# أرقام حيرت العالم

فهرسة أثناء النشر/ إعداد الهيئة العامة لدار الكتب والوثائق القومية. إدارة الشئون الفنية

المقدم، أحمد
أرقام حيرت العالم/ تأليف: أحمد المقدم. - القاهرة: نيو بوك للنشر والتوزيع/ ط ١ / القاهرة: ٢٠١٩م.
١٥٦ ص؛ ١٧×٢٤سم
تدمـــــك: ٥-٩٨-٦٥١٩-٩٧٧-٩٧٨
رقم الإيداع: ٢٠١٨/٢٢٨٧٥
١ - الأرقام
أ- العنوان ٥١٣،٥

| | |
|---|---|
| دار النشـــــر: | نيو بوك للنشر والتوزيع |
| عنــوان الكتـاب: | أرقام حيرت العالم |
| المـــؤلــف: | أحمد المقدم |
| رقــم الطبعـة: | الأولى |
| تـاريـخ الطبـع: | ٢٠١٩ |



NEW BOOK
نيو بوك للنشر و التوزيع



نيو بوك
٦ عمارات الدفاع الوطنى - حدائق القبة - القاهرة
ت: ٠١٠٩٢٦٧٣٢٧٤
newbooknb@gmail.com

# أرقام حيرت العالم

أحمد المقدم

NEW BOOK
نيو بوك للنشر و التوزيع
2019

# الإهداء

إلى:

## د. عمرو شريف

**الذي بتشجيعه وثقته خرج هذا الكتاب**

.

# فهرس المحتويات

# مقدمة

مـن منا لا يتعامل مع الأرقام بشـكل يومي!!.. نحن نسـتيقظ فننظر إلى الســاعة التي هي أرقام، نركب التاكسي ونعطي السـائق ماله الذي أشار إليه العداد عن طريق الأرقام، نصل إلى محل عملنا فيتطلع الحارس المرتاب إلى بيانــات بطاقاتنا التي هي أرقــام، نرى (هيام) التي نهيم بها حبا فنطلب منهــا أخيرا رقــم موبايلها والذي هو بالطبع أرقام، ثم بعد يوم طويل نعود إلي منازلنا فننام ثم نستيقظ لنواجه يوما جديدا مليئا بالأرقام.

الأرقام ليســت مهمة في حياتنا الشــخصية فحســب بل هي المفتاح الذي به استطعنا سبر أغــوار الكون الذي نعيش فيــه، فالأرقام تصف عمر الكون، وسرعة الضوء ومتى يصل إلينا من الشــمس، وعــدد جزيئات الهيدروجين والأكسـجين المكونة للماء، وكميــة الطاقة التي تنتجها الخلية الحية، والتعداد السكاني، ومتوسط الدخل في مكان ما، وغير هذا الكثير.

ليس عجيبا إذن أن تخلب الأرقام لب العقل البشري منذ بداية الحضارة وتحفزه على السعي خلف أسرارها، وفي أثناء بحثه هذا وجد الإنسان أن الأرقام لا تقف على قدم المساواة مع بعضها البعض، بل إن هناك مجموعة خاصة من الأرقام العجيبة التي تبرز وســط باقي أفراد عشــيرتها، ضمن هذه الأرقام الرقم الذي خشيه السابقون وبجّله آخرون، ومنها الرقم الدموي الذي تسبب في مقتل مكتشفه، ومنها الرقم الذي سُمّي «النسبة الإلهية» نتيجة للعجائب التي ارتبطت به.

دار رأسي وأنــا أبحث بنهم في تاريخ هذه المجموعة الخاصة من الأرقام وفي تأثيرها على الحضارة الإنســانية بشتى صورها ســواء الجانب العلمي أو الفلسفي أو الأدبي أو الاجتماعي، وكلــما خضت أكثر داخل قصــص هذه الأرقام العجيبــة كلما زاد اقتناعي أنها ليســت مجرد أرقام، بل هي أكثر من ذلك بكثير.

بحثت في المكتبة العربية عن كتاب جامع لهذه الأرقام العجيبة كي أتزود من معرفتي بها ولكن للأسف لم أجده، فاتجهت إلى المكتبة الأجنبية ولم أجده كذلك ولكني وجدت مجموعة من الكتب كتبها مؤلفون مختلفون وكل واحد منهم مهتم بمناقشة إحدى هذه الأرقام، بالفعل استفدت كثيرا من هذه الكتب ولكني كنت مازلت عند رأيي أن هذه الأرقام بحاجة إلى أن تُجمع في كتاب واحد تقدم المعلومة والقصة بشكل بسيط غير متبحر في أعماق قد يفقد فيها القارئ طريقه.

لذا قررت أن أكتب هذا الكتاب الذي بين أيديكم لأقدم للقارئ العربي هذه الأرقام العجيبة مجمّعة للمرة الأولى، وقد تناولت كل رقم من حيث قصة اكتشافه وكيف أثر على الفلسفة وعلى فهمنا للكون والخالق، وكل ما أتمناه أن يجد القارئ في هذا الكتاب وجبة دسمة من المعلومات المفيدة والممتعة في نفس الوقت.

**أحمد المقدم**

# واحد 1

إذا أردنا الحديث عن الأرقام التي حيرت العالم، فمن الطبيعي أن نبدأ بالرقم الذي منه انبثقت جميع الأرقام، الرقم «واحد». يمكن للقارئ أن يسأل: «لماذا الرقم واحد؟ لماذا لم يكن الرقم «اثنين» على سبيل المثال هو أساس باقي الأرقام؟» وإجابة هذا السؤال بديهية، فالرقم «واحد» هو أقل عدد صحيح.. فأنت إذا أردت أن تحسب عدد صفحات كتاب ما، أو عدد الخطوات التي تأخذها إلى العمل، أو حتى عدد ذرات الكون، فأنت حتما بادئ من الرقم «واحد» وليس أي رقم آخر. لهذا فتاريخ الرقم «واحد» هو ذاته تاريخ العدّ عند الإنسان.

الأبحاث العلمية تخبرنا أن الحيوانات مثل الإنسان لديها غريزة التفرقة بين الكميات، بل إن تدريب الحيوانات للتعرف على الأرقام ممكن، فقد تم تدريب الفئران على أداء عدد معين من المهام ليحصلوا على جائزة بعدها، كما تم تدريب الشمبانزي كي يضغط الرقم الموافق لعدد أصابع الموز أمامه. إذن فالإنسان البدائي لم يكن مميّزا هنا، فهو كباقي الحيوانات كانت لديه هذه الغريزة فاستطاع أن يميز أن ثمرة واحدة هي أقل من ثمرتين، وثمرتين أقل من مجموعة ثمار. جاءت النقلة التطورية للإنسان فوق باقي الحيوانات عندما بدأ يعد باستخدام «عصا التعداد»، وهي عبارة عن عصا عظمية تُستخرج من عظام الحيوانات ويتم استخدامها للعد عن طريق صنع شقوق فوقها. هذه الطريقة ساعدت إنسان ما قبل التاريخ على الوصول إلى أعداد أكبر بكثير من إمكانية الحيوانات الأخرى. إحدى «عصيّ التعداد» هذه التي تم اكتشافها سنة 1960 فيما يعرف الآن بالكونغو هي عظمة إشانجو Ishango Bone، ويعود تاريخها إلى حوالي عشرين ألف سنة قبل الميلاد. هذه العظمة عبارة عن عظمة قرد بابون مشقوق عليها علامات مستقيمة تمثل وحدات للعد. لا نملك سوى التكهن عن السبب الذي دفع إنسان ما قبل التاريخ إلى أن يعد، فربما كان بحاجة إلى عد الصيد الذي قام به، أو أطفاله،

أو المواسم، ولكن المؤكد أن كل شق في العظمة كان يمثل «واحدا» من الأشياء التي كان يعدها وأن المزيد من هذه الأشياء يمثل المزيد من الشقوق. تم لاحقا اكتشاف المزيد من «عصي التعداد» ويعود بعضها إلى تاريخ يسبق تاريخ عظمة إشانجو، فقد اكتشفت إحداها في سوازيلاند يعود تاريخها إلى حوالي سبع وثلاثين ألف سنة قبل الميلاد، وأخرى في تشيكوسلوفاكيا يعود تاريخها إلى حوالي اثنين وثلاثين ألف سنة قبل الميلاد، ولكن ظلت عظمة إشانجو مميزة لأن البعض استنتج من الشقوق عليها أنها تحمل مفاهيم رياضية أكثر تعقيدا من مجرد العد البسيط، مثل مفهومي النصف والضعف، بالإضافة إلى مفهوم «الأرقام الأولية»، هذه الأرقام التي لا تقبل القسمة إلا على نفسها والرقم «واحد». تعتبر هذه الأرقام هي البنية الأساسية لجميع الأرقام الأخري فأي رقم يمكن التعبير عنه بطريقة أو بأخرى باستخدام الأرقام الأولية، ونستطيع إيجاد هذا المفهوم في عظمة إشانجو إذا نظرنا إلى العمود الأيسر وسط الثلاثة أعمدة المنقوشة فوق العظمة، فهناك نجد عدد الشقوق يشير إلى أربعة أرقام: 11 و13 و17 و19 وهي الأرقام الأولية الواقعة بين 10 و20. المدهش هنا أن معرفة الأرقام الأولية لا يمكن أن تتأتى بدون معرفة ولو أولية بعمليات الضرب والقسمة والتي تعتبر عمليات معقدة للغاية بالنسبة للفهم البسيط للأرقام في هذا الوقت ولهذا السبب يجد الكثير من العلماء أن وجود مثل هذه الأرقام سويا هو فقط من باب الصدفة.

أول من حرروا «الواحد» وأعطوه استقلاله عن عصا التعداد كانوا السومريين، مهد حضارة ما بين النهرين، فقد استخدموا مخروطا طينيا صغيرا ليرمزوا إلى «الواحد» وبهذا أصبح لديهم وسيلة فعالة للعد. كانت هذه خطوة عملاقة في طريق الحضارة الإنسانية، فهذه المخروطات تعتبر أول علامة على بدء تفكير الإنسان في الأرقام بصورة رمزية. السومريون لم يكتفوا بهذا، بل إنهم استطاعوا عن طريق هذه المخروطات أن يجروا أولى العمليات الرياضية في التاريخ كالجمع والطرح. السؤال الذي يطرح نفسه هنا هو لماذا؟ لماذا شعر السومريون بالحاجة لاختراع الرياضيات؟ فنحن نعرف أن بقاء الإنسان على قيد الحياة لا يحتاج إلى الرياضيات، والدليل نجده إذا نظرنا إلى القبائل البدائية التي تعيش في الأمازون وأستراليا البعيدين عن الحضارة، فهؤلاء لا يدركون كنه الأرقام فضلا عن الرياضيات. بعضهم حتى لا توجد في لغتهم ما يمثل العدد سوى «واحد» و«عدة». إذن

ما الشيء المختلف الذي مر به السومريون ولم يمر به هؤلاء وجعل الرياضيات ضرورية لهم؟ الإجابة هي: حياة المدينة.. فنشأة المدينة الأولى جمعت العديد من البشر لأول مرة في مكان واحد، وبات تنظيم التعاملات بينهم هاما بالإضافة إلى حساب الثروة وتحصيل الضرائب.

نرى مما سبق كيف ساهم الرقم «واحد» مساهمة ضخمة في إرساء قواعد الحضارة بأن نظم الحياة في المدينة، ولكن هناك مساهمة أخرى حتى أكثر أهمية من هذا، فقد كان «الواحد» الدافع الأساسي خلف اختراع الكتابة. القصة بدأت من سومر كذلك، فقد كان السومريون يحتفظون بمخروطاتهم النفيسة في وعاء طيني صغير ويغلقونه ولكن قابلتهم مشكلة أنهم بعد إغلاقه قد ينسون عدد المخروطات بداخله. من هنا تفتق ذهنهم عن فكرة نقش علامات على الوعاء من الخارج يمثل عدد المخروطات، ثم أدركوا أخيرا أنهم ليسوا بحاجة إلى الوعاء على الإطلاق وأن كل ما عليهم فعله هو النقش على الطين ليس إلا، وهكذا أُخترعت الكتابة المسمارية.

جاء دور المصريين القدماء لوضع لمستهم الخاصة على «الواحد» الذي استفادوا منه بطريقة لم يحلم بها السومريون قط. أعتقد أنه من الآمن أن نقر بأن المصريين القدماء كانوا بنائين لا يشق لهم غبار وأمام عظمة ما بنوه ودقته كان يجب أن نتساءل عن سر هذه الدقة التي تحققت دون اللجوء إلى الوسائل الحديثة المستخدمة الآن في البناء. السر هو صديقنا، الرقم «واحد»، فالمصريون القدماء استخدموا «الواحد» كوحدة قياس هندسية لأول مرة في التاريخ. تم هذا عن طريق تصنيع عصا طولها يساوي المسافة من المرفق إلى أطراف الأصابع ثم زيادة عرض كف مفرود، وأصبحت هذه العصا هي وحدة القياس الرسمية المستخدمة في البناء وأطلق على وحدة القياس هذه، الذراع. استخدام هذه العصا التي مثلت «الواحد» الهندسي، كان له عظيم الأثر على البناء المصري القديم، ودليل تقدير المصريين القدماء لهذا الاكتشاف هو أنهم سموا هذه العصا «الذراع الملكية» وكانت تعتبر من أهم الأسرار التي يُحتفظ بها تحت حراسة المعابد ولا توزع إلا بحساب.

تحول الرقم «واحد» من مجرد كونه عددا أو وحدة قياس إلى كونه حقيقة الكون ذاته

على يد رياضي وفيلسـوف سـمعنا جميعا اسـمه في المدارس، فيثاغـورس Pythagoras[1]، هذا الرجل الذي يؤمن الكثيرون أنه أول رياضي حقيقي في التاريخ. كان فيثاغورس وأتباعه من بعده مهووسين بالأرقام الصحيحة أي واحد، واثنين، وثلاثة، وهكذا حتى أنهم عبدوها. جاء هـذا نتيجة ملاحظاته للعالم من حولـه التي أقنعته أن الأرقام هي الحقيقة ذاتها، وأدت به إلى شـعار «الكل عبارة عن رقم»، وبما أن أي رقم صحيح هو عبارة عن وحدات من «الواحد»، إذن فلابد أن «الواحد» هو المادة الأساسية التي تكون منها كل شيء آخر.

لسـوء حظ «الواحد» ولحسن حظ البشرية، ابتكر الهنود نظام الأرقام الذي نستخدمه اليـوم والمكون من تسـعة أرقام، واحد إلى تسـعة، وأضافوا إليهم «الصفـر»، وفجأة لم يعد «الواحـد» هو نفس الرقم الهام الذي هو أسـاس كل شيء آخر، بـل أصبح جزءا في فريق لا يملك أحدهم فضلا علي الآخر. لكن سرعان ما أدرك «الواحد» المسكين أن القوة الحقيقية تقع في المجموعة وليس الفرد، فهو مع رفاقه أصبح بإمكانهم تمثيل عدد لانهائي من الأرقام بسهولة منقطعـة النظير مما مكّـن الهنود من إجراء حسـابات تتطلب أرقاما فلكية بمنتهى البسـاطة. سـاعد هذا على تطور الرياضيات والفلك لدى الهنود الذين توصلوا لحقيقة أن الأرض تدور حول نفسـها وأنها تدور حول الشـمس قبل أن يتوصل كوبرنيكوس Copernicus[2] إلى هذا بحـوالى ألف عام. هم أيضا تمكنوا من حسـاب قطر الكرة الأرضيـة بدقة بالغة. كل هذا لم يكن ليتحقق دون حدوث التعاون بين «الواحد» ورفاقه التسعة.

ظـل «الواحـد» راضيا بوضعه الجديد سـعيدا بالإنجازات التي حققها مـع رفاقه، فبعد نقل الأرقام والرياضيات الهندية إلى العرب عن طريق علمائهم كالبيروني[3] والخوارزمي[4]،

(1) (570 - 495 ق.م) ريـاضي وفيلسـوف يوناني له عظيم الأثر على الرياضيات والفلسـفة اليونانية والعالمية وارتبط اسمه بواحدة من أشهر النظريات الرياضية على الإطلاق وهي نظرية فيثاغورس.

(2) (1473 - 1543م) ولـد نيكـولاس كوبرنيكـوس في مملكـة بولندا وهـو أحد أهم علامـات عصر النهضة الأوروبي. يعزى إليه أنه خالف نموذج مركزية الأرض للكون واستبدله بنموذج مركزية الشمس.

(3) (973 - 1048م) أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني ولد في خوارزم وله العديد من المؤلفات في الرياضيات والفلك والجغرافيا مما جعله أحد أهم علماء الإسلام الموسوعيين.

(4) (781 - 847 م) أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي هو من خوارزم كذلك وهو أيضا من أشهر العلماء المسلمين واشتهر بأنه واضع أسس علم الجبر.

استخدمها هذا الأخير ليؤسس علم الجبر، ثم بعد أن امتدت يد الأوروبيين لتخطف هذه الأرقام من العرب، سبح هؤلاء في بحور من الاكتشافات المزلزلة، كاكتشاف دوران الأرض حول الشمس أخيرا، وتطوير علم الفيزياء الحديثة، وقوانين الحركة، وغيرها الكثير.

صاحب الفضل في إعادة المكانة الخاصة «للواحد» كان هو الرياضي الألماني جوتفريد ليبنيز Gottfried Leibniz[1]، الذي أسس حساب التفاضل والتكامل إلى جانب نيوتن[2]. لم يكن ليبنيز رياضيا فحسب بل يمكننا اعتباره فيلسوفا كذلك، فقد كانت له فلسفة خاصة فيما يخص اللغة. رأي ليبنيز في اللغة يتلخص في أنه وجدها معيبة ومليئة بالخطأ البشري الذي قد يؤثر سلبا على المنطق ويؤدي إلى كوارث، وكان مقتنعا أن لغة الرياضيات وحدها هي القادرة على تجاوز هذا النوع من الأخطاء، فلم إذن لا نستخدم هذه اللغة كلغة موحدة للتعبير عن كل شيء!! كانت فكرة سابقة لعصرها بكثير لذا قوبلت من الوسط العلمي باللامبالاة مما دعا ليبنيز للتخلي عنها.. حتى سقط في يده كتاب آي شانج I Chang. يحتوي هذا الكتاب الصيني العتيق على تاريخ أكثر من ألفين سنة من الحكم والمواعظ في مواقف شتى. وجد ليبنيز في هذا الكتاب ما يتوافق مع نظريته أن العالم يمكن تبسيطه، فالكتاب يشرح كيف أن تطور العالم يأتي عن طريق تصادم ثنائيات متضادة، كالنهار والليل، أو كالذكر والأنثى، فمن المؤكد أيضا أن اللغة والمنطق يمكن تبسيطهما إلى مثل هذه الحالة الثنائية. منطلقا من هذه القناعة، عمل ليبنيز على تطوير مفهوم «النظام الثنائي Binary System»، هذا النظام المكون من رقمين فقط: «واحد» و«صفر»، وبهذا هو يختلف كلية عن النظام العشري المعتمد والمكون من عشرة أرقام (صفر إلى تسعة). من هذين الرقمين وجد ليبنيز أن بإمكانه الحصول على أي رقم آخر.. لمحاولة فهم كيف أمكنه هذا فلنأخذ مثالا بسيطا،

(1) (1646 - 1716م) رياضي وفيلسوف ألماني له العديد من المساهمات في المجالين أشهرها هي اختراع حساب التفاضل والتكامل. إسحق نيوتن الذي توصل إلى التفاضل والتكامل كذلك اتهم ليبنيز بسرقة اكتشافه وظلت هذه التهمة معلقة بعنق ليبنيز ولكن الرياضيين اللاحقين برأوه منها نظرا للاختلافات الواضحة بين نسخته ونسخة نيوتن.

(2)هو إسحق نيوتن (1642 - 1727م) ربما يكون أشهر فيزيائي ورياضي على الإطلاق ومن رواد الثورة العلمية في أوروبا. من أبرز المناصب التي احتلها هو رئاسة الجمعية الملكية البريطانية ومساهماته لا حصر لها من أهمها اختراع حساب التفاضل والتكامل مع ليبنيز ووضعه للمعادلات التي تصف الحركة والجاذبية.

هـب أننا نريد أن نحصل على الرقم 12 بالنظام العشري أولا وأن لدينا وعاءين، الوعاء الأول يمثـل الوحدات والثـاني يمثل العشرات، فكم عدد الكرات إذن التي يجب وضعها في كل وعاء للحصـول على 12؟ الإجابة هي كرتـين في وعاء الوحدات للحصول عـلى الرقم اثنين و كرة واحـدة في وعاء العشرات للحصول على عشرة واحـدة، إذا جمعنا هذين الرقمين نحصل على 12. ماذا الآن عن النظام الثنائي؟ سوف نتبع نفس الفكرة ولكن في النظام الثنائي سوف نحتاج إلى وعاءيـن آخرين ليصبح عدد الأوعية 4، وبدلا من أن تمثل الأوعية الوحدات والعشرات، سوف يمثل كل وعاء الرقم 2 مرفوعا إلى ترتيب الوعاء من اليمين إلى اليسار بدءا من الصفر، إذن فالأوعية الأربعة سوف تمثل بالترتيب 20 أي 1، ثم $2^1$ أي 2، ثم $2^2$ أي 4، ثم $2^3$ أي 8. الآن حان دور وضع الكرات وللحصول على 12 سـوف نضع: لا شيء في الوعاءين الأول والثاني، ثـم كرة واحـدة في الثالث وواحـدة في الرابـع أي أن عدد الكرات بترتيب الأوعية سـوف يكون 1100، وإن جمعنا القيمة الناتجة نجد أنها:

$$8 + 4 + 0 + 0 = 12$$

إذا بنينـا على هذا المنطق سـوف نجـد أن ليبنيز كان محقـا وأن بإمكاننا الحصول على أي رقم كان باسـتخدام هذا النظام المبسـط. لم يكتـف لينيز بهذه الخطوة الجريئـة بل إنه خطا خطـوة عملاقة أخرى بالنسـبة لعصره بـأن بات مقتنعا أن هذه اللغـة الجديدة فعالة جدا لأن يتـم تطبيقها في بناء آلة تقوم بالحسـاب. بالفعـل حاول أن يبني هذه الآلـة ونجح جزئيا، فقد بـنى آلة حاسـبة معتمدة على النظام العـشري، أما الآلة المعتمدة على النظـام الثنائي فقد كانت تحديـا حقيقيـا لم ينجح ليبنيز في اجتيازه أبدا. من الجدير بالذكر هنـا أن ليبنيز في آخر أيامه وبسـبب ازدياد هوسـه بالنظام الثنائي الذي ابتكره، أضفى على هذا النظام ملمسا شبه صوفي، فقـد توصل إلى نتيجة أن هذا النظام يمثل الخلق، فهو يتكون من «الواحد» الذي يمثل «وجود الـشيء» و«الصفر» الذي يمثل «عدم وجوده»، لذا ففـي نظره «الواحد» هو الله و«الصفر» هو العدم، ونتاج التفاعل بين هذين هو عملية الخلق ذاتها.

ربمـا كان ليبنيـز مبالغا بعض الـشيء في ربط النظـام الثنائي بالخلق، ولكنـه بالتأكيد لم يبالـغ في تقديـر إمكانيات هذا النظام. الدليل نجده حولنا اليـوم، فقد كان هذا النظام حيويا

لتطويـر فكرة الكمبيوتر لبسـاطته الشـديدة ولسـهولة التعامل به، وكما تنبـأ ليبنيز، فنحن أصبحنا نسـتخدم النظام الثنائي ليس في الحسابات فقط، بل أيضا في تمثيل الأبجديات والألوان والأصـوات، أي أنهـا أصبحت بالفعل لغة موحـدة لكل شيء حولنا. هل معـنى ذلك أن باقي الأرقام واللغات المختلفة في طريقها للإندثار؟ ظواهر كثيرة تشير إلى هذا الاحتمال الذي إن حدث بالفعل، فسوف يكون إعلانا لانتصار «الواحد» الساحق، الذي ربما تنتهي به الحضارة الإنسانية، كما بدأت به.

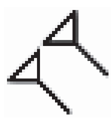
# صفر 0

«صفـر».. قـد يبدو هذا الرقم غير ذي أهمية بالنسـبة لمعظـم الناس فهو الرقـم الـذي قيمتـه: لا شيء. كيـف إذن نتحـدث عن هذا الرقم وسـط قائمتنا؟ بل لماذا نعتبره رقما من الأسـاس؟.. الحقيقة أن هذا الرقم من أهم الاكتشـافات التي تفتق عنها ذهن البشرية. قد يدهش القارئ هذا القول ولكـن ربما تتبدد تلك الدهشـة حين نعلم أن بـدون الصفر لم نكن لنسـتطيع أن نعد الأرقام الكبـيرة بطريقـة فعالة ولم تكن لتتطـور علوم التجـارة أو الفيزياء أو الفلـك أو الكيمياء. الدهشـة الحقيقيـة إذن هي التأخر النسـبي لاكتشـاف الرقم «صفر» رغـم أهميته القصوي. فالحضـارات القديمة العريقة كالحضارة الفرعونية أو اليونانية بكل التطور الذي وصلوا إليه في مجال الرياضيات والعدّ، لم يتوصلوا إلى هذا الرقم.

لمعرفـة قصة هذا الرقم العجيب علينا أن نعود بالزمـن إلى الوراء قليلا، لا.. بل كثيرا.. إلى عهـد الحضـارة البابلية في بلاد ما بين النهرين والتي ربما كانت الأقرب وسـط الحضارات القديمة لاكتشاف «الصفر». بحلول الألفية الثانية قبل الميلاد كانت الحضارة البابلية قد بلغت تطورا هائلا في نظام الحسـابات وأصبحت الرياضيات البابليـة معقدة للغاية. النظام العددي الذي اعتمد عليه البابليون في تطوير رياضياتهم كان النظام الستيني (أي الأعداد التي تستخدم الرقـم 60 كقاعدة لها بـدلا من القاعدة العشرية الأكثر انتشـارا حاليا). كي ندرك مدى تأثير الرياضيـات البابليـة على العالم أجمع وإلى يومنا هذا يكفي أن نذكر أننا مازلنا نسـتخدم هذا النظام في تحديد الوقت، فالساعة لاتزال مكونة من 60 دقيقة والدقيقة من 60 ثانية.

رغم تطور البابليين المذهل في الرياضيات إلا أنهم لم يتوصلوا لاكتشاف الرقم «صفر»، فقـط عندمـا يريدون تدوين القيمة التـي يمثلها الصفر وهي «اللاشيء» لإجراء حسـاباتهم، كانـوا يتركون مسـاحة خاليـة. للقارئ أن يتخيل كم المشـاكل التي يمكـن أن تنتج عن هذا

فأنت إن أردت على سبيل المثال كتابة الرقم 101 فكل الاختلاف في الكتابة بينه وبين الرقم 11 هو مساحة خالية بين الرقمين. الخطأ في تقدير إن كانت هناك مساحة خالية أم لا واردة جدا في تلك الحالة، بل الأدهى أنك إن أردت أن تفرق بين 101 و 1001 فعليك أن تفرق بين المساحة الخالية الواحدة والمساحتين الخاليتين. لتدارك هذه المشكلة استخدم البابليون رمزا يمثل تلك المساحات الخالية (شكل 1) ولهذا يؤمن البعض أن الحضارة البابلية هي المكتشف الأول للرقم «صفر» ولكن يحتج البعض الآخر أن هذا الرمز الذي استخدمه البابليون إنما هو يمثل لديهم «الخلو» من الأرقام فضلا عن أن يكون رقما مستقلا بذاته ولهذا لا يعدونه اكتشافا «للصفر» كرقم.



**شكل (1)**

**رمز «الصفر» لدى البابليين**

من الجدير بالذكر أن حضارة المايا في أمريكا الوسطى في القرن الأول قبل الميلاد قد طوّرت هي الأخرى وبشكل مستقل عن باقي الحضارات رمزا للرقم «صفر» يشبه الصدفة (شكل 2)، إلا أنهم أخذوا خطوة أبعد من البابليين بأنهم ضمّنوا الصفر ضمن أعدادهم فلم يكن مجرد مساحة خالية بل كان أول الأعداد. نرى دليل هذا في ترقيم الأيام لدى المايا والتي تبدأ باليوم «صفر» ثم اليوم «واحد» وهكذا. رغم هذه الخطوة المتطورة إلا أن المايا مثل البابليين لم يعاملوا الصفر كرقم يمكن أن يحكم بنفس القواعد التي تحكم باقي الأرقام من جمع وطرح إلخ.. على أي حال فتأثير استخدام المايا للصفر ضمن الأعداد كان محدودا للغاية مقتصرا على السكان المحليين نظرا لعزلة حضارة المايا الجغرافية في أمريكا الوسطى.

**شكل (2)**

**رمز «الصفر» لدى المايا**

ننتقل الآن إلى مرحلة مؤسفة بالنسبة للـ«صفر» وهي مرحلة الحضارة اليونانية ووريثتها الحضارة الرومانية فاليونان ومن بعدهم الرومان عاملوا الـ«صفر» بجفاء شديد وكرهوه للغاية بل يمكن أن نقول أيضا أنهم كانوا يخافونه. من الصعب تصور كيف يمكن أن يخاف المرء من رقم ما في عصرنا الحالي ولكن إن حاولنا التفكير بعقلية اليوناني القديم الذي ربط لأسباب مفهومة الـ«صفر» بالعدم ربما تصبح هذه الفكرة أكثر وضوحا. فاليونانيون كانوا يؤمنون بفكرة أن قبل الكون المنتظم كان هناك عدم وفوضى، إذن فربط الـ«صفر» بالعدم أعاد لذهن اليوناني خوفا بدائيا من الفوضى ولهذا السبب كره الرقم ذاته. سواء كان هذا السبب مقنعا أم لا فنتيجته كانت أن اليونانيين والرومان لم يدرجوا الرقم «صفر» أبدا ضمن نظامهم العددي الذي أخذوه عن الفراعنة رغم أنهم على الأرجح كانوا على معرفة بالصفر عن طريق البابليين مما أدى إلى استخدامهم نظاما عدديا بالغ السوء وقليل الفاعلية. هذا النظام كان وبدون مبالغة نكبة على التطور الحضاري الإنساني فنظرا للأثر البالغ للحضارتين اليونانية والرومانية على ما تبعهما فقد تبنت الحضارات التالية هذا النظام بكل عيوبه مما أعاق كثيرا تطور الرياضيات. مثل بسيط لمشكلة عانينا منها في عصرنا الحديث كنتيجة غير مباشرة لهذا الكره هو أنه عند مطلع الألفية الثانية دار النقاش الحاد عن أي يوم يعتبر بداية القرن الجديد، هل هو الأول من يناير 2000 أم 2001؟ هذا النقاش الذي لم يكن ليمثل مشكلة لدينا إذا كنا نبدأ العد من الرقم «صفر» بدلا من الرقم 1 الذي استخدمه اليونانيون والرومان كبداية العد.

لاقى الـ«صفر» حظا أوفر بكثير في الهند حيث نجد أقدم سجل لاستخدام الرمز الدائري للإشارة إلي الـ«صفر»، هذا الرمز الذي نتعامل به اليوم، فعلي أحد جدران معبد شاتوربوج Chaturbhuj(1) بجواليور Gwalior جنوب دلهي كتابة تعود إلى القرن التاسع وتحتوي على رقمي 270 و50 مكتوبين باستخدام رمز الـ«صفر» الذي كان عبارة عن دائرة صغيرة مرتفعة قليلا «°». لا نعرف لم اختار الرياضيون الهنود هذا الرمز تحديدا ولكن ربما كان هذا نتيجة أنهم كانوا يجرون حساباتهم باستخدام الحصى فوق الرمال فوجدوا أنهم

(1) معبد هندوسي تم بناؤه في القرن السادس عشر في قرية أورشا Orchha بمدينة جواليور الهندية والاسم شاتوربوج يعني «هو من لديه أربعة أذرع» للرمز إلى راما، أحد تجليات الإله فيشنا.

حـين يزيلون إحدى الحصـوات لإلغاء قيمتها يرون أثرا في الرمال يشـبه الدائرة المفرغة. ما نعرفه مؤكدا أن أحد أهم الرياضيين الهنود الذين ساهموا مساهمة كبيرة في تطوير «الصفر» وإضفـاء صفة الرقم عليه كان هو براماجوبتـا Brahmagupta[1] حيث وضع للصفر قواعدا تحدد كيفية التعامل معه رياضيا مثل القاعدة التي تقول أن إضافة صفر إلى أي رقم تعطي هذا الرقم وطرح صفر من أي رقم تعطي أيضا هذا الرقم أما حاصل ضرب رقم ما وصفر فيعطي صفـر. كانت هذه خطوة عملاقة في تطور الـ«صفر» والرياضيات عموما، هذا بالإضافة إلى أنها أعطت للصفر المكانة الحقيقية التي يسـتحقها وسـط باقي الأرقام. العجيب أن السـبب الـذي دفع باليونانيين والرومان لكره الـ«صفر» والخوف منه وهو أنه يمثل العدم الأولي قبل ميلاد الكون، كان هو نفسه السبب الذي دفع بالهنود لتبجيل هذا الرقم، فثقافة الهنود الدينية كانـت تفتح ذراعيها لفلسـفة العدم وتدعو للتأمل فيه لهذا أطلقوا اسـم شـونيا shunya علي الرقم «صفر»، هذه الكلمة التي تمثل المصطلح الفلسفي للعدم لديهم.

ثـم جاء دور العـرب الهام في تطوير الـ«صفـر» فقد نقله العرب ومنهـم العالم الكبير فارسي الأصل ومكتشـف علم الجـبر، الخوارزمي، الذي ألف كتابا اسـمه: «الخوارزمي عن الأرقـام الهندية» عام 825 م تحدث فيه عن الرياضيـات الهندية والرقم «صفر»، كما أعطى هذا الرقم الجديد اسم «صفر» والتي تعني «خالي» بالعربية.

رغم أن الـ«صفر» كان مشهورا لدى العرب منذ القرن التاسع الميلادي على أسوأ تقدير، فأوروبا لم تبدأ استخدامه على مستوى واسع حتى أتى ليوناردو بوناتشي الشهير بـ«فيبوناتشي Fibonacci[2]». هـذا الريـاضي الإيطالي عرف عن طريق العرب الأرقام الهندية واسـتخدام الرقـم «صفـر» عندمـا عاش فـترة في شـمال أفريقيا مع أبيـه. نقـل معرفته هـذه إلى إيطاليا

(1) (598 - 668 م) رياضي وفلكي هندي مُختلف حول مكان ميلاده ولكنه عاش في قرية بينمال Bhinmal الحالية في مقاطعة راجاسـتان Rajasthan. أهم مؤلفاته هو كتاب براماسفوتاسـيدانتا Brahmasphutasiddhanta الذي تم نقله إلى بغداد في عهد الخليفة المنصور وكان أحد أهم العناصر في ازدهار الحضارة الإسلامية.

(2) (1175 - 1250 م) رياضي إيطالي ولد لأب يعمل بالجمارك وسـافر معه إلى شمال أفريقيا حيث ألهمه تطور الرياضيات هناك إلى كتابة كتابه الشـهير «كتاب العمليات الحسـابية The Book of Calculation» الذي روج فيه لاستخدام الأرقام الهندية - العربية.

ومنها إلى أوروبا ولم يكتف بهذا فحسب، بل ساهم أيضا في تطوير الـ«صفر» بإدماجه في المعادلات والحسابات الرياضية الأكثر تعقيدا. وجد هذا الاكتشاف قبولا فوريا من قبل التجار الإيطاليين الذين وجدوا في الـ«صفر» وسيلة فعالة للغاية لإجراء حساباتهم. من المثير أن نذكر هنا أن الحكومة الإيطالية في تلك الفترة كانت دائمة القلق من أي شيء ذي أصل عربي نظرا لكون هذه الفترة هي فترة توهج للحروب الصليبية[1] بالإضافة إلى أن الإيطاليين لم يثقوا في محولو العملة الذين يستخدمون الأرقام الجديدة لإجراء التحويلات، فسهولة استخدام تلك الأرقام جعلت عملية النصب أسهل بكثير من السابق. الـ«صفر» بخاصة سبّب لهم مشاكل عديدة، فقد وجدوه رقما محيرا يصعب التعامل به، لهذا منعت الحكومة الإيطالية قانونا التعامل مع الرقم «صفر».. ولكن الأوان كان قد فات وكانت شعبية الـ«صفر» وسط التجار قد بلغت حدا لا يمكن الرجوع بعده إلى الأساليب القديمة، نتيجة هذا كانت أنهم استمروا في استخدامه سرا بطريقة غير قانونية وأصبح اسمه العربي «صفر» مرادفا للسرية ومن هنا اشتقت كلمة «سايفر cipher» أي شفرة سرية والتي هي تحريف لكلمة «صفر».

بعد أن اطمأنت أوروبا إلى أن الرقم «صفر» لا خطورة منه على الإطلاق، استقبلته أخيرا بعد طول جفاء، بل واستفادت منه أيما استفادة وبنت عليه حضارتها العلمية المذهلة، فقد استخدمه نيوتن لتطوير نظرية الجاذبية كما استخدمه هو وليبنيز لإنشاء حساب التفاضل والتكامل، واستخدمه ماكسويل[2] لتطوير معادلاته عن الكهرومغناطيسية، ثم أتى أينشتاين[3] واستخدمه في نظريته النسبية. أمام هذه الاكتشافات العملاقة وغيرها الكثير

(1) الحروب الصليبية هي اسم يطلق على سلسلة من الحملات شنها حكام أوروبا على العالم الإسلامي في الفترة بين 1095 إلى 1291 م وقد سميت بهذا الاسم نظرا للطابع الديني للحملات التي دعت إليها الكنيسة بهدف تحرير الأراضي المقدسة من أيدي المسلمين.

(2) جيمس كليرك ماكسويل James Clerk Maxwell (1831 - 1879م) أحد أهم الفيزيائيين على الإطلاق وأشهر اكتشافاته هو وضعه للمعادلات التي تصف العلاقة بين الطاقتين الكهربائية والمغناطيسية. يقول عنه أينشتاين أن اكتشافاته هي الأعظم في الفيزياء منذ نيوتن.

(3) ألبرت أينشتاين (1879 - 1955م) يصنفه الفيزيائيين على أنه ثاني أهم عالم في تاريخ الفيزياء بعد نيوتن. ولد في سويسرا حيث عمل في مكتب تسجيل براءة الاختراعات قبل أن يذهل العالم بسلسة أوراق بحثية عام 1905 إحداها في التأثير الكهروضوئي التي حصل بسببها على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1921،=

التي اعتمدت على اكتشاف الـ«صفر» لا نملك إلا أن نتساءل عن الطريق الذي كان سيسلكه التقدم العلمي البشري بدون هذا الرقم العجيب.

إلى جانب الاكتشـافات العلمية التي اعتمدت على الـ«صفر»، مارس هذا الرقم سـحره على عقول الفلاسـفة علي مر العصور وقد رأينا مثالا على ذلك عندما تم الربط بين الـ«صفر» والعدم في الحضارات القديمة، هذا الربط الذي مازالت جذوته مشـتعلة إلي الآن. الحقيقة أن الفلاسـفة كان عندهم كل الحق في حيرتهم من أمر هذا الرقم، فنحن إذا فكرنا في الـ«صفر» بتمعن نجد أنه وضع كوسـيلة لقياس «الـلاشيء»، ولكن في هذا مفارقة وهي أن «اللاشيء» بتعريفـه لا يمكن أن يقاس فهـو فقط يمثل عدم وجود «الشيء». فلنلـق نظرة على هذا المثال لتقريب الفكرة: تخيل أننا نريد أن نصف مدرجا خاليا من الطلبة فأي المصطلحين أنسب: أن نقول: «المدرج لا يوجد به طلبة» أم أن نقول: «المدرج به صفر من الطلبة»؟ المصطلح الأول يبدو أكثر منطقية وهذا يطرح تسـاؤلا: «هل الصفر رقم بالفعل؟ وإن كان رقما فلم لا يبدو منطقيا أن نقول: «يوجد صفر من الطلبة» كما هو منطقي أن نقول «يوجد طالب واحد» أو «اثنـين من الطلبة» وهكذا؟.. بناء عـلى هذا المنطق فإن الـ«صفر» يكون «نفيا» لوجود رقم فضلا عن أن يكون هو نفسه رقما.

نـرى دليلا آخر على أن الـ«صفر» ليس رقـما اعتياديا، وهذه المرة من الناحية الرياضية البحتـة، عندمـا نحاول أن نحسـب نتيجة قسـمة أي رقم على صفر. لـو كان الـ«صفر» رقما عاديا لأصبح ممكنا أن نقوم بهذه العملية بسـهولة كما نفعل مع باقي الأرقام ولكن المشـكلة أننا لا نسـتطيع. هب أن لدينا برتقالة نريد أن نوزعها على عشرة أشـخاص.. علام يحصل كل شـخص إذن؟.. بالفعل.. كل شخص سوف يحصل على عُشر برتقالة. ماذا إن أردنا أن نوزعها على خمسـة أشـخاص؟.. الخُمس لكل شـخص هو الحل. إذن فتقسـيم البرتقالة على عدد معين من الأشـخاص هـو بالتأكيد ممكن ولكـن فلنحـاول الآن توزيع البرتقالة عـلى «صفر» من الأشـخاص، ماذا تكون الإجابة في هذه الحالة؟.. ببساطة لا توجد إجابة، فكيف نوزع شيئا

= وبالطبع ورقته عن نظريته الأشـهر وهي النسـبية الخاصة التي ألحق بها بعد عشر سنوات نظرية النسبية العامة.

ما على «لاشيء»؟ قد يصيبك الصداع وأنت تحاول أن استيعاب هذه الفكرة ولكن لا تشعر بالإحباط، فأفضل العقول البشرية عبر التاريخ وجدت نفس الصعوبة. براماجوبتا على سبيل المثال حاول أن يجد حلا لهذه القسمة بلا نجاح كما أنه توصل خطأ إلى أن قسمة صفر على صفر تساوي صفر. خطأ هذه الفكرة يأتي من تناقضها مع القاعدة المعروفة التي تقول أن قسمة أي رقم على نفسه تساوي واحد. أدرك الخوارزمي هذا ولهذا لم يستسغ هذه الفكرة أبدا ولكنه في نفس الوقت اعترف بفشله في إيجاد حل رياضي لمشكلة القسمة على صفر. تصدى رياضي هندي عظيم آخر هو باسكارا الثاني Bhaskara II[1] لهذه المشكلة واستنتج أن قسمة أي رقم على صفر تساوي لانهاية infinity. منطقه بني على ملاحظته أن الرقم إذا قسم على رقم أصغر فأصغر حتى يقترب جدا من الرقم «صفر» فإن الرقم الناتج يصبح أكبر فأكبر حتى يقترب من اللانهاية. مثال على ذلك:

$1/0.1 = 10$

$1/0.01 = 100$

$1/0.00001 = 100000$

وهكذا حتى إذا أصبح القاسم «صفر» يصير الحل: لانهاية.

هذه فكرة عبقرية بالفعل وقد ربطت بين الصفر واللانهاية التي تعتبر لغزا آخر لا يقل أهمية عن لغز الـ«صفر». المشكلة أن هذا الحل قد يصلح في حالات معينة ولكنه ليس صحيحا تماما، فهناك حالة أخرى تنتهي إلى نتيجة مختلفة وهي إن قسمنا على أرقام سالبة حيث تقترب هذه الأرقام هي الأخرى من الصفر ولكن صعودا وليس هبوطا كمثال:

$1/-0.1 = -10$

$1/-0.01 = -100$

$1/-0.00001 = -100000$

(1) (1114 - 1185م) رياضي وفلكي هندي ولد في مقاطعة بيجابور Bijapur في ولاية كارناتاكا Karnataka الهندية وأهم كتبه هو سيدانتا شيروماني Siddhanta Shiromani وقد سبق نيوتن وليبنيز بحوالي ستمائة عام إلى اكتشاف مبادئ التفاضل والتكامل في التطبيقات الفلكية.

وفي هــذه الحالة عندما يصبح القاسم الـ«صفر» يصير الحل لانهاية سـالبة وليس لانهاية موجبة كما في الحل السـابق. لذا فالمعترف به في زمننا المعاصر هو أن حل قسـمة أي رقم على «صفر» هو «غير معرف»..

الخلاصة أننا مازلنا نتحسـس طريقنا في محاولة فهم الـ«صفر» سـواء فلسفيا أو رياضيا، ورغم هذا فهو لعب دورا عاتيا في مسـار الحضارة الإنسـانية. تسـاءل الكثيرون عن سر هذا الدور لرقم قيمته «لا شيء». أحد هؤلاء هو تشارلز سايف Charles Seife[1]، الذي يقول في كتابه بعنوان «الصفر: السيرة الذاتية لفكرة خطرة»:

«الصفر يسـتمد قوته من كونه توأم اللانهاية، فهاتان الفكرتان متساويتان ومتضادتان، الـين واليانج، كما أنهما على نفس الدرجة من الغموض المقلق فأكبر الأسـئلة في العلم والدين تدور حول الفناء والخلود، العدم واللامحدود، الصفر واللانهاية. لهذا فإن المعارك التي دارت حول الـ«صفر» كانت هي المعارك التي هزت أساسات الفلسفة والعلم والرياضيات والدين، فخلف كل ثورة يقبع الـ«صفر».. وتقبع اللانهاية..».

(1) كاتـب وصحفـي أمريـكي وبروفيسـور بجامعة نيويـورك. حصل عـلى درجاته العلميـة في الرياضيات والصحافـة مـن أعرق الجامعات الأمريكية كبرينسـتون ويـال وتخصص في الكتابـة العملية وبخاصة في الرياضيات.

# لانهاية ∞

ما أكبر رقم يمكن الوصول إليه؟.. تستطيع عزيزي القارئ أن تغلق عينيك وتبحث في عقلك عن إجابة شافية لهذا السؤال ولكني أعدك أنك لن تجدها، فمهما كان الرقم الذي سوف تفكر فيه يمكنك دائما إضافة 1 لتحصل على رقم أكبر. قد تعترض غاضبا أن هذا يجعل السؤال من الأساس لا معنى له.. ربما أنت محق.. ولكن هذا لم يمنع العقل البشري من أن يحلق بخياله في محاولاته لإيجاد إجابة لهذا السؤال.. ومحاولاته هذه قادته في النهاية إلى مفهوم أكثر غموضا من السؤال ذاته.. مفهوم «اللانهاية»..

كان الفيلسوف اليوناني أناكسيماندر Anaximander[1] هو أول من صدّر فكرة «اللانهاية» من الناحية الفلسفية مما يجعلها من أقدم المفاهيم الفلسفية على الإطلاق. قال أناكسيماندر عن «اللانهاية» أنها إحدى حقائق الكون فهي تمثل الخلود واللامحدود، كما أنها تعد العنصر الأول لجميع الأشياء، فمنها تأتي باقي العناصر المحدودة.

ظلت «اللانهاية» حبيسة المفهوم الفلسفي إلى أن جاء فيلسوف يوناني آخر هو زينون Zeno[2] الذي قال عنه أرسطو Aristotle[3] أنه مؤسس الجدليّة وهي نظام فلسفي يعتمد على الجدال بين اثنين لهما وجهتي نظر مختلفتين و كل يعرض أدلته حتى يصلا

(1) (610 - 549 ق.م) فيلسوف يوناني من فترة ما قبل سقراط عاش في مدينة إيونية وتتلمذ على يد ثالس ثم خلفه في رئاسة مدرسة ميليتس الفكرية. يعزى إليه أنه كان أول فيلسوف يسجّل أعماله كتابة.

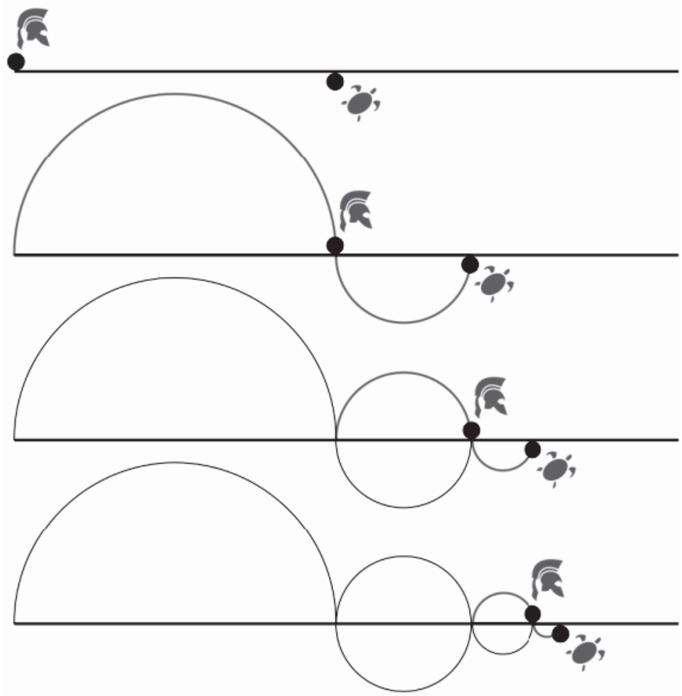
(2) (490 - 430 ق.م) فيلسوف ما قبل سقراطي عاش في مدينة إيليا اليونانية وتتلمذ في مدرستها الفكرية.

(3) (384 - 322 ق.م) من أعظم الفلاسفة اليونانيين وأحد أعمدة الفلسفة الغربية نظرا لمساهماته التي لا حصر لها في جميع مجالات العلوم والفلسفة. تتلمذ على يد أفلاطون في مدرسة أثينا ثم تركها ليصبح المعلم الخاص للإسكندر الأكبر.

في النهايــة إلى الحقيقــة. كان زينــون هو أول من تصــدى للمفهوم الريــاضي «للانهاية» عن طريق مفارقاته الشــهيرة التي صدم بها الرياضيين والفلاســفة على حد سواء في هذا الوقــت. هــدف زينون مــن مفارقاتــه كان الوصول لنتيجــة أن التعدّديــة والتغيير غير حقيقيين رغم ما تخبرنا به حواسنا، وأننا عندما نرى شيئا ما يتحرك فهذا مجرد وهم، وقد استخدم «اللانهاية» للوصول إلى هذه النتيجة. سنذكر هنا مفارقتين من هذه المفارقات كي نستطيع فهم المشكلة العســيرة التي طرحها زينون، وهما: مفارقة أخيل والسلحفاة، ومفارقة التفرع الثنائي.

## مفارقة أخيل والسلحفاة

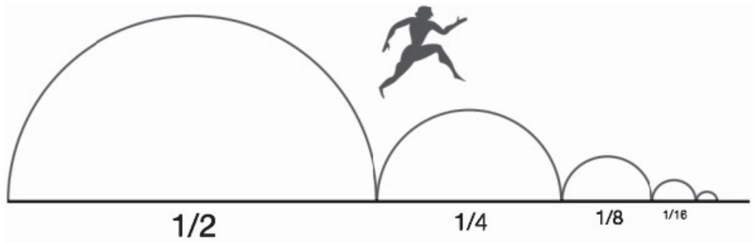
هب أن أخيل، بطل حرب طروادة الشــهير، قرر لســبب ما أن يتحدى سلحفاة في سباق ركــض، ونظرا لتفــاوت القدرات الواضــح بينه وبينها، قرر أن يعطي الســلحفاة المســكينة فرصة عادلة بأن يســمح لها أن تبدأ الســباق وهي متقدمة عليه قليلا. قد تظن عزيزي القارئ أن هذا الســباق سخيف وأن النتيجة محسومة لصالح أخيل حتى ولو كانت السلحفاة متقدمة عليــه في البدايــة فهذا مــا تحكم به تجاربنــا اليومية، ولكــن قبل أن تتســرع في حكمك هذا، فلنســمع رأي زينون في الموضوع.. يقول زينون أننا إذا فكرنا جيدا ســوف نجد أن أخيل كي يتجاوز السلحفاة ويفوز بالسباق عليه أولا أن يبلغ الموقع الذي كانت فيه عند بداية السباق، ولكنه عندما يصل هذا الموقع ســوف تكون الســلحفاة قد تقدمت مســافة قليلة وأصبح على أخيل الآن قطع هذه المســافة كي يتجاوزها، ولكن كالمرة الســابقة ســوف تكون الســلحفاة قــد تقدمت مســافة أخــرى أصغر قليلا والتي ســتصبح هــدف أخيل الجديد (شــكل 1). هل ترى عزيزي القارئ المشــكلة هنا؟.. طبقا لوجهة نظر زينون فأخيل لن يبلغ الســلحفاة أبدا فرغم أن المســافة بينهما تتناقص كل مرة يبلغ أخيل الموقع الذي كانت تحتله السلحفاة، فهذه المسافة سوف تستمر في النقصان إلى مالانهاية ولكنها لن تصبح صفرا، وبالتالي لن يتجاوزها أخيل أبدا.



شكل (1)
مفارقة أخيل والسلحفاة

## مفارقة التفرع الثنائي

إذا كنت في الشـارع ورأيت أمامك عمودا ما تريد أن تبلغه، فهل تستطيع ذلك؟.. تبدو الإجابة بسـيطة فـكل تجاربنا اليومية تؤكد أنك حتما ناجح في مسـعاك هـذا، ولكن زينون كعادته لنا بالمرصاد، فهو ينبّهنا إلى أننا إن أردنا قطع المسافة بيننا وبين العمود فعلينا أولا قطع نصف المسـافة (1/2)، بعدها يصبح علينا أن نقطع نصف المسافة المتبقية التي هي ربع (1/4) المسـافة الكاملة، ثم بعدها نصف ما تبقى أي ثمن (1/8) المسـافة الكاملة وهكذا (شكل 2).. هذه هي المفارقة الثانية والتي سُـميت مفارقة التفرع الثنائي لأنها تعتمد على التقسيم المستمر للمسـافة إلى جزءين، هذا التقسـيم الذي يمكن أن يسـتمر إلى مالانهاية، وهكذا نجد أننا لن نصل إلى العمود أبدا.




**شكل (2)**

**مفارقة التفرع الثنائي**

نستطيع رؤية الشبه بين المفارقتين السابقتين ففي الاثنتين اعتمد زينون على فكرة أنه من الممكن تقسيم أي مسافة محدودة (لها بداية ونهاية) إلى عدد لانهائي من المحطات، وبما أننا لا نستطيع تجاوز عدد لانهائي من المحطات في زمن محدود، فبالتالي لا يمكننا أن نتجاوز أي مسافة ومن هنا استنتج زينون أن الحركة غير ممكنة وأنها وهم كبير نعيش فيه.

لأسباب وجيهة جدا عارض الكثيرون هذه الفكرة العجيبة والتي تتنافى مع خبراتنا اليومية كما ذكرنا، فنحن نسير ونتحرك ونبلغ أهدافنا، ولكنهم في نفس الوقت بحثوا عن دليل قوي لدحض المنطق الذي تحدث به زينون لأن العقل الواعي ليس بإمكانه أن يتجاهل هذا المنطق بضمير صاف بلا دليل. أرسطو كان أحد هؤلاء المعارضين الذين تعثروا في مفارقات زينون وحاولوا حلها. ظن أرسطو أنه توصل إلى الحل المناسب بأن قسم «اللانهاية» إلى نوعين: اللانهاية المحتملة واللانهاية الفعلية. يختلف هذان المصطلحين في أن اللانهاية المحتملة تمثل الأشياء أو الأرقام التي نستطيع قطع جزء كبير منها دون أن نبلغ نهايتها، ولكن مع ذلك فنحن نستطيع بلوغ هذا الجزء في عدد محدود من الخطوات. لتوضيح هذه الفكرة أكثر، فلنفترض أننا نقف فوق خط مستقيم ممتد أمامنا إلى مالانهاية.. بالنسبة لنا، حدود هذه اللانهاية تقع حيث ينتهي بصرنا ولكننا لا نعرف إن كانت هذه هي فعلا النهاية أم لا، لذا فهي «لانهاية محتملة».. الآن نتقدم ويمر علينا الوقت إلى أن نصل إلى هذه اللانهاية المحتملة فنجد أن الخط مازال ممتدا أمامنا، هنا ننظر إلى الأمد البعيد ونرى لانهاية محتملة أخرى فنذهب إليها مستهلكين وقتا آخر، وهكذا دون أن نصل إلى النهاية أبدا، لهذا وصف

أرسطو هذه اللانهاية باللانهاية الغير مكتملة. النقطة الهامة هنا هو أن ندرك أننا استطعنا الوصول إلى هذه اللانهايات المحتملة بعدد محدود من الخطوات يمكننا أن نقيسه بدقة، إذن فاللانهاية المحتملة تختلف مع الوقت ولكنها، في أي وقت معين، محدودة. إلى جانب مثال الخط المستقيم هذا، تمثل سلسلة الأرقام الطبيعية Natural numbers (1,2,3...) مثالا آخر للانهاية المحتملة، فنحن إذا وصلنا لأكبر رقم في هذه السلسلة سوف نجد أن باستطاعتنا دائما إضافة 1 لنحصل على رقم أكبر فلا نصل إلى النهاية، ولكن في نفس الوقت الرقم الذي نتوقف عنده في السلسلة على اعتبار أنه لانهاية محتملة، هو في النهاية رقم محدود. أما اللانهاية الفعلية فهي تمثل المجموعة المحدودة، أي ذات البداية والنهاية، لعدد لانهائي من الأشياء، ولأن هذه اللانهاية مكتملة دائما في أي وقت ننظر فيه إليها، فهي تُدعى أيضا اللانهاية المكتملة. مشكلة أرسطو مع هذا النوع من اللانهايات هو أنه رأى مفارقة في أن تتكون مجموعة محدودة من عدد لانهائي من الأشياء، فبالنسبة له، الشيء المكون من مكونات لانهائية هو حتما لانهائي. بناء على وجهة النظر هذه، رفض أرسطو إمكانية وجود اللانهاية الفعلية في الواقع وقال أن أي لانهاية هي بالتأكيد لانهاية محتملة. بعد أن استراح الفيلسوف لهذه النتيجة، عاد بانتباهه إلى مفارقات زينون ورأى أن سقطة هذا الأخير تكمن في ظنه أن المسافة، وهي بالتأكيد محدودة، يمكن أن تتكون من عدد لانهائي من المحطات لأن في هذا تناقضا. خلاصة القول هنا هو أنه طبقا لأرسطو، فالمسافة لا يمكن تجزئتها إلى عدد لانهائي من الوحدات وبهذا أعاد التوازن إلى الكون وأيضا قدرة أخيل على أن يهزم السلحفاة وقدرتنا على تجاوز المسافة بيننا وبين العمود.

حل أرسطو هذا لقي ترحابا شديدا من قبل الرياضيين وأصبحت الجملة الشهيرة *Infinitum actu non datu*، وهي ترجمة لاتينية لمقولة أرسطو: «اللانهاية الفعلية غير موجودة»، هي الفكرة السائدة لقرون عديدة. فالرياضيون وجدوا في هذا الحل حجة مناسبة كي يتجاهلوا هذه «اللانهاية» التي كانت بمثابة الصداع المستمر لهم، فهم بتقبلهم أن اللانهاية الفعلية أو المكتملة غير موجودة وأن اللانهايات توجد فقط كلانهايات محتملة لا يمكن بلوغ نهايتها بل بلوغ أجزائها فقط، أصبح واضحا لهم أنه من الآمن تجاهلها تماما في حساباتهم وعدم التفكير فيها وأن باستطاعتهم العودة للتركيز على الأرقام العادية التي تحترم نفسها والخالية

مـن المفارقات. ربما كانـت المحاولة الوحيدة لوضع توصيف رياضي مـا للانهاية الفعلية بين عصر أرسطو والقرن التاسع عشر، هي محاولة أرشـميدس Archimedes[1] المذكورة في رق أرشـميدس الممسوح Archimedes Palimpsest عندما حاول إثبات أننا إن قسمنا الموشور إلى مثلثات لانهائية فإن عددها سـوف يساوي عدد الخطوط التي يمكن تقسيم المستطيل بها، بهذا يكون أول من تحدث عن اللانهاية الفعلية من منطلق رياضي بحت.

حل أرسطو لم يلق قبولا في الوسط الرياضي فقط، بل لاقى قبولا كبيرا أيضا لدى رجال الديـن خاصة بعد دخول أوروبا عصور الإيمان، ففكرة أن اللانهاية الفعلية ليسـت موجودة وأن كل لانهايـة هي لانهاية محتملة، توافقت بصورة مدهشـة مع الفكـر الديني الكاثوليكي الذي نراه واضحا في مقولة القديس والفيلسوف المؤثر توما الأكويني Thomas Aquinas[2]: «كل ما هو دون الله، فهو لانهائي نسـبي أو محتمل وليس لانهائيا مطلقا». طبقا لهذا فالله هو اللانهـائي الفعلي الوحيد، ولم تكـن هذه الفكرة مقصورة على المسـيحية الكاثوليكية فقط، بـل كانـت موجودة في معظم الأديـان، الإبراهيمية وغيرها. الغريـب أن رجال الدين فاتهم تناقضا فلسفيا واضحا هنا، فهم تبنوا فكرة أن اللانهاية الفعلية متناقضة لذا هي غير موجودة، ولكنهـم في نفس الوقت يقـرّون أن الله هو لانهاية فعلية.. ألا يعني هـذا أن اللانهاية الفعلية موجودة؟ بل ألا يعني أنها بالضرورة غير متناقضة في كينونة الله؟..

تجاهـل اللانهاية الفعلية ظل قائما من قبل الرياضيين، بل إنهم ظلوا يكتشـفون مفارقات جديـدة لا تسـمح بوجود مثل هـذه المجموعة. من ضمن هـذه المفارقات، مفارقـة جاليليو Galileo[3] الـذي اسـتخدم فيها سلسـلة الأرقام الطبيعيـة اللانهائيـة (1,2,3,4,...)، فقد قال

(1) (287 - 212 ق.م) من أعظم الرياضيين ومسـاهماته عدة في مجالات الرياضيات والفلسـفة والفلك. بحث عن إثباتات هندسـية مختلفة منها إثبات مسـاحة الدائرة والجسم الكروي. ما نُقل لنا عن موته هو أنه كان منهمكا في حل معضلة ما عندما جاءه جندي روماني ليصحبه لمقابلة قائده وعندما رفض أرشميدس لانهماكه في معضلته أشهر الجندي سيفه وقتله.

(2) (1225 - 1274م) قس كاثوليكي إيطالي له نفوذ واسع في الفلسفة والفكر الديني الغربي وخاصة في نظرية الأخلاق. تأثر بأفكار أرسطو وعلق على الكثير من أعمال هذا الأخير.

(3) (1564 - 1642م) جاليليـو جاليـلي، عالم إيطالي موسـوعي ولـه نظريات في مجال الرياضيـات والفيزياء والفلسـفة. من أهم مسـاهماته اختراع التليسـكوب، تجاربه في الجاذبية ورفضه لنظرية مركزية الأرض.=

جاليليـو أننـا إن وضعنا هذه السلسـلة في مجموعة ثـم كونّا مجموعة أخرى عبـارة عن مربع الأرقام الطبيعية (1,4,9,16...) ثم حاولنا أن نجد علاقة الواحد لواحد بين المجموعتين، بمعنى آخـر أن نصل كل عنصر من المجموعـة الأولى بعنصر من المجموعـة الثانية فماذا نجد؟ لأن المجموعتـين لانهائيتـان فقد وجد جاليليـو أن كل عنصر من المجموعة الأولى سـوف يقابله عنـصر من المجموعة الثانية أي أن العلاقة واحد لواحـد، معنى هذا أن عدد الأرقام الطبيعية هـو نفســه عدد مربع هـذه الأرقام، كيف هذا وهـذه المجموعة الأخيرة بهـا عناصر ناقصة عن الأولى؟ هذه هي المفارقة التي منها اسـتنتج جاليلو أن المجموعات اللانهائية متناقضة ولا يمكـن أن نجـري عليها مقارنات رياضيـة كأن نقول أصغر أو أكبر أو يسـاوي كما نفعل مع المجموعـات المحـدودة. لم تزد مفارقة جاليليـو اللانهاية الفعلية إلا مزيـدا من الجفاء الذي اسـتمر حتى القرن التاسع عشر، فلم تكن هناك مساهمات تذكر في تطوير هذا المفهوم اللهمّ إلا مـن قبل جـون والاس John Wallis[1] الذي كان أول من اسـتخدم رمز «اللانهاية» الذي نعرفـه الآن وهـو ∞. لا نعرف لم اختار والاس هـذا الرمز تحديدا ولكـن ربما كان تحريفا للحرف ω الذي هو آخر حروف الأبجدية اليونانية.

مع مجيء القرن القرن التاسـع عشر، جاءت الأنباء السـعيدة للانهاية الفعلية عن طريق فكرتين قلبتا الموازين. الفكرة الأولى طرحها أوجسـتين كوشي Augustin Cauchy[2] الذي سـاهم مساهمات عديدة في تطوير حسـاب التفاضل والتكامل. هذه الفكرة تقول أن إضافة عدد لانهائي من الأشـياء لا يعطي بالضرورة قيمة لانهائية كما اعتقد أرسـطو من قبل، بل من الممكن أن يعطي قيمة محدودة بشرط أن تستمر عناصر السلسلة في التقارب بينها كلما صعدنا فيها، لهذا يسـمى هذا النوع من السلاسـل «السلسـلة المتقاربـة Convergent series» والتي تقابلها «السلسـلة المتشـعبة Divergent series» وهي التي إذا جُمعـت لا تعطي قيمة محدودة.

= هذه الفكرة الأخيرة كانت محل نقض كبير وقتها وبسببها تم التحقيق مع جاليليو من قِبل محاكم التفتيش التي حكمت عليه بالإقامة الجبرية في منزله حتى مماته.

(1) (1616 - 1703م) قس ورياضي بريطاني يُعزى إليه تطوير مصطلح الـ«متناهي الصغر» الذي سـاعد فيما بعد على تطوير علم التفاضل والتكامل.

(2) (1789 - 1857) هو أوجسـتين - لويس كوشي، رياضي وفيزيائي فرنسي وقيل أن عدد النظريات المنسوبة إليه فاق أي رياضي آخر.

مثال لسلسـلة متقاربة هي سلسـلة {1/2,1/4,1/8,...} التي نبدأ فيهـا بالنصف ثم نحصل على الرقـم التـالي بأن نقسـم على اثنين وهكـذا..، فنحن إذا جمعنـا عناصر هذه السلسـلة نجد أن الإجابـة 1. قد تكون هذه الإجابة غير مقنعة للقارئ لذا سـوف أذكر هنا إثباتا بسـيطا جدا لهذه النتيجة.

هب أن مجموع السلسلة السابقة هو s، هذا يعني أن:

$$s = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$$

فلنضرب الآن s x 2 لنحصل على:

$$2s = 2/2 + 2/4 + 2/8 + \ldots,$$

$$2s = 1 + 1/2 + 1/4 + \ldots$$

الآن دعنا نطرح s من الجانبين

$$2s - s = [1 + (1/2 + 1/4 + \ldots)] - (1/2 + 1/4 + \ldots)$$

من هنا نرى أن الحل هو

$$s = 1$$

أي أن

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1.$$

وهي النتيجة التي كنا نسعى لإثباتها.

والآن إذا عدنـا للتفكـير في مفارقـات زينون، سـوف نجـد أن لدينـا مخرجا جديدا للمعضلـة، فالسلسـلة التي تحدثنا عنها وهي {1/2,1/4,1/8,...}، هي نفسـها المسـافة التي علينـا قطعها حتى نصل إلى العمود (نصف المسـافة ثم ربعها ثـم ثمنها إلخ..)، إذن فنحن إذا جمعنا هذه النسـب لحسـاب المسـافة الكاملة نجد أنهـا 1.. المثل ينطبق عـلى مفارقة أخيل، فأخيل بسرعته يستطيع أن يقصر المسافة بينه وبين السلحفاة بطريقة تدريجية فتصبح هذه

المسافة سلسلة متقاربة هي الأخرى ذات مجموع محدود وينجح أخيل أخيرا في اللحاق بمنافسه العنيد والفوز بالسباق.

فكرة كوشي كانت ثورية بالفعل، فقد أثبتت ولأول مرة أن المجموعة المحدودة المكوّنة من عدد لانهائي من الأشياء، يمكن وجودها بالفعل وأنها لا تتعارض مع الرياضيات.. إذن فوجود اللانهاية الفعلية في الواقع ممكن، ولكن هذه الفكرة كان بالإمكان تطبيقها على حالات خاصة فقط، وهي السلاسل المتقاربة، أما السلاسل المتشعبة والتي نضرب مثالا عليها سلسلة الأرقام الطبيعية (1,2,3,...)، فلم يكن مطروحا بعد احتمال وجودها في مجموعة هي الأخرى، حتى جاءت الفكرة العبقرية الثانية عن طريق جورج كانتور Georg Cantor (1845 - 1918م) مؤسس نظرية المجموعات Set theory، فبالنسبة لكانتور كان العالم كله عبارة عن مجموعات داخل مجموعات.. لم يستثن أي شيء من هذه القاعدة فحتى السلاسل المتشعبة اعتبرها أيضا مجموعات يمكن التعامل معها رياضيا. الأدهى من هذا أنه أثبت وجود مجموعات لانهائية أكبر من مجموعات لانهائية أخرى أي أنها تحتوي على عدد أكبر من العناصر. كيف هذا وعدد العناصر في كلتي المجموعتين لانهائي؟ لتبسيط هذه الفكرة دعنا نعرف أولا كيف نحسب حجم مجموعة محدودة ما ولنأخذ مثالا المجموعة المحدودة {2,5,8}، حجم هذه المجموعة هو ببساطة عدد عناصرها الذي هو ثلاثة. بالمثل استطاع كانتور أن يعرّف رقما يمثل عدد العناصر في مجموعة لانهائية ولكن ليس عن طريق عد هذه العناصر بل بمقارنتها بعدد العناصر الموجودة في متوالية الأرقام الطبيعية اللانهائية (1,2,3,4,...)، وقد استخدم علاقة الواحد لواحد التي استخدمها جاليليو من قبل لأداء هذه المقارنة، فإن وجد أن كل عنصر في مجموعة ما يمكن إيجاد عنصر مقابل له في متوالية الأرقام الطبيعية، أصبحت هذه المجموعة تحتوي على عدد من العناصر يساوي $\aleph_0$ ونرى هنا أن كانتور استخدم الحرف «ألف» أول الحروف العبرية لتمثيل هذا الرقم. الشيء المدهش الذي أثبته كانتور هو أن عدد العناصر في مجموعة الأرقام الطبيعية الذي هو $\aleph_0$، أصغر من عدد العناصر في مجموعة الأرقام الحقيقية real numbers التي تمثل كل الأرقام الصحيحة بالإضافة إلى الأرقام النسبية مثل (1/2,6/5,...) وقد مثل هذا العدد الأخير بالرقم $\aleph_1$. بهذا يصبح كانتور أول من يصدم العالم بوجود لانهايات أكبر من لانهايات أخرى.

قـد يصف القارئ كل ما قيل في الفقرة السـابقة بالهذيـان، هذا الوصف الذي لن يختلف كثـيرا عـما قاله أقران كانتور عـن نظريته، فقد هزت هذه النظرية عروشـا كثيرة وأثارت فيضانـات في بحيرات ظلت سـاكنة قرونا. هذا لأنها فتحت البـاب أمام عالم جديد، عالم به اللانهايـة الفعلية موجودة بالفعـل متمثلة في المجموعات اللانهائية، بـل وأن بعضها أكبر من بعض. كل هذا كان صعب الاستيعاب بالنسبة للرياضيين الذين تربوا على المنظور الأرسطي للانهاية، ولكنهم بدلا من أن يقبلوا بالتغيير فضّلوا الهجوم الذي هو خير وسـيلة للدفاع عن معتقداتهم الراسـخة. الهجوم كان ضاريا بالفعل وجاء من أكبر الأسـماء في عالم الرياضيات مثـل بوينكاريـه Poincaré[1] الـذي قـال أن نظرية كانتور هـي بمثابة المـرض الذي أصاب الرياضيات والذي يجب التخلص منه. لم يكن الهجوم مقصورا على نظرية كانتور فحسـب بـل امتد إلى شـخصه فهاهوذا رياضي آخر هـو ليوبولد كرونيكـير Leopold Kronecker[2] يقول عن كانتور أنه «نصاب» وأنه «يفسد الشباب».

الهجـوم الحاد عـلى نظرية كانتور لم يتوقف عـلى عتبة الرياضيين بـل كان آتيا من كل صوب خاصة من رجال الدين الذين قالوا أنه سلب الله حقوقه الحصرية في اللانهاية الفعلية. الغريـب أن كانتور كان مسـيحيا لوثريا مخلصا وأن بداية بحثـه في اللانهاية كانت نابعة من تأمله في لانهاية الله، هو حتى عند توصله إلى نظريته كان مقتنعا أنها جاءته وحيا من الله وأن الأخير اختاره لنقل هذه المعرفة إلى البشرية. حاول كثيرا الدفاع عن نفسـه بأن أكد تفريقه بـين اللانهايـات الفعليـة واللانهاية المطلقـة التي تمثل الله، فهـو اعتبر أن الله هـو المجموعة اللانهائية الكبرى التي تحتوي كل المجموعات الأخرى. في النهاية لم يشفع له دفاعه هذا ولم تقل حدة الهجوم حتى أصابه اكتئاب حاد أثّر على حالته العقلية وأدخله مصحة نفسية. يُقال أن ما أثر على حالته العقلية أيضا بالإضافة إلى الهجوم عليه هو وفاة ابنه المفاجئة والذي كان متعلقا به بشـدة. أُشـيع كذلك أن أحد أهم أسباب تدهور حالته هو بحثه الدؤوب عن إثبات

(1) (1854 - 1912م) هـنري بوينكاريه عالم موسـوعي فرنسي له مسـاهمات في مجـالات الرياضيات البحتة والفيزيـاء والفلـك. يُعـزى له طـرح حدسـية بوانكاريـه Poincare conjecture التي كانـت أحد أهم المعضلات الرياضية الغير محلولة إلى أن تم حلها سنة 2002.

(2)(1823 - 1891م) رياضي ألماني ساهم في تطوير نظرية الأرقام وعلم الجبر.

عدم إمكانية وجود رقم بين الرقمين $\aleph 0$ و $\aleph 1$، ولكن كل محاولاته باءت بالفشل مما حوله إلى شخص مهووس، وكان يصف فشله هذا بأنه خيانة لثقة الله التي وضعها فيه، هذا هو السبب الذي دعى البعض أن يقول بأن كانتور كان الرجل الذي جُن لأنه حدق في «اللانهاية» كثيرا. المهم أنه أيا كانت الأسباب فحالة كانتور العقلية استمرت في التدهور من السيء إلى الأسوأ حتى مات فقيرا في مصحته النفسية.

النظرية التي كانت محل استهجان في حياة كانتور صارت أساسية في الرياضيات الحديثة، فنظرية المجموعات لها العديد من التطبيقات الهامة في مجالات علمية مختلفة وأصبحت المجموعات اللانهائية تُدرّس حتى لطلبة المدارس.. ولكن بعد كل هذا التطور في مفهوم اللانهاية، هل حقا استطعنا الإجابة عن مفارقات زينون التي حيرنا بها؟ الرياضيون مقتنعون أن الرياضيات نجحت بالفعل في هذا طبقا لكوشي وكانتور، ولكن الفيزيائيين مثلا سوف يعترضون بأن الحلول الرياضية هي حلول مجردة موجودة في عقل الرياضي ولا تتصل بالواقع، وأيضا هذه الحلول تعتمد على المجموعات اللانهائية التي لاتزال مليئة بالمفارقات. هناك أيضا رجال الدين والفلاسفة الذين هم بحاجة إلى أكثر من حل رياضي يهديهم في بحثهم عن حقيقة العالم وحقيقة الله.

في نهاية هذا الفصل وبعد كل ما ذكرناه عن «اللانهاية» تأتي لحظة الحقيقة ومواجهة السؤال الأهم وهو: «هل حقا توصلنا إلى حقيقة اللانهاية ؟» إجابتي المباشرة عن هذا السؤال هي: «بتاتا!!»، فإلى يومنا هذا تدور نفس النقاشات التي كانت تدور قديما حول ماإذا كانت «اللانهاية» قيمة مبهمة أم رقم، إذا كانت حقيقة من حقائق الكون أم هي موجودة فقط في خيال البشر. الحقيقة أن إجابة هذا السؤال قد لا تؤثر على حياتنا اليومية التي تتعامل فقط مع المحدود، حتى وإن كان هذا المحدود هو عدد ذرات الكون، ولكن من قال أن المتعة الحقيقية تقع في إيجاد الإجابة فضلا عن أن تكون في التفكير فيها.. حتى وإن استهلك هذا التفكير وقتا «لانهائيا»؟

# ثابت فيثاغورس $\sqrt{2}$

«تكالب عليه إخوته من الفيثاغوريين ونظرات عيونهم تنبئ بما هو قادم.. حاول الفرار ولكن إلى أين؟ إنهم فوق مركب كبير يشق طريقه وسط البحر الهائج دون بر يمكن اللجوء إليه. النتيجة الحتمية كانت أنه سقط في أيديهم.. جذبوه من ثيابه الكتانية البيضاء وحملوه متجهين به إلى الحافة.. صرخ مستنجدا بمنقذ وهمي لم يأت ثم بثبات لا يهتز ألقوه من المركب ليضرب جسده الماء البارد..حاول التشبث دون جدوى بالمركب التي استمرت في مسارها مبتعدة عنه. عرف أنها نهايته وأنه لن يصمد طويلا ومع أنفاسه الأخيرة ألح التساؤل في عقله: هل كان مصيره سيتغير لو لم يتوصل إلى اكتشافه الذي من شأنه هدم كل معتقدات الفيثاغوريين الراسخة؟»

هذه هي القصة المأساوية التي وقعت للفيثاغوري هيباسوس Hippasus الذي عاش في القرن الخامس قبل الميلاد وسواء حدثت بنفس السياق الدرامي أم لا، فهذه القصة تمثل المصير الأسود الذي يتوعد به التعصب لفكرة ما كل من تسوّل له نفسه أن يفكر خارج نطاق هذه الفكرة. ولكن ما هو هذا الاكتشاف الذي تسبب في غرق هيباسوس المسكين على يد إخوته؟ إنه اكتشاف أن الرقم $\sqrt{2}$ هو رقم غير نسبي irrational number. لفهم هذا الاكتشاف ولم أدى بمكتشفه إلى الهلاك علينا أن نتحدث أولا عن هذا الرجل المثير للجدل، فيثاغورس.

لا شك أن أول ما يتبادر للذهن عندما يُذكر اسم فيثاغورس هو النظرية الشهيرة التي ارتبطت باسمه والتي درسناها جميعا في المدارس. تصف هذه النظرية العلاقة الرياضية بين أضلاع المثلث ذي الزاوية القائمة وتقول أن مربع وتر المثلث يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين أو:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

حيث أن c هو وتر المثلث. الحقيقة أن هذه ليست القصة كاملة فهناك جانب آخر لشخصية فيثاغورس قد تكون غائبة عن معظم الناس وهي أنه كان غريب الأطوار إلى أقصى حد.

نلمس غرابة أطوار فيثاغورس في معتقداته وتعاليمه التي ورثها طلبته، فعلى سبيل المثال كان فيثاغورس نباتيا وفرض هذا النظام الغذائي على طلبته، ليس هذا فحسب بل أجبرهم على التخلي عن أي ثياب ذات مصدر حيواني لذا اقتصرت ثيابهم على الثياب الكتانية.. من الأمثلة الأخرى على التعاليم العجيبة أن فيثاغورس كان يحذر طلبته من التبول باتجاه الشمس ومن التزوج بالمرأة التي ترتدي الذهب وربما أغرب التعاليم على الإطلاق هو هذا الخاص بعدم أكل الفول أو المساس به. بالإضافة إلى ما سبق، فقد أحاط فيثاغورس مدرسته بساتر من السرية وحذر طلبته من إشراك العامة في الاكتشافات التي يتوصلون إليها. كان نتيجة هذا أن ثار حنق العامة الذين رأوا في الفيثاغوريين جماعة منعزلة مليئة بالأسرار مما أثار بداخلهم هذا الخوف البدائي من المجهول. بالتدريج زاد هذا الحنق مصحوبا بهذا الخوف إلى أن أدى إلى نتيجة دموية، فقد هجمت الجماهير الغاضبة على المدرسة في كروتون Croton[1] الإيطالية وأحرقوها وقتلوا من وجدوا داخلها وكما تقول إحدى القصص، طاردت الجماهير فيثاغورس وحاصرته وسط الحقول أياما حتى مات جوعا. المهم أن الفيثاغوريين انتقلوا بعدها إلى ميتابونتوم Metapontum[2] حيث افتتحوا مدرستهم الجديدة ولكن العجيب أن تعاليم فيثاغورس غريبة الأطوار ظلت بينهم مطاعة طاعة عمياء دون أن يجرؤ أحد على التشكيك فيها. من هنا نستطيع رؤية ملامح شبيهة بملامح المنظومات الدينية المتعصبة إلى حد كبير ومثل هذه المنظومات، فقد كان العقاب ينتظر كل من تسول له نفسه المساس بمعتقدات الفيثاغوريين خاصة معتقدهم الأساسي الذي وضعه فيثاغورس والقائل أن كل شيء هو عبارة عن أرقام صحيحة integers.

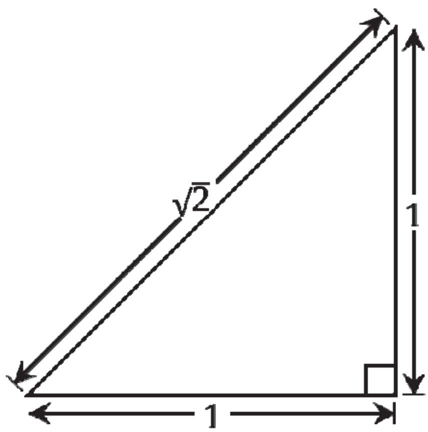
جاء هذا المعتقد الفيثاغوري الأصيل من مصدر عجيب وهو الموسيقى، فقد لاحظ

(1) مدينة بجنوب إيطاليا.

(2) مدينة بجنوب إيطاليا.

فيثاغـورس أثنـاء مروره عـلى الحدادين أن النغـمات الصادرة عن ضرب الحديـد تعتمد على وزن المطرقـة وأن المطـارق التي تضرب في نفس الوقت تصدر نغـما محببا أو كريها بناء على النسـبة بين أوزانهـم والتي يمكن تمثيلها في شـكل أرقـام صحيحة، بهذا وجد أن باسـتطاعته التنبؤ بالأوزان التي يمكنها إصدار نغمات جميلة باسـتخدام الأرقام. تحمس فيثاغورس أشـد الحماس لهذا الاكتشاف وأنشأ عليه معتقده بأن الأرقام الصحيحة هي أساس كل شيء، بل إنه قـال أن الله نفسـه رقم وهو الرقم واحد الذي تأتي منه كل الأرقـام الأخرى. في هذا المعتقد نـرى صبغة دينية أخـرى قادمة من ربط الرياضيات بالماورائيـات. أدى هذا الربط فيما بعد إلى انقسـام المدرسـة الفيثاغورية إلى مجموعتين: مجموعة المتعلمين mathematikoi المنشغلين بالمسـائل الرياضية البحتة، ومجموعة المستمعين akousmatikoi الذين تفرغوا للأمور الدينية وطقوسـها، وكما وصل إلينا فقد كانت هناك مشـاحنات عديدة بين المجموعتين لاعتقاد كل منهما أنها هي التي تمثل الفيثاغورية الحقيقية.

نعود إلى هيباسـوس وإلى اكتشـافه الذي هدم المعتقد الفيثاغوري الأسـاسي القائم على الأرقـام الصحيحـة، فبناء على هذا المعتقـد كل رقم هو إما رقم صحيح أو نسـبة بين رقمين صحيحـين وهذا ما يعرف بالأرقـام النسـبية rational numbers، والحقيقـة أن كل الأرقام الصحيحة يمكن تمثيلها في شـكل أرقام نسـبية، فالرقم 2 مثلا يمكـن كتابته كـ2/1 وهكذا، إذن يمكننـا تعميم هـذا المعتقد الفيثاغوري بأن نقول أن كل الأرقام هي أرقام نسـبية. بعض هذه النسـب كان سهلا الحصول عليه والبعض الآخر كان صعبا وكان شرفا لأي فيثاغوري العثور على النسـبة التي تمثل رقما ما. متحمسـا عكف هيباسوس على معرفة النسبة التي تمثل الرقـم $\sqrt{2}$، والتـي أرهقت العديد مـن الفيثاغوريـين، في محاولته لنيل مكانة خاصة وسـط زملائـه. كان الفيثاغوريـون يعرفون أن هذا الرقم موجود، فطبقـا لنظرية فيثاغورس، $\sqrt{2}$ هو قياس وتر المثلث متسـاوي الساقين عندمايكون الضلعان حول الزاوية القائمة مساويين لواحد (شكل 1).




**شكل (1)**

**وتر المثلث يساوي** $\sqrt{2}$

حاول هيباسوس كثيرا النجاح فيما فشل فيه الآخرون ولكن دون جدوى ثم وسط إحباطه توصل إلى الحقيقة المذهلة وهي أن الرقم $\sqrt{2}$ لا يمكن تمثيله كنسبة بين رقمين صحيحين أو أنه بالأحرى «رقم غير نسبي». لا نعرف بالضبط كيف أثبت هيباسوس هذا ولكن ربما استخدم نفس طريقة إقليدس Euclid[1] التي جاء بها بعد حوالي مائتي عام والمعتمدة على الإثبات عن طريق التناقض proof by contradiction، وهذه طريقة غير مباشرة للإثبات الرياضي مبنية على إثبات عدم إمكانية البديل. لإثبات عدم إمكانية وجود نسبة بين رقمين صحيحين تمثل $\sqrt{2}$، يمكننا أولا أن نفترض وجود هذه النسبة ثم نرى إن كان في هذا تناقض أم لا.. إذن دعنا نبدأ بأن نقول أن هذه النسبة موجودة بالفعل وأنها نسبة بين رقمين هما a و b وأن هذين الرقمين هما أصغر رقمين ممكنين لتمثيل هذه النسبة أي أنه لا يوجد بينهما عوامل مشتركة.. هذا يحتم بالتالي أن يكون أحد هذين الرقمين فردي والآخر زوجي. العلاقة التي نحصل عليها إذن هي:

$$a/b = \sqrt{2}$$

(1) إقليدس الإسكندري عاش بين القرنين الرابع والثالث قبل الميلاد ويُعد كتابه «العناصر Elements» هو حجر الأساس للهندسة حتى القرن التاسع عشر.

بناء عليه إذا أخذنا مربع الجانبين للتخلص من الجذر التربيعي نحصل على

$$a^2/b^2 = 2$$

و

$$a^2 = 2b^2$$

معنى هذا أن الرقم $a^2$ يساوي 2 مضروب في الرقم $b^2$ مما يحتم أن يكون $a^2$ رقما زوجيا وبالتالي a هو الآخر رقم زوجي، معنى هذا أن a يمكن كتابته كرقم ما مضروب في اثنين، لنطلق على هذا الرقم اسم k وباستبدال a بـ2k في المعادلة الثانية نجد أن:

$$(2k)^2/b^2 = 2$$

أو

$$4k^2/b^2 = 2,$$

$$2b^2 = 4k^2,$$

$$b^2 = 2k^2$$

و كما أثبتنا مع a فهذه النتيجة تعني أن b أيضا رقم زوجي وفي هذا تناقض مع القاعدة التي وضعناها في البداية وهي أن أحد هذين الرقمين فردي والآخر زوجي مما يثبت بالتناقض أن هذه النسبة غير موجودة.

المهم أن أيا كانت الطريقة التي توصل بها هيباسوس إلى اكتشافه، فالقصة التي وصلتنا تقول أنه توصل إليه أثناء إبحاره مع إخوته الفيثاغوريين فوق سطح مركب وأنه عندما واجههم بهذه الحقيقة أصابهم الرعب منها وخشوا على معتقدهم ومنظومتهم الدينية فلجأوا إلى الحل وهو التخلص من هيباسوس حتى يموت اكتشافه معه ويعود إلى العالم نظامه.

مات هيباسوس ولكن فكرته التي أراد لها الفيثاغوريين الموت معه استمرت، بل إن اسم معلمهم ومؤسس مدرستهم قد صار مقرونا بالرقم ذاته الذي كرهوه، فاليوم صار يطلق

اسم «ثابت فيثاغورس» على الرقم $\sqrt{2}$ نظرا لأن مكتشف عدم نسبية هذا الرقم هو أحد أبناء هذه المدرسة، و كأن القدر أراد بطريقته اللاذعة أن يعلمهم درسا قاسيا وأن يعاقبهم نتيجة لما اقترفت أيديهم.

بعد موت هيباسوس ظلت الاكتشافات تأتي تباعا لتؤكد على وجود الأرقام الغير نسبية، ومن أصحاب هذه الاكتشافات الأوائل ثيودوروس Theodorus[1] الذي عاش بمدينة سايرين Cyrene[2] اليونانية في القرن الخامس قبل الميلادي، فقد أثبت ثيودوروس عدم نسبية الجذر التربيعي لجميع الأرقام بين 3 و17 عدا 4 و9 و16.

أصبحت الأرقام الغير نسبية حقيقة واقعة اليوم وأصبح بإمكان الآلة الحاسبة أن تعطينا قيمة قريبة جدا من قيمة $\sqrt{2}$ الحقيقية التي إذا قربناها للرقم العاشر بعد العلامة العشرية نحصل على: 1.4142135623... وهذه النقط في نهاية هذا الرقم تعني أنه مستمر إلى الأبد. أقرب رقم مسجل للقيمة الحقيقية يصل إلى الرقم العشرة مليون بعد العلامة العشرية في هذه السلسلة اللانهائية. يجب هنا التفريق بين الأرقام الغير نسبية والأرقام التي يمكن أن تستمر إلى الأبد ولكن مع هذا يمكن تمثيلها في شكل نسبي، مثلا الرقم 1.333333... هذا الرقم يمكن تمثيله بالنسبة 4/3 الفارق الواضح هنا أن هذا الرقم الأخير مكون من عدد لانهائي من الأرقام ولكنها أرقام متكررة، أما الأرقام الغير نسبية فهي عدد لانهائي غير متكرر من الأرقام.

السؤال الذي قد يكون جال في ذهن القارئ عند هذه النقطة هو: كيف باستطاعتنا أن نرسم وتر المثلث الذي سبق وتحدثنا عنه والذي يمثل $\sqrt{2}$ بدقة ورغم هذا لا نعرف تحديدا قيمة هذا الرقم؟ هذا السؤال منطقي جدا وقد ثار في عقول الكثيرين من قبل الذين اهتزت لديهم قناعاتهم الرياضية والهندسية التي كانوا يعرفونها. أحد هؤلاء كان هو زينون الذي تحدثنا عنه في فصل «اللانهاية» وعن مفارقاته التي حاول بها أن ينفي حقيقة قابلية القيم كالمسافة أن تتكون من عدد محدود من الأجزاء بل هي تتكون من عدد لانهائي من الأجزاء.

(1) رياضي يوناني ذكره أفلاطون في بعض محاوراته.

(2) كانت مدينة يونانية قديمة موقعها الحالي مدينة شحات بشمال ليبيا.

فلكي ورياضي يوناني آخر يدعى يودو كسوس Euodoxus[1] تمكن من استعادة الثقة في النسب بعض الشيء بأن توصل إلى حل مناسب لمعضلة الأرقام الغير نسبية بأن فرق بين «الحجم» و«الرقم»، فالحجم كالمسافات الهندسية والزوايا هي التي يمكن أن تستمر إلى الأبد ومع ذلك يمكن تمثيلها كنسب غير محددة تحكمها العلاقات المنطقية كالأكبر والأصغر وهكذا، بهذا المنطق استطاع أن يصل إلى أن المسافة $\sqrt{2}$ هي حتما تقع بين المسافة الأصغر وهي الواحد والمسافة الأكبر وهي 2. نلاحظ أن هذا الحل هو أيضا تقريبي ولكنه أعطى الأرقام الغير نسبية القدرة على أداء المعاملات الهندسية على الأقل.

الفضل في إلغاء هذا التفريