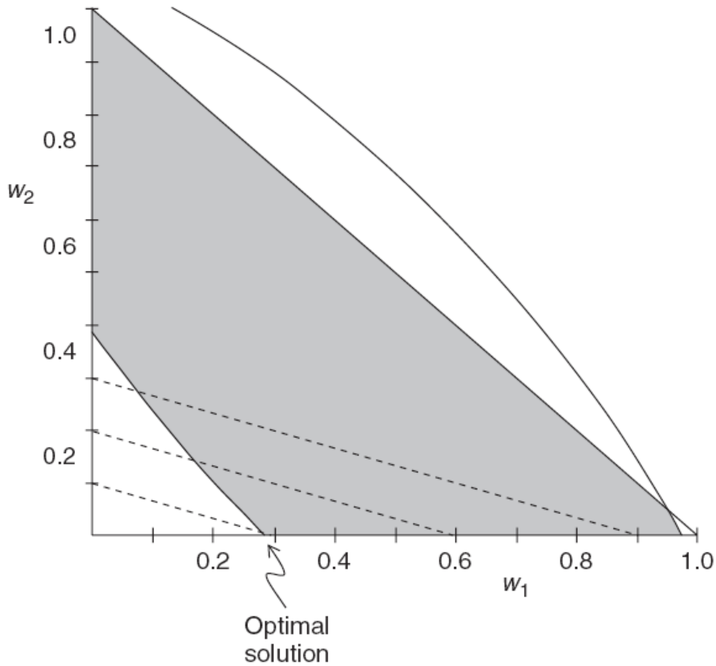
يمكن استخدام نفس المنهج عندما يكون لدينا أكثر من سهمين. نفترض أن لدينا استثمار ثالث بمتوسط أرباح 1200 دولار وانحراف معياري 600. تصبح المسألة كالتالي

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 1000w_1 + 600w_2 + 1200w_3, \\ &\text{subject to} && (10w_1 + 6w_2 + 12w_3)^2 \geq (2.5758)^2\left(16w_1^2 + 4w_2^2 + 36w_3^2\right), \\ &&& w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\ &&& w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0. \end{aligned}$$

يمكننا الاستبدال بين $w3 = 1 - w1 - w2$ لإعادة صياغة ذلك كمسألة تعظيم في منطقة ثنائية الأبعاد كالموضح في شكل 7-10.

لتصبح دالة الهدف

$$1000w_1 + 600w_2 + 1200(1 - w_1 - w_2) = 1200 - 200w_1 - 600w_2$$




*شكل 7-10: تعظيم محفظة تضم ثلاثة مشاريع استثمارية مع شرط القيمة المعرضة للخطر*

وتشير الخطوط المقسمة في هذا الشكل إلى حدود الدالة، والجزء المظلل يشير إلى منطقة الاحتمالات، والخط المستقيم العلوي ينتج عن الشرط $w3 \geq 0$، ما يتم ترجمته إلى $w_1 + w_2 \leq 1$. وجدير بالذكر أن المنحنيات ناتجة عن شرط القيمة المعرضة للخطر، فهم جزء من قطع كبير لأن الشرط تربيعي في $w_1$ و $w_2$. ومن ثم فإن الحل الأمثل هو

$$w_1 = 0.2854, w_2 = 0, w3 = 0.7146.$$

## ملاحظات

مثال شركة بارثينون يعتمد على مثال يظهر على صفحات "ويكي" على موقع "NEOS" الإلكتروني (http://wiki.mcs.anl.gov/NEOS/index.php/Stochastic Programming)، حيث تقيم جامعة وينكونسين ماديسون مشروع على سرفر NEOS يسمح لأي شخص بتقديم مساءل التعظيم وإتاحتها للحل من قبل محبي هذا الفن.

هناك عدد من الكتب التي تناقش التحسين العشوائي على مستويات مختلفة في إطار النمذجة. كتاب "بيرج ولوفيوكس" الصادر عام 2011 يحتوي على معالجة شاملة للنظرة إلى المناهج التي يمكن استخدامها لحل مساءل التعظيم العشوائي.

يأتي المصطلح الكلاسيكي "مسألة بائع الصحف" في الإدارة التشغيلية من الطريقة التي يتم بها الصياغة في سياق محل بيع الصحف. فالصحيفة غير المباعة حتى نهاية اليوم يتم إرجاعهاإلى دار النشر، من ثم يجب اتخاذ قرار بشأن عدد الصحف المطلوب لتغطية الطلب اليومي الغير معلوم. يتم مناقشة هذه المسألة من خلال الورقة العلمية المقدمة من شابيرو وفليبوت (2007).

## مراجع


Birge, J. and Louveaux, F. (2011) Introduction to Stochastic Programming. Springer.

King, A. and Wallace, S. (2012) Modeling with Stochastic Programming. Springer.

