

الفصل الثالث عشر

التوزيعات الاحتمالية

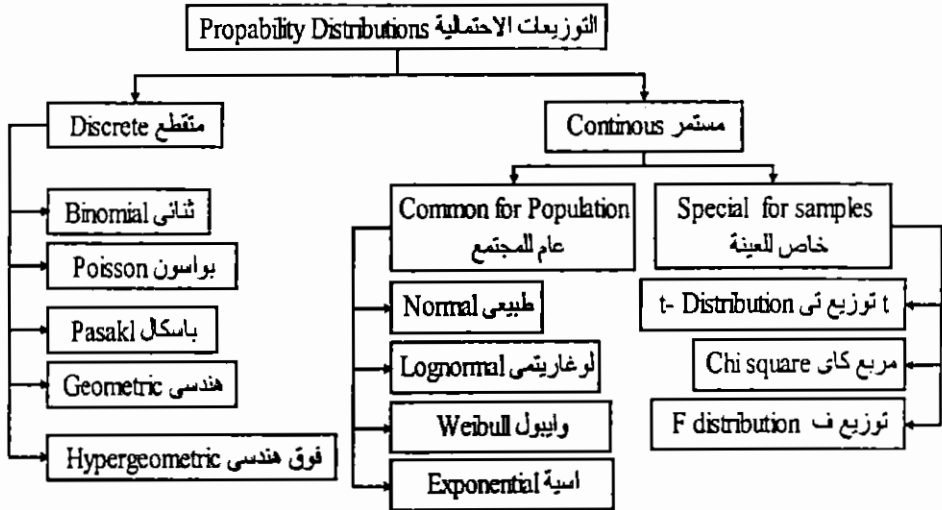
Statistical Distribution

13.1. مقدمة Introduction



التوزيعات الاحتمالية هي نماذج ذات صيغة رياضية يفترض أنها تعكس سلوك متغير ما وليكن X ، وتتحدد هذه التوزيعات بمعرفة واحد أو أكثر من الألفة Parameters) جمع دليل مثل المتوسط أو الانحراف المعياري أو درجة الحرية)، و التي تتوقف بدورها على خواص المجتمع وطريقة أخذ العينات منه، وتبنى هذه النماذج على افتراضات خاصة تصور الميكانيكية العشوائية التي تساعدنا في وصف ودراسة سلوك المتغير قيد الدراسة.

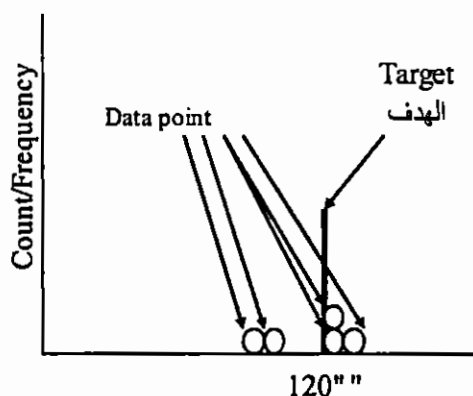
ويصل عدد التوزيعات الاحتمالية إلى ما يقرب من مائة توزيع، وتنقسم التوزيعات الاحتمالية إلى نوعين أساسيين وكل نوع ينقسم بدوره إلى عدة توزيعات، ولكننا سنتناول عددا من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة التي نتوقع أنها ستغطي ما نحتاجه أثناء تنفيذ مشاريع التحسين المختلفة وعند التعامل مع التطبيقات الهندسية و الصناعية شكل 1-13.



شكل رقم 1-13 بعض التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام

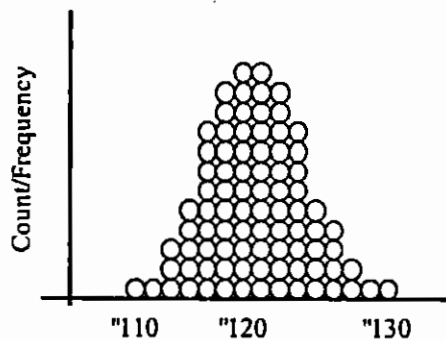
وقبل تناول التوزيعات الاحتمالية بالشرح سنأخذ مثالا لتوضيح ماهية التوزيعات الاحتمالية، فنقول أنه يصادفنا في حياتنا اليومية متغيرات عشوائية كثيرة، (وقد أوضحنا أنواع هذه المتغيرات في هذا الفصل من الكتاب)، وعند قياس بعض هذه المتغيرات فإننا نقيسها بالتقريب لكون بعضها دائم ومستمر التغير.

فمثلا إذا كان لدينا عملية معينة ولنفترض أنها مصنع دواء، ونريد قياس وتحديد وزن عبوات زجاجية لمستحضر ما تقوم بإنتاجه هذه العملية Process، و المفروض أن وزن هذه الزجاجات هو 120 جراما، فإنه من الصعب جداً أن تجد زجاجة وزنها 120 جراما بالضبط، ولذلك ستقوم بأخذ عدة عينات من نهاية خط الإنتاج وستقوم بوزنها، فسنجد أن قيمها أقل من أو أكبر من الـ 120 جرام، وسنجد أن أخذ عدد محدود من العينات من خط الإنتاج لن يعطينا القيمة الحقيقية لوزن هذه الزجاجات.



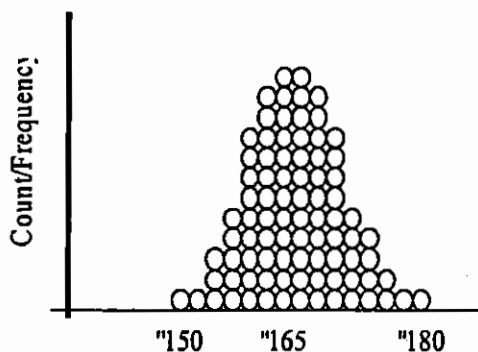
شكل رقم 13- 2 تمثيل بيانات قليلة

ولذا سنحاول التوصل إلى المزيد من الدقة، وذلك بزيادة عدد العينات ولكننا أيضا سنجد أن وزن العينات مهما كثر سيتراوح قيمه حول 120 جرام، ولو أمكننا زيادة عدد العينات الموزونة فسنجد قيمة كثيرة أكبر من الوزن الحقيقي المفروض والذي سنسميه الهدف Target وسنجد كذلك قيمة كثيرة أقل من هذا الهدف، وسنجد أنه كلما ابتعدنا عن الهدف كلما قل عدد العينات، وسنجد أن هناك قيمة عظمى للوزن، وكذلك قيمة صغرى للوزن، وأن الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لوزن العينات هو ما يطلق عليه المدى Range أي مدي التغير، وسنجد أن معظم أوزان العينات ستكون أقل بقليل أو أكثر بقليل من الوزن الهدف، وبتمثيل هذه البيانات وكما بالشكل 13-3 سنجد أننا يمكننا الحصول على شكل يقترب من شكل الجرس Bell Shape .



شكل رقم 13- 3 تمثيل لعدد اكبر من البيانات

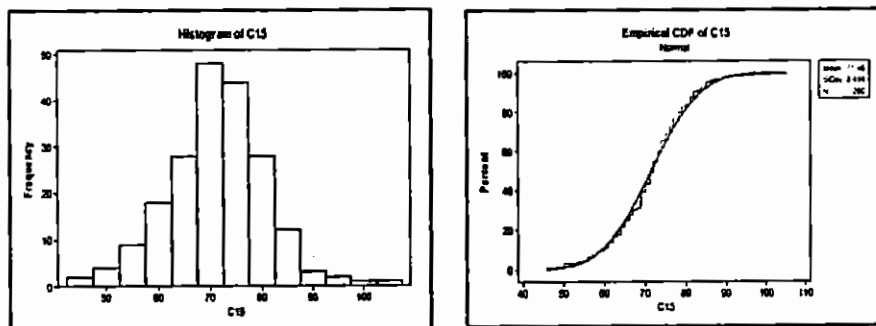
كذلك لو قمنا بقياس أطوال الطلبة في سن الخامسة عشرة في محافظة ما - وهو متغير عشوائي متصل لأنه من الممكن أن يأخذ أى قيمة - فمثلا سنجد أن أطوال الطلبة سيتراوح بين 150 سم إلى 185 سم، ولو أخذنا أى فترة ولتكن 160.5 إلى 161.5 سم لوجدنا آلاف الطلبة الذين تقع أطوالهم داخل هذه الفترة، وسنجد أن متوسط الأطوال سيكون فى حدود 165 سم، وأن الغالبية العظمى من هذه الأطوال سيتركز حول القيمة 165 سم، وأنه كلما ابتعدنا عن هذه القيمة يمينا أو يسارا كلما قل تكرار هذه القيم، وفى النهاية وعند رسم هذه القيم سنحصل أيضا على منحنى كما بالشكل 13-4.



شكل رقم 13- 4 تمثيل لبيانات كثيرة يقترب من شكل الجرس

ويمكن تعميم المثالين السابقين على كثير من الأنشطة الحياتية والملاحظات التي حولنا، وسنجد أننا فى كثير من الحالات عند تسجيلها ورسمها سنحصل على شكل بياني يقترب من شكل الجرس Bell Shape وهو ما نسميه منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، ويمكن التعبير عن خواص هذا المنحنى بدالتين كما يلي:

- دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density Function (PDF) والتي ستحكم سلوك ظاهرة أو عملية ما والتي تحدد شكل التوزيع الذي تخضع له هذه الظاهرة أو هذه العملية ويرمز لها بالرمز $f(x)$ أو $p(x)$ والمكتوبة بالحروف الصغيرة Small.
- دالة الكثافة التراكمية Cumulative Density Function (CDF) والتي تعطي قيمة رقمية لاحتمال حدوث هذه الظاهرة أو العملية تحت ظروف محددة ويرمز لها بالرمز $F(x)$ أو $P(x)$ والمكتوبة بالحروف الكبيرة Capital.



شكل رقم 13-5 نموذج لدالة الكثافة الاحتمالية ودالة الكثافة التراكمية

و تحديد هاتين الدالتين كما يظهر في شكل 13-5 سيمكننا من التعامل مع المجتمع تحت الدراسة والتي تم سحب عينات الدراسة منه، و سيمكننا كذلك من التعرف على خصائصها كشكل (توزيع) وقيمة (احتمال) تماما كما أمكننا التعامل مع العينة ومعرفة خصائصها من خلال المعايير الرقمية مثل المتوسط Mean و الانحراف المعياري Standard Deviation

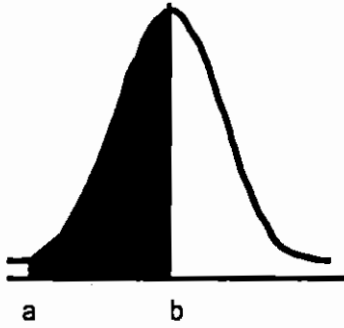
13.2. التوزيعات الاحتمالية المتصلة Continuous Probability Distributions

المتغيرات العشوائية هي متغيرات من خصائصها أنها يمكن أن تأخذ قيما عديدة وكثيرة في فترة ما، و يطلق علي بعضها "متغيرات عشوائية متصلة"، عشوائية لأنها من الممكن أن تأخذ أي قيمة، و متصلة لأنها تأخذ قيما كثيرة، وعند قياس هذه المتغيرات فإننا نقيسها بالتقريب لكونها دائمة ومستمرة التغير، ويعبر عن هذه التوزيعات بمعادلات وليس بجداول وذلك لكثرة القيم التي يمكن أن تأخذها.

بالعودة إلى مثال أطوال الطلبة - الذي ذكرناه في التمهيد لموضوع التوزيعات الاحتمالية - نقول أنه خلال أي فترة ولتكن 160.5 إلى 161.5 سم سنجد آلاف الطلبة الذين تقع أطوالهم داخل هذه الفترة، وبالتالي فاحتمال أن يكون طول أحد الطلبة قيمة واحدة ومحددة مثل 170 سم سيكون صفرا، وذلك لأن الاحتمال في حالة المتغير العشوائي المتصل عبارة عن

المساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي بين أى نقطتين معينتين، ومن المعروف أن المساحة تحت نقطة واحدة تساوى صفراً. هذا إضافة إلى أنه حتى في تفسيرنا الاحتمال على أنه نهاية التكرار النسبي، فإن هذا التكرار النسبي للطلبة الذين أطوالهم 170 سم بالضبط يساوى صفراً، لأنه مهما صغرت الفترة حول القيمة يظل هناك أعدادا كبيرة جداً من الطلبة الذين تقع أطوالهم في تلك الفترة، وبالتالي تكون نسبة الطلبة الذين طولهم 170 سم بالنسبة للطلبة الذين تقع أطوالهم في الفترة حول 170 سم صغيرة جداً وتؤول للصفر.

وبالتالي فإن احتمال أى قيمة معينة بحد ذاتها سيكون صفراً، وهذا يعنى أن من صفات المتغير العشوائي المتصل أن احتمال مساواته لأى قيمة محددة يكون صفراً، ولهذا لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي له بجداول، وإنما يعبر عنه بمعادلة كما قلنا سابقاً، ويكون الاحتمال عبارة عن المساحة تحت منحنى المعادلة وليس بجمع احتمال النقاط لأن احتمال كل نقطة كما قلنا يساوى صفراً.



شكل رقم 13-6 دالة الكثافة الاحتمالية

وبالتالي إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت

دالة $f(x)$ غير سالبة بحيث تكون المساحة تحتها

يساوى 1 فإن $f(x)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالية

Probability Distribution Function أو PDF

أى التوزيع الاحتمالي للمتغير X ، أما احتمال X بين قيمتين $X = a$ & $X = b$ فيساوى المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين A & B كما في الشكل 13-6.

وسنبدأ بتناول بعض التوزيعات التي نستخدمها كثيراً في التطبيقات الهندسية و الصناعية والتي تندرج تحت التوزيع الاحتمالى المستمر Continuous Probability Distributions

13.2.1. التوزيع الطبيعي Normal Distribution

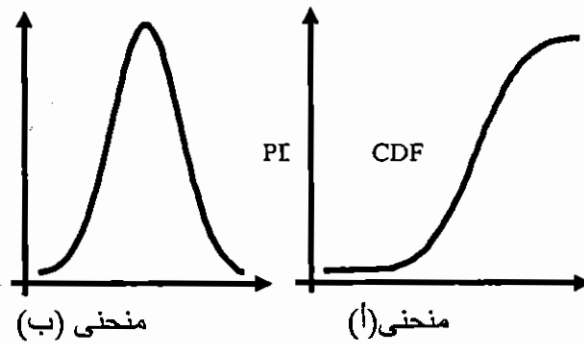
يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة على الإطلاق، وعليه بنيت الكثير من النظريات الإحصائية، وقد سمي هذا التوزيع بالطبيعي لأنه كان يظن فيما مضى أن أية بيانات عن ظواهر الحياة ينبغي أن تمثل لهذا التوزيع وإلا كانت هذه البيانات مشكوكا فيها، إلا أن هذا الفرض لم يكن في حقيقة الأمر صحيحاً تماماً فقد اتضح أنه من الصعب في كثير من الأحيان الحصول على توزيع طبيعي لتمثيل ظاهرة ما، وإنما ببعض التقريبات وللتسهيل فإنه يتم التعامل مع هذه التوزيعات على أنها طبيعية، ومن الظواهر التي تخضع

للتوزيع الطبيعي أعمار البشر، وأطوالهم، وأوزانهم، والأمراض التي تصيب الجهاز التنفسي، وكميات اللبن التي تنتجها الأبقار، ومقادير الدسم في الذبائح، ويوصف هذا التوزيع بمعادلة رياضية استنبطها العالم الألماني فريدريك جاوس وهي تحدد منحناه والذي يشبه الجرس، وهي تتعين تماما بمعرفة المتوسط μ Mean والانحراف المعياري (محمد أبو يوسف ، 1996) وتسمى دالة التوزيع الاحتمالية Probability Distribution Function (PDF) (شكل 7-13 ب) و تحكمها العلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

حيث $-\infty < x < \infty$ ، ومن الواضح أنه يمكننا تحديد التوزيع تماما بمعرفة الدليلين μ & σ أما الدالة المعروفة بدالة الكثافة التراكمية Cumulative Density Function (CDF) (شكل 7-13 أ) فتحكمها العلاقة

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

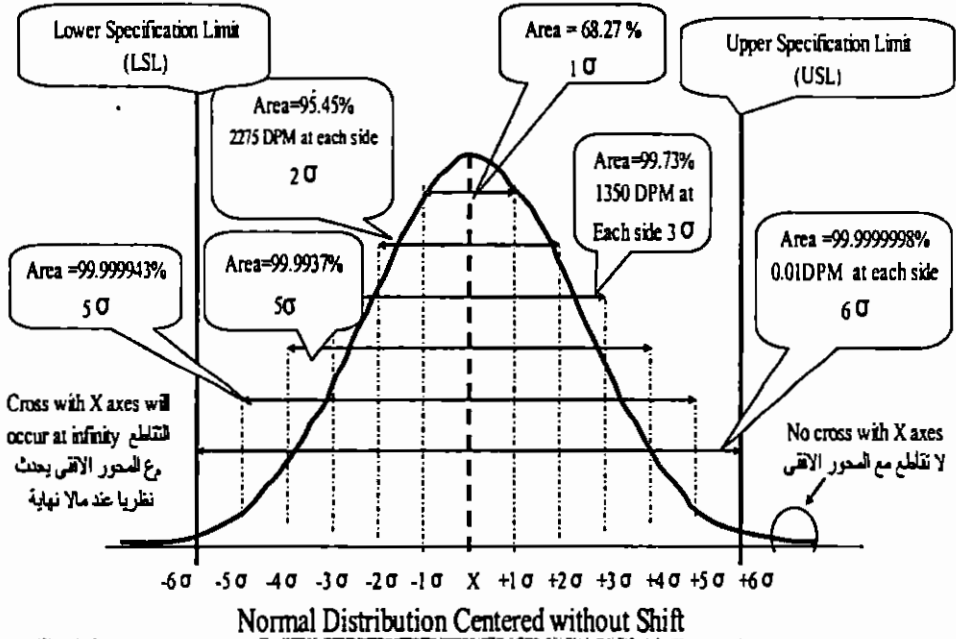


شكل رقم 7-13 دالة التوزيع الاحتمالي ودالة الكثافة التراكمية

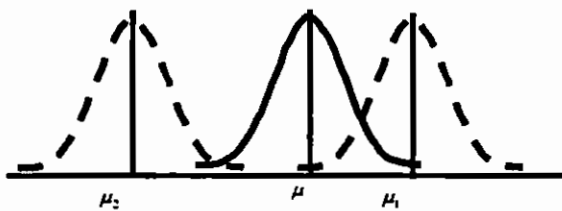
ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

- يمثل التوزيع الطبيعي بمنحنى يشبه الجرس Bell Shape.
- له قمة واحدة (مركز واحد) أو منوال واحد ينطبق على الوسط μ والوسيط وطرفاه يمتدان إلى ما لا نهاية ولا يقطعان المحور الأفقي.

- له محور تماثل يمر بالقمة ويقسم المنحني لمساحتين متساويتين ويسمى المتوسط .Mean
- تقل التكرارات عند طرفي المنحني وتزداد تدريجيا كلما اقتربنا من المنتصف حتى تبلغ أكبر ما يمكن عند المتوسط .Mean
- المساحة تحت المنحني تساوي 100% وتختلف قيمة المساحة تحت المنحني باختلاف قيمة الـ Sigma Level التي تريد القياس عندها.
- المساحات المحصورة ضمن عدد معين من الانحرافات المعيارية تمثل نسب محددة وثابتة كما هو موضح في شكل 8-13 .

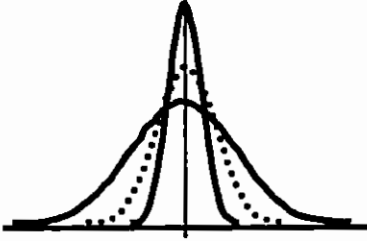


شكل رقم 8-13 الشكل المثالي للتوزيع الطبيعي بدون تحريك



شكل رقم 9-13 تحريك المتوسط يمينا أو يسارا

- إذا تغيرت قيمة المتوسط لا يتغير شكل المنحني وإنما يتحرك يمينا أو يسارا كما في شكل 9-13.



شكل رقم 10-13 تغير تفلطح المنحنى بتغير الانحراف المعياري

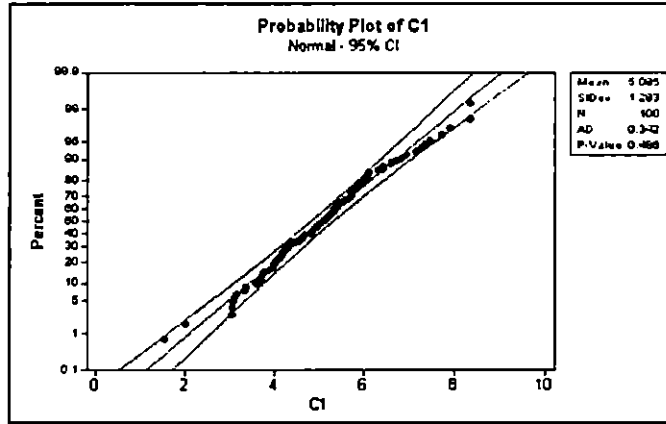
■ أما إذا تغيرت قيمة الانحراف المعياري Standard Deviation وبقيت قيمة المتوسط ثابتة يتغير شكل المنحنى، فيزداد تفلطحها كلما زادت هذه القيمة ويقل تشتتاً كلما قلت هذه القيمة كما فى شكل 10-13.

ونظراً لأهمية هذا التوزيع كما أكدنا سابقاً، وحيث إن كثير من النظريات الإحصائية قد بنيت عليه، فلا بد من طريقة للتأكد من أن المجتمع تحت الدراسة يخضع لتوزيع طبيعي أم لا؟ أو ما إذا كان توزيع أحد المتغيرات العشوائية هو التوزيع الطبيعي أم لا؟

وفى الحقيقة هناك عدة وسائل تساعدنا لتحديد ما إذا كان المجتمع تحت الدراسة يخضع لتوزيع طبيعي أم لا كما يلي:

■ من خلال التمثيل البياني Graphs وذلك برسم الهستوجرام Histogram، أو مخطط الصندوق Box Plot، أو الساق والورقة Stem And Leaf .. إلى آخره لعينة مسحوبة من المجتمع والتي توضح ما إذا كان التوزيع قريباً من التوزيع الطبيعي Normal Distribution أم لا؟ وذلك بأن يكون الشكل الناتج يشبه الجرس، ويكون متماثلاً حول المتوسط، وذو منوال واحد.

■ من خلال المقاييس الرقمية Measures مثل قيمة بى P Value، ويتم ذلك الاختبار باستخدام برامج المينيتاب Minitab والذي يحسب قيمة P ويرسم شكلاً مشابهاً لشكل 11-13 الذى يسمى مخطط الاحتمال Probability Plot، ولكي تكون البيانات Normal يجب أن يتوفر شرطان أولهما أن تكون قيمة $P < 0.050$ ، وثانيهما أن يقترب الشكل الناتج من خط مستقيم يمكن توقيفه بالعين ويكون محصوراً بين الحدود الموضحة بالشكل وفى هذه الحالة ينبغي أن يكون حجم العينة كبيراً أى أكبر من 50 عينة.



شكل رقم 11-13 مخطط الاحتمال

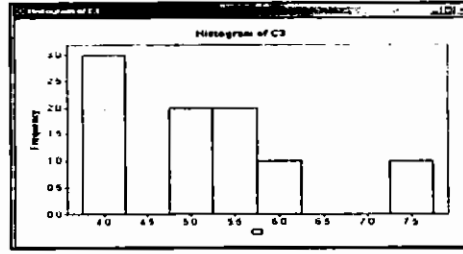
ومن أجل نتائج موثوق فيها يجب ألا نكتفي بأى من التمثيل البياني Graphs أو المقاييس Measures فقط، ولكن ينبغي اختبارهما معاً، أى يفضل دائماً إثبات صحة أى فرضية بأكثر من طريقة، ولكي لا ننسى هذا المفهوم ينبغي أن نتذكر دائماً مثال الصاروخ الذي يتبع الطائرة ويريد إصابتها، فلكي نتأكد من إصابة الطائرة، فإننا نزود الصاروخ بجهاز تتبع يعمل بالأشعة تحت الحمراء Infra Red ولمزيد من التأكد ولزيادة احتمال الإصابة نزوده كذلك بجهاز الكشف بالليزر Laser Detector، ولمزيد من التأكد ولزيادة احتمال الإصابة نزوده كذلك بجهاز تتبع حرارى Thermal Detector، فإذا أخطأت إحدى هذه الطرق، كان هناك احتمال للإصابة بالطريقة الأخرى، وهذا ما يجب أن يتم فى دراستنا، فنحن نقوم بإطلاق فرضية ما، ثم نحاول إثبات هذه الفرضية، وكلما زادت الطرق التي نحاول بها إثبات الفرضية كلما كان احتمال الدقة فى الاستنتاج أكبر وكلما كان احتمال الخطأ أقل.

مثال رقم 1-13:

تم سحب عينة من مجتمع وكانت قيمها كما فى جدول 1-13، والمطلوب اختبار ما إذا كان المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي Normal Distribution أم لا؟

جدول رقم 1-13 القيم العددية لعينة مسحوبة من مجتمع				
5.315	4.18338	4.15836	6.10838	4.17385
5.54294	7.71972	5.07613	5.23303	

الحل: أولاً: نرسم الهستوجرام Histogram للقيم المتاحة من العينة (شكل 12-13)، ويتضح من الرسم أن هذه العينة لا تتبع التوزيع الطبيعي، وبالتالي فليس هناك دليل على أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.



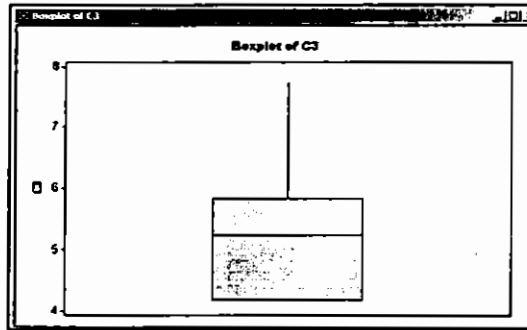
شكل رقم 12-13 هستوجرام البيانات المعطاه فى جدول 1-12

ثانيا: نرسم الساق والورقة Stem And Leaf للقيم المتاحة من العينة (شكل 12-13)، ويتضح من الرسم أن هذه العينة لا تتبع المنحنى التوزيع الطبيعي وبالتالي فليس هناك دليل على أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

(3)	5	023
3	5	5
2	6	1
1	6	
1	7	
1	7	7

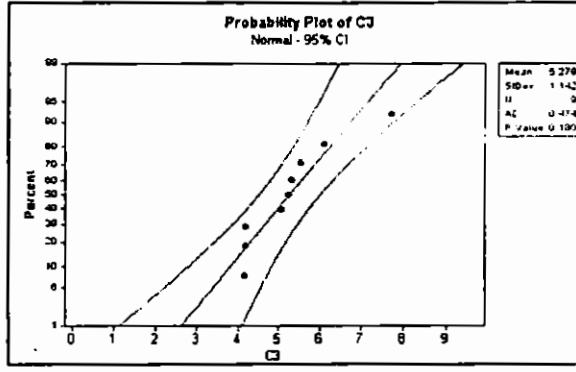
شكل رقم 13-13 مخطط الساق والورقة

ثالثا: نرسم مخطط الصندوق Box Plot للقيم المتاحة من العينة (شكل 13-13)، ويتضح أيضا من الرسم أن هذه العينة لا تتبع التوزيع الطبيعي ، وبالتالي فليس هناك دليل على أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي أيضا.



شكل رقم 14-13 مخطط الصندوق والشنب

رابعاً: نجرى اختبار طبيعى البيانات Normality Test Plot للقيم المتاحة من العينة، ويتضح أنه يتحقق شرطان وهما أن قيمة الـ $P > 0.05$ ، وأن جميع نقاط العينة تقع داخل الحدود وعلى هذا فإن هذه العينة تتبع منحنى التوزيع الطبيعى Normal Distribution وبالتالي فإن المجتمع يتبع أيضاً منحنى التوزيع الطبيعى.



شكل رقم 13- 15 مخطط الاحتمالية للمثال 12-5

ملاحظات هامة على المثال 13-1:

- 1- بالرغم من أن بعض وسائل الاختبار لم تمكننا من الجزم بأن البيانات المتاحة تمثل التوزيع الطبيعى Normal Distribution فإن بعضها تمكن من ذلك وعليه فلا بد من إجراء أكثر من اختبار فى أن واحد.
- 2- ما أدى لصعوبة التكهن بتبعية البيانات إلى التوزيع الطبيعى هو أن حجم العينة كان صغيراً، وبالتالي يفضل زيادة حجم العينات إن أمكن ذلك.
- 3- يلاحظ أننا اعتبرنا أن العينة تتبع التوزيع الطبيعى بناءً على الاختبار P Value ولم نأخذ نتائج الاختبارات البيانية المختلفة، والسبب فى ذلك أننا عادة ما نبدأ برسم هذه الأشكال إما لعدم توافر مهارة التعامل مع المينيتاب أو لعدم توافر برنامج المينيتاب نفسه، وفى معظم الأحوال تكون النتائج متقاربة، وأننا قد اخترنا قيم العينات بهذه الطريقة للتأكيد على مبدأ الاختبارات المتعددة قبل اتخاذ القرار، أما إذا توفرت المهارة و برنامج المينيتاب فيفضل إجراء اختبار P Value مباشرة إذ أنه الأكثر مصداقية.

وفى الحقيقة فإنه من الناحية العملية عند دراسة ظاهرة ما فإننا نادراً ما نحصل على توزيعات ذات توزيع طبيعى تماماً ، وإنما نحصل على توزيعات قريبة منها وذلك لأن هذه العمليات، وإن كانت تخضع فى تغيرها لنظام معين إلا أنها تخضع أيضاً لمؤثرات عرضية نطلق عليها ضوضاء Noises تؤثر فى هذا النظام وتحجبه عن

الظهور على حقيقته، ولو جردت التوزيعات من هذه المؤثرات لكأنت أقرب إلى التوزيعات الاعتدالية. (مجدى عبد الكريم حبيب ، 1996)

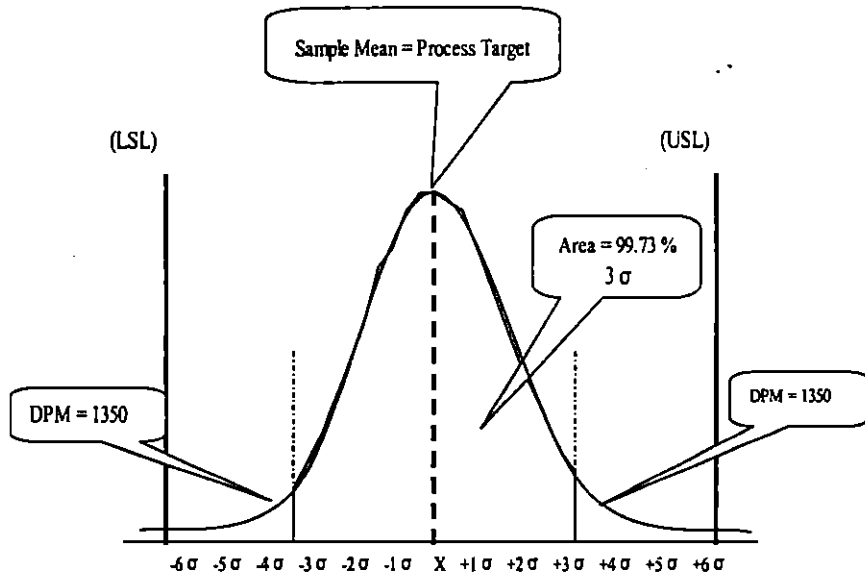
ومن ناحية أخرى قد يكون الاختلاف الذي نشاهده فى التوزيعات عن التوزيعات الاعتدالية راجعا أحيانا إلى عوامل أخرى منها مثلا:

- 1- أن العينة التي اختيرت لتمثيل الظاهرة أو العملية هي عينة غير ممثلة تماما لهما.
- 2- عدم مراعاة الدقة الواجبة فى عملية القياس.

ولذا نجد أن بعض هذه التوزيعات تبتعد قليلا أو كثيرا عن الاعتدالية (مجدى عبد الكريم حبيب 1996).

Normal Distribution Without Shift منحنى التوزيع الطبيعي بدون ترحيل

والشكل 13-16 يعرض الشكل العام لهذا المنحنى



Normal Distribution Centered without Shift

شكل رقم 13-16 منحنى توزيع طبيعي بدون ترحيل

ومن خصائص هذا المنحنى ما يلى:

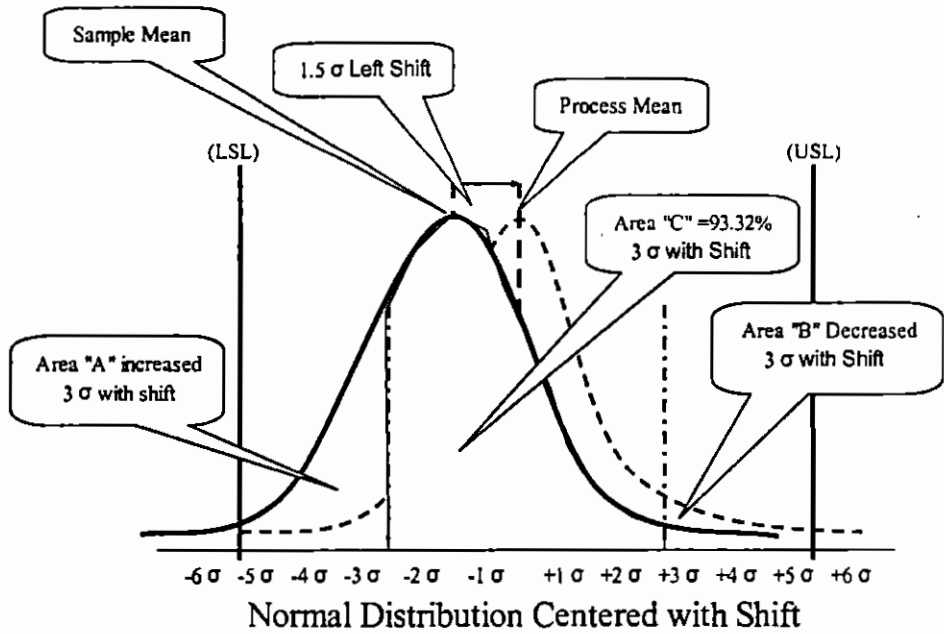
- فى حالة عدم وجود ترحيل Shift فإن المساحة تحت المنحنى فى الحدود $\pm 3\sigma$ ستساوى 99.73% ويكون هناك احتمال حدوث عيوب Defects (المساحة خارج

حدود 3σ ($\pm$) تقدر بما يعادل 1350 غيب أو خطأ في كل جهة أي بإجمالي 2700 خطأ في المليون عند 3σ .

- يلاحظ أن المتوسط Mean ينطبق علي الهدف Target وهي حالة مثالية.
- عندما نقول 3σ نعني المساحة تحت المنحنى والمحصورة ب $\pm 3\sigma$ أي 3σ يمين & 3σ يسار.
- عند $6\sigma \pm$ يكون عدد الأخطاء هو 0.001 في المليون في كل جهة من الترحيل Shift والإجمالي يكون 0.002 في المليون (بدون حدوث ترحيل Shift).
- كل المخرجات التي تكون علي يمين الحد الاعلى للمواصفة USL وعلي شمال الحد الأدنى للمواصفة LSL تكون مرفوضة و يقال أنها غير مطابقة وليست في مستوى الجودة المطلوبة Non Conforming and is Not of Acceptable Quality

أ- منحنى توزيع طبيعي مع وجود ترحيل Normal Distribution With Shift

اما الشكل 13-17 فيعرض الشكل العام لهذا المنحنى



شكل رقم 13-17 منحنى توزيع طبيعي مع وجود ترحيل

ومن خصائص هذا المنحنى ما يلي:

- في حالة حدوث ترحيل Shift بمقدار 1.5σ نجد أن المنحني يتحرك (يميناً أو يساراً) وتبعاً لذلك تخرج مساحة خارج حدود 3σ - وتدخل مساحة إضافية جهة $+3\sigma$ ولكن المساحة المهذرة أكبر من المساحة المضافة وتكون المحصلة أن يقل إجمالي المساحة تحت المنحني ليصبح 93.32% بدلاً من 99.73% في حالة عدم حدوث ترحيل.
- سيزداد عدد العيوب Defects تبعاً لحدوث الترحيل Shift ليصبح 66810 خطأ بدلاً من 2700 خطأ في المليون عند 3σ .

$$\text{Area "A"} + \text{Area "B"} = \text{Defects} = 66810 \text{ DPM}$$

$$\text{Area "C"} = \text{Accepted Products} = 93.32\%$$

- بالمثل لو قلنا عند 6σ بدون حدوث ترحيل Shift فإن عدد الأخطاء سيكون 0.001 في المليون في كل جهة أي 0.002 في المليون في الجهتين، وهذا الرقم سيزداد ليصبح 3.4 في المليون عند حدوث Shift مقداره 1.5σ .

لماذا تم افتراض أن الترحيل Shift الذي يحدث للعملية هو 1.5σ وليس 1σ وليس 2σ مثلاً؟

من خلال الشرح السابق تبين لنا ضرورة وحتمية وجود تباين في أى عملية حتى في الأوقات التي تكون مخرجات العملية فيها مقبولة، والمخرجات المقبولة لا تكون مقبولة لقيمة وحيدة، وإنما تكون مقبولة لمدى يتحدد من ال USL وال LSL، وعلى ذلك فدائماً وأبداً سنجد مخرجات للعملية بقيم أكبر قليلاً من الهدف Target و مخرجات بقيم أقل قليلاً من الهدف .

كذلك ولأننا عندما نأخذ عينات من أى عملية Process، فإننا نعلم تماماً أنه إذا حسبنا قيمة المتوسط $\bar{X}$ لهذه العينات، فإنها لن تساوى الهدف أو μ أو متوسط المجتمع.

ولقد تعرضنا لطريقة رسم خرائط المراقبة و التحكم Control Charts في الفصل الخامس من هذا الكتاب تحت عنوان خرائط المراقبة والتحكم Control Charts ، وعرفنا أنه يلزم لرسمها تجميع عينات على هيئة مجموعات فرعية Subgroups عددها الأكثر شيوعاً هو أربع مجموعات Subgroups 4، ومن هذه المجموعات الفرعية Subgroups نحسب

$\bar{X}$ ونرسم الخرائط Charts المختلفة.

ولرسم خريطة Chart مثل خريطة المتوسط وال المدى R and $\bar{X}$ مثلاً، فإن $\bar{X}$ هي متوسط المجموعات Subgroups و R هي المدى لهذه المجموعات Subgroups ويتم تحديد قيمة حدود التحكم Control Limits بأنها تساوى ثلاثة أمثال الانحراف

المعياري لمتوسط هذه المجموعات، ويطلق عليه فى بعض الأحيان الخطأ المعياري Standard Error وهو فى هذه الحالة يساوى :

StandardDev.of the subgroup averages= Standard Error of the Mean

$$\text{Standard Error of the Mean} = SE = \frac{SD_{\text{individuals}}}{\sqrt{n}}$$

حيث إن $SD_{\text{individuals}}$ هي قيمة الانحراف المعياري للعينات، وبالتالي فإن قيمة حدود التحكم Control Limits فى هذه الحالة ستساوى $3 SD_{\text{averages}}$ ويمكن حسابها من المعادلة

$$3 SD_{\text{averages}} = \frac{3 SD_{\text{individuals}}}{\sqrt{n}}$$

حيث N هي حجم العينة والتي تساوى 4 طبقا وما تم فرضه فى هذه الحالة، وعلى ذلك فان:

$$3 SD_{\text{averages}} = \frac{3 SD_{\text{individuals}}}{\sqrt{4}} = 1.5 SD_{\text{individuals}}$$

وبعد تحديد قيمة حدود التحكم Control Limit، فإننا عمليا نراقب العملية وناخذ عينات مباشرة ثم نوقعها على الخريطة Chart، ولا نقوم بالتدخل فى العملية مادامت القياسات داخل حدود التحكم Control Limit، ومعنى ذلك أنه بفرض وجود ترحيل أقل بقليل جدا من $1.5 SD_{\text{individuals}}$ فإننا لا نتدخل فى العملية، وهذا يعنى وجود منتجات يتم إنتاجها بالفعل بها ترحيل عن الهدف بمقدار 1.5 من الانحراف المعياري ومع ذلك فهي مقبولة.

ب- منحنى التوزيع الطبيعي المعياري Standardized Normal Distribution

التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الطبيعي الذي معدلته (متوسطه) يساوى صفراً وتباينه يساوى الواحد والمساحة تحته تساوى الواحد الصحيح.

فإذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو المتوسط μ والتباين σ^2 فإن توزيع المتغير العشوائي :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

وبالتالي فكل قيمة من قيم X يقابلها قيمة من قيم Z تسمى القيمة المعيارية المقابلة لقيم X ، وحيث إنه توجد جداول عديدة لإيجاد وحساب الاحتمالات المتعلقة بالمتغير Z فإنه يمكننا إيجاد وحساب الاحتمالات المتعلقة بالمتغير X .

مثال رقم 13-2:

تقوم إحدى شركات المقاولات بتنفيذ أحد المشروعات الهندسية، فإذا كان $\mu=65$ وكان $\sigma = 6$ فما هي احتمالية انتهاء المشروع في الحالات التالية:

1. في مدة تزيد عن 55 يوما $P(X>55)$
2. في مدة أقل من أو يساوي 68 يوما $P(X\leq 68)$
3. في مدة من 50 حتى 70 يوما $P(50<X<70)$
4. في مدة أقل 57 يوما $P(X<57)$

الحل:

نحول قيمة X إلى قيمة معيارية أي نحسب قيمة Z من العلاقة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



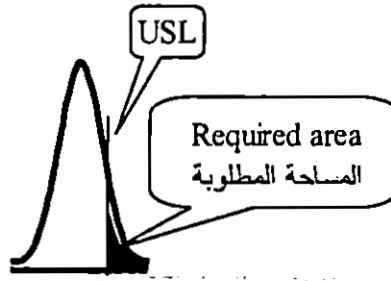
شكل رقم 13-18 المساحة التي تعطى بالجداول

من جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري نحسب القيمة المقابلة لقيمة Z ونلاحظ أنه يوجد جداول كثيرة، وفي هذا الكتاب سنستخدم الجدول الذي يعطى المساحة على اليسار كما في شكل

13-18، وعليه يجب الانتباه إلى القيمة المراد حسابها كما سيتضح من المثال 12-6 الذي بين أيدينا

أولاً: احتمال أن يتم تنفيذ المشروع في مدة تزيد عن 55 يوما

نحدد المساحة المطلوبة كما بالشكل 13-19



شكل رقم 13- 19 احتمال التنفيذ
في مدة تزيد عن 55 يوما

$$Z_{>55} = \frac{55-65}{6} = -1.67$$

$$P(X > 55) = P(Z > -1.67) = 1 - P(Z > -1.67) = 1 - (0.0475) = 0.9525$$

أى أن احتمال تنفيذ المشروع في مدة تزيد عن 55 يوما هي 95.25%

ثانياً: احتمال تنفيذ المشروع في مدة أقل من أو يساوى 68 يوما

نحدد المساحة المطلوبة كما بالشكل 13-20



شكل رقم 13- 20 احتمال التنفيذ
في مدة أقل من أو يساوى 68

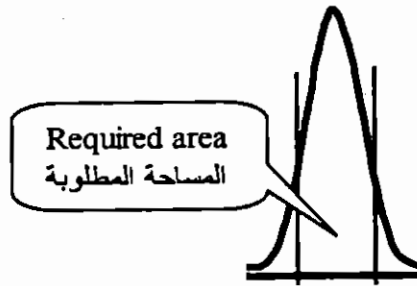
$$Z_{\leq 68} = \frac{68-65}{6} = 0.5$$

$$P(X \leq 68) = P(Z \leq 0.5) = 0.6915$$

أى أن احتمال تنفيذ المشروع في مدة أقل من أو يساوى 68 يوما هي 69.15%

ثالثاً: احتمال تنفيذ المشروع في مدة تتراوح بين 50 و 70 يوم

نحدد المساحة المطلوبة كما بالشكل 13-21



شكل رقم 13- 21 احتمال التنفيذ
في مدة من 50 حتى 70 يوما

$$Z_{>50} = \frac{50-65}{6} = -2.5$$

$$Z_{<70} = \frac{70-65}{6} = -0.83$$

$$P(50 < X < 70) = P(-2.5 < Z < 0.83) =$$

$$= (1 - 0.0062) - 0.7967 = 0.19709$$

أى أن احتمال تنفيذ المشروع في مدة تتراوح بين 50 و 70 يوم هي 19.71%

رابعاً: احتمال تنفيذ المشروع في مدة أقل من 57 يوما

نحدد المساحة المطلوبة كما بالشكل 13-22.



شكل رقم 13- 22 احتمال التنفيذ في مدة أقل 57 يوما

$$Z_{<57} = \frac{57-65}{6} = -1.33$$

$$P(X < 57) = P(Z < -1.33) = 0.09180$$

أى أن احتمال تنفيذ المشروع في مدة أقل من 57 يوم هي 9.18%

مثال رقم 13- 3:

تقوم إحدى شركات المقاولات بتنفيذ أحد المشروعات الهندسية، فإذا كان $\mu=68$ وكان $\sigma = 12$ ، ونظرا لأهمية المشروع فقد طلب المالك تحديد فترة زمنية لكي يقوم باستيراد المعدات التي سيتم تركيبها في هذا المشروع، وقد رأت الشركة المنفذة أن تخبره بهذه الفترة بنسبة تأكد 85%، فما هي تلك الفترة الزمنية ؟

الحل :

من الجداول نوجد القيمة المعيارية المناظرة للنسبة 85% فنجد أنها تساوى 1.04 تقريبا وهي قيمة Z

$$Z_A = \frac{A - X}{\sigma}$$

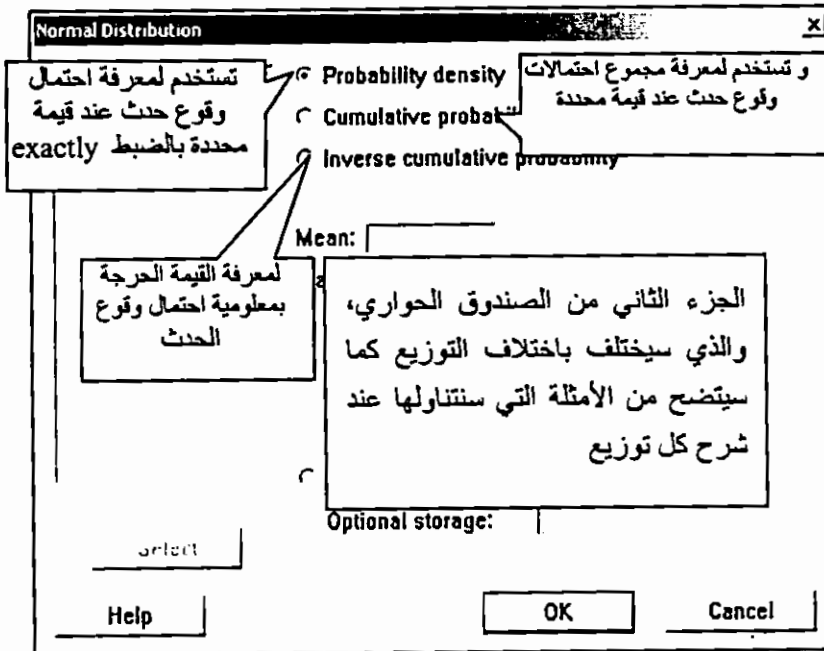
نفرض الفترة المطلوبة هي A ونعوض في العلاقة

$$A = (Z_A * \sigma) + X = (1.04 * 12) + 68 = 80.48$$

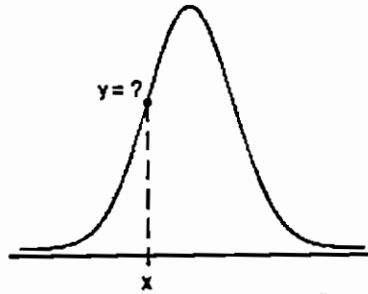
وعليه فإن الشركة المنفذة تستطيع أن تخبر المالك أنها وبنسبة تأكد 85% ستنفذ المشروع في فترة أقل 80.48 يوم.

الحل باستخدام برنامج مينيتاب:

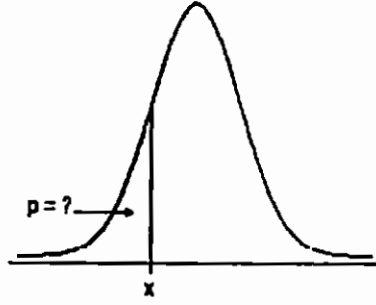
وكما أشرنا في بداية هذا الكتاب أننا سنورد الأمثلة بشيء من التفصيل فقط لتسهيل فهمها، أما المعادلات الرياضية المستخدمة فسوف يقوم بتطبيقها البرامج المتخصصة مثل مينيتاب Minitab نيابة عنا، وخلال تعاملنا مع أمثلة موضوع التوزيعات الاحتمالية Probability Distributions سنستخدم مجموعة الأوامر التالية في برنامج Minitab، من قائمة Calc نختار Probability Distribution ثم نختار التوزيع المناسب فيظهر الصندوق الحواري التالي شكل 13- 23 والذي يظهر في الجزء العلوي منه ثلاثة اختيارات وهي:



شكل رقم 13- 23 الصندوق الحوارى الذى يظهر عند استخدام المينيتاب
1. الاحتمال Probability (شكل 13- 24) و تستخدم لمعرفة احتمال وقوع حدث عند قيمة محددة بالضبط Exactly.

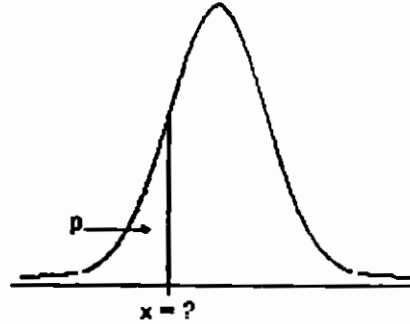


شكل رقم 13- 24 احتمال وقوع حدث عند قيمة محددة بالضبط exactly
2. الاحتمال التراكمى Cumulative Probability (شكل 13- 25) وتستخدم لمعرفة مجموع احتمالات وقوع حدث عند قيمة محددة.



شكل رقم 13- 25 مجموع احتمالات وقوع حدث عند قيمة محددة

3. الاحتمال التراكمي المكمل Inverse Cumulative Probability (شكل 13- 26)، و تستخدم لمعرفة القيمة الحرجة بمعلومية احتمال وقوع الحدث



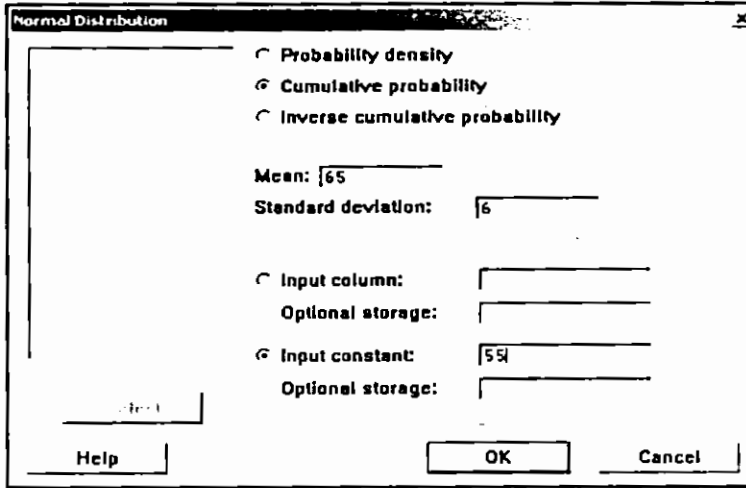
شكل رقم 13- 26 القيمة الحرجة بمعلومية احتمال وقوع الحدث

أما الجزء الثاني من الصندوق الحوارى فسيختلف باختلاف التوزيع كما سيتضح من الأمثلة التي سنتناولها عند شرح كل توزيع.

حل المثال 13-3 باستخدام برنامج مينيئاب Minitab.

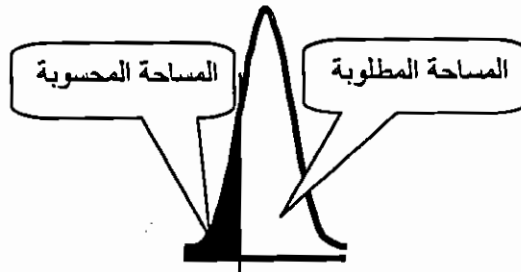
أولاً: احتمال أن يتم تنفيذ المشروع فى مدة تزيد عن 55 يوماً، ومن البرنامج Minitab نختار الأمر التالي:

Calc > Probability Distribution > Normal
شكل 13-27



شكل رقم 13-27 الصندوق الحوارى الذى يظهر عند حل "أولا" فى المثال 13-3 باستخدام برنامج مينيتاب Minitab

فندخل قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري μ و σ ثم نختار Cumulative التي تحسب المساحة أقل من قيمة معينة، ولأننا نود حساب قيمة الاحتمال عند قيمة أكبر من قيمة معينة فسوف نطرح هذه القيمة من باقى المساحة تحت المنحنى أى من الواحد الصحيح كما فى شكل 13-28.



شكل رقم 13-28 المساحة التي يتم حسابها فى المينيتاب

، وسيظهر لنا النتيجة التالية كما فى شكل 13-29 .

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 65 and standard deviation = 6

x	P(X ≤ x)
55	0.0477904

شكل رقم 13-29 نتيجة حل المثال 13-3

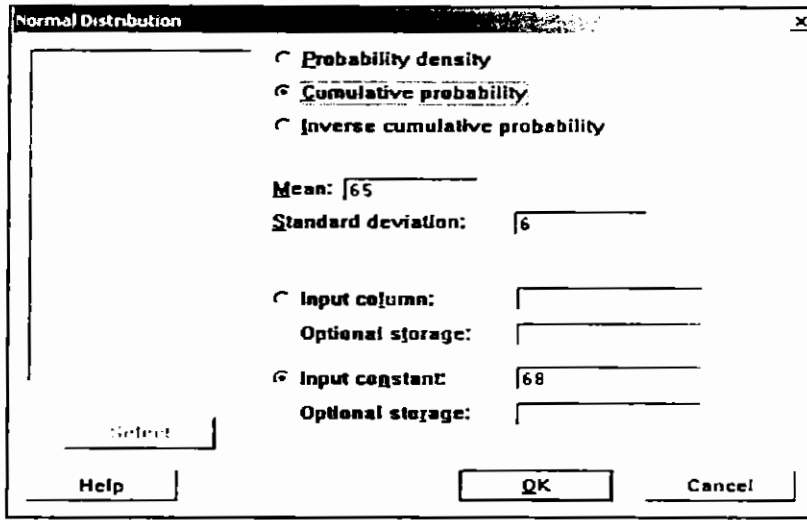
وحيث إن المساحة تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح فإن -الاحتمال المطلوب - المساحة المطلوبة تساوى

$$P(X > 55) = 1 - 0.0477904 = 0.9522$$

وهى نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام الجداول.

ثانياً: احتمال تنفيذ المشروع فى مدة أقل من أو يساوى 68 يوماً، ومن Minitab نختار الأمر التالي:

Calc > Probability Distribution > Normal



شكل رقم 13-30 الصندوق الحوارى الذى يظهر عند حل "ثانياً" فى المثال 13-3 باستخدام برنامج مينيتاب Minitab

فندخل قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري μ و σ ثم نختار Cumulative، التي تحسب المساحة أقل من قيمة معينة، ولأننا نود حساب قيمة الاحتمال عند قيمة أقل من قيمة معينة فسوف نأخذ هذه القيمة مباشرة، وسيظهر لنا الشكل 13-31 التالي فى صفحة نافذة النتائج Session Window من برنامج مينيتاب

Cumulative Distribution Function

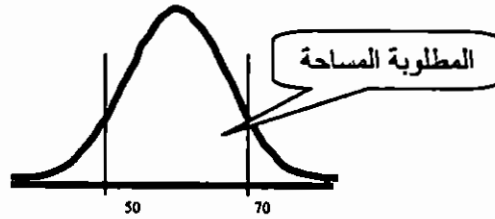
Normal with mean = 65 and standard deviation = 6

x	P(X ≤ x)
68	0.691462

شكل رقم 13-31 النتيجة التى تظهر عند حل "ثانياً" فى المثال 13-3 باستخدام برنامج مينيتاب Minitab

أى أن احتمال تنفيذ المشروع فى مدة أقل من أو يساوى 68 يوما هي 69.15%، وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها باستخدام الجداول.

ثالثا: احتمال تنفيذ المشروع فى مدة تتراوح بين 50 و 70 يوم وفى هذه الحالة سنكرر عملية الحساب مرتين، مرة أكبر من 50 يوما، ومرة أقل من 70 يوما ويظهر ذلك فى الشكل 13-32،



شكل رقم 13-32 المساحة المكافئة لاحتمال التنفيذ فى مدة بين 50 و 70 يوم

ومن المينيتاب Minitab نختار الأمر التالي:

Calc > Probability Distribution > Normal
أشرنا إليه سابقا (شكل 13-30) فندخل القيم المطلوبة على مرتين متتاليتين، ومن نافذة النتائج Session Window يظهر الشكل 13-33 & 13-34 ونجد أن:

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 65 and standard deviation = 6

x	P(X ≤ x)
50	0.0062097

شكل رقم 13-33 النتيجة كما تظهر نافذة النتائج فى برنامج مينيتاب

أى أن احتمال تنفيذ المشروع فى مدة أكبر من 50 يوما هي

$$P(X > 50) = 1 - 0.0062097 = 0.99379$$

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 65 and standard deviation = 6

x	P(X ≤ x)
70	0.797672

شكل رقم 13-34 النتيجة كما تظهر نافذة النتائج فى برنامج مينيتاب

أى أن احتمال تنفيذ المشروع فى مدة أقل من 70 يوما هي 0.797672

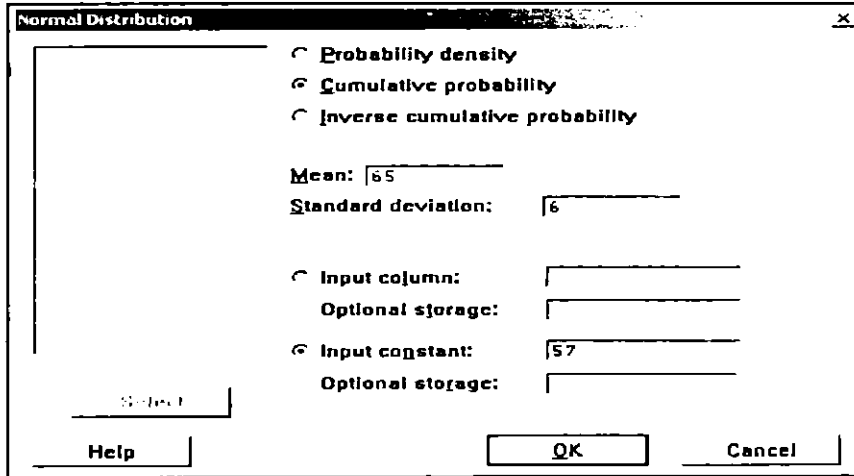
وبالتالي فإن احتمال تنفيذ المشروع في مدة تتراوح بين 50 و 70 يوم هي

$$P(50 < X < 70) = 0.99379 - 0.7967 = 0.19709$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام الجداول

رابعاً: احتمال تنفيذ المشروع في مدة أقل من 57 يوماً، ومن Minitab نختار الأمر التالي:

Calc > Probability Distribution > Normal (شكل 13-35).



شكل رقم 13-35 الصندوق الحواري الذي يظهر عند حل "رابعاً" في المثال 12-3 باستخدام برنامج مينيتاب Minitab

فندخل قيمة كل من المتوسط والانحراف المعياري μ و σ ثم نختار Cumulative التي تحسب المساحة أقل من قيمة معينة، وسيظهر لنا الجزء التالي في نافذة النتائج Session

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 65 and standard deviation = 6

x	P(X ≤ x)
57	0.0912112

: Window

أي أن احتمال تنفيذ المشروع في مدة أقل من 57 يوماً هي 9.12%، وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام الجداول.

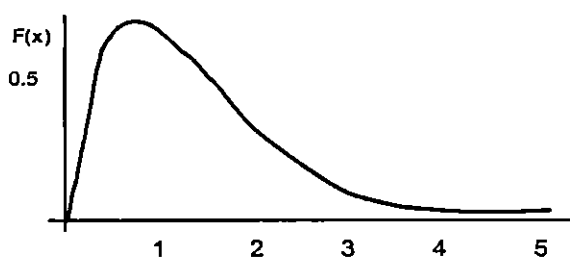
13.2.2. التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي Log-Normal Distribution

يعتمد هذا التوزيع على أنه إذا كان لدينا مجموعة من المتغيرات المتصلة وأخذنا لوغاريتم هذه المتغيرات فإن المتغيرات التي تنتج من جراء ذلك هي متغير ذي توزيع متصل، ومن الظواهر التي يستخدم هذا النموذج في التعبير عنها بعض الظواهر الجيولوجية، وبعض الظواهر الاقتصادية، كدخول الأفراد وخاصة الدخول الصغيرة.

والدالة التي تحكم و تحدد شكل هذا التوزيع هي دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density Function (PDF) و هي تعرف كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - \gamma)^2}{2\theta^2}\right]$$

حيث $X > 0$ ، ومن الواضح أنه يمكننا تحديد التوزيع تماما بمعرفة الدليلين γ و θ



شكل رقم 13-36 منحنى توزيع طبيعي لوغاريتمي

أما دالة الكثافة التراكمية Cumulative Density Function (CDF) فتحكمها العلاقة :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{x\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\log x - \gamma)^2}{2\theta^2}\right] dx$$

ومن خصائص هذا التوزيع أن له قمة واحدة (مركز واحد) وملتو جهة اليمين، كما في شكل 13-36، ويختلف شكل هذا التوزيع باختلاف الدليلين γ و θ .

وإذا قمنا بعملية تحويل بحيث إن $y = \log x$ فإن المتغير X يتحول إلى متغير Y له توزيع طبيعي وسطه الحسابي γ وانحرافه المعياري θ ، ويصبح المتغير الذي معادلته :

$$Z = \frac{\log x - \gamma}{\theta}$$

هو متغير طبيعي معياري أى وسطه الحسابي صفر وتباينه 1 وبناءا على ذلك يمكن استخدام جداول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري، فى إيجاد الاحتمالات والقيم الحرجة للمتغير X

مثال رقم 13- 4

إذا كان X متغير طبيعي لوغاريتمي، دليلاه $\gamma = 1$ & $\theta = 2$ فأوجد الاحتمال $P(x < 35.5)$

$$Z = \frac{\log x - \gamma}{\theta} = \frac{\log x - 1}{2} \quad \text{الحل: بوضع } y = \log x \text{ فى المعادلة}$$

$$\begin{aligned} P(x < 35.5) &= P(\log x < \log 35.5) = p\left(\frac{\log x - 1}{2} < \frac{\log 35.5 - 1}{2}\right) = \\ &= p\left(z < \frac{3.5695 - 1}{2}\right) = p(z < 1.2848) = 0.8997 \end{aligned}$$

مثال رقم 13- 5

إذا كان X متغير طبيعي لوغاريتمي، دليلاه $\gamma = 2$ & $\theta = 0.5$ فأوجد القيمة A التي تجعل الاحتمال مساويا لـ 0.9

الحل:

$$P(x < a) = P(\log x < \log a) = p\left(\frac{\log x - 2}{0.5} < \frac{\log a - 2}{0.5}\right) = p(z < z_0) = 0.9$$

ومن جدول المساحات نجد أن $Z = 1.28$ ويكون $\frac{\log a - 2}{0.5} = 1.28$ ويكون $\log a = 2.64$ ويكون $a = 14.013$

13.2.3. توزيع وايبول Weibull Distribution

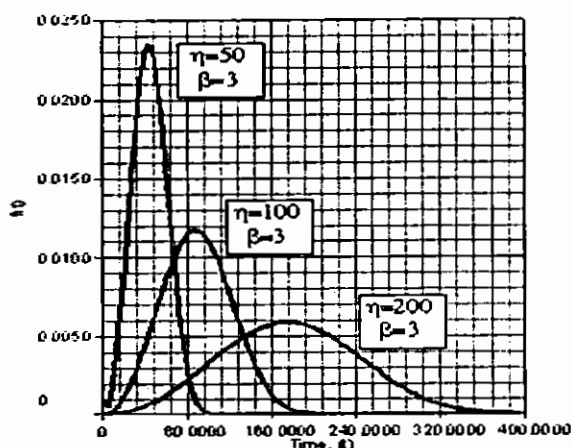
وهو توزيع من التوزيعات الشهيرة التي تستخدم فى مجال الاعتمادية Reliability لوصف دورة حياة المعدات والأصول أى Asset Life Cycle، والمعادلة العامة لهذا التوزيع هي

$$f(T) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{T - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} * (2.781) \left(\frac{T - \gamma}{\eta} \right)^{\beta}$$

وقيمة هذه الدالة دائما قيمة موجبة، و يتضح أن لهذا التوزيع ثلاثة أثلة هي:

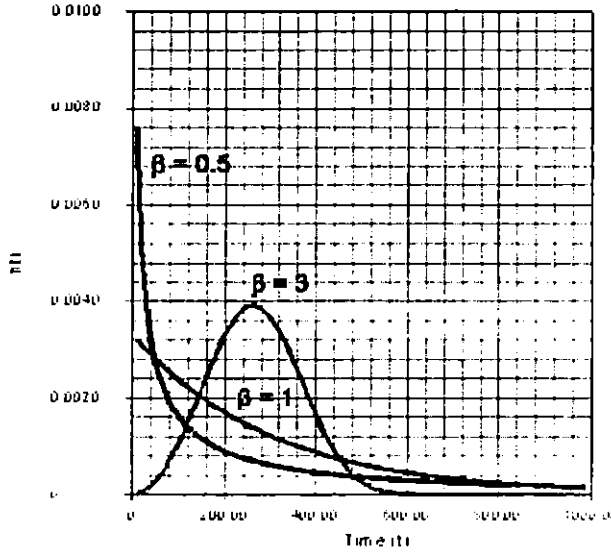
▪ حيث إن η Eta هي معامل الانتشار Scale Parameter أى دليل التفلطح والتوزيع والانتشار على المحور السيني، وهو يساوى مقلوب معدل الإخفاق Failure Rate

$\eta = 1/\lambda$ وكلما زادت قيمته كلما زاد تشتت دالة التوزيع الاحتمالية Probability Distribution Function (PDF) على المحور السيني وقل ارتفاع الدالة على المحور الصادي، والعكس صحيح، وتمتد قيمه إلى مالانهاية فى الاتجاه السالب والاتجاه الموجب، أما قيمة العملية فتقع بين الصفر حتى 300، والشكل التالى (شكل 13-37) يوضح تأثير تغير ايتا على شكل المنحنى عند ثبوت بيتا .



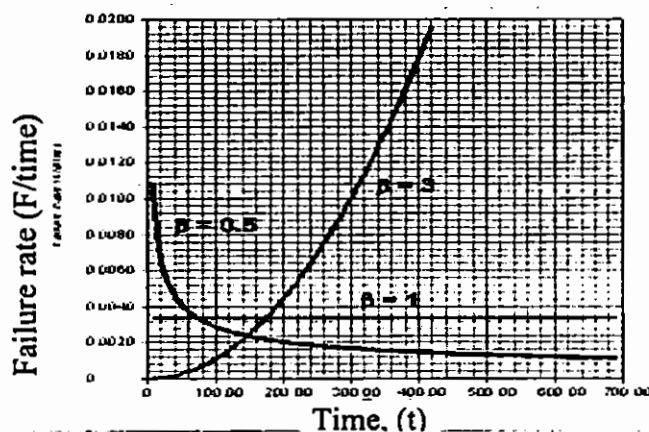
شكل رقم 13-37 تأثير تغير ايتا على شكل المنحنى عند ثبوت بيتا

▪ و حيث إن Beta أو β معامل الشكل Shape Parameter (و يطلق عليه فى كثير من الأحيان مسمى الميل Slope وذلك لأن قيمة بيتا تساوى ميل الخط الناتج عند رسم خط الاحتمال Probability Plot)، ويتحدد شكل دالة التوزيع الاحتمالية Probability Distribution Function (PDF) بقيمة هذا الدليل (وتتراوح قيمه العملية من صفر حتى 5)، فإذا كانت قيمة بيتا أقل من الواحد الصحيح فإن التوزيع يشبه إلى حد كبير التوزيع الأسى، وإذا كانت قيمة بيتا أكبر من الواحد الصحيح (من 2.5 حتى 3.5) فإن الشكل يقترب من التوزيع الطبيعي، والشكل التالى (شكل 13-38) يبين تأثير بيتا على دالة التوزيع الاحتمالية.

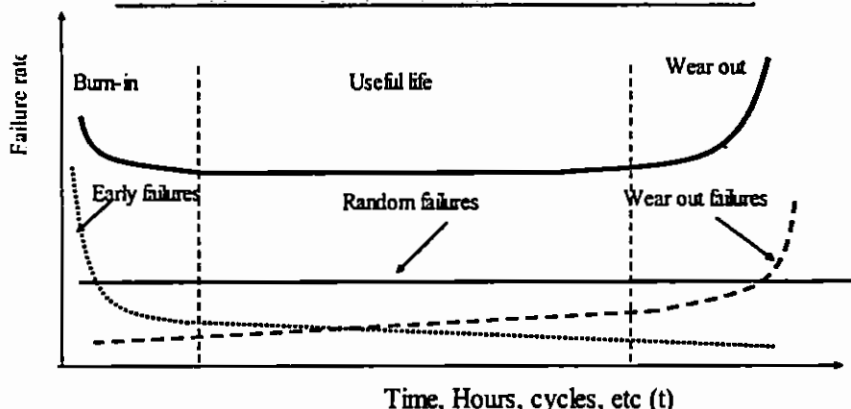


شكل رقم 13- 38 تأثير بيتا على دالة التوزيع الاحتمالية

أما شكل (13-39) فيبين تأثير بيتا الكبير والواضح على معادلة معدل الإخفاق أو Failure Rate Function التي تستخدم في الاعتمادية Reliability، وفيه نلاحظ أنه إذا كانت قيمة بيتا أقل من أو تساوى الواحد الصحيح فإن التوزيع يشبه إلى حد كبير التوزيع الأسى والذي يستخدم لوصف سلوك المتغيرات في المراحل العمرية الأولية أو فى بداية التشغيل، ويطلق عليه موت الأطفال أو الموت المبكر Infant Mortality أو مرحلة الإخفاق فى بداية التشغيل والذي يقل فيه معدل الإخفاق بزيادة الزمن أو بزيادة العمر للمعدة (مثلما يحدث فى الأجهزة الالكترونية)، وإذا كانت قيمة بيتا مساوية للواحد الصحيح فإن التوزيع يشبه التوزيع الثابت Uniform والتي تصف سلوك المتغيرات فى مراحل التشغيل، ويطلق عليها Useful Life أو مرحلة الاستفادة من الأصول والمعدات وخلال هذه الفترة فإن إخفاق المعدة يحدث عشوائيا وبصورة احتمالية (مثلما يحدث فى الأدوات الكهربائية)، وإذا كانت قيمة بيتا أكبر من الواحد الصحيح فإن الشكل يقترب من التوزيع الطبيعي وخلال هذه الفترة فإن معدل إخفاق المعدة يزداد مرة أخرى بازدياد الزمن أو عمر المعدة ويطلق عليها مرحلة التآكل أو التآكل Wear Out (مثلما يحدث فى رولمان البلى Bearing والآلات الدوارة)، وبجميع المنحنيات الثلاثة ينتج منحنى حوض الاستحمام Bathtub (شكل 13-40) الذي يعد المنحنى الأكثر شهرة فى دراسة الاعتمادية Reliability (وقد سمي بذلك لأنه يشبه حوض الاستحمام المنزلى أو البانيو).



شكل رقم 39-13 تأثير بيتا على معدل الإخفاق

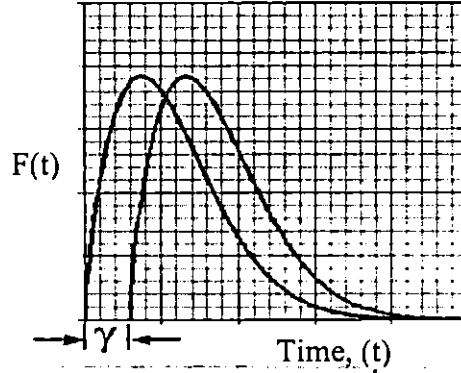


شكل رقم 40-13 منحني حوض الاستحمام

وتكمن قوة توزيع Weibull كنموذج جيد لدراسة الاعتمادية في كونه يقبل افتراضات كثيرة لقيم الأدلة، فمثلاً نفرض قيمة η بالصفر (لأن عمر المعدات والأصول لا يمكن أن يكون بقيمة سالبة)، وكذلك نفرض قيمة β بقيمة ثابتة معرفة مسبقاً (إما من دراسات سابقة لنفس المعدة أو من دراسات لمعدات مماثلة)، وهذا يمكننا من التنبؤ باعتمادية معدة ما في ظل وجود بيانات قليلة عن عدد الإخفاقات، أو حتى في ظل عدم وجود أى بيانات عن معدلات الإخفاق.

- وحيث إن γ Location Parameter = γ هو معامل الموضع أو المكان، وهو يحدد بداية المنحنى الممثل لدالة التوزيع الاحتمالية Probability Distribution Function (PDF)، فإذا كانت قيمة γ أقل من الصفر فإن بداية المنحنى تكون بقيمة سالبة على المحور السيني، وإذا كانت قيمة γ مساوية للصفر

فإن بداية المنحنى تكون عند تقاطع المحور السيني مع المحور الصادي، وإذا كانت قيمة جاما أكبر من الصفر فإن بداية المنحنى تكون بقيمة موجبة على المحور السيني (شكل 13-41).



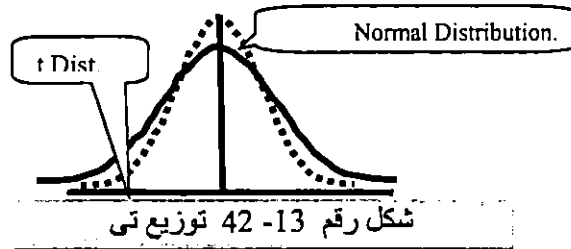
شكل رقم 13- 41 تأثير قيمة جاما على دالة التوزيع الاحتمالية

13.3. توزيعات احتمالية متصلة خاصة Special Continuous Probability Distributions

التوزيعات الاحتمالية المتصلة الثلاثة الآتية هي توزيعات لمتغيرات عشوائية متصلة مركبة بطريقة معينة من عدد من المتغيرات العشوائية الطبيعية، وهذه التوزيعات لا تستخدم كنماذج احتمال للمجتمع كما هو الحال في التوزيعات التي تم عرضها في مستهل هذا الفصل، وإنما تظهر هذه التوزيعات عند تعاملنا مع العينات Samples وتمثل أهمية قصوى أثناء عملية الاستدلال الإحصائي Inferential Statistics .

أ- توزيع t - Distribution (t)

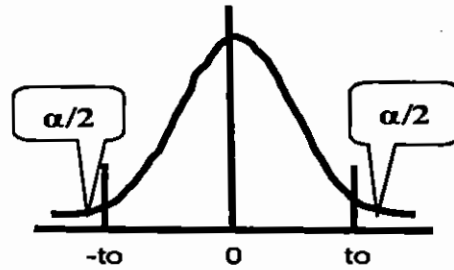
وهو نوع خاص من التوزيعات الاحتمالية المتصلة ويشبه إلى حد كبير منحنى التوزيع الطبيعي المثالي أو لقياس Standardized Normal Distribution في أن له قمة واحدة (مركز واحد) أو منوال واحد ينطبق على القيمة $T=0$ تقريبا، وطرفاه يمتدان إلى ما لا نهاية ولا يقطعان المحور الأفقي، إلا أنه أقل ارتفاعا من منحنى التوزيع الطبيعي.



كما أن تقارب طرفيه من الصفر عندما تنؤول T إلى مالا نهاية أبطأ من تقارب التوزيع الطبيعي المعياري Standardized Normal Distribution كما يتضح من (شكل 13-42)، ولهذا التوزيع دليل واحد يسمى بعدد درجات الحرية N للتوزيع، ولذا فهذا التوزيع يتحدد تماما إذا علمت قيمة N ، وكلما زادت درجات الحرية كلما زاد ارتفاع المنحنى قليلا وقل تقلطحه وانبساطه قليلا، ويقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي المعياري كلما اقتربت درجات الحرية N من اللانهاية.

والوسط الحسابي لهذا التوزيع هو $\mu = 0$ وتباينه هو $\sigma^2 = \frac{n}{n-2}$ حيث $n > 2$

والمساحة تحت المنحنى وخارج الفترة t_0 & t_0 تمثل قيمة الاحتمالات α موزعة على قسمين (شكل 13-43)، وفي بعض التطبيقات نجد أن المساحة في جهة واحدة ويجب مضاعفة القيمة المستخرجة من الجداول في هذه الحالة، فمثلا في هذه الجداول، نجد أن درجات الحرية مكتوبة في العمودين الرئيسيين خارج الجدول، والمساحة α في الصف الأول العلوي خارج الجدول، أما الأرقام داخل الجدول فتمثل القيم الحرجة، فإذا نظرت إلى القيمة 0.9 على الخط الأفقي العلوي والعدد 5 في العمود الذي يمثل درجات الحرية، فإننا نجد أن العمود النازل من القيمة 0.132 وهي مع الخط الأفقي المار من 5 عند القيمة الحرجة 0.132 وهي قيمة T التي يقع خارجها 0.9 من المساحة تحت توزيع T ذي خمس درجات حرية، وبالمثل نجد أن القيمة 1.895 هي قيمة T في توزيع ذي درجات حرية 7 التي يقع خارجها 0.1 من المساحة، أما لإيجاد المساحة خارج T تحت توزيع T ذي 3 درجات حرية فإننا نبدأ بدرجة حرية 3 ونتحرك أفقيا حتى نصل إلى العدد 4.541 ثم نصعد رأسيا فنجد المساحة α هي 0.02.



شكل رقم 13-43 قيمة الاحتمالات α موزعة على قسمين

إذن فمن خلال الجداول وبمعلومية α نستطيع حساب القيمة الحرجة t_0 ، وهى القيمة الموجبة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحنى وخارج الفترة t_0 & $-t_0$ مساوية لقيمة α عند درجة الحرية N حيث n تساوى 1، 2، 3،..... والعكس فنستطيع حساب قيمة α بمعلومية القيمة الحرجة t_0 و عند درجة الحرية N.

وعلى ذلك وللتعبير عن القيمة الحرجة فى توزيع t عند درجة الحرية n بحيث تكون مساحة المنطقتين عند الذيلين يساوى α فإننا نستخدم الصيغة

$t_{\alpha,n} = \text{Critical Value}$ فمثلا:

$$t_{0.05,\infty} = 1.96 \quad \& \quad t_{0.01,3} = 5.841 \quad \& \quad t_{0.05,7} = 2.365$$

مثال رقم 13- 6:

بفرض أن لدينا متغيرا يتبع التوزيع t ، ما هو الاحتمال إذا علم أن القيمة الحرجة 2.201، وأن درجات الحرية تساوى 11؟

الحل: باستخدام الجداول وعند درجات حرية تساوى 11 نسير أفقيا حتى نصل إلى القيمة

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.0025$$

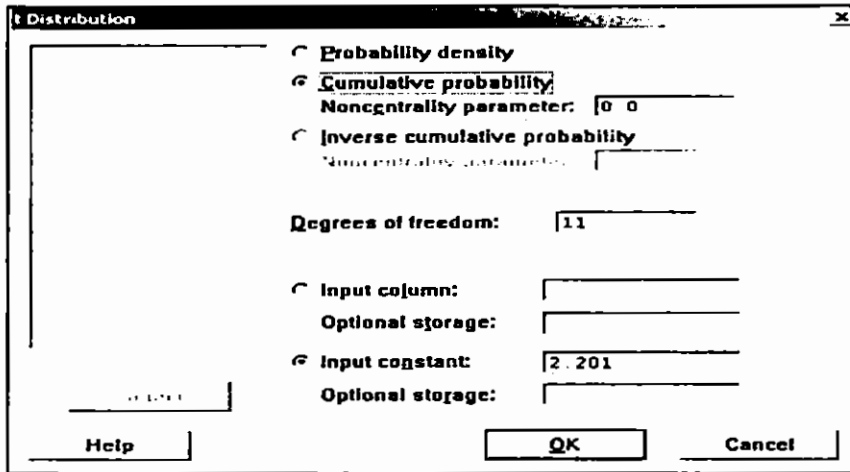
2.201، ثم نحدد رأسيا فنجد أن α تساوى 0.05، وعليه فإن

الحل :

باستخدام برنامج المينيتاب Minitab (يجب ملاحظة أن برنامج مينيتاب Minitab فى حالة توزيع "t" t Distribution يعطى قيمة $\alpha/2$ مباشرة إذا علمت القيمة الحرجة، ولذا فى حالة معلومية α ويكون المطلوب هو القيمة الحرجة فإننا نعوض بقيمة $\alpha/2$).

Minitab>Calc> Probability Distribution> T Distribution

فيظهر الصندوق الحوارى (شكل 13-44)



شكل رقم 13- 44 استخدام برنامج مينيتاب في إيجاد احتمال تى

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

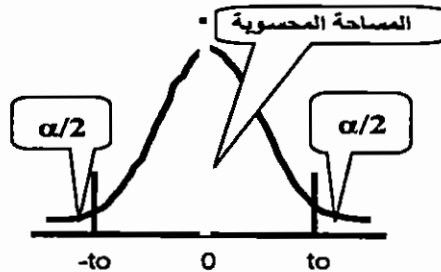
Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 11 DF

x	P(X <= x)
2.201	0.975001

وحيث إن $P(x \leq x) = 0.975$ ، فإن:

$$\alpha / 2 = 1 - 0.975 = 0.025$$



شكل رقم 13- 45 استخدام برنامج مينيتاب في إيجاد احتمال تى

مثال رقم 13- 7:

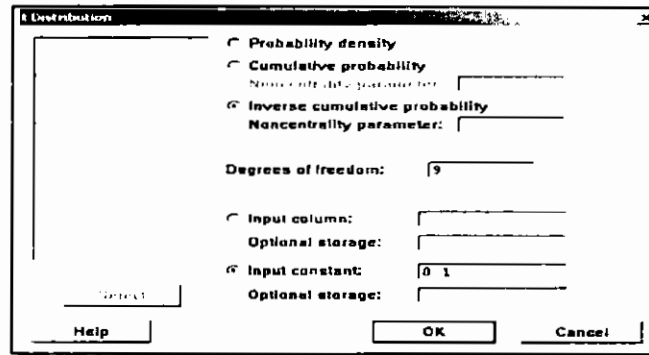
بفرض أن لدينا متغيراً يتبع التوزيع t ، ما هي القيمة الحرجة إذا علم أن α تساوى 0.2، وأن درجات الحرية تساوى 9؟

الحل: باستخدام الجداول وعند درجات حرية تساوى 9 نسير أفقياً، وعند α تساوى 0.1 ننزل رأسياً، وفي نقطة التقاطع نوجد القيمة الحرجة ، فنجد أنها تساوى 1.383.

الحل: باستخدام Minitab (يجب ملاحظة أن Minitab ، فى حالة توزيع تى T Distribution يعطى قيمة $\alpha/2$ مباشرة إذا علمت القيمة الحرجة، ولذا فى حالة معلومية α ويكون المطلوب هو القيمة الحرجة فإننا نعوض بقيمة $\alpha/2$).

Minitab>Calc> Probability Distribution> T Distribution

فيظهر الصندوق الحواري (شكل 13-46) ، وتتبعه نافذة النتائج بالحل :



شكل رقم 13-46 حل المثال 13-7 بالمينيتاب

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Inverse Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 9 DF

P (X ≤ x) x
0.1 -1.38303

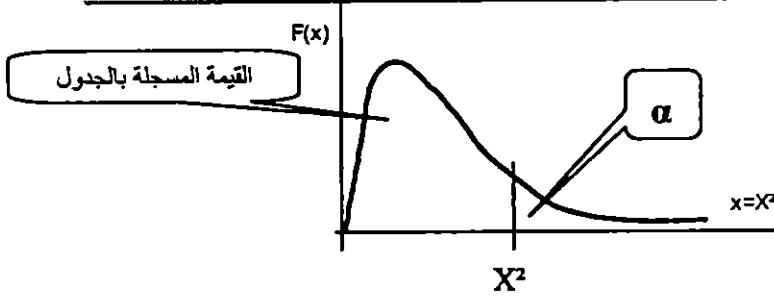
وبالتالى فإن القيمة الحرجة تساوى 1.383 وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها عند الحل بطريقة الجداول.

ب- توزيع كاي تربيع Chi-Square Distribution

وهو نوع آخر خاص من التوزيعات الاحتمالية المتصلة الهامة، ولهذا التوزيع دليل واحد يسمى بعدد درجات الحرية N للتوزيع ولذا فهذا التوزيع يتحدد تماماً إذا علمت قيمة N، وشكل (13-47) يوضح عدة منحنيات بدرجات حرية مختلفة، ويلاحظ أنه كلما زادت درجات الحرية كلما قل ارتفاع المنحنى وزاد تفلطحه، وفى هذه الحالة نلاحظ أن قيمة المتوسط تقترب كثيراً من قيمة درجات الحرية.



شكل رقم 13- 47 منحنيات كاي تربيع بدرجات حرية مختلفة



شكل رقم 13- 48 المنحنى كاي تربيع والمساحة المسجلة بالجدول

والوسط الحسابي لهذا التوزيع هو $\mu = n$ وتباينه هو $\sigma^2 = 2n$

والمساحة تحت الذيل الملتوي للمنحنى وخارج الفترة X^2 إلى مالا نهاية تمثل قيمة الاحتمال α عند درجة الحرية N كما في الشكل 13-48، وهناك جداول خاصة لحساب هذه المساحات، و في هذه الجداول نجد أن درجات الحرية مكتوبة في العمودين الرأسيين خارج الجدول، والمساحة α في الصف الأول العلوي خارج الجدول، أما الأرقام داخل الجدول فتمثل القيم الحرجة، فمثلا في هذه الجداول القيمة 23 هي القيمة الحرجة التي على يسارها 0.01 من المساحة (أي $\alpha = 0.01$) لتوزيع ذي درجات حرية 10، (القيمة التي يكون على يمينها 0.99 من المساحة هي القيمة التي يكون على يسارها $(1 - 0.01 = 0.99)$) 0.01 من المساحة، وكذلك لتوزيع ذي درجات حرية 20 فإن القيمة التي يكون على يسارها 0.025 من المساحة هي القيمة التي يكون على يمينها 0.975 من المساحة وهي 34.170).

إذن فمن خلال الجداول وبمعلومية α نستطيع حساب القيمة الحرجة X^2 ، وهي القيمة الموجبة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل الذيل الملتوي للمنحنى وخارج الفترة X^2 إلى مالا نهاية مساوية لقيمة معينة α عند درجة الحرية N ، حيث n تساوي 1، 2، 3..... والعكس فنستطيع حساب قيمة α بمعلومية القيمة الحرجة X^2 وعند درجة الحرية N .

وللتعبير عن القيمة الحرجة في توزيع χ^2 عند درجة الحرية n بحيث تكون مساحة المنطقتين عند الذيلين يساوي α فإننا نستخدم الصيغة القيمة الحرجة $\chi^2_{\alpha, n} = \text{Critical Value}$

مثال رقم 13-8:

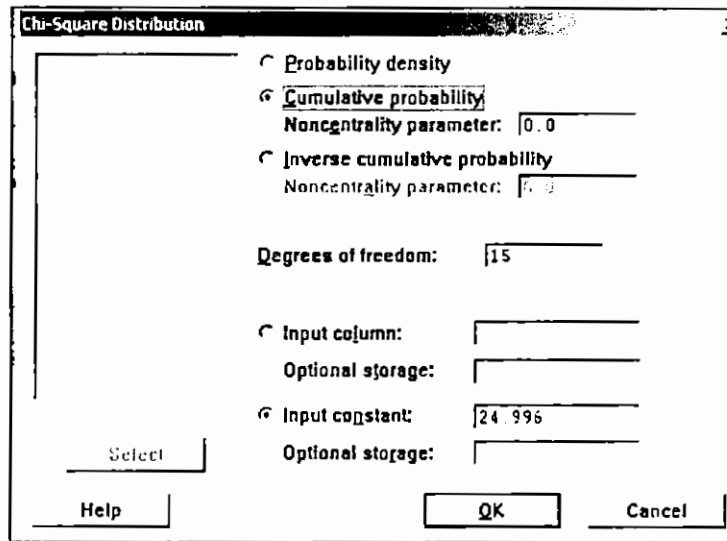
بفرض أن لدينا متغيراً يتبع التوزيع كاي تربيع، ما هو الاحتمال إذا علم أن القيمة الحرجة 24.996 وأن درجات الحرية تساوي 15؟

الحل: باستخدام الجداول وعند درجات حرية تساوي 15 نسير أفقياً حتى نصل إلى القيمة 24.996، ثم نصعد رأسياً فنجد أن α تساوي 0.05.

الحل: باستخدام برنامج مينيتاب Minitab (يجب ملاحظة أن المينيتاب Minitab في حالة Chi Square Distribution يعطي قيمة $1 - \alpha$ مباشرة إذا علمت القيمة الحرجة، ولذا في حالة معلومية α ويكون المطلوب هو القيمة الحرجة، فإننا نعوض بقيمة $1 - \alpha$)

Minitab>Calc> Probability Distribution> Chi Square Distribution

فيظهر الصندوق الحواري كما في شكل 13-49.



شكل رقم 13-49 حل المثال 12-12 بالمينيتاب

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Cumulative Distribution Function

Chi-Square with 15 DF

x	P(X ≤ x)
24.996	0.950003

وحيث إن $P(x \leq x) = 0.950003$ فإن $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ وهى نفس النتيجة التي حصلنا عليها من الجداول.

مثال رقم 13-9: بفرض أن لدينا متغيراً يتبع التوزيع كاي تربيع ما هي القيمة الحرجة إذا علم أن α تساوى 0.1، وأن درجات الحرية تساوى 9.

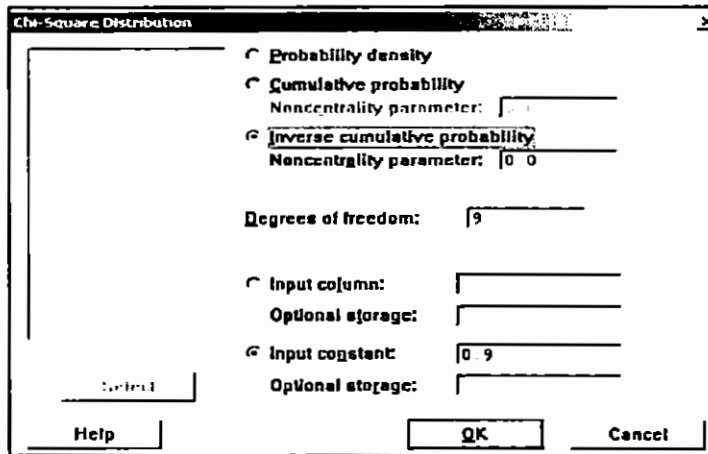
الحل: باستخدام الجداول وبالنظر فيه ومع درجات حرية تساوى 9 نسير أفقياً، وعند α تساوى 0.1 ننزل رأسياً، وفى نقطة التقاطع نوجد القيمة الحرجة، وهى فى هذه الحالة تساوى 14.684.

الحل باستخدام المينيتاب Minitab

(يجب ملاحظة أن المينيتاب Minitab فى حالة توزيع كاي تربيع Chi Square Distribution يعطى قيمة $1 - \alpha$ مباشرة إذا علمت القيمة الحرجة، ولذا فى حالة معلومية α ويكون المطلوب هو القيمة الحرجة فإننا نعوض بقيمة $1 - \alpha$)

Minitab>Calc> Probability Distribution> Chi Square Distribution

فيظهر الصندوق الحوارى الموضح فى شكل (13-50):



شكل رقم 13-50 حل المثال 13-9 بالمينيتاب

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Inverse Cumulative Distribution Function

Chi-Square with 9 DF

$P(X \leq x)$	x
0.9	14.6837

وبالتالي فإن القيمة الحرجة تساوى 14.6837 وهى نفس النتيجة التي حصلنا عليها من الجدول.

ج- توزيع (F) Distribution (F)

وهو نوع آخر خاص و هام من التوزيعات الاحتمالية المتصلة والتي سنستخدمها فى اختبار الفرضيات (يرجى مراجعة الفصل السابع عشر تحت عنوان اختبار الفرضيات)، ولهذا

التوزيع درجتان من الحرية $n \& m$ ، ويتحدد هذا التوزيع تماما إذا علمت هاتين القيمتين، وعليهما يعتمد الشكل النهائي للمنحنى، ويقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي كلما اقتربت درجات الحرية $n \& m$ من اللانهاية.

والوسط الحسابي لهذا التوزيع هو $\mu = \frac{n}{n-2}$ حيث $n > 2$

والمساحة تحت الذيل الملتوي للمنحنى وخارج الفترة F إلى ما لا نهاية تمثل قيمة الاحتمال α عند درجتى الحرية $n \& m$ ، وهناك جداول خاصة لهذه المساحات α والتي تقع على يسار قيمة معينة F ، وبمعلومية درجتى الحرية $n \& m$ وقيمة F يمكن إيجاد المساحة إلى يسار هذه القيمة F . (مصطفى زايد، 2001)

و من خواص المنحنى F والممثل بالنسبة بين تباينين مايلى:

- أن قيمته الصغرى هي الصفر .
- الوسيط Mode وهو القيم الأكثر تكرارا يساوى الواحد الصحيح.
- شكل المنحنى يعتمد على درجتى حرية مختلفتين، أحدها للبسط والأخرى للمقام.
- العينات المسحوبة يجب أن تتبع ال Normal Distribution
- التباين Variance للمجموعتين متساو.

وهناك جداول خاصة لحساب هذه المساحات، وفي هذه الجداول نجد أن درجات الحرية M مكتوبة في الهامش الأفقي العلوي، أما العمودين الهامشين على جانبي الجدول يمثلان درجات الحرية N ، وعند كل من هذه الدرجات وضعت ثلاث قيم للعدد α هي 0.05، 0.025، 0.01، وعند تقاطع كل عمود M مع كل صف N توجد ثلاث قيم حرجة تناظر تلك القيم الثلاث.

وبمعلومية درجتا الحرية M ، N يمكننا إيجاد القيمة الحرجة بمعلومية الاحتمال α ، وكذلك يمكننا إيجاد قيمة الاحتمال α بمعلومية القيم الحرجة. والقيمة الحرجة Critical Value هي القيمة الموجبة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل الذيل الملتوي للمنحنى وخارج الفترة من F إلى ما لا نهاية مساوية لقيمة معينة α عند درجتَي الحرية $n \& m$ ، حيث $n \& m$ تساوى 1، 2، 3.

وللتعبير عن القيمة الحرجة في توزيع F عند درجتَي الحرية $n \& m$ بحيث تكون مساحة المنطقتين عند الذيلين يساوى α فإننا نستخدم الصيغة:

$$F_{\alpha(m,n)} = \text{Critical Value}$$

مع ملاحظة أن العدد الأول M يمثل البسط ويحدد العمود والعدد الثاني N يمثل المقام ويحدد الصف فمثلاً:

$$F_{0.01(15,4)} = 14.2 ، F_{0.05(8,5)} = 4.82 ، F_{0.05(5,8)} = 3.69$$

مثال رقم 13- 10:

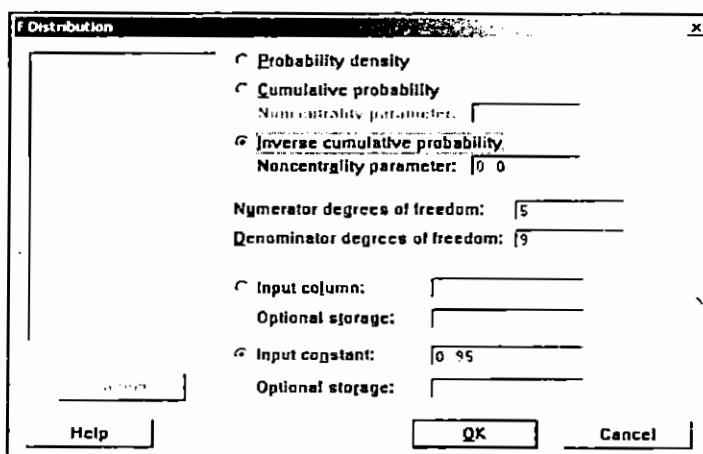
بفرض أن لدينا متغيراً يتبع التوزيع F ، ما هي القيمة الحرجة إذا علم أن الاحتمال $\alpha = 0.05$ وإذا علم أن درجتَي الحرية هما $m = 5$ ، $n = 9$ ؟

الحل: باستخدام الجداول وعند درجة حرية في الصف الأفقي تساوى 5 ثم ننزل عمودياً حتى نقطع درجة الحرية 9، وعند احتمال يساوى 0.05 نحصل على القيمة 3.48.

الحل: باستخدام Minitab (يجب ملاحظة أن Minitab فى حالة F Distribution يعطى قيمة $1 - \alpha$ مباشرة إذا علمت القيمة الحرجة، ولذا فى حالة معلومية α ويكون المطلوب هو القيمة الحرجة فإننا نعوض بقيمة $1 - \alpha$)

Minitab>Calc> Probability Distribution> F Distribution

فيظهر الصندوق الحوارى كما فى شكل (51-13)



شكل رقم 51-13 حل المثال 10-13 بالمينيتاب

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Inverse Cumulative Distribution Function

F distribution with 5 DF in numerator and 9 DF in denominator

P (X <= x)	x
0.95	3.48166

وبالتالى فإن القيمة الحرجة تساوى 48166 وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها من الجداول

مثال رقم 13-11:

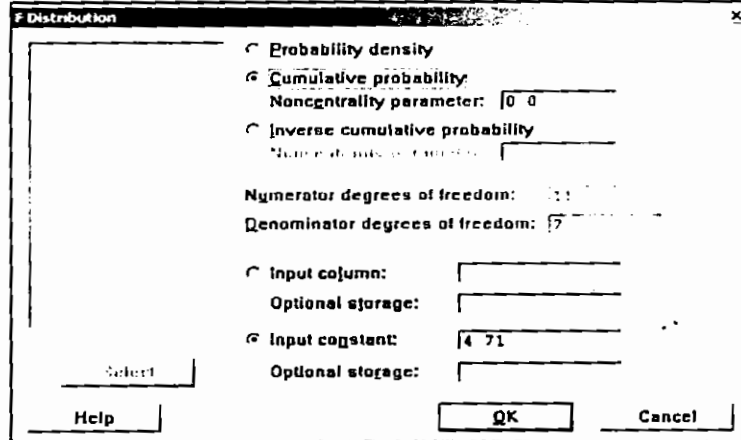
بفرض أن لدينا متغيراً يتبع التوزيع F، ما هي قيمة الاحتمال، إذا علم أن القيمة الحرجة تساوى 4.71 وإذا علم أن درجتى الحرية هما $m = 11$ ، $n = 7$ ؟

الحل: باستخدام الجداول و عند درجة حرية فى الصف الأفقى تساوى 11 ثم ننزل عمودياً حتى نقطع درجة الحرية 7، و عند القيمة الحرجة 4.71، نجد أن الاحتمال يساوى 0.025.

الحل: باستخدام Minitab (يجب ملاحظة أن الميني تاب Minitab فى حالة F Distribution يعطى قيمة $1 - \alpha$ مباشرة إذا علمت القيمة الحرجة، ولذا فى حالة معلومية α ويكون المطلوب هو القيمة الحرجة فإننا نعوض بقيمة $1 - \alpha$)

Minitab>Calc> Probability Distribution> F Distribution

فيظهر الصندوق الحوارى كما فى شكل (13-52):



شكل رقم 13- 52 حل المثال 11-13 بالميني تاب

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Cumulative Distribution Function

F distribution with 11 DF in numerator and 7 DF in denominator

x	P(X <= x)
4.71	0.975008

وحيث إن $P(x \leq x) = 0.975008$ ، فإن: $\alpha = 1 - 0.975 = 0.025$

13.4. التوزيعات الاحتمالية الوثابة Discrete Probability Distribution

ويتبع هذا النوع كل أنواع المتغيرات الوثابة أو المتقطعة Discrete Variable مثل رمى العملة ورمى زهر الطاولة وتقديم العطاءات وتجارب إطلاق الصواريخ وحدث أعطال للمعدات وتنفيذ عمليات الإصلاح..... أي البيانات التي يتم عدّها Countable أى من طبيعتها نعم أو لا وأيضا صحيح أو خطأ وأيضا مطابق أو غير مطابق وأيضا موجود أو غير موجود، و أي بيانات من طبيعتها أن تكون قيم صحيحة مثل أن تكون النتيجة خطأ

واحدا أو خطاين أو ثلاثة أخطاء ولا يمكن أن تكون خطأ ونصف أو خطاين وربع وهكذا، وفي هذا النوع من البيانات سنتعرض لأربعة أنواع من التوزيع Distribution كما يلي:

13.4.1. توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

يستخدم توزيع ذات الحدين Binomial Distribution في الحالات التي يكون اهتمامنا مركزا على وجود أو عدم وجود خاصية معينة في المجتمع محل الدراسة أي أن المجتمع يكون مقسوما إلى جزئين متكاملين (مجموع الجزأين يساوي 1)، جزء يمثل هذه الخاصية (احتمال وقوع حدث) وجزء آخر لا يمثلها، أي أن احتمال وقوع الحدث هنا هو عبارة عن شينين فقط مثل نجاح أو رسوب Fail Or Pass ومثل إذ كان أو لا يكن Compliance Or Non Compliance ومثل نعم أو لا Yes Or No ومثل حاضرا أو غائب Present Or Absent، ومثل ذكر أو أنثى Male Or Female، ومثل مدخنون وغير مدخنين Smoker Or Non Smoker، كما يستخدم هذا النوع عندما يكون المطلوب هو معرفة نسبة احتمال وقوع حدث معين، فمثلا لو كان لدينا مجتمع يمثل الشباب، وسحبنا منه عينة حجمها عشر عناصر، فسيكون لدينا 11 احتمال، إذ يمكن أن تكون العينة خالية من الذكور ويمكن أن تحتوي على ذكر واحد أو اثنين أو.....أو عشر ذكور، وتوزيع الاحتمال لهذا المتغير والذي يعبر عن نسبة احتمال وقوع هذا الحدث تمثل بتوزيع ذات الحدين ومن أمثلة هذا النوع أيضا:

- لو لدينا منتج ما، ويتم قياس أحد أبعاد عينات عشوائية من هذا المنتج بصورة يومية، ففي بعض المصانع يتم تجهيز شبلونة بأبعاد محددة يمر خلالها المنتج الجيد فقط، في هذه الحالة يكون شكل المخرجات نعم أو لا Yes Or No.
- في مصانع الأدوية يتم تسليط هواء مضغوط بقوة محددة على زجاجات الدواء، والزجاجة التي تسقط من جراء هذه القوة تكون مرفوضة (لأن وزنها يكون أخف من المطلوب).
- في مصانع لمبات الكهرباء يتم اختبار إضاءة للمبات، فاللمبة التي لا تضيء تكون مرفوضة.
- في البنوك يتم ملء فورمة إيداع الأموال، الفورمة إما أن تملأ صحيحة أو تكون مرفوضة.
- في الشركات التي تقوم بتقديم عطاءات إما أن تكون مقبولة أو مرفوضة.
- في الشركات التي تقوم بعمل صيانة للمعدات إذا تم حساب إخفاق المعدات في أداء مهمتها Failure Probability، فتكون P هي احتمال الفشل Failure Probability، أما إذا تم

حساب نجاح المعدات في أداء مهمتها Successful Operation، فتكون P هي احتمال النجاح أو درجة الاعتمادية Reliability.

ولكي يخضع توزيع ما لتوزيع ذي الحدين فيجب توفر عدة شروط منها:

- جمع العينة Sampling أو سحب العناصر من المجتمع يتم بصورة عشوائية.
- حجم المجتمع كبير جداً بالمقارنة بحجم العينة Sample، وبالتالي وحتى لو كانت عملية السحب بدون إرجاع فإن احتمال وقوع الحدث يكون ثابتاً.
- نجاح أو فشل الحدث في أى سحبة مستقل عما نتج من نجاح أو فشل في السحبات السابقة، كما أن عدد مرات نجاح الحدث في عينة ما مستقل عن عدد مرات نجاحه في أى عينة أخرى.

ولهذا النوع بعض الخصائص العامة منها:

- إذا زاد عدد العينات بصورة كبيرة فإن الشكل يزول إلى التوزيع الطبيعي Normal وبالتالي عندما يكون لدينا عملية تتبع توزيع ذات الحدين Binomial، فيفضل زيادة عدد العينة ومعاملته على أنه طبيعي .
 - عندما تقترب قيمة الاحتمالية Probability من 0.5 فإن الشكل يقترب من الطبيعي .
- و الدالة التي تحكم و تحدد شكل هذا التوزيع هي دالة كتلة الكثافة Probability Mass Function (PMF) كما يلي:

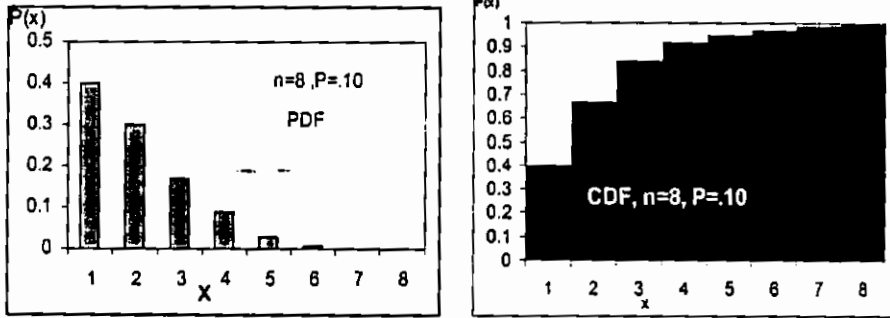
$$f(x) = \binom{n}{x} * P^x * (1 - P)^{(n-x)}$$

$$\binom{n}{x} = {}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

حيث إن X هي عدد مرات نجاح الحدث وهي تساوى 0، 1، 2،، N ، وحيث N هو حجم العينة وهو عدد مرات المحاولة، وحيث P هي احتمال وقوع الحدث ويقع بين الصفر والواحد الصحيح ($0 \leq P \leq 1$)، وهذه الدالة تتوقف على N و P وبمعرفة هاتين القيمتين يتحدد التوزيع تحديداً تاماً.

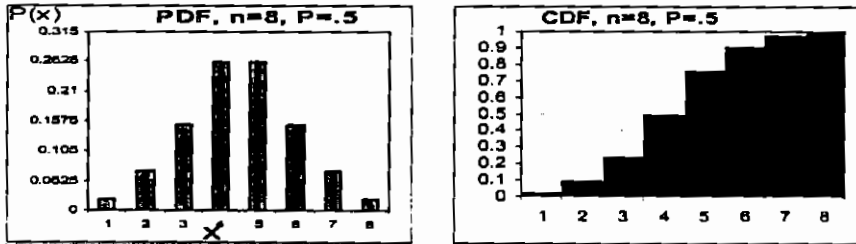
وبالاستنتاج الرياضي يمكننا استنتاج أن الوسط الحسابي لهذا التوزيع $= np$ ، وأن تباين هذا التوزيع $= np(1 - P)$

ويوضح شكل (13-53) عملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 10%، فلو أخذت 8 عينات فإن شكل المخرج سيكون كما بالرسم PMF Probability Mass Function وذلك يعنى أن احتمال أن يكون منتج واحد به خطأ هو 40% وأن احتمال أن يكون 2 منتج بهما خطأ هو 70% وأن احتمال أن يكون 3 منتج بهم أخطاء هو 87% وأن احتمال أن يكون 4 منتج بهم أخطاء هو 90%، وهكذا



شكل رقم 13- 53 عملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 10%

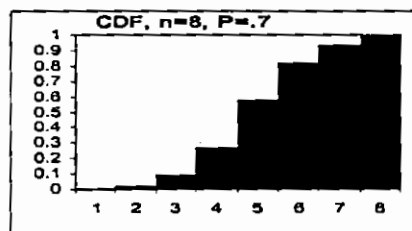
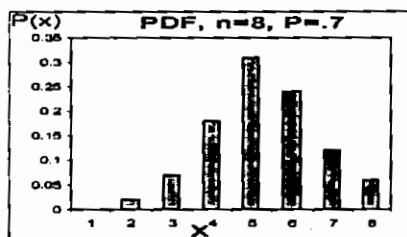
ويمثل شكل (13-54) عملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 50%، فلو أخذت 8 عينات، فإن شكل الخرج سيكون كما بالرسم وذلك يعنى أن احتمال أن يكون منتج واحد فقط به خطأ هو 0.05% وأن احتمال أن يكون 2 منتج بهما أخطاء هو 9% وأن احتمال أن يكون 3 منتج بهم أخطاء هو 22% وأن احتمال أن يكون 4 منتج بهم أخطاء هو 50%، وأن احتمال أن يكون 5 منتج بهم أخطاء هو 75%، وأن احتمال أن يكون 6 منتج بهم أخطاء هو 90%، وأن احتمال أن يكون 7 منتج بهم أخطاء هو 97%، وأن احتمال أن يكون 8 منتج بهم أخطاء هو 100%.



شكل رقم 13- 54 مخرجات عملية تنتج منتجات سليمة بنسبة 50%

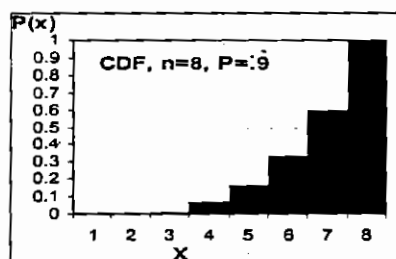
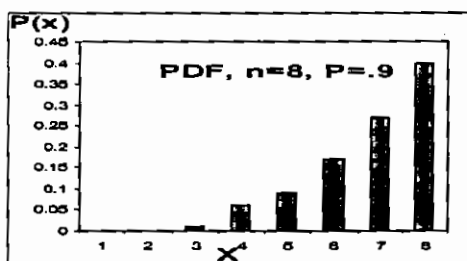
أما شكل (13-55) هو لعملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 70%، فلو أخذت 8 عينات فإن شكل الخرج سيكون كما بالرسم وذلك يعنى أن احتمال أن يكون منتج واحد فقط به خطأ هو 0% وأن احتمال أن يكون 2 منتج بهما أخطاء هو 0.05% وأن احتمال أن يكون 3 منتج بهم

أخطاء هو 10 % وأن احتمال أن يكون 4 منتج بهم أخطاء هو 25%، وأن احتمال أن يكون 5 منتج بهم أخطاء هو 58%، وأن احتمال أن يكون 6 منتج بهم أخطاء هو 80%، وأن احتمال أن يكون 7 منتج بهم أخطاء هو 92%، وأن احتمال أن يكون 8 منتج بهم أخطاء هو 100%.



شكل رقم 13- 55 عملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 70 %

وأخيراً، فإن شكل (13- 56) يمثل عملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 90%.



شكل رقم 13- 56 عملية تخرج منتجات سليمة بنسبة 90 %

مثال رقم 13- 12:

ما هي احتمالية ظهور الرقم 2 لثلاث مرات في سبع محاولات لرمي زهرة ذات ستة أوجه؟
الحل باستخدام المعادلة

حيث إن هذا النوع يتبع ذات الحدين Binomial Distribution نجد أن:

Number of Success = $X = 3$

Number of Trails = $N = 7$

وحيث إن الزهرة تحتوى على ستة أوجه فإن احتمال ظهور أى وجه يساوى $(1/6)$ أى سدس أى $P = 0.167$ - وبتطبيق ذلك على معادلة ذات الحدين:

$$f(x) = \binom{n}{x} * P^x * (1 - P)^{(n-x)}$$

$$p(x = 3) = \binom{7}{3} \cdot 0.167^3 \cdot (1 - 0.167)^{(7-3)}$$

$$p(x = 3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} \cdot 0.167^3 \cdot (1 - 0.167)^{(7-3)}$$

$$p(x = 3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} \cdot 0.167^3 \cdot (1 - 0.167)^{(4)}$$

$$p(x = 3) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} \cdot 0.167^3 \cdot (0.833)^{(4)} = 0.0784$$

ومعنى ذلك أن احتمالية ظهور الرقم 2 لثلاث مرات فى سبع محاولات لرمى زهرة ذات ستة أوجه هي 7.8%.

الحل باستخدام المينيتاب من قائمة Calc نختار Probability Distribution ثم نختار Binomial فيظهر الصندوق الحوارى 57-13 والذي يظهر فى الجزء العلوى منه ثلاثة اختيارات وهى:

- Probability تستخدم لمعرفة احتمال وقوع حدث عند قيمة محددة Exactly .
- Cumulative Probability و تستخدم لمعرفة احتمال وقوع حدث عند قيمة أكبر من قيمة محددة.
- Inverse Cumulative Probability تستخدم لمعرفة احتمال وقوع حدث عند قيمة أقل من قيمة محددة.

Binomial Distribution

☒ Probability
☐ Cumulative probability
☐ Inverse cumulative probability

Number of trials: 7
 Probability of success: 0.167

Input column:
 Optional storage:
 Input constant: 3
 Optional storage:

Help OK Cancel

تستخدم لمعرفة احتمال وقوع حدث عند قيمة أكبر من قيمة محددة

تستخدم لمعرفة احتمال وقوع حدث عند قيمة محددة exactly

تستخدم لمعرفة قيمة محددة للمتغير بمعلومية الاحتمال

الجزء الثانى من الصندوق الحوارى

شكل رقم 57-13 حل المثال 12-13 بالمينيتاب

أما الجزء الثاني من الصندوق الحواري فنقوم فيه بإدخال عدد المحاولات وكذلك احتمال النجاح، و عدد مرات الظهور المراد حساب الاحتمال عندها فتظهر النتائج كما في جدول (2-13).

جدول رقم 2-13 جدول يعرض حل المثال 12-13

Seven trials	$P(x=0)=$	0.278301	Sum= probability of less than 3 times
	$P(x=1)=$	0.390557	
	$P(x=2)=$	0.234897	
	$P(x=3)=$	0.078487	← Probability of exactly 3 times
	$P(x=4)=$	0.015735	Sum= probability of more than 3 times
	$P(x=5)=$	0.001893	
	$P(x=6)=$	0.000126	
	$P(x=7)=$	0.000004	
1.000000			

وإذا أردنا معرفة احتمال أن يظهر رقم محدد لعدد أقل من أو يساوي 3 ثلاث مرات فإننا نختار Cumulative Probability كما في الشكل 58-13.

Binomial Distribution

☐ Probability
☒ Cumulative probability
☐ Inverse cumulative probability

Number of trials: 7
 Probability of success: 0.167

☐ Input column:
 Optional storage:
☒ Input constant: 3
 Optional storage:

Select Help OK Cancel

شكل رقم 58-13 احتمال أن يظهر رقم محدد في المثال 12-13

فتظهر النتيجة التالية:

Cumulative Distribution Function

Binomial with $n = 7$ and $p = 0.167$

x P(X ≤ x)
 3 0.982242

مثال رقم 13-13:

إذا كنت تعمل بوظيفة مهندس مبيعات وقمت خلال عشرين محاولة لبيع منتج ما ببيع خمسة منتجات، فإذا قمت بعشر محاولات أخرى للبيع فما هي نسب الاحتمال في الحالات الآتية:

- 1- لا مبيعات.
- 2- بيع ثلاثة منتجات فقط.
- 3- بيع منتجات تزيد عن ثلاثة منتجات.
- 4- بيع منتجات تقل عن ثلاثة منتجات.

الحل باستخدام المعادلة

من البيانات المتاحة لدينا نجد أن احتمال نجاح أى عملية بيع هي خمسة من عشرين، أى

$$p = \frac{5}{20} = 0.25$$

25% أى أن:

Less Than 3، More than 3، 3، Number of Success = X

Number of Trails = N= 10

الحل باستخدام الميني تاب

بنفس المفهوم الذى تم شرحه فى المثال 13-13 يمكن الحصول على الجدول 3-13:

جدول رقم 3-13 جدول يعرض حل المثال 13-13

Ten trials	P(x=0)=	0.056314	0.056314	← Probability of no sales
	P(x=1)=	0.187712	0.525594	Sum= probability of less than 3 products
	P(x=2)=	0.281568		
	P(x=3)=	0.250282	0.250282	← Probability of exactly 3 products
	P(x=4)=	0.145998		
	P(x=5)=	0.058399		
	P(x=6)=	0.016222		
	P(x=7)=	0.003090	0.224125	Sum= probability of more than 3 products
	P(x=8)=	0.000386		
	P(x=9)=	0.000029		
	P(x=10)=	0.000001		
1.000000				

ومن ذلك يتبين أن نسبة احتمال عدم بيع أى منتجات هي 5.6%، وأن نسبة احتمال بيع ثلاثة منتجات هي 25%، وأن نسبة احتمال بيع أكثر من ثلاثة منتجات هي 22.4%، وأن نسبة احتمال بيع أقل من ثلاثة منتجات هي 52.56%.

13.4.2. توزيع بواسون Poisson Distribution

يستخدم توزيع بواسون كنموذج لتوزيع الأحداث النادرة التي تقع عشوائيا عبر الزمان أو المكان، فيستخدم في الحالات التي ينظر إليها نمطيا على أنها عملية تولد عددا من التغيرات أو الأحداث في وحدة زمن أو وحدة فراغ مناسبة، وهذه الوحدة مقسمة إلى عدد كبير جدا من الأجزاء الصغيرة جدا سنسميها لحظات Instants (سواء كان التقسيم من حيث الزمن أو من حيث الفراغ أو الحجم) وكل من هذه اللحظات يعتبر محاولة يمكن أن يقع فيها الحدث أو لا يقع، وبالتالي فإن هناك إمكانية لوقوع الحدث في عدد كبير من المرات.

وعلى ما سبق فإن توزيع بواسون يصلح كنموذج احتمال لبعض الأحداث التي تقع عشوائيا عبر الزمان مثل انبعاث جسيمات من مادة مشعة، وعدد حوادث الطائرات، وتتابع الاتصالات على مركز طوارئ إحدى المستشفيات، وعدد الأعطال في محطة توليد الكهرباء، عدد العملاء الذين يدخلون متجرا للشراء خلال اليوم، و عدد المكالمات التليفونية التي تطلب دعما فنيا خلال اسبوع، عدد حالات انتحار في مدينة، وعدد حالات القتل الخطأ خلال عام، وعدد المصابيح التي تحترق في مدينة خلال شهر، وعدد شكاوى العملاء في اسبوع، وعدد المكالمات التليفونية التي تصل إلى مكتب في فترة زمنية محددة ، ساعة مثلا، و عدد رسائل البريد المفقودة في إحدى المدن خلال أسبوع، و عدد الحفر في كيلومتر من طريق مرصوف.

كما يصلح كنموذج احتمال لبعض الأحداث التي تقع عشوائيا عبر المكان مثل عدد الأسماك في بحيرة، وعدد البكتريا من نوع معين في مختبر، وعدد الأخطاء المطبعية في صفحة كتاب، والخلل الذي يحدث في جهاز كمبيوتر، و عدد العيوب في كابل كهرباء، أو في ثوب قماش، أو في أسياخ التسليح الحديدية.

ولكي نتمكن من استخدام توزيع بواسون للتعبير عن متغير وثاب فيجب أن يتوفر في هذا المتغير شرطان:

- أولا ندرة الحدث: فيشترط أن يكون معدل وقوع الحدث، أى متوسط عدد مرات وقوعه في وحدة الزمن أو وحدة الفراغ أو وحدة الحجم، صغيرا بالنسبة لعدد المحاولات التي يمكن أن تسفر عن وقوع الحدث، ومثال ذلك المتغير الذي يعبر عن عدد الأخطاء في صفحة كتاب جيد الطبع، فالصفحة تتألف من عدد كبير من الكلمات (اللحظات Instants) كل من هذه الكلمات قد يقع في كتابتها خطأ أو لا يقع، وعلى ذلك فهناك إمكانية وقوع عدد كبير من الأخطاء، ولكن نظرا لأن معدل وقوع الخطأ هو عدد صغير جداً فإننا نعتبر هذا الحدث نادرا، واعتبار الحدث نادرا هو مسألة نسبية تتطلب أن تكون وحدة الزمن أو وحدة

الفراغ كبيرة كبراً كافياً، فمثلاً عند تسجيل عدد الحوادث التي تصل إلى مركز الطوارئ في مستشفى كبير لا ينبغي أن تقل وحدة الزمن عن أسبوع مثلاً لإعطاء الفرصة لورود حالات كافية.

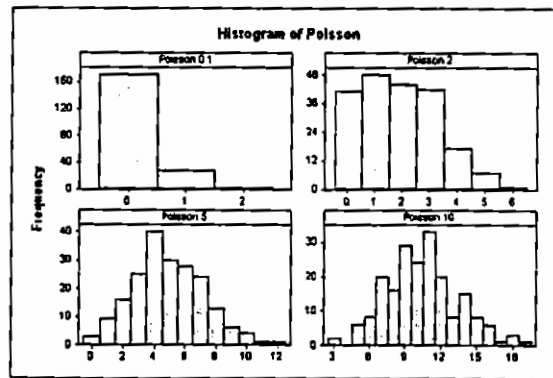
ثانياً استقلال المتغير التابع Independent وعشوائية الأحداث: فيشترط أن يكون وقوع الأحداث عشوائية، بمعنى أن يكون احتمال أو عدم وقوع الحدث في أي لحظة مستقلاً عن وقوعه أو عدم وقوعه في أي لحظة سابقة أو لاحقة غير متداخلة معها، وبذلك لا يتأثر وقوع الحدث إلا بالعوامل العشوائية فقط. فمثلاً تسجيل عدد الحوادث التي تصل إلى مركز الطوارئ في مستشفى كبير في محافظة ما لا يجب أن يؤثر في احتمال تسجيل حالات تالية. (محمد أبو يوسف، 1998)

والدالة التي تحكم و تحدد شكل هذا التوزيع (PMF) Probability Mass Function

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad \text{هي:}$$

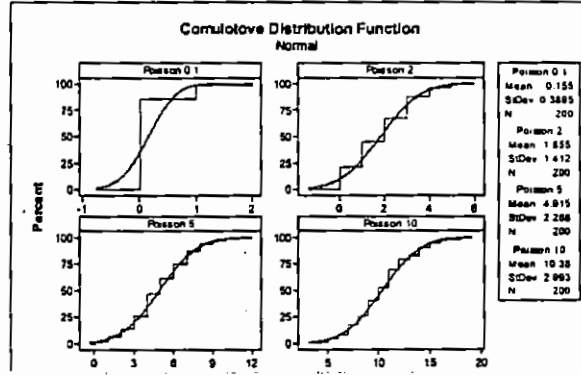
حيث إن $P(X)$ هو احتمال وقوع الحدث لعدد من المرات X وحيث $X = 0, 1, 2, \dots$ هي عدد مرات وقوع الحدث أو عدد مرات النجاح، وحيث $e = 2.71828$ (Base of Natural Logs) وهي الأساس اللوغاريتم الطبيعي، وحيث μ هي معدل وقوع الحدث خلال فترة زمنية أو فراغية محددة.

والشكل 13-59 يوضح دالة التوزيع الاحتمالية عند قيم مختلفة لهذا المتوسط والذي يظهر اختلاف الشكل باختلاف قيمة المعدل أو المتوسط ويلاحظ أنه بزيادة المعدل عن القيمة 5 فإن شكل التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يفضل استخدام نموذج التوزيع الطبيعي بدلا من توزيع بواسون.



شكل رقم 13- 59 اختلاف دالة التوزيع الاحتمالية باختلاف المتوسط

أما الشكل 13-60 فيعرض دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function لنفس القيم.



شكل رقم 13-60 اختلاف دالة التوزيع التراكمية باختلاف المتوسط

ومن المميزات الرئيسية لتوزيع بواسون أن الوسط الحسابي يساوى التباين يساوى μ . ومعنى ذلك أنه يمكننا اختبار ما إذا كان توزيعاً ما يتبع توزيع بواسون بأن نحسب المتوسط والتباين فإذا كانا متساويين أو كان الاختلاف فى القيمة بسيطاً، كان ذلك أحد المؤشرات القوية على تبعية المتغير لتوزيع لبواسون.

مثال رقم 13-14:

إذا كان متوسط عدد الأسماك فى لتر من ماء بحيرة هو 2 فما احتمال وجود 5 أسماك على الأقل فى عينة من 3 لترات من ماء البحيرة؟
الحل باستخدام المعادلة:

$$\mu = 2 * 3 = 6$$

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{X!} = \frac{e^{-6} 6^x}{X!}$$

حيث إن $X = 0, 1, 2, 3, \dots$

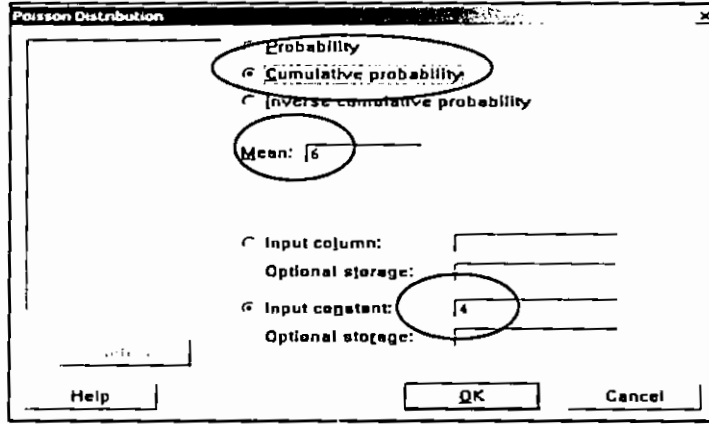
فإن احتمال وجود 5 أسماك على الأقل سيكون

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)]$$

$$P(X \geq 5) = 1 - 0.285 = 0.715$$

الحل بالمينيئاب Minitab :

Minitab > Calc > Probability Distributions > Poisson



شكل رقم 13- 61 حل المثال 13-14

ومن نافذة النتائج Session Window نجد أن:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.285 = 0.715$$

مثال رقم 13-15:

إذا كان متوسط عدد توقف إحدى المعدات الهامة في أحد المصانع خلال شهر هو مرتين فما احتمال حدوث 5 توقفات لهذه المعدة على الأقل في فترة زمنية ثلاثة أشهر في هذا المصنع ؟
الحل:

$$\mu = 2 * 3 = 6$$

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{X!} = \frac{e^{-6} 6^x}{X!}$$

حيث إن $X = 0, 1, 2, 3, \dots$

فإن احتمال حدوث 5 توقفات لهذه المعدة على الأقل سيكون

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.285 = 0.715$$

مثال رقم 13-16:

إذا كان متوسط عدد توقف إحدى المعدات الهامة في أحد المصانع خلال شهر هو مرة واحدة فما احتمال حدوث توقف آخر لهذه المعدة في الشهر المقبل في هذا المصنع ؟

الحل باستخدام المعادلة: $\mu = 1 * 1 = 1$

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{X!} = \frac{e^{-1} 1^x}{X!}$$

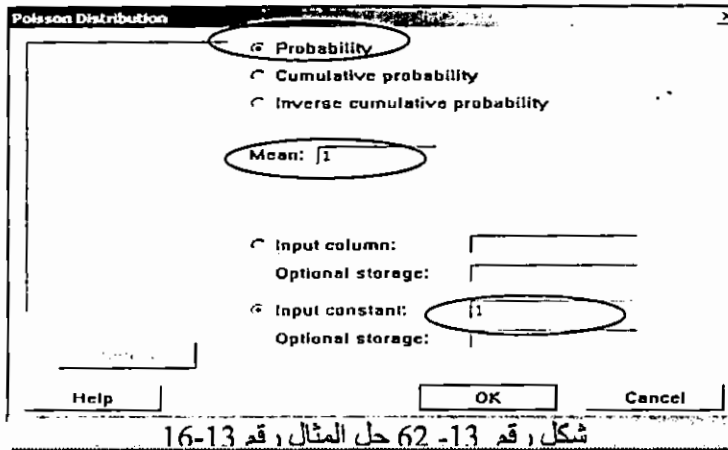
حيث إن $X = 0, 1, 2, 3, \dots$

فإن احتمال حدوث توقف آخر لهذه المعدة في الشهر المقبل في هذا المصنع سيكون

$$P(1) = \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = \frac{1}{2.71828} = 0.36788$$

الحل باستخدام برنامج الميني تاب Minitab:

Minitab > Calc > Probability Distributions > Poisson



من نافذة النتائج Session Window نجد أن:

$$P(1) = 0.36788$$

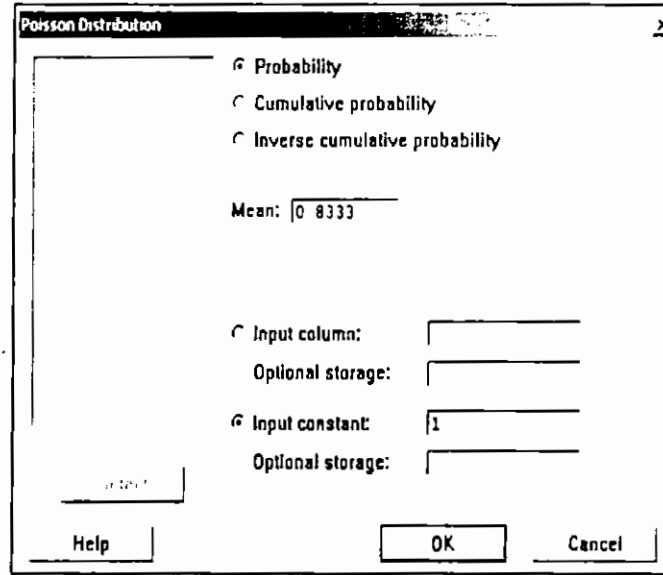
مثال رقم 13-17:

إذا كان متوسط عدد توقف إحدى المعدات الهامة في أحد المصانع خلال 6 أشهر هو 5 مرات فما احتمال حدوث توقف آخر لهذه المعدة في الشهر المقبل في هذا المصنع؟

الحل بالميني تاب Minitab :

$$\mu = 5 / 6 = 0.83333$$

Minitab > Calc > Probability Distributions > Poisson



شكل 13- 63 حل المثال رقم 13-17

من نافذة النتائج Session Window نجد أن:

$$P(1) = 0.362163$$

أى أن احتمال حدوث توقف آخر لهذه المعدة فى الشهر المقبل هو 0.362163

مثال رقم 13- 18:

لاحظت إحدى شركات خدمات الصيانة أن معدل التوقف الفجائي Shut Down لمحطة توليد الكهرباء بأحد مواقعها هو 0.1 شهريا. بفرض أن هذه العملية تتبع توزيع بواسون Poisson فما هو احتمال أن يحدث توقفين مفاجئين خلال شهر واحد؟

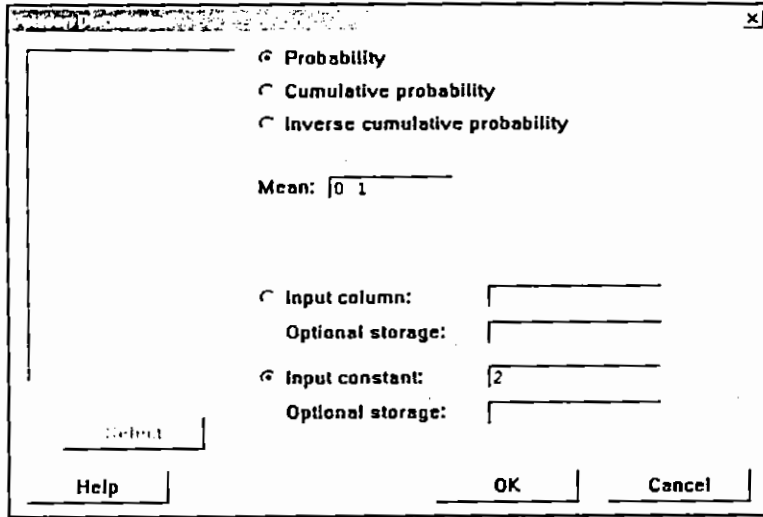
الحل باستخدام المعادلة:

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{X!} = \frac{e^{-0.1} (0.1)^2}{2!} = \frac{0.9048 * 0.1}{2} = 0.00452$$

أى أن احتمال أن يحدث توقفين مفاجئين فى شهر واحد هو بنسبة 0.452% وهى نسبة عالية فى مثل هذا النوع من الخدمات تعبر عن ضعف الخدمات المقدمة.

الحل باستخدام الميني تاب Minitab :

Calc > Probability Distributions > Poisson



شكل رقم 13-64 حل المثال رقم 13-18

من نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Probability Density Function

Poisson with mean = 0.1

x	P(X = x)
2	0.0045242

مثال رقم 13-19:

تتلقى إحدى شركات تقديم الخدمات مكالمات تليفونية لطلب الخدمة بمعدل 72 مكالمة في اليوم، بفرض أن هذه العملية تتبع توزيع بواسون Poisson فما هو احتمالية أن تتلقى هذه الشركة أربعين مكالمة في اليوم؟

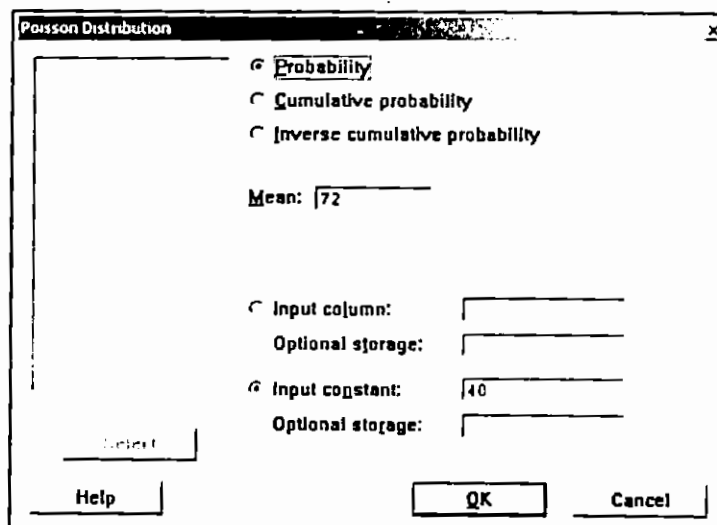
الحل باستخدام المعادلة:

$$P(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{X!} = \frac{e^{-72} (72)^{40}}{40!} = 0.0000130$$

أي أن احتمالية تلقي أربعين مكالمة لطلب الخدمة في اليوم هي 0.0013%

الحل باستخدام الميني تاب Minitab :

Calc > Probability Distributions > Poisson



شكل رقم 13- 65 حل المثال 13-19 بالمينيتاب

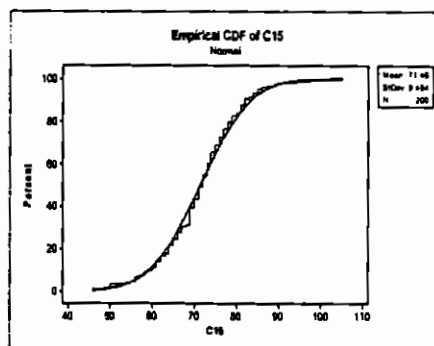
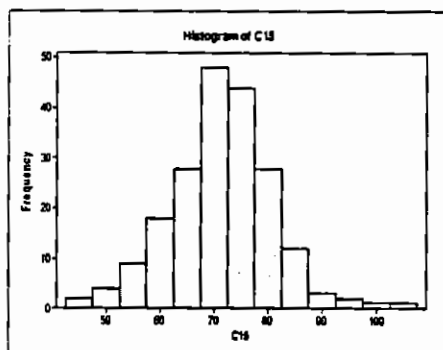
من نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Probability Density Function

Poisson with mean = 72

x	P(X = x)
40	0.0000130

والشكل 13-66 يوضح كل من دالة التوزيع الاحتمالية Probability Distribution والشكل 13-66 Function PDF، دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function لهذا المثال.



شكل رقم 13- 66 دالتى التوزيع الاحتمالية و التراكمية 13-19

وهذان المنحنيان مهمان جداً، إذ منهما نتمكن من معرفة احتمال وقوع أى حدث عند قيمة محددة بالضبط من الشكل PDF وكذلك يمكننا معرفة احتمال وقوع أى حدث أكبر من قيمة محددة من الشكل CDF.

فمثلاً من الشكل PDF فإن احتمال تلقى تسعون مكالمة هو 4% تقريباً، ومن الشكل CDF فإن احتمال تلقى أقل من تسعين مكالمة هو 95% وهكذا.

مثال رقم 13- 20:

فى تقرير لمدير الصيانة بأحد المصانع، بلغ عدد مرات التوقف (الأعطال) لأحد المعدات الهامة Critical Equipment خمس عشرة مرة خلال الخمسة أشهر المنقضية. بافتراض أن عدد الأعطال متغير عشوائى يتبع توزيع بواسون المطلوب حساب الاحتمالات التالية:

1. احتمال عدم حدوث أعطال خلال الشهر القادم.
2. احتمال حدوث عطل واحد خلال الشهر القادم.
3. احتمال حدوث أقل من أربعة أعطال خلال الشهر القادم.
4. احتمال حدوث أكثر من عطل واحد خلال الشهر القادم.
5. احتمال حدوث عطل واحد فقط خلال الثلاثة أشهر القادمة.
6. احتمال حدوث أكثر من عطل واحد خلال الثلاثة أشهر القادمة.

الحل باستخدام المعادلة:

بفرض أن X متغير عشوائى يمثل عدد الأعطال فى الشهر لهذه المعدة الهامة ، فإن الاحتمالات المطلوبة تكون كالتالى:

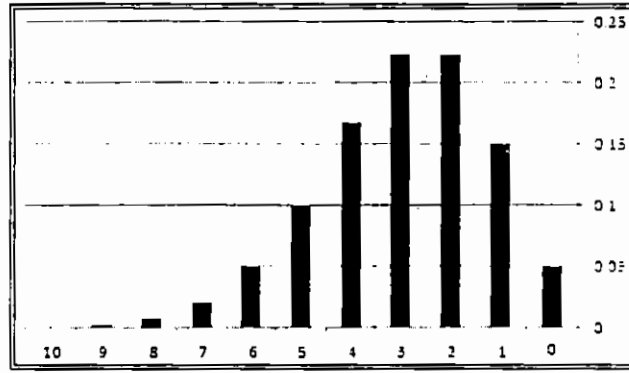
$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

وعليه فإنه يلزم حساب قيمة μ والتي تمثل معدل (المتوسط الحسابى) الأعطال فى الشهر وهى تساوى مجموع عدد الأعطال مقسوماً على الفترة الزمنية

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{15}{5} = 3$$

بالتعويض فى المعادلة يمكن إيجاد الاحتمالات كما يلى:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.04979	0.14936	0.22404	0.22404	0.16803	0.10082	0.05041	0.02160	0.00810	0.00270	0.00081



شكل رقم 13- 67 التوزيع الإحتمالي للمثال 13-20

1. لإيجاد احتمال عدم حدوث أعطال خلال الشهر القادم أى أن $X=0$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 0.04978$$

إذن احتمال عدم حدوث أعطال لهذه المعدة خلال الشهر القادم هو 0.0497، وهذا يعنى أنه يوجد احتمال ضعيف جدا أن لا تحدث أعطال لهذه المعدة.

2. لإيجاد احتمال حدوث عطل واحد خلال الشهر القادم، أى أن $X=1$

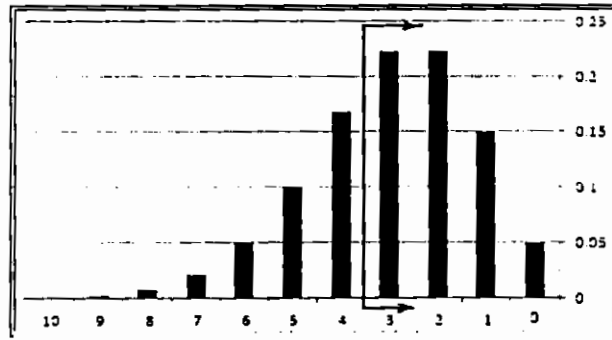
$$P(X = 1) = \frac{e^{-3} 3^1}{1!} = 0.14936$$

إذن احتمال عدم حدوث عطل واحد لهذه المعدة خلال الشهر القادم هو 0.14936.

3. لإيجاد احتمال حدوث أقل من أربعة أعطال خلال الشهر القادم.

$$\begin{aligned} P(X < 4) &= P(X \leq 3) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &\quad + P(X = 3) \\ &= 0.04978 + 0.1494 + 0.2240 + 0.2240 = 0.6472 \end{aligned}$$

والشكل التالى يوضح تلك النسب التراكمية



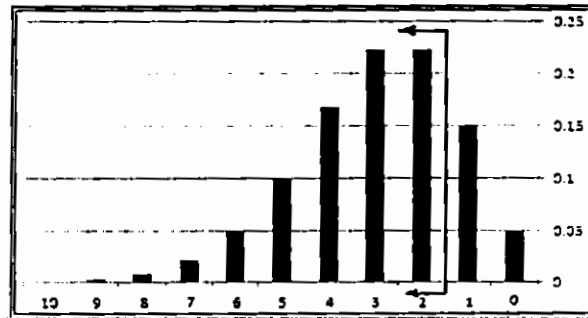
شكل رقم 13- 68 النسب التراكمية للمثال 13-20

4. لإيجاد احتمال حدوث أكثر من عطل واحد خلال الشهر القادم.

حيث ان النسبة الكلية لحدوث أعطال هي الواحد الصحيح

$$P(X > 1) = 1 - (P(X \leq 1)) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$= 1 - (0.04978 + 0.1494) = 1 - 0.199 = 0.8$$



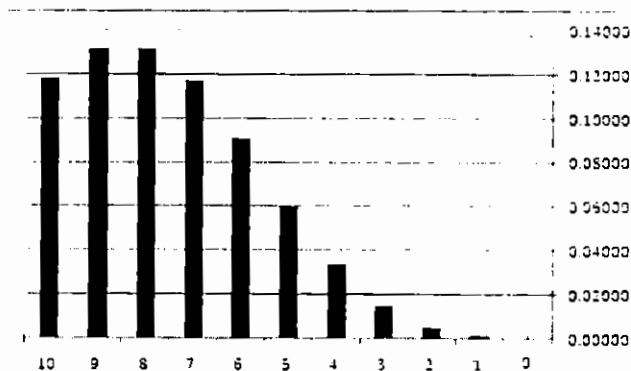
شكل رقم 13- 69 النسب التراكمية للمثال 13-20

5. لإيجاد احتمال حدوث عطل فقط خلال الثلاثة أشهر القادمة.

وعليه فإنه يلزم حساب قيمة μ والتي تمثل معدل (المتوسط الحسابي) الأعطال في الثلاثة أشهر وهي تساوي معدل الأعطال الشهري مضروباً في ثلاثة

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} * 3 = \frac{15}{5} * 3 = 9$$

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	X
0.1186	0.1318	0.1318	0.1171	0.0911	0.0607	0.0337	0.0150	0.0050	0.0011	0.0001	P

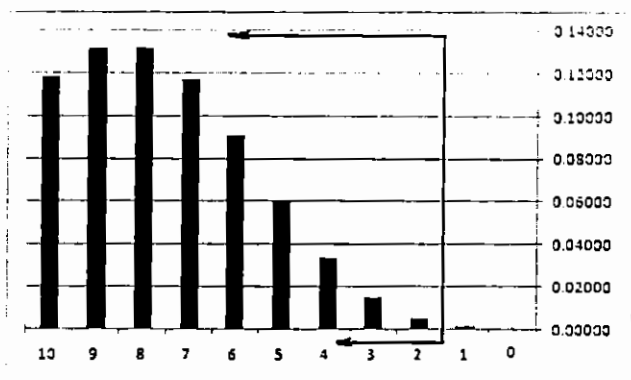


شكل رقم 13- 70 التوزيع الإحتمالي للمثال 13-20

أو بالتعويض في المعادلة يمكن إيجاد الاحتمالات كما يلي:

إذن احتمال حدوث عطل واحد فقط خلال الثلاثة أشهر القادمة هو 0.0011، وهذا يعنى أنه يوجد احتمال ضعيف جداً أن يحدث عطل واحد فقط خلال الثلاثة أشهر القادمة (من الممكن أن يقع أكثر من عطل واحد خلال تلك المدة).

6. لإيجاد احتمال حدوث أكثر من عطل واحد خلال الثلاثة أشهر القادمة



شكل رقم 13- 71 النسب التراكمية للمثال 13-20

مثال رقم 13- 21:

تقوم الإدارة المالية في إحدى الشركات بإصدار فواتير للأعمال التي تقوم بها الشركة بمعدل شهري 120 فاتورة شهرياً، وبعد فحص 240 فاتورة تلاحظ وجود أخطاء في ثمانين فواتير من التي تم إصدارها، فإذا كان حدوث هذا الخطأ يحدث عشوائياً فاحسب الاحتمالات التالية:

- 1- احتمال وجود خطأ واحد فقط في الفواتير التي سيتم إصدارها الشهر القادم .
- 2- احتمال وجود أكثر من ستة أخطاء في الفواتير التي سيتم إصدارها الشهر القادم .

الحل باستخدام المعادلة:

يفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الأخطاء في الشهر ، فإن الاحتمالات المطلوبة تكون كالتالي:

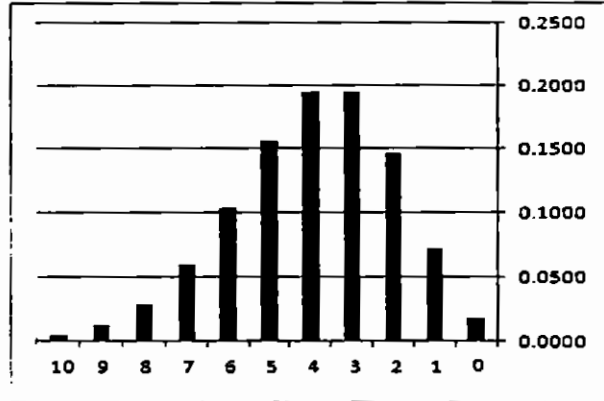
$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

وعليه فإنه يلزم حساب قيمة μ والتي تمثل معدل (المتوسط الحسابي) الأخطاء في الشهر وهي تساوي مجموع عدد الأخطاء مقسوماً على الفترة الزمنية

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{8}{2} = 4$$

بالتعويض في المعادلة يمكن إيجاد الاحتمالات كما يلي:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.0183	0.0733	0.1465	0.1954	0.1954	0.1563	0.1042	0.0595	0.0298	0.0132	0.0053



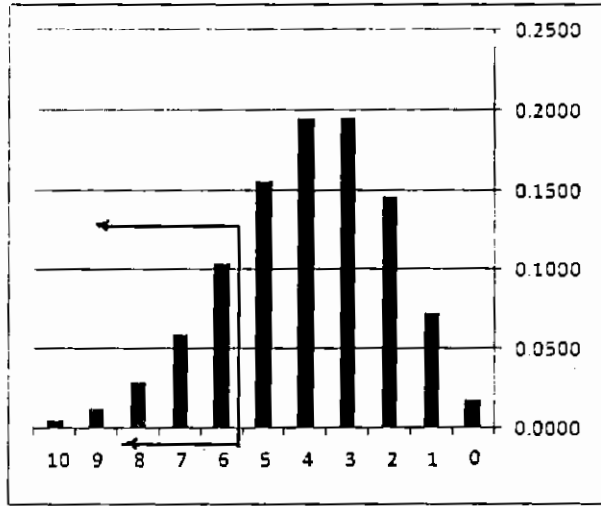
شكل رقم 13- 72 التوزيع الإحتمالي للمثال 21-13

1- لإيجاد احتمال وجود خطأ واحد فقط في الفواتير التي سيتم إصدارها الشهر القادم :

إذن احتمال عدم حدوث خطأ واحد فقط في الفواتير المصدرة خلال الشهر القادم هو 0.14936.

2- لإيجاد احتمال وجود أكثر من ستة أخطاء في الفواتير التي سيتم إصدارها الشهر القادم

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= 1 - (P(X \leq 6)) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + \\ &P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)) = \\ &1 - (0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 + 0.1953 + \\ &0.1042) = 1 - 0.8893 = 0.1107 \end{aligned}$$



شكل رقم 13-73 النسب التراكمية للمثال 13-21

مثال رقم 13-22:

قامت إدارة السلامة والصحة المهنية بتسجيل عدد الحوادث التي وقعت بالشركة خلال تسعة أشهر وقد بلغت تلك الحوادث ثلاث حوادث، بافتراض أن عدد الحوادث متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون المطلوب حساب الاحتمالات التالية:

1. احتمال عدم وقوع حوادث خلال الشهر القادم.
2. احتمال وقوع حادث واحد فقط خلال الشهر القادم.

3. احتمال وقوع أكثر من حادث خلال الشهر القادم.

4. احتمال وقوع ثلاث حوادث خلال الشهر القادم.

الحل باستخدام المعادلة:

بفرض أن X متغير عشوائى يمثل عدد الحوادث فى الشهر، فإن الاحتمالات المطلوبة تكون كالتالى:

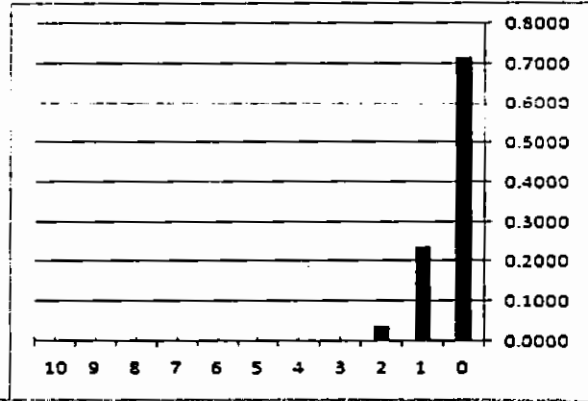
$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

وعليه فانه يلزم حساب قيمة μ والتي تمثل معدل (المتوسط الحسابى) الحوادث فى الشهر وهى تساوى مجموع عدد الاعطال مقسوما على الفترة الزمنية

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N} = \frac{3}{9} = 0.333$$

بالتعويض فى المعادلة يمكن إيجاد الاحتمالات كما يلى:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	X
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0044	0.0397	0.2387	0.7168	P



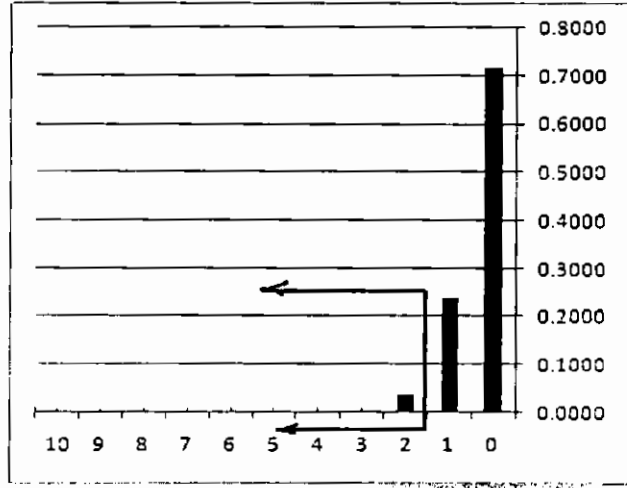
شكل رقم 13-74 التوزيع الإحتمالي للمثال 13-22

1. لإيجاد احتمال عدم وقوع حوادث خلال الشهر القادم.

2. لإيجاد احتمال وقوع حادث واحد فقط خلال الشهر القادم.

3. لإيجاد احتمال وقوع أكثر من حادث خلال الشهر القادم.

$$P(X > 1) = 1 - (P(X \leq 1)) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ = 1 - (0.7168 + 0.2387) = 1 - 0.9555 = 0.045$$



شكل رقم 13- 75 النسب التراكمية للمثال 13-22

4. لإيجاد احتمال وقوع ثلاث حوادث خلال الشهر القادم.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.33} 0.33^3}{3!} = 0.044$$

مثال رقم 13- 23:

في أحد عقود توريد أجهزة اليكترونية طلب العميل ألا يزيد زمن توقف Shut Down الجهاز الوحيد والمهم لديه عن توقفين فقط في السنة، فما هي قيمة μ ؟

الحل باستخدام المعادلة:

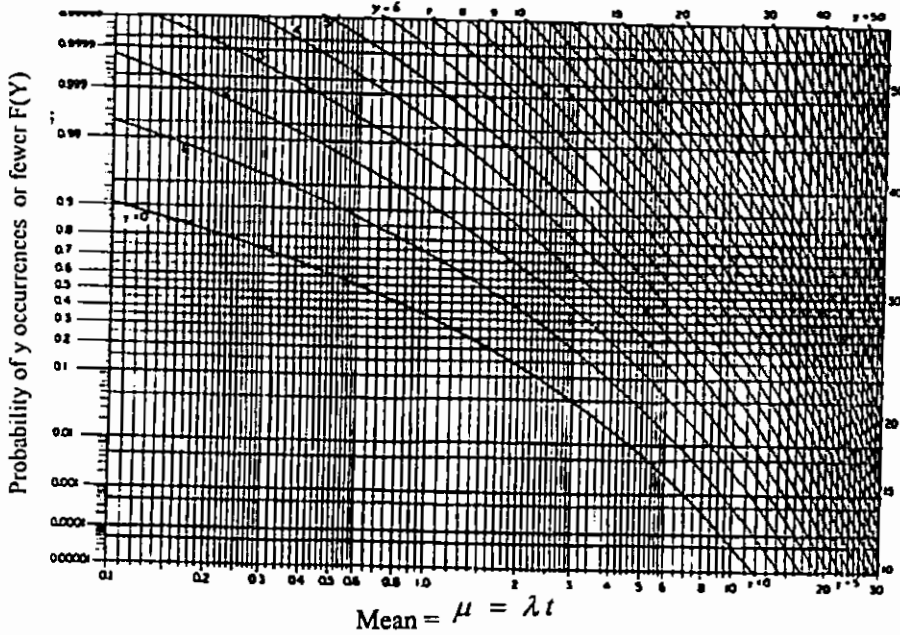
ولحل هذا المثال سنستخدم خريطة الاحتمالات التراكمية لبواسون Poisson Cumulative Probabilities كما في شكل 12-76 وسنفترض أن ال Risk Factor For Electronic Devices A=0.1 وعليه فإن احتمال حدوث التوقف Shut Down سيكون كما يلي :

$$P(x) = 1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9$$

بتوقيع هذه القيمة على المحور الرأسى لل Chart المشار إليها ثم التحرك أفقيا حتى نقطع المنحنى 2 Or Lower ثم ننزل رأسيا حتى نقطع المحور الأفقى فنحصل على قيمة μ وهى 1.1، وبالتالي يمكن حساب المعدل من العلاقة $\mu = \lambda t$

$$\lambda = \mu / t = 1.1 / 8760$$

أى أن قيمة λ لأغراض التصميم ستكون 1.1 لكل 8760 ساعة تشغيل



شكل رقم 13-76 خريطة الاحتمالات التراكمية لبواسون
Poisson cumulative probabilities

13.4.3. توزيع باسكال Pascal Distribution

فى توزيع ذات الحدين كنا نفترض أن حجم العينة هو عدد ثابت يساوى N وكنا نعبر عن عدد مرات وقوع الحدث خلال N من المحاولات بالمتغير X ، إلا أن هناك بعض التطبيقات تتطلب عكس هذا الوضع فيكون حجم العينة متغيرا، ويكون عدد مرات وقوع الحدث هو عدد ثابت محدد A من قبل، ويكون المطلوب هو إيجاد احتمالات X التي تسمح بوقوع الحدث لهذا العدد من المرات، أى أننا فى هذه الحالة نتعامل مع متغير من النوع الوثناب Discrete يعبر عن العدد اللازم من المحاولات لكي يقع الحدث A عددا محددا من المرات،

وفى هذه الحالة يجب أن يكون عدد المحاولات مساويا أو أكبر من عدد مرات المحاولة، فإذا كان المطلوب هو وقوع الحدث ثلاث مرات فإن X تساوى 3، 4، 5، 6.....

والحالات التي يظهر فيها متغير باسكالى تنشأ فى المعتاد عندما يستخدم ما يسمى بالمعاينة التتابعية Sequential Sampling حيث لا يحدد حجم العينة مسبقا، بل تختار العينات تتابعيا وعشوائيا الواحدة تلو الأخرى وتتوقف هذه العملية حين يتجمع العدد المحدد من النتائج.

و الدالة التي تحكم و تحدد شكل هذا التوزيع هي دالة كتلة الاحتمال Probability Mass Function (PMF) هي كما يلي

$$f(x) = \binom{x-1}{a-1} * P^a * (1-P)^{(x-a)}$$

$$\binom{x-1}{a-1} = {}_{x-a}C_{a-1} = \frac{(x-a)!}{(x-a)!(x-a)}$$

حيث إن $X = A, A+1, A+2, \dots$ ، وحيث إن A هي مقدار ثابت يمثل عدد مرات وقوع الحدث، وحيث P هي احتمال وقوع الحدث ويقع بين الصفر والواحد الصحيح ($0 < P < 1$)، وهذه الدالة تتوقف على قيمة الدليلين A و P ويسمى المتغير X فى هذه الحالة بمتغير باسكال، ويلاحظ أن الحدث يقع A من المرات المستقلة باحتمال P فى كل مرة، وأن المرة الأخيرة هي نجاح دائما. (مجدى عبد الكريم حبيب 1996)

13.4.4. التوزيع الهندسي Geometric Distribution

وهذا التوزيع هو حالة خاصة من توزيع باسكال تكون فيه مرات وقوع الحدث A هي مرة واحدة، ويرمز للمتغير X هنا إلى عدد من المحاولات اللازمة لوقوع الحدث لأول مرة، وهذا التوزيع مفيد فى دراسة الأحداث النادرة مثل تحديد " بعد كم محاولة سنحصل على أول Output معيب من العملية محل الدراسة إذا علم متوسط الوحدات المعيبة ".

وتنتج الدالة التي تحكم و تحدد شكل هذا التوزيع وهى دالة كتلة الاحتمال Probability Mass Function (PMF) بالتعويض عن قيمة A بالواحد الصحيح فى المعادلة السابقة وهى كما يلي:

$$f(x) = P * (1-P)^{(x-1)}$$

حيث إن X هي عدد المحاولات حتى حدوث أول حالة وقوع للحدث وهي تساوى 1، 2، 3، 4،...، وحيث P هي احتمال وقوع الحدث ويقع بين الصفر والواحد الصحيح ($0 < P < 1$)، ويسمى التوزيع حينئذ بتوزيع وقت الانتظار Waiting Time Distribution وله دليل واحد هو P .

ويتحدد الوسط الحسابي لهذا التوزيع من العلاقة $\frac{1}{P}$

بينما يتحدد تباين التوزيع من العلاقة $\frac{(1 - P)}{P^2}$

مثال رقم 13- 24:

إذا كان معدل نجاح حدث ما هو 0.469 للمحاولة، فما هو احتمال حدوث أول نجاح بعد خمس محاولات تماماً؟

$$p(5) = (1 - 0.469)^{5-1} * (0.469) = 0.0373 \quad \text{الحل :}$$

أى أن احتمالية حدوث أول نجاح بعد خمس محاولات تماماً هي 3.73%.

مثال رقم 13- 25:

إذا كان معدل نجاح حدث ما هو 0.898 للمحاولة، فما هو احتمال حدوث أول نجاح بعد سبع محاولات تماماً؟

الحل :

$$p(7) = (1 - 0.898)^{7-1} * (0.898) = 0.0000010$$

أى أن احتمالية حدوث أول نجاح بعد سبع محاولات تماماً هي 0.000001%.

مثال رقم 13- 26:

فى أحد مصانع قطع غيار السيارات من المعروف أنه فى المتوسط توجد وحدة معيبة فى كل 100 وحدة، فما هو احتمال اختبار خمس وحدات حتى الوصول إلى الوحدة المعيبة ؟ وما هو العدد المتوقع للعينات المتتابة للعثور على أول وحدة معيبة ؟

الحل :

$$p(5) = (1 - 0.01)^{5-1} * (0.01) = 0.0096$$

أى أن احتمالية الحصول على أول منتج معيب بعد خمس محاولات تماماً هي 0.0096%.

$$\frac{1}{P} = \text{والعدد المتوقع للعينات المتتابة للعثور على أول وحدة معيبة أى المتوسط الحسابي}$$

$$\frac{1}{0.01} = 100 \text{ عينة}$$

13.4.5. التوزيع الفوق هندسي Hyper Geometric Distribution

وهذا التوزيع يشبه إلى حد كبير توزيع ذات الحدين Binomial، والاختلاف الرئيسي بين هذا التوزيع وبين ذات الحدين Binomial هي أن نتائج كل محاولة فى هذا النوع ليس مستقلاً، بمعنى أن نتيجة كل سحبة ستتأثر بالسحبات السابقة ويحدث ذلك عندما تكون العينات المسحوبة بدون إرجاع من المجتمع محدودة وصغيرة ويكون معلوماً فيها نسبة وقوع الحدث مسبقاً ويتم التعامل فيها مع عينة مكونة من أكثر من عنصر من المجتمع، وهى تشبه ذات الحدين Binomial فى أن احتمال وقوع الحدث هو عبارة عن شينين فقط مثل نجاح أو رسوب Fail Or Pass ومثل إذ كان أو لا يكن Compliance Or Non Compliance ومثل نعم أو لا Yes Or No ومثل حاضراً أو غائب Present Or Absent، ومثل ذكر أو أنثى Male Or Female، ومثل مدخنون وغير مدخنين Smoker Or Non Smoker.

والدالة التي تحكم و تحدد شكل هذا التوزيع وهى دالة كتلة الاحتمال Probability Mass Function (PMF) كما يلي:

$$p(x, N, n, m) = \frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(x) = \frac{{}_m C_x * {}_{N-m} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

حيث إن X هي عدد المرات التي يقع فيها الحدث نتيجة عدد محدد من المحاولات N، وحيث N هي العدد الإجمالي للمجتمع، وحيث إن N حجم العينة بدون إرجاع Sample Size أو عدد المحاولات.

مثال رقم 13- 27:

بفرض أننا سنجرى اختبارا لمعرفة نسب المدخنين، ولذا فقد قمنا باختيار عينة عشوائية مكونة من ثلاثة أفراد من ضمن عشرة متطوعين، هؤلاء المتطوعين يتكونون من ستة رجال وأربع سيدات، فما نسبة عدم احتواء العينة على أى سيدات.

الحل باستخدام المعادلة:

من البيانات المتاحة لدينا نجد أن $M=4$ & $N=3$ & $N=10$ & $X=0$ وبالتعويض فى المعادلة:

$$p(x, N, n, m) = \frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

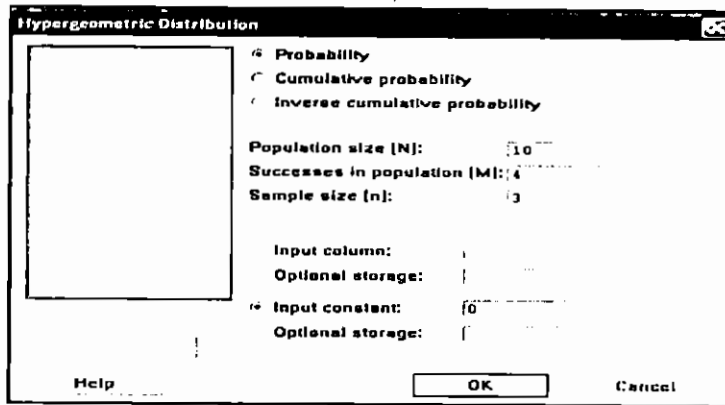
$$p(x = 0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{10-4}{3-0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4!}{0!(4-0)!} \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{10!}{3!(10-3)!}$$

$$= \frac{1 * 20}{120} = \frac{1}{6} = 0.166666$$

إن فاحتمال أن نأخذ عينة مكونة من ثلاثة أفراد من بين عشرة ولا تحتوى على سيدات هي 16.7%

الحل باستخدام الميني تاب Minitab :

ويمكن الحصول على نفس النتيجة باستعمال الميني تاب Minitab، فمن قائمة Calc نختار Probability Distribution ثم نختار Hyper Geometric فيظهر الصندوق الحوارى كما فى شكل 13-77، ونعوض بالقيم المتاحة كما يلي:



شكل رقم 13-77 حل المثال 13-27 بالمينيتاب

من نافذة النتائج Session Window نجد أن:

Probability Density Function

Hypergeometric with M = 10, N = 4, and n = 3

x P (X = x)
0 0.166667

وهي نفس القيمة التي تم حسابها بالمعادلة يدوياً.

مثال رقم 13-28:

في المثال السابق ما هي نسبة عدم احتواء العينة على أى رجال؟

الحل:

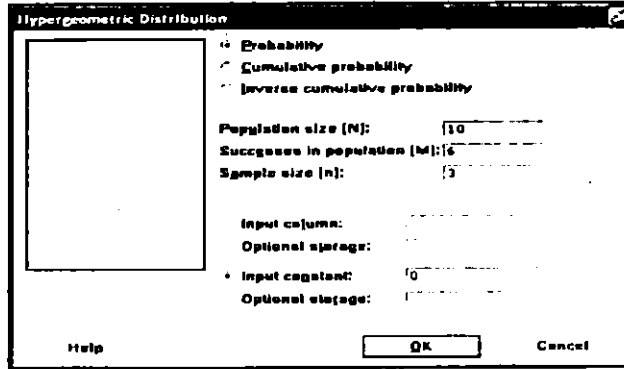
من البيانات المتاحة لدينا نجد أن $M=6$ & $N=3$ & $N=10$ & $X=0$ وبالتعويض في

$$p(x=0) = \frac{\binom{6}{0} \binom{10-6}{3-0}}{\binom{10}{n3}} =$$

$$= \frac{\frac{6!}{0!(6-0)!} \cdot \frac{4!}{3!(4-3)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{1 \cdot 4}{120} = 0.033$$

الحل باستخدام المينيتاب Minitab :

ويمكن كذلك الحصول على نفس النتيجة باستعمال المينيتاب Minitab كما يلي: من قائمة Calc نختار Probability Distribution ثم نختار Hyper Geometric فيظهر الصندوق الحواري كما في شكل 13-78، فنغوض بالقيم المتاحة كما يلي:



شكل رقم 13- 78 حل المثال 13-28 بالمينيئاب

وسنحصل على النتيجة التالية:

Probability Density Function

Hypergeometric with $N = 10$, $M = 6$, and $n = 3$

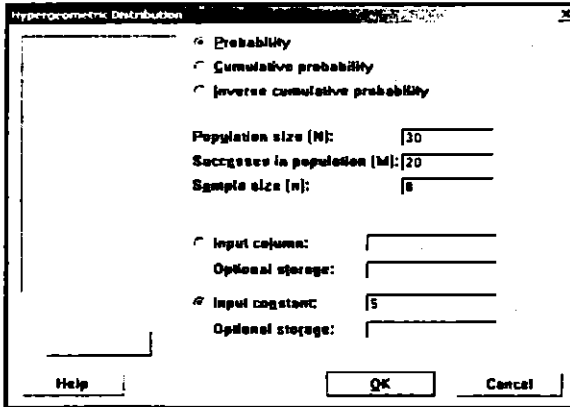
x	P(X = x)
0	0.0333333

1

إذن فاحتمال أن نأخذ عينة مكونة من ثلاثة أفراد من بين عشرة ولا تحتوي على رجال هي 3.3%.

مثال رقم 13- 29:

مجموعة مكونة من ثلاثين عاملاً، عشرون مستعدون للدخول في اعتصام وعشرة غير مستعدين لذلك، فما هي احتمالية انتقاء عينة تحتوي على خمسة من المستعدين للاعتصام وثلاثة من غير المستعدين؟



شكل رقم 13- 79 حل المثال 13-29 بالمينيئاب

الحل باستعمال المينيئاب Minitab و من قائمة Calc نختار Probability Distribution ثم نختار Hyper Geometric فيظهر الصندوق الحواري كما في شكل 13- 79، فنعوض بالقيم المتاحة كما يلي: