الفصل الثانى عشر

الاحتمال

Probability

12.1. تاريخ نظرية الاحتمالات Probability Theory History

ظهرت نظرية الاحتمالات فى القرن السابع عشر على يد عدد من علماء الرياضة مثل باسكال Pascal و فرمات Fermat حيث قام هذان العالمان بمناظرة عظيمة أثرت هذا الفرع من العلوم وأدخلته فى مجال الدراسة العلمية المنظمة، وذلك عندما طلب أحد نبلاء فرنسا ويدعى تشيفيلييه Chevalier وكان يعمل فى مجال المضاربة والمقامرة وطلب من باسكال أن يحسب له إحتمال بعض الحالات التى تواجهه فى أعماله ، فقام باسكال بحساب الإحتمالات المطلوبة ، ثم تعدى ذلك إلى عدة حالات أخرى ، ثم إهتم بهذه الحالات وغيرها كنوع من الشغف بهذه الدراسة وقام بوضع الاسس والقواعد التى تخدم هذه الدراسة.

12.2. مقدمة عن الاحتمالات Introduction for Probability

تلعب الإحتمالات دوراً هاماً فى حياتنا اليومية وفى الكثير من العلوم إذ أنها تستخدم فى قياس عدم التأكد أو عدم اليقين، فكثيراً ما تواجهنا عملية إتخاذ قرارات بناءاً على معلومات غير مكتملة وحينئذ نعتمد على الاحتمالات لتساعدنا على الاختيار. فكثيراً ما نغير مواعيد السفر لأن إحتمال أن يكون الطقس رديئاً احتمال كبير، وكذلك كثيراً ما نهمل مذاكرة جزء من المقرر الدراسى لأن إحتمال أن يأتى فى الامتحان صغيراً.

وكثيراً ما نتحدث عن إحتمال ارتفاع درجة الحرارة غداً، واحتمال فوز فريق كرة السلة المحبب إلينا على الفريق المنافس، وأحياناً نجد أننا نعبر عن هذه الإحتمالات بتقدير عددى كأن نقول أن احتمال سقوط الامطار غداً 30%، وأن احتمال وصل فريق كرة القدم الذى نشجعه إلى الدور النهائى 90% وهكذا.

وبالنظر نجد أن هذه التقديرات العددية لا ترتكز على أساس رياضى ، ولكنها بدرجة كبيرة تعتمد على خبرات ومعلومات مسبقة عن الطقس ، وعن متابعة لفترات طويلة لاداء الفريق المحبب إلينا.

والاحتمالات فرع من فروع الرياضيات التطبيقية يهتم بدراسة تأثير الصدفة chance على الظواهر والاشياء.

والصدفة: ظاهرة تؤدى إلى إختلاف نتائج التجربة بإختلاف مرات تكرارها، مع عدم اليقين بأى نتيجة من تلك النتائج، لعدم معرفة وتحقق الظروف التى تؤدى إلى حدوثها.

أما الحدث المؤكد فهو الحدث الذى يقع مهما تكررت محاولات إختباره إذا تحققت ظروف محددة، فمثلاً يتحول الماء إلى بخار إذا سخن على النار لدرجة 100 درجة مئوية فى ظروف الضغط الجوى العادى ، فهذا حقيقة معروفة وبالتالى فهو شئ مؤكد، وعند إلقاء قطعة من المعدن فى الهواء فإنها تسقط على الأرض، فهذا حقيقة معروفة وبالتالى فهو حدث مؤكد.

أما عند إلقاء قطعة من العملة على طاولة مسطحة فإن قطعة العملة سوف تسقط على سطح الطاولة وسيكون أحد وجهيها إلى أعلى (مع إستبعاد أن تستقر قطعة العملة على حرفها) وهذا حدث مؤكد ، ولكننا لا نعلم أى الوجهين سيظهر إلى أعلى لأن هذا يعتمد على "الصدفة".

كذلك عند إلقاء زهرة الطاولة على لوحة مسطحة فإن ما نعرفه هو أن أحد أوجهها الستة سيظهر إلى أعلى وهذا "حدث مؤكد"، ولكن أى وجه من الأوجه الستة سيظهر فهذا مالا نعرفه لأن ذلك يعتمد على ما نسميه "بالصدفة".

وبالتالى يمكننا استنباط الفرق بين لفظ " مؤكد" و لفظ "صدفة"، فالشئ المؤكد يعتمد على عدة ظروف معينة معروفة لدينا تماما إذا تحققت هذه الظروف حدث هذا الشئ ، فكما قلنا أن تحول الماء إلى بخار يكون شيئاً محققاً وحدثاً مؤكداً إذا تحققت شروط التسخين لدرجة 100 درجة مئوية فى ظروف الضغط الجوى العادى . ولكن فى حالة قطعة العملة أو زهرة الطاولة فإن الوجه العلوى الذى سيظهر يعتمد على ظروف كثيرة بعضها معروف لنا وبعضه نجهله تماماً، فظهور وجه معين يعتمد على طريقة الالقاء وقوته ونقطة الاصطدام الأولى بالطاولة وغير ذلك من الحقائق التى نجهلها تماماً والتى تتسبب فى ظهور ذلك الوجه دون الآخر. من هذه الأمثلة يمكن أن نفرق بين لفظى "مؤكد" و "صدفة" فالأول يدل على شيئ معلوم لدينا كل الظروف التى تؤدى إلى وقوعه وحدوثه ، أما الثانى فيدل على شئ غير معلوم لدينا تماماً كل ما يؤدى إلى وقوعه وحدوثه من ظروف.

ويلاحظ أننا فى حالة رمي قطعة العملة المعدنية نستطيع معرفة كل النواتج الممكنة ، حتى قبل رمي قطعة العملة المعدنية (التجربة) ، ولكننا لا نعرف أيَّ الوجهين للقطعة سيظهرُ فعلاً قبل رميها واستقرارها . وكذلك قبل رمي حجر النرد نستطيع معرفة كل النواتج الممكنة ، ولكننا لانعرف أي رقم سيظهر فعلاً قبل رمي حجر النرد واستقراره .

ولأننا لا نعلم مسبقاً ما سينتج ، نسّمي تجربة رمي قطعة النقد بالتجربة العشوائية وكذلك نسمي تجربة رمي حجر النرد بالتجربة العشوائية .

وعلى ذلك تعرف التجربة العشوائية على أنها التجربة التي يُمكننا معرفة جميع نواتجها الممكنة قبلَ إجرائها ولكننا لا نستطيع تحديد أياً من هذه النتائج سيتحقق فعلاً قبل اجراء التجربة.

كذلك نُسمِّي النواتج الممكنة عندَ إجراء تجربةٍ ما بـ المشاهدات أو الفضاء العيني Sample space ونرمز له بالرمز Ω أوميجا، فنقول أنَّ الفضاء العيني لتجربة رَمي قطعة نقد معدنية مرة واحدةً هو مجموعة كل النواتج الممكنة : Ω = { صورة ، كتابة }، وعدد النواتج الممكنة هنا = 2، وإذا كان لدينا كيس يحتوي على أربع كرات : كرة حمراء ، كرة زرقاء ، كرة خضراء ، كرة سوداء . فإذا قُمنا بسحبِ كرة واحدة من الكيس دون النظر فيه، فإن النواتج الممكنة هي : كُرة حمراء ، كُرة زرقاء ، كُرة خضراء ، كُرة سوداء، ويكون الفضاء العيني لتجربةِ سحب كرة واحدة هومجموعة كلّ النواتج الممكنة :

Ω = { كُرة حمراء ، كُرة زرقاء ، كُرة خضراء ، كُرة سوداء}، وعدد النواتج الممكنة هنا = 4

12.3. مفهوم الاحتمال (الفرصة) Probability Concept

في تجربة رمي حجر نردٍ مرة واحدة ، تبين لنا أن هنالك ستة (6) نواتج ممكنة . وفي تجربة رمي قطعة نقدٍ معدنية مرة واحدة ، تبين لنا أن الفضاء العيني Sample spaceهو مجموعة النواتج الممكنة {صورة ، كتابة}

ـ ولكن ماذا عن احتمال (فرصة) ظهور وجه عند رمي قطعة النقد مرة واحدة ؟

ـ وماذا عن احتمال (فرصة) ظهور الرقم (6) عند رمي حجر النرد مرة واحدة ؟

لاحظ هنا أن وجهي قطعة النقد متماثلين ولا يختلفان إلا في التسمية ، ولاحظ ان أوجه حجر النرد أيضاً متماثلة (حجر النرد هو معكعب متماثل تماماً) .

إذا درسنا تجربة رمي حجر النرد ، نستطيع بسبب هذا التماثل أن نقول بأن فرصة ظهور الرقم 1 إلى أعلى تساوي فرصة ظهور الرقم 2 وتساوي فرصة طهور الرقم 3 ...... وهكذا، وهذا يعني أن النواتج الممكنة لها نفس فُرصة الظهور .

وبالتالى فإن احتمال (فرصة) ظهور وجه عند رمي قطعة النقد مرة واحدة يساوي $\frac{١}{٢}$ ،

واحتمال (فرصة) ظهور الرقم (5) عند رمي قطعة النرد مرة واحدة يساوي $\frac{١}{٦}$

إذن فإن احتمال (فرصة) ظهور ناتج ما = $\dfrac{\text{عدد مرات ظهور هذا الناتج}}{\text{عدد النواتج الممكنه}}$

12.4. تعريف الاحتمال Probability Definition

إذا كان لدينا فرض ما، فإننا نعين لصواب هذا الفرض العدد"1" ونعين لخطئه العدد"صفر"، ومن ثم فإن أى عدد يقع بين الصفر والواحد يمكن أن يعبر عن درجة صواب أو خطأ هذا الفرض، فمثلا يمكننا القول بأن احتمال (فرصة) ظهور البترول فى منطقة ما هو $P(A)=0.6$ أو أن احتمال (فرصة) نجاح العملية الجراحية هو $P(A)=0.8$ أو أن احتمال سقوط الأمطار غدا هو P(A)= 0:5، أو أن احتمال توقف الإنتاج خلال الأسبوع القادم $P(A)=0.10$ وهكذا، ويؤخذ الاحتمال بداهة كمقياس لدرجة اعتقادنا أو شدة اقتناعنا فى صحة فرض ما أو وقوع حدث ما.

وطبقا لهذا التعريف فإن الاحتمال بهذا الشكل يخضع لذاتية المُشاهِد وتحيزه وخبرته وهذه نقطة ضعف لمفهوم الاحتمال ، ومع ذلك فكثيرا ما نجد أنفسنا مضطرين إلى تقدير احتمال حدث بالبداهة أو بالخبرة وذلك حين لا تتوفر عوامل ومؤشرات مباشرة تكفى لحساب احتمال ذلك الحدث، وأثناء الدراسة التطبيقية سنتعامل مع الاحتمال على أن له تعريفين آخرين الأول يعتبر أن الاحتمال هو "نسبة" والثاني يعتبر أن الاحتمال هو " تكرار نسبى" كما هو موضح فيما يلي:

12.4.1.التعريف التقليدي للاحتمالات Classical Definition for Probability

إذا أسفرت تجربة عن N من النتائج أو الحالات المتساوية الإمكان، وكان الحدث A يقع فى M من هذه النتائج، فإن احتمال وقوع هذا الحدث يساوى $P(A)=\frac{M}{N}$ أى يساوى النسبة بين عدد الحالات التي يمكن أن يقع فيها الحدث و العدد الكلى للحالات التي يمكن أن تسفر عنها التجربة.

فإذا ألقينا زهرة الطاولة ذات الستة أوجه بصورة عشوائية، فإن النواتج الممكنة للتجربة هى الأعداد الستة 1، 2، 3، 4، 5، 6 وهذه النواتج متساوية الإمكان لأنه لا يوجد لدينا ما يجعلنا نتوقع ظهور أحدها دون الآخرين، وعلى ذلك فإن احتمال الحدث "ظهور أى عدد" هو $\frac{1}{6}$، وكذلك احتمال الحدث "ظهور عدد فردى " هو $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$، وكذلك فإن احتمال سحب "صورة " من أوراق الكوتشينه هو $\frac{12}{52}$، وكذلك فإن احتمال سحب "الورقة السوداء التى تحمل الرقم 4 " من أوراق الكوتشينه هو $\frac{2}{52}$ ، وبالتالى فإن الاحتمال هنا هو نسبة.

وهذا التعبير يصلح لإيجاد الاحتمالات نظريا فى الحالات التي يتوفر فيها شرط تساوى إمكانية الحدوث فمثلا إذا كان لدينا مجموعة مكونة من 100 رجل، وعلم أن 12 منهم يلبسون نظارات، و8 منهم لا يلبسون نظارات ولكن يحتاجون إليها، فإذا اخترنا رجلا من

هذه المجموعة عشوائيا فإن احتمال أن يكون "الرجل لابسا نظارة" هو $\frac{12}{100}$، و احتمال أن يكون "الرجل لا يلبس نظارة ولكن يحتاج إليها " هو $\frac{8}{100}$، واحتمال أن يكون "الرجل لا يلبس نظارة ولا يحتاج إليها " هو $\frac{80}{100}$.

وهذا التعريف الذي سبق تقديمه يتناول التجارب التي تسفر عن عدد منتهى من النواتج، إلا أنه مع بعض التعديل يمكن أن يمتد ليشمل التجارب التي تسفر عن عدد لا نهاني من النواتج، فإذا كان لدينا مساحة محددة A، وكانت المساحة Bجزء من المساحة A، واخترنا عشوائيا نقطة من المنطقة A، فإن احتمال "وقوع النقطة فى المنطقة B " يعرف بالنسبة $\frac{B}{A}$ وذلك مع الاحتفاظ بفرض تساوى فرص الحدوث، ويلاحظ هنا أن تعبير العشوائية يعنى أن احتمال وقوع نقطة فى مساحة التجريب يتناسب مع مقياس هذا الجزء، وأن الاحتمال مستقل عن شكل المساحة وموضعها.

12.4.2. التعريف الإحصائى للاحتمالات Statistical Definition For Probability

ينطلق هذا التعبير من فكرة التكرار النسبي، ومن ظاهرة اكتشفت بالملاحظة والتجريب تعرف بظاهرة الانتظام الإحصائى Statistical Regularity ومجملها أنه إذا كررت تجربة مرات كثيرة تحت نفس الظروف (مثل رمى زهرة الطاولة) فإن التكرار النسبي لحدث ما متعلق بهذه التجربة (مثل ظهورالرقم خمسة) يقترب من عدد ثابت كلما زاد عدد مرات التجربة، ويؤخذ هذا العدد كتقدير لاحتمال ذلك الحدث. ولذلك يعرف احتمال حدث ما على أنه نهاية متتابعة من التكرارات النسبية لوقوع هذا الحدث، فمثلاً إذا ألقينا قطعة نقود معدنية عشوائيا بصورة منتظمة عشرات المرات ثم مئات المرات ثم ألوف المرات ثم.... فإن التكرار النسبي لظهور الصورة يقترب من العدد $\frac{1}{2}$ كلما زاد عدد مرات إلقاء القطعة، وحينئذ نقول أن احتمال الحدث "ظهور الصورة " هو 50%، ويفهم من هذا أنه إذا رميت قطعة نقود عددا كبيرا من المرات فإن نسبة عدد المرات التي تظهر فيها الصورة إلى العدد الكلى لمرات رمى القطعة هو $\frac{1}{2}$ على المدى الطويل عند ثبات الظروف المحيطة.

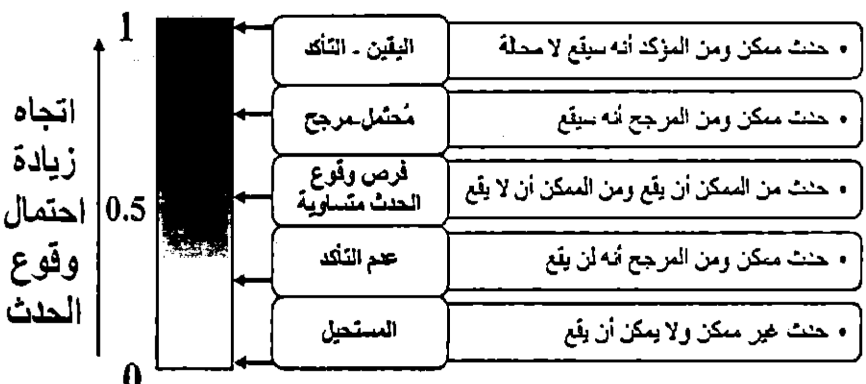
والتعريف الإحصائى يسهل إيجاد الاحتمالات تجريبيا، فإذا أردنا مثلا إيجاد احتمال ظهور وحدة معيبة من الوحدات التي ينتجها مصنع ما، فإننا نسحب عينة عشوائية كبيرة من الوحدات المنتجة، ونحسب التكرار النسبي للوحدات المعيبة ونرسم الهستوجرام ثم نقسم قيمة كل عمود (التكرارات) من أعمدة الهستوجرام Histogram على إجمالى قيم الأعمدة

(إجمالى التكرارات) فنحصل على ما نطلق عليه دالة التوزيع الاحتمالية Probability Distribution Function (PDF)، وإذا تم تجميع ورسم قيم دالة الكثافة فإننا نحصل على دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function (CDF)، كما يمكن باستخدام الإحصاء الاستنتاجي Inferential Statistics أن نحصل على تقدير للاحتمال المطلوب، ثم بعد ذلك يمكننا اختبار مدى دقة هذا التقدير كما تم الإشارة إلى ذلك عند الحديث عن الدراسة الإحصائية فى هذا الكتاب.

12.4.3.تعريفات خاصة بالاحتمال Definitions For Probability

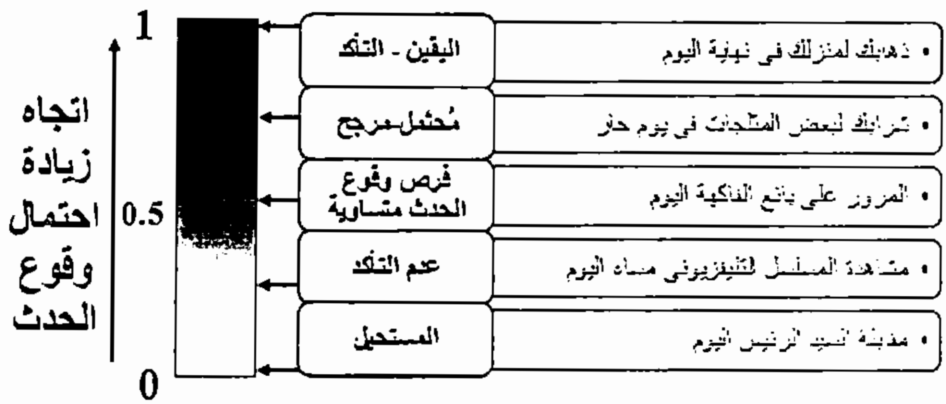
- الحدث Event: هو ناتج واحد ، أو عدة نواتج من النواتج الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية ما، ويرمز للحدث بالرمز (ح)، وإذا احتوى الحدث على عنصر واحد سُمِي حدثاً بسيطاً من الفضاء العيني Ω ، أما إذا احتوى الحدث جميع عناصر الفضاء العيني Ω فنسميه حدثٌ أكيدٌ ، فاختيار أحد الألوان أحمر، أخضر، أزرق، أسود من مجموعة الألوان:{أحمر ، أخضر ، أزرق ، أسود} هو حدثٌ أكيد . أما حدث اختيار اللون الأصفر في التجربة فيُسمي بالحدث المستحيل (لأنه لا يمكن أن يكون أحد نواتج التجربة).
- الرمز $P(A)$ يعنى احتمال وقوع الحدث A، ويلاحظ أن هذا الاحتمال يتراوح بين الصفر والواحد الصحيح ويعبر عن ذلك بـالعلاقة $0 \le P(A) \le 1$، وإذا كانت $P(A)=0$ ، فاننا نقول أن الحدث A هو حدث مستحيل، أما إذا كانت $P(A)=1$ فاننا نقول أن الحدث A هو حدث مؤكد.

والشكل 12-1 يعرض الانواع المختلفة للإحتمال



شكل رقم 12- 1 الانواع المختلفة للإحتمال

أما الشكل 2-12 فيعرض أمثلة للإحتمالات المختلفة



شكل رقم 12- 2 أمثلة مختلفة للإحتمال

- الرمز $P(\bar{A})$ يعنى الاحتمال المكمل للإحتمال $P(A)$ أى أن $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- الرمز $P(A \text{ or } B)$ أو $P(A \cup B)$ يعنى احتمال وقوع واحد من الحدثين A و B على الأقل، أى وقوع الحدث A فقط أو وقوع الحدث B فقط، أوقوع الحدث A و B معاً.
- الرمز $P(A \text{ and } B)$ أو $P(A \cap B)$ يعنى احتمال وقوع الحدثين A و B معاً أو بالتتابع.
- الرمز $P(A|B)$ يعنى احتمال وقوع الحدث A (الذى يكون مجهولا) بشرط أن يكون الحدث B (الذى يكون معلوما) قد وقع فعلا ويسمى هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطى Conditional Probability للحدث A بالنسبة للحدث B، ومثال ذلك اختيار طالب من مدرسة ما بشرط أن يكون من الرياضيين.
- يقال للحدثين A و B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر، وبذلك لا يمكن أن يقع الحدثان معا، أى يكون $P(A \text{ and } B) = 0$ ، فمثلا فى حالة ولادة طفل يكون الحدث " المولود ذكر" والحدث " المولود أنثى" حدثان متنافيين أى لا يمكن أن يقعا معا.
- يقال للحدثين A و B أنهما مستقلان إذا كان احتمال وقوع أيهما لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الآخر أى إذا كان $P(A|B) = A$ وكان $P(B|A) = B$ ، فمثلا إذا ألقينا قطعتين من العملة المعدنية عشوائياً فإن ما يظهر على أى منهما (صورة أو كتابة) يكون مستقلا

عن الأخرى (إلا إذا كانت القطعتان مربوطتين معاً بخيط مثلا)، كذلك اختيار طالب من كلية الهندسة واختيار طالب من كلية الطب هما حدثان مستقلان.

- قاعدة جمع الاحتمالات:

$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$ اى أن احتمال وقوع أحد الحدثين A و B أو كلاهما يساوى احتمال وقوع الأول مضافا إليه احتمال وقوع الثانى مطروحا منه احتمال وقوعهما معا، فإذا كان الاحتمالان A و B متنافيين فإن التعبير السابق يصبح $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$ وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الجمع للأحداث المتنافية ويمكن تعميم ذلك إذا كانت A و B و C و......و N أحداثا متنافية فإن:

$$P(A \text{ or } B \text{ or } C \text{ or} \ldots\ldots \text{or } N) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots\ldots + P(N) = 1$$

أى أن احتمال وقوع عدة أحداث متنافية يساوى مجموع احتمالات وقوع كل حدث بصفة مستقلة والمجموع يساوى الواحد الصحيح.

- قاعدة ضرب الاحتمالات:

$P(A \text{ and } B) = P(B \mid A) * P(A) = P(A \mid B) * P(B)$ اى أن احتمال وقوع حدثين معا يساوى احتمال أحدهما مضروبا فى الاحتمال الشرطى للآخر بالنسبة للأول، بشرط أن $P(A) \neq 0 \text{ and } P(B) \neq 0$، فإذا كان الحدثان مستقلين فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) * P(B)$ وتسمى هذه القاعدة بقاعدة الضرب للأحداث المستقلة ويمكن تعميم ذلك إذا كانت A و B و C و......و N أحداثا متنافية فإن :

$$P(A \text{ and } B \text{ and } C \text{ and} \ldots\ldots \text{and } N) = P(A) * P(B) * P(C) * \ldots\ldots * P(N)$$

والجدول 12-1 التالى يعرض ملخصاً لهذه القواعد

جدول رقم 12- 1 ملخص لقواعد ضرب وجمع الاحتمالات

	$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$	قاعدة الجمع
أحداث متنافية	$P(A \text{ or } B \text{ or } C \text{ or} \ldots\ldots \text{or } N) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots\ldots + P(N) = 1$	Or Rule?
	$P(A \text{ and } B) = P(B \mid A) * P(A) = P(A \mid B) * P(B)$	قاعدة الضرب
أحداث مستقلة	$P(A \text{ and } B \text{ and } C \text{ and} \ldots\ldots \text{and } N) = P(A) * P(B) * P(C) * \ldots\ldots * P(N)$	And Rule?

- يتم حساب الاحتمال من العلاقة التالية:

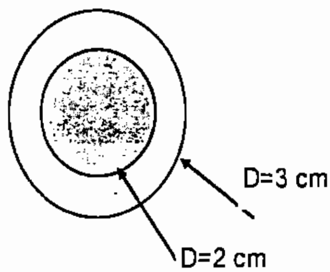
$$\text{Probability}_{\text{classic}} = \frac{\text{Number of Possible outcome}}{\text{Number of Total outcome}} = \frac{\text{Number of Ways "A" Can Occur}}{\text{Number of Total Different Simple Events}}$$

أى أن الاحتمال يساوى خارج قسمة عدد الأحداث الممكنة على العدد الكلى للأحداث.

مثال رقم 12-1:

إذا اختيرت نقطة عشوائية من داخل دائرة A نصف قطرها 3 سم، فما هو احتمال الا يزيد بعد هذه النقطة عن مركز الدائرة عن 2سم ؟

الحل .



شكل رقم 12- 3 مخطط المثال 12-1

فى هذه الحالة كما فى شكل 12-3 نقول أن الحدث المطلوب يقع إذا وقعت النقطة المختارة داخل دائرة B لها نفس مركز الدائرة A ونصف قطرها 2 سم

أى أن الاحتمال المطلوب يساوى نسبة مساحة الدائرة B إلى مساحة الدائرة A أى

$\frac{B}{A} = \frac{\pi d_B^2}{\pi d_A^2} = \frac{4}{9}$. (محمد أبو يوسف، 1998)

مثال رقم 12- 2:

عند رمى زهرة الطاولة بصورة عشوائية لمرة واحدة نجد أن:

- احتمال ظهور العدد 5 على الزهرة الأولى، و6 على الزهرة الثانية هما حدثان مستقلان .

$$P(5 \text{ and } 6) = P(5) * P(6) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- احتمال ظهور العدد 6 على الزهرة الأولى، و5 على الزهرة الثانية هما حدثان مستقلان.

$$P(6 \text{ and } 5) = P(6) * P(5) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- احتمال ظهور العدد 5 على إحدى الزهرتين، و5 على الزهرة الأخرى هما حدثان متنافيان.

$$P(5 \text{ and } 6) + P(6 \text{ and } 5) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

مثال رقم 12- 3:

صندوق به 7 كرات حمراء، و3 كرات بيضاء، وتم سحب كرتان عشوائيا الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع والمطلوب حساب احتمال الأحداث التالية:

أولا:أن تكون كلتا الكرتان حمراء.   ثانيا:أن تكون كلتا الكرتان بيضاء.

ثالثا: أن تكون إحدى الكرتين حمراء والأخرى بيضاء.

الحل:

أولا: احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء = $\frac{7}{10}$ وبشرط أن تكون الكرة الأولى حمراء فإنه يتبقى 6 كرات حمراء والمجموع هو 9 كرات، وبالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء = $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ وهو احتمال شرطي (أى احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء بشرط أن تكون الكرة الأولى حمراء)، وعلية فباستخدام قاعدة الضرب فإن احتمال أن تكون الكرتان حمراء = $\frac{7}{10}*\frac{2}{3}=\frac{7}{15}$

ثانيا: بنفس المنطق نجد أن احتمال أن تكون الكرتان بيضاء = $\frac{3}{10}*\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

ثالثا: احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء = $\frac{7}{10}*\frac{3}{9}=\frac{7}{30}$

و احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء = $\frac{3}{10}*\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

و احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والثانية بيضاء = $\frac{7}{30}+\frac{7}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$

مثال رقم 12- 4:

ثلاث مجموعات من الأطفال تتألف الأولى من (ثلاث بنات وولد واحد) وتتألف الثانية من (بنتين وولدين) وتتألف الثالثة من (بنت واحدة وثلاثة أولاد) فإذا اختير طفل عشوائيا من كل مجموعة فما احتمال أن يكون الثلاثة أطفال المختارون عبارة عن بنت واحدة وولدين؟

الحل:

يقع الحدث المطلوب بإحدى الطرق الثلاثة الآتية : (بنت وولد وولد) أو (ولد وبنت وولد) أو (ولد وولد وبنت)

احتمال الطريقة الأولى $= \frac{3}{4} * \frac{2}{4} * \frac{3}{4} = \frac{18}{64} = \frac{9}{32}$

واحتمال الطريقة الثانية $= \frac{1}{4} * \frac{2}{4} * \frac{3}{4} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

واحتمال الطريقة الثالثة $= \frac{1}{4} * \frac{2}{4} * \frac{1}{4} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$

وبما أن الأحداث متنافية فإن احتمال أن يكون الأطفال المختارون عبارة عن بنت واحدة وولدين هو مجموع احتمالات هذه الطرق، أى$= \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$

مثال رقم 12- 5:

إذا ألقينا حجر نرد (حجر النرد عبارة عن مكعب ذو ستة أوجه والأوجه مرقمة من 1 - 6) فما احتمال أن يظهر ؟

أ. الرقم (1) ؟ ب. رقم فردي .

ج. رقم زوجي ؟ د. رقم أكبر من (4)؟

هـ . رقم أكبر من (10) ؟ و . رقم أصغر من (6) ؟

ز. رقم أصغر من (9) ؟ ح. رقم غير الرقم (3) ؟

الحل:

أ - الرقم (1) =1/6 ب- رقم فردي =1/2

ج- رقم زوجى = 1/2 د- رقم أكبر من (4) =1/3

هـ . رقم أكبر من (10) = صفر . و . رقم أصغر من (6) =5/6

ز. رقم أصغر من (9) = 1 . ح. رقم غير الرقم (3) =5/6

12.5. مبدأ العد لحساب الاحتمال Counting for Probability Calculation

فى الأمثلة البسيطة السابقة عندما كنا نقوم بحساب الإحتمال كنا نقوم بجهد مقبول بعد الأحداث الممكن وقوعها (وذلك لان تلك الأمثلة كانت بسيطة)، ولكن ماذا لو كانت تلك الأحداث الممكن وقوعها عملياً كبيرة وأن حصرها واحدة فأخرى سيكون شاقاً وليس بتلك البساطة التى رأيناها فى الأمثلة السابقة.

وعموماً يوجد ثلاث طرق للعد وهى :

1- الحصر اليدوى Manual counting لكل الاحتمالات الممكنة: وفيها نقوم بكتابة كل الاحتمالات الممكنة يدويا ومن ثم عدها. كما يمكن أيضًا حصر الاحتمالات الممكنة باستخدام طريقة الرسم المتفرع أو المخطط الشجرى Tree Diagram الغير مقفل.

2- التفكير الاستنتاجي Inferential Thinking: إذا أردنا معرفة عدد مجموعات الأحرف التي يمكن تشكيلها من الأحرف الثلاثة أ ، ب، جـ فإننا نجد أن للخانة الأولى 3 خيارات محتملة هي أ، ب، جـ . ولكل من هذه الخيارات الثلاثة خياران آخران فقط لملء الخانة الثانية، بمجموع 3 × 2 = 6 خيارات. ومع كل واحد من هذه الاحتمالات الستة، يوجد خيار محتمل واحد للخانة الثالثة. أي بمجموع 6×1=6. ولذا فإن عدد احتمالات مجموعات الأحرف تساوي 3 × 2 × 1 = 6. واللجوء إلى الاستنتاج أفضل من مجرد حصر كل الاحتمالات الممكنة لأن التفكير الاستنتاجي يأخذ في الاعتبار كل الاحتمالات الممكنة، بينما قد يغفل أحدها أثناء الحصر، خاصة إذا كان لدينا عدد كبير من الأشياء.

3- استخدام الصيغ الرياضية Mathematical Formulas: حيث نجد أنفسنا مضطرين إلى استخدام بعض الطرق الرياضية للعد حين يكون الحصر اليدوى أو التفكير الاستنتاجي صعبا لكثر الطرق الممكنة، وخلال الصفحات القليلة القادمة سنتعرض لبعض هذه الطرق.

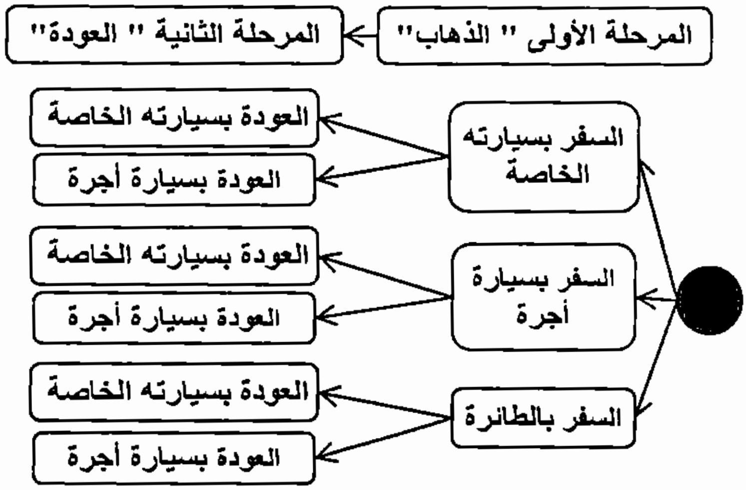
12.5.1.قاعدة الضرب m*n / المخطط الشجرى Tree Diagram

إذا كان لدينا نشاط ما يمكن اتمامه على مرحلتين ، المرحلة الأولى يمكن أن تتم بعدة طرق عددها m، والمرحلة الثانية يمكن أن تتم بعدة طرق عددها n، فإن العدد الكلى للطرق التى يمكن أن يتم إنجاز النشاط بها بمرحلتيه هو حاصل ضرب $(m*n)$.

مثال رقم 12- 6:

إذا أمكن لمسافر أن يسافر ذهاباً من القاهرة إلى الأسكندرية بسيارته الخاصة أو بسيارة أجرة أو بالطائرة، وإياباً من الأسكندرية إلى القاهرة بسيارته الخاصة أو بسيارة أجرة . فبكم طريقة يستطيع هذا المسافر أن ينتقل من القاهرة إلى الأسكندرية والعودة؟

الحل : المرحلة الأولى يمكن أن تتم بثلاث طرق m تساوى ثلاثة ، و المرحلة الثانية يمكن أن تتم بطريقتين n تساوى اثنين، فعدد الطرق المختلفة الممكنة هى 3*2 أى ستة طرق، والشكل 12- 4 يبين هذه الطرق.



شكل رقم 12- 4 الطرق المختلفة للإنتقال من القاهرة إلى الأسكندرية ذهاباً وإياباً

ويمكن تعميم قاعدة الضرب على أى حدث يتم على أى عدد من المراحل المتتالية، فلو فرضنا أنه يمكن اتمام المرحلة الأولى بـ n_1 طريقة، والمرحلة الثانية بـ n_2 طريقة، والمرحلة الثالثة بـ n_3 طريقة, والمرحلة الـ k بـ n_k طريقة فيكون عدد الطرق الممكنة لاتمام هذا الحدث بجميع مراحله هى حاصل ضرب عدد هذه الطرق، أى يكون عددها هو:
$n_1*n_2*n_3*......*n_k$.

مثال رقم 12- 7:

يقدم احد المطاعم 4 اصناف من اللحوم ، و3 اصناف من السلطات , وصنفين من الحلوى كم عدد الاختيارات الممكنة لوجبة غذائية مكونة من صنف واحد من كل نوع ؟

الحل : اختيار وجبة مكونة من صنف واحد من كل نوع يتم على ثلاثة مراحل:

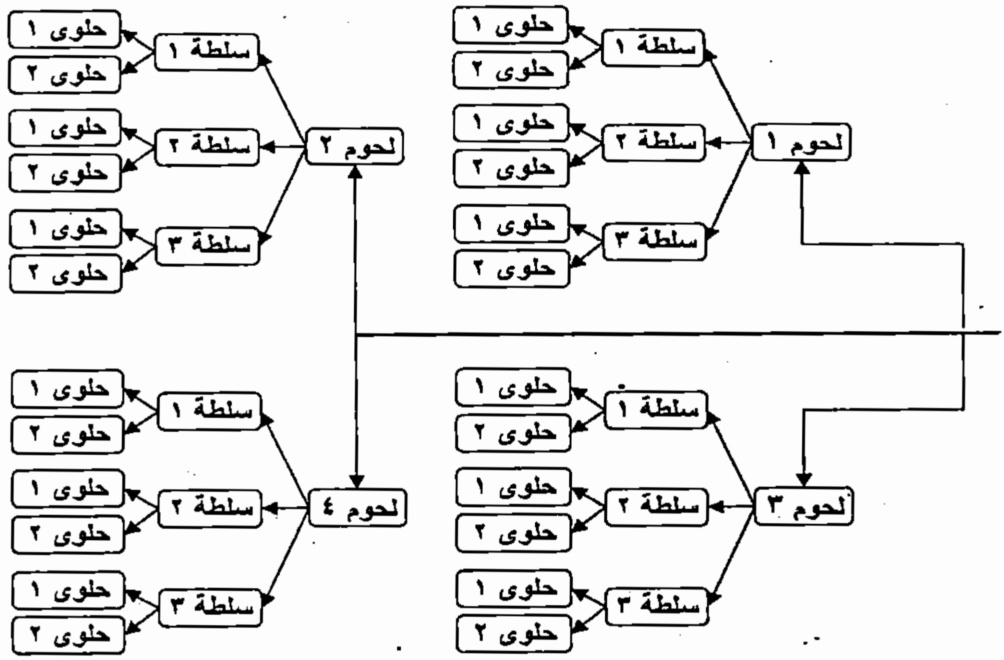
اولا :: اختيار صنف من اللحوم و يتم باربع طرق،

ثانيا:: اختيار صنف من السلطات و يتم بثلاث طرق،

ثالثا:: اختيار صنف من الحلوى و يتم بطريقتين .

اذن عدد الطرق الممكنة لاختيار الوجبة الغذائية = 4*3*2=24 طريقة.

والشكل 12-5 يعرض المخطط الشجرى Tree Diagram لاختيار وجبة غذائية مكونة من صنف واحد من كل نوع من الأطعمة السابق الإشارة فى المثال، ويوضح أنه يمكن الحصول على 24 طريقة مختلفة لذلك.



شكل رقم 12 -5 الطرق المختلفة لاختيار وجبة غذائية مكونة من صنف واحد من كل نوع

مثال رقم 12- 8:

يعمل في شركة 8 مهندسين ، 3 فنيين، 24 عاملا . بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مكون من مهندس و فني و عامل ؟

الحل:

عدد فرق العمل المكونة من مهندس و فني و عامل= 3*8*24= 576 فريق.

مثال رقم 12- 9:

صندوق فيه 8 كرات مختلفة سحبت 3 كرات الواحدة تلو الاخرى . احسب عدد طرق سحب الكرات الثلاث اذا كان السحب:

أ- دون ارجاع/تكرار .

ب- مع ارجاع/ تكرار.

الحل:

أ-السحب دون ارجاع

عدد طرق سحب الكرة الاولى =8، عدد طرق سحب الكرة الثانية =7، عدد طرق سحب الكرة الثالثة =6

اذن عدد طرق سحب الكرات الثلاث دون ارجاع =8*7*6=336 طريقة.

ب-السحب مع ارجاع:

عدد طرق سحب الكرة الاولى=8 ، و عدد طرق سحب الكرة الثانية =8، عدد طرق سحب الكرة الثالثة =8.

اذن عدد طرق سحب الكرات الثلاث =8*8*8=512 طريقة.

12.5.2.نظرية التباديل/التراتيب Permutation Theory

إذا تصورنا أن لدينا عدداً من الاماكن/المواقع الخالية r ، ولدينا عدداً من الأشياء/العناصر المتوفرة n، ونريد أن نملأ هذه الاماكن/المواقع الخالية بتلك الأشياء/العناصر فإن هذا العمل سيتم على مراحل عددها r، ففى المرحلة الأولى نملأ المكان/الموقع الأول بأى شيئ نختاره من بين الأشياء/العناصر المتوفرة n، أى بعدد n من الطرق. كذلك يمكن أن نملأ المكان/الموقع الثانى بعدد من العناصر n-1 المتبقية، وهكذا،........، والموقع الأخير يمكن ملئه بعدد من الطرق يساوى n-(r-1)=n-r+1 طريقة مختلفة. ووفقاً لقاعدة الـ m*n المعممة نجد المطلوب.

تعريف:يسمى ترتيب r من الأشياء/العناصر بالتباديل Permutation .

ويلاحظ أن الترتيب/التعاقب ضرورياً للتفريق بين العناصر المرتبة (التى قد تبدو متشابهة) بمعنى أن ab يختلف عن ba.

ويحسب عدد الطرق التي يتم بها ***<u>ترتيب عناصر مجموعة مع عدم تكرار العناصر</u>*** من العلاقة:

$$p_r^n = r!\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$p_r^n = n(n-1)(n-2)........(n-r+1)$$

أو

$$\text{Multiply } n*(n-1)*(n-2)...\text{Times of } r$$

أى نضرب n × العدد السابق لها × العدد السابق بعدد من المرات يساوى r من المرات.

حيث $n!$ تقرأ مضروب n أو Factorial n وتساوى $n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)$.

وحيث $r!$ تقرأ مضروب r أو Factorial r وتساوى $r(r-1)(r-2)\ldots(2)(1)$.

أي ان مضروب n يساوي حاصل ضرب n من الاعداد الطبيعية المتتالية تبدأ بالعدد n وتنتهي بالعدد 1 .

وحيث أن n هى عدد العناصر المتوفرة التى نختار من بينها.

وحيث أن r هى عدد المراحل/عدد المرات/ عدد العناصر التى سنختارها.
ويلاحظ أن !0 تقرأ مضروب 0 أو Factorial 0 وقيمته تساوى الواحد الصحيح.

أما لحساب عدد الطرق التي يتم بها ***ترتيب عناصر مجموعة مع إمكانية تكرار العناصر*** فيتم باستخدام العلاقة:

$$p_r^n = n^r$$

أى أن عدد الطرق يساوى عدد الأشياء/ العناصر المتوفرة التى نختار من بينها n مرفوعة إلى أس يساوى عدد العناصر التى سنختارها r .

فمثلاً إذا أردنا معرفة عدد الطرق التي يتم بها ترتيب ثلاث كتب مختلفة هي رياضيات، فيزياء، أحياء متجاورة على رف فإننا نحصل على التراتيب التالية :

(رياضيات فيزياء أحياء)، (رياضيات أحياء فيزياء)، (أحياء رياضيات فيزياء)، (أحياء فيزياء رياضيات)، (فيزياء رياضيات أحياء)، (فيزياء أحياء رياضيات)، إذن عدد التراتيب الممكنة يساوى ستة، وفى هذه الحالة نسمي كل ترتيب تبديلاً، وبتطبيق العلاقة السابقة:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3*2*1}{0!} = \frac{6}{1} = 6$$

12.5.3.نظرية التوافيق Combination Theory

التوافيق Combination هي عدد التشكيلات الممكنه لإنتقاء/لاختيار/لانتخاب مجموعة جزئية من مجموعة كلية من العناصر عندما يكون ليس هناك أهمية للترتيب. أو بعبارة أخرى، التوافيق Combination هي عبارة عن عدد الطرق التي يمكن فيها انتقاء r من العناصر من ضمن n من العناصر المتوفرة دون مراعاة لترتيب تسلسل العناصر المنتقاة ضمن التشكيلات الممكنة للمجموعة الجزئية.

ويحسب عدد الطرق التي يتم بها ***انتقاء عناصر مجموعة مع عدم تكرار العناصر*** من العلاقة:

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

فإذا أردنا معرفة عدد الطرق التي يتم بها اختيار ثلاث كتب مختلفة هي رياضيات، فيزياء، أحياء متجاورة على رف (بغض النظر عن الترتيب) فإننا سنجد أنها طريقة واحدة فقط، وفى هذه الحالة نسمي هذا الاختيار توفيقاً، وبتطبيق العلاقة السابقة:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3*2*1}{3*2*1*1!} = 1$$

أما لحساب عدد الطرق التي يتم بها ***<u>انتقاء عناصر مجموعة مع إمكانية تكرار العناصر</u>*** فيتم باستخدام العلاقة:

$$C_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-r)!}$$

والشكل 12-4 يعرض الصيغ الرياضية المختلفة للعد الحساب، ويوضح أنه توجد أربع صيغ مختلفة

شكل رقم 12- 6 الصيغ الرياضية المختلفة للعد

وللتفريق بين التباديل Permutation والتوافيق Combination نجد أن (أ ب جـ) و(أ جـ ب) و(ب أ جـ)، ثلاثة تباديل لمجموعة الرموز أ، ب، جـ. أما التوافيق فهي تلك المجموعات التي تتضمن الأشياء نفسها بغض النظر عن الترتيب، فالمجموعات (أ ب جـ) و(أ جـ ب) و(ب أ جـ) كلها تمثل التوافيق نفسها، بينما تمثل المجموعات (أ ب جـ) و(أ ب د) و(أ جـ د)، توافيق مختلفة.

كذلك فى التباديل نهتم بالترتيب والتكرار فالعددان 2 و5 لهم اربع تباديل هي 22 و52 و 55 و 25 أما في التوافيق لانهتم بالترتيب ولا التكرار فالعددان 2 و 5 لهم توفيق واحد وهي المجموعة (2 ، 5).

12.5.4.الطرق المختلفة للسحب/ للانتقاء Selection Methods

وبالنظر إلى الشكل 12-4 نلاحظ أنه توجد أربعة طرق مختلفة للسحب/للاختيار /للانتقاء/للانتخاب :

1- سحب دفعة واحدة أي فى وقت واحد (أى أن ترتيب سحب العناصر ليس مهما) وهي توافيق Combination، وينقسم هذا السحب إلى نوعين:
   - مع الإرجاع/التكرار With repetition .
   - مع عدم الإرجاع/التكرار Without repetition.

2- سحب على التوالي/على الترتيب (أى أن ترتيب سحب العناصر مهمٌ لأنه يصبح لدينا عنصر محدد فى السحبة الأولى ثم عنصر محدد آخر فى السحبة التانية وهكذا ...) وهي تباديل Permutation ، وينقسم هذا السحب أيضا إلى نوعين:
   - مع الإرجاع With repetition.
   - مع عدم الإرجاع Without repetition.

أما مسألة الإرجاع فهي تهم التكرار ولاعلاقة لها بالترتيب، أي أنَ العنصر المسحوب يمكن أن يظهر عدة مرات عند السحب.

مثال رقم 12- 10:

ما عدد الطرق التى يمكن بها سحب 3 كرات على التوالى بدون ارجاع/تكرار من صندوق به 10 كرات ذات ألوان مختلفة ؟

الحل :

حيث أن الترتيب هنا مهم (إذ أن إختلاف الألوان قد يؤدى إلى اختلاف اللون المسحوب) فإننا نستخدم ال تباديل، و حيث أن السحب سيكون على التوالى بدون ارجاع/تكرار فإننا و طبقا للشكل 12-5 نعوض فى العلاقة:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10*9*8*7!}{7!} = 10 * 9 * 8 = 720$$

مثال رقم 12- 11:

ما عدد الطرق التى يمكن بها اختيار لجنة مكونة من 3 طلاب من بين 10 طلاب في أحد الفصول؟

الحل :

حيث أن الترتيب هنا لا يهم (إذ أن اختيار أحمد ثم اختيار محمد لا يختلف عن اختيار محمد ثم أحمد) فإننا نستخدم التوافيق، كذلك لا يمكن التكرار (إذ لا يمكن اختيار أحمد، وأحمد، وأحمد فى لجنة) فإننا و طبقا للشكل 12-5 نعوض فى العلاقة:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10*9*8*!7!}{3*2*1*!7!} = 120$$

مثال رقم 12- 12:

أحسب أقصى عدد لكلمة مكونة من ثلاث حروف فقط باستخدام الحروف العربية 28 حرف فى الحالات التالية:

3- إذا كان الترتيب مهماً ولا يمكن تكرار الحروف فى الكلمة.
4- إذا كان الترتيب مهماً و يمكن تكرار الحروف فى الكلمة.
5- إذا كان الترتيب غير مهم ويمكن تكرار الحروف فى الكلمة.
6- إذا كان الترتيب غير مهم ولا يمكن تكرار الحروف فى الكلمة.

الحل :

1- حيث أن الترتيب مهم (أى أن أ ب ج تختلف عن أ ج ب تختلف عن ب أ ج تختلف عن ب ج أ تختلف عن ج أ ب تختلف عن ج ب أ) فإننا نستخدم التباديل Permutation ، وحيث أنه يمكن تكرار استخدام نفس الحروف (أى يمكن ترتيب أ أ أ ، أ أ ب، أ أ ج ، .....، أ ب أ،.......) فإننا نعوض فى القانون:

$$p = n^r = 28^3 = 28 * 28 * 28$$

2- حيث أن الترتيب مهم (أى أن أ ب ج تختلف عن أ ج ب تختلف عن ب أ ج تختلف عن ب ج أ تختلف عن ج أ ب تختلف عن ج ب أ) فإننا نستخدم التباديل Permutation ، وحيث أنه لا يمكن تكرار استخدام نفس الحروف (أى لا يمكن قبول الترتيب أ أ أ ، أ أ ب، أ أ ج ، .....، أ ب أ،.......) فإننا نعوض فى القانون:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_3^{28} = \frac{28!}{(28-3)!} = \frac{28*27*26*25!}{25!} = 28 * 27 * 26$$

3- حيث أن الترتيب غير مهم (أى أن أ ب ج لا تختلف عن أ ج ب لا تختلف عن ب أ ج لا تختلف عن ب ج أ لا تختلف عن ج أ ب لا تختلف عن ج ب أ) فإننا نستخدم التوافيق Combination ، وحيث أنه يمكن تكرار استخدام نفس الحروف (أى يمكن ترتيب أ أ أ ، أ أ ب، أ أ ج ، .....، أ ب أ،.......) فإننا نعوض فى القانون:

$$C_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C_3^{28} = \frac{(28+3-1)!}{3!(28-1)!} = \frac{(30)!}{3*2*1*(27)!} = \frac{30*29*28*27!}{3*2*1*(27)!} = \frac{30*29*28}{6}$$

4- حيث أن الترتيب غير مهم (أى أن أ ب ج لا تختلف عن أ ج ب لا تختلف عن ب أ ج لا تختلف عن ب ج أ لا تختلف عن ج أ ب لا تختلف عن ج ب أ) فإننا نستخدم التوافيق Combination ، وحيث أنه لا يمكن تكرار استخدام نفس الحروف (أى لا يمكن قبول الترتيب أ أ أ ، أ أ ب، أ أ ج ، .....، أ ب أ،.......) فإننا نعوض فى القانون:

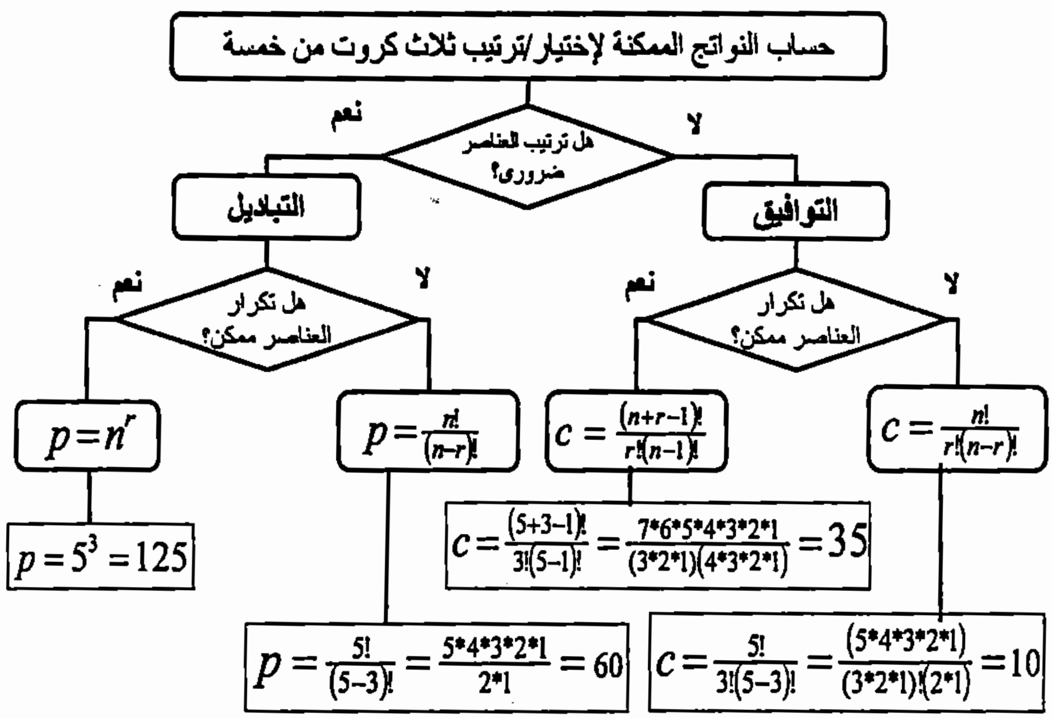
$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_3^{28} = \frac{28!}{3!(28-3)!} = \frac{28*27*26*25!}{3*2*1*25!} = \frac{28*27*26}{6}$$

مثال رقم 12- 13:

أحسب عدد النواتج الممكنة لعملية سحب ثلاث كروت من خمسة فى الحالات التالية:

1- إذا كان الترتيب مهماً ولا يمكن تكرار الكارت .
2- إذا كان الترتيب مهماً و يمكن تكرار الكارت.
3- إذا كان الترتيب غير مهم ويمكن تكرار الكارت.
4- إذا كان الترتيب غير مهم ولا يمكن تكرار الكارت.

الحل :



شكل رقم 12- 7 مثال لتطبيق الصيغ الرياضية المختلفة للعد

مثال رقم 12- 14:

إحسب عدد طرق اختيار عينة خماسية من مجتمع احصائى مكون من 200 شخص او ....الخ.

الحل :

حيث أن إختيار العينة لا يلزمه الترتيب فنستخدم التوافيق Combination ، وحيث أنه لا يمكن فيه التكرار فنعوض فى القانون

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_5^{200} = \frac{200!}{5!(200-5)!} = \frac{200*199*198*197*196}{120}$$

مثال رقم 12- 15:

أراد أربعة أشخاص أخذ صورة جماعية بوقوفهم معاً في صفٍ واحدٍ بكم طريقة مختلفة يمكن أن يصطف هؤلاء الأشخاص ؟؟

الحل : الطرق المختلفة لاصطفاف الأشخاص هي التباديل المختلفة (لأن الترتيب مهم ويعطى نتائج مختلفة) لمجموعة مكونة من أربعه عناصر اي P_4^4 ولايجاد هذه القيمة يمكننا تصور المواقع الأربعة التي يقف بها الأشخاص الأربعة هكذا:

يمكن إشغال الموقع الاول بـ4 طرق

يمكن إشغال الموقع الثاني بـ3 طرق

يمكن إشغال الموقع الثالث بـ2 طرق

يمكن إشغال الموقع الرابع بـ1 طرق

عدد جميع الطرق = 4*3*2*1=24 طريقة

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4*3*2*1}{0!} = \frac{24}{1} = 24$$

مثال رقم 12- 16:

كم عدد مكون من 3 أرقام و يمكن تكوينه من الأرقام : 4 ، 5 ، 6، 7، 8 مع عدم تكرار الأرقام في أي عدد ؟

الحل :

عدد طرق كتابة رقم الآحـــاد = 5، وعدد طرق كتابة رقم العشرات = 4، وعدد طرق كتابة رقم المئـــات = 3

وبالتالي فإن عدد طرق كتابة الأرقام الثلاثة = عدد طرق إجراء كل عملية على حده = 5 × 4 × 3 = 60 طريقة

الحل بطريقة أخرى :

حيث أن الترتيب مهم في هذه الحالة (أي أن 23 قيمة مختلفة عن 32) فإننا نحسب التباديل، و حيث أنه لا يمكن تكرار الأرقام في أي عدد، فإن

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5*4*3*2*1}{2!} = 60$$

أي أنه يمكننا تكوين 60 عددا من الخمسة أرقام المعطاه.

مثال رقم 12- 17:

ما أقصى حد لكلمة مكونة من ثلاث حروف فقط باستخدام الحروف العربية 28 حرف؟

الحل : الترتيب مهم فنستخدم التباديل Permutation ، فإذا كان التكرار جائزا نعوض في القانون:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_3^{28} = \frac{28!}{(28-3)!} = \frac{28*27*26*25!}{25!} = 28 * 27 * 26$$

أى نضرب 28 × العدد السابق لها × العدد السابق لعدد من المرات يساوى 3 مرات.

أما إذا كان التكرار غير جائز نعوض في القانون:

$$p = n^r = 28^3 = 28*28*28$$

أى نضرب 28 × نفسها لعدد من المرات يساوى 3 مرات.

مثال رقم 12- 18:

اشتركت 6 فرق في مسابقة للرياضيات . بكم طريقة يمكن ان تظهر فية نتيجة السباق للمراكز الثلاثة الاولى علما بأنه لا يحل اثنان في المركز نفسه ؟

الحل : الترتيب مهم فنستخدم التباديل Permutation ، والتكرار غير جائز نعوض في القانون:

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = p_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1} = 120$$

مثال رقم 12- 19:

بكم طريقة يمكن اختيار 4 ألوان من مجموعة مكونة من 6 ألوان ؟

الحل :

إذا كان الترتيب فى إختيار الألوان غير مهم (أي أن اختيار الأحمر والأخضر لا يختلف عن اختيار الأخضر و الأحمر مثلا) فإننا نحسب التوافيق،

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_4^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1*(2*1)} = 15$$

مثال رقم 12- 20:

أرادت إدارة إحدى الشركات اختيار لجنة من خمس أفراد من بين سبعة أفراد، فما هو عدد الطرق الممكنة للإختيار؟

الحل :

حيث أن الترتيب فى إختيار اللجان غير مهم (أي أن اختيار هند وأحمد لا يختلف عن اختيار أحمد و هند) فإننا نحسب التوافيق، و حيث أن التكرار غير ممكن فى حالات اختيار أعضاء اللجان، فإننا و طبقا للشكل 12-5 نعوض فى العلاقة :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_5^7 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{5*4*3*2*1*(2*1)} = 21$$

مثال رقم 12- 21:

- بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من 3 طلاب من بين 20 طالب في أحد الفصول ؟

الحل :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_5^{20} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20*19*18*17!}{3*2*1*17!} = 1140$$

مثال رقم 12- 22:

أرادت إدارة إحدى الشركات اختيار لجنة مكونة من ثلاث سيدات وأربع رجال، فإذا علم أن عدد السيدات هو ست سيدات، وعدد الرجال هو ثمانية رجال، فما هو عدد الطرق الممكنة للإختيار؟

الحل :

وفقا لقاعدة الـ m*n المعممة نجد فإن عدد الطرق الممكنة للإختيار $C_3^6 * C_4^8$

$$C_3^6 * C_4^8 = \frac{6!}{3!(6-3)!} * \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1*(3*2*1)} * \frac{8*7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1*(4*3*2*1)} = 20 * 70 = 1400$$

مثال رقم 12- 23:

فى المثال السابق 12-22 ما هو احتمال اختيار لجنة مكونة من ثلاث سيدات وأربع رجال، إذا علم أن عدد السيدات هو ست سيدات، وعدد الرجال هو ثمانية رجال ؟

الحل :

حيث أن الترتيب فى إختيار اللجان غير مهم (أي أن اختيار هند وأحمد لا يختلف عن اختيار أحمد و هند) فإننا نحسب التوافيق، و حيث أن التكرار غير ممكن فى حالات اختيار أعضاء اللجان، فإننا و طبقا للشكل 12-5 نعوض فى العلاقة $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ كما يلى :

لاختيار لجنة مكونة من ثلاث سيدات من ست سيدات

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1*(3*2*1)} = 20$$

ولاختيار لجنة مكونة من أربع رجال من ثمانية رجال

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_4^8 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8*7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1*(4*3*2*1)} = 70$$

وحيث أن المطلوب (لجنة من السيدات و لجنة من الرجال)، ووفقا لقاعدة الـ m*n المعممة نجد فإن عدد الطرق الممكنة للإختيار $C_3^6 * C_4^8$

$$\text{Number of Possible outcome} = C_3^6 * C_4^8 = 20 * 70 = 1400$$

ولحساب العدد الإجمالى لكل الأحداث نجد أنه توافيق لاختيار سبعة (3+4) أفراد من أربع عشرة (6+8) فردا، أى C_7^{14}

$$\text{Number of Total outcome} = C_7^{14} = \frac{14!}{7!(14-7)!} = \frac{14*13*12*11*10*9*8*7!}{7*6*5*4*3*2*1*(7!)} = 3432$$

ولحساب الاحتمال نعوض فى القانون

$$\text{Probability}_{\text{classic}} = \frac{\text{Number of Possible outcome}}{\text{Number of Total outcome}} = \frac{1400}{3432} = 40.79\%$$