Shapiro, A. and Philpott, A. (2007). A Tutorial on Stochastic Programming. Manuscript available at http://www2.isye.gatech.edu/ashapiro/publications.html.


## تمارين

### 1-7 بارثينون للنفط واتباع سلوك تجنب المخاطر

نفترض أن الإدارة تستخدم دالة المنفعة $u(x) = \sqrt{x}$. قم بعمل التعديلات المناسبة على جدول البيانات BRMch7-Parthenon1.xlsx للاستفادة من الدالة. لاحظ أن:

(أ) دالة الهدف معرفة على إجمالي الأرباح المتوقعة من قبل بارثينون (ويجب أن تكون إيجابية لهذه الدالة) – مع افتراض أن سعر النفط 200 دولار للبرميل.

(ب) افترض أن بارثينون ترغب في تعظيم المنفعة المتوقعة، من ثم يجب الحصول على متوسط السيناريوهات الثلاثة. ستصبح المسألة غير خطية ، وبالتالي يجب اختيار الخيارات على سولفر بشكل مناسب.

هل تغير الخيار الأمثل لمشتريات النفط في فبراير ($x_1$) بأي شكل من الأشكال؟ (بما أن دالة المنفعة غير معرفة في حالة حدوث خسارة، عليك التأكد من أن كل سيناريوهات نقطة بداية التعظيم مربحة).

## 2-7 أياكس لايتس

تبيع شركة أياكس لايتس لمبات ليد، وترى أن هناك اتصال خطي بين الطلب والسعر. كان سعر اللمبة فيما قبل 10 دولار وإجمالي المبيعات 50000 شهرياً. بعد حدوث تقدم تقني انخفضت التكلفة وبالتالي انخفضت أسعار اللمبات ليصبح سعر اللمبة 5 دولار. مر ثلاثة شهور قبل حدوث تغيرات في السوق مع دخول مورد جديد. تقوم الشركة باستيراد وتعبئة اللمبات لكن هذه اللمبات يتم الحصول عليها من مورد والذي بدوره سوف يورد كمية ثابتة شهرياً بمهلة لمدة شهر واحد. تمتلك شركة أياكس 100000 لمبة ليد في المخازن وقامت بتحديد سعر اللمبة عند 8 دولار في الشهر المقبل. يتمثل القرار الأول في الكمية الإجمالية التي يجب طلبها للاستخدام خلال الشهور 2 و3، الفترة التي نطلق عليها y، يجب اتخاذ القرار على الفور. بعد مراجعة المبيعات في شهر 1، سوف تقوم الشركة بخفض متغيرات الطلب في المعادلة وتحديد الأسعار في شهري 2 و3، ومن ثم يتم استخدام المخزون بالكامل في شهر 3.

نكتب Y للإشارة إلى الكمية المطلوبة وS إلى الطلب غير المعلوم في شهر1، وبالتالي يمكن صياغة المسألة كالتالي

$$\max_{Y}(500\,000 + 5Y + E_S(Q(Y, S))$$

حيث أن

$$Q(Y, S) = (100\,000 - S + Y)\left(10 - \frac{S}{5000} + \frac{Y}{50\,000}\right) + 8S.$$

إذن أثبت أن أياكس يجب أن تقوم بعمل طلب يتناسب مع السياسة المثلى لمتوسط الطلب S.

## 3-7 توليد متغيرات عشوائية

نفترض أن الطلب عشوائي وله دالة كثافة كالتالي

$$f(x) = 0 \text{ for } x \le 10$$
$$f(x) = (x/2) - 5 \text{ for } x \in (10, 11)$$
$$f(x) = 0.5 \text{ for } x \in [11, 12]$$
$$f(x) = 6.5 - (x/2) \text{ for } x \in (12, 13)$$
$$f(x) = 0 \text{ for } x \ge 13.$$

أحصل على خمس نماذج لمتغيرات عشوائية باستخدام المنهج الذي تم مناقشته في هذا الفصل لتوليد خمسة متغيرات عشوائية من هذا التوزيع باستخدام النماذج العشوائية التالية من التوزيع الموحد على 0.476, 0.789. [0,1]: 0.543, 0.860, 0.172.

### 4-7 الشروط غير المتوقعة في مثال ألكسندر باتيو

نفترض أن المسألة تم حلها في كتاب الأعمال الثالث في ملف BRMch7-Alexander.xlsx على أساس أن $x_{2A} = 33$, $x_{2B}$ 66, and $x_{2C} = 40$، وضح لماذا يكون الحل غير المتوقع للمسألة $x_{2A} = x_{2C}$.

### 5-7 سولستايس انتربرايزيس

سولستايس انتربرايزيس متخصصة في إدارة البارات في الأحداث الرياضية، يجب اتخاذ قرار بشأن حجم الخيمة المطلوب حجزها وعدد العاملين في البار لاستضافة نهائي بطولة الدولة للكريكيت للنساء تحت 21 سنة. ستقام النهائيات في سيدني، إذا قامت نيو ساوث ويلز بعمل النهائي ، فعدد الجمهور المتوقع سوف يكون أكبر، كما أن المبيعات الإجمالية تعتمد على الطقي في هذا اليوم (W= رطب، d= جاف لكنه لطيف، h= حار). إذا لعب فريق نيو ساوث سيتي ويلز في النهائي، فالمبيعات المحتملة بالدولار قد تتبع توزيع عادي بانحراف معياري = 2000 ومتوسط 8000 دولار، 16000 دولار، أو 24000 دولار بناءً على الطقس. لكن إذا لم يلعب في النهائي فإنها ستتبع توزيع عادي بانحراف معياري 1000 ومتوسط 4000 دولار، 8000 دولار أو 12000 دولار بناءً على الطقس. مع ذلك، فإن إجمالي المبيعات يخضع إلى عدد الأشخاص المقدم لهم الخدمة، بقيمة مقدرة 5000

دولار للفرد محدوداً بحجم الخيمة. لدينا خمسة أحجام خيمات متاحة لعدد 2، 3، 4 أو5 أشخاص. من ثم فإن ترتيب الأحداث كالتالي: أولاً يجب أن تقرر سولستايس حجم الخيمة وتقوم بحجزها، ثم لعب مباراة نصف النهائي والتي ستحدد ما إذا كان فريق نيو ساوث ويلز سيشارك في النهائي أم لا –حيث هناك احتمالية بنسبة 50٪ لحدوث ذلك– ثم يجب على سولستايس التنسيق مع طاقم العاملين في البار ومن ثم تحديد عدد الأفراد المطلوب توظيفهم. أخيراً، تُلعب المباراة وسط طلب على المشروبات التي تعد متغير عشوائي يعتمد على الطقس. لا تستعين سولستايس بتوقعات الطقس في اتخاذ قراراتها. يبلغ إيجار الخيمة التي تتسع لعددx من عاملي البار 2500 دولار. يحصل كل فرد من العاملين في البار على 500 دولار مقابل يوم عمل ومتوسط ربح على المشروب المباع 1.50 دولار.

باستخدام منهج مونت كارلو تم الحصول على السيناريوهات الموضحة في جدول 7-2.

**الجدول 7-2: عشرة سيناريوهات لشركة Solstice Enterprises.**

| السيناريو | نيو ساوث ويلز في النهائي | الطقس | الطلب di |
|---|---|---|---|
| 1 | نعم | رطب | 5214 |
| 2 | لا | جاف | 8479 |
| 3 | لا | جاف | 8531 |
| 4 | نعم | رطب | 7473 |
| 5 | نعم | حار | 22578 |
| 6 | نعم | جاف | 18192 |
| 7 | لا | حار | 11456 |
| 8 | نعم | جاف | 16921 |
| 9 | لا | حار | 11439 |
| 10 | لا | جاف | 8477 |

النموذج المقترح كالتالي. اختر x (حجم الخيمة: 2، 3، 4 أو 5)، yi (عدد العاملين في السيناريو i: 2، 3، 4 أو 5) و si (المبيعات في السيناريو i) إلى

$$\begin{aligned}
\text{maximize } & \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(1.5s_i - 500y_i - 2500x) \\
\text{subject to } & s_i \le d_i, \\
& y_i \le x, \\
& s_i \le 5000y_i.
\end{aligned}$$

اشرح لماذا لا يفي هذا النموذج بالشروط غير المتوقعة، وبالتالي فإنها مصاغ بشكل خاطئ. أعد صياغة النموذج ليفي بالشروط غير المتوقعة.

### 6-7 القيمة المعرضة للخطر

يمتلك المستثمر سهمين وسند خزانة خالي من المخاطرة. كل 1000 دولار يتم استثمارها في السند سيكون لها عائدات 1200 دولار في ثلاثة سنوات. البدائل هي سهم A، حيث أن استثمار 1000 دولار سينتج عنه متوسط عائد 1250 دولار بعد ثلاثة سنوات بانحفار معياري 100 دولار، وسهم B، حيث أن استثمار 1000 دولار سينتج عنه متوسط عائد 1300 دولار بانحراف معياري 150 دولار. يرغب المستثمر في إيجاد أفضل أوزان للمحفظة المالية لتعظيم الأرباح المتوقعة وفقاً لشرط أن 99٪ من القيمة المعرضة للخطر هي صفر أو خسارة (أي أن هناك فرصة بنسبة 1٪ أو أقل لخسارة الأموال). احسب العائدات التي تم توزيعها بطريقة عادية على مدار الثلاث سنوات وعائدات A وB المستقلة. حاول صياغة مسألة التعظيم وحلها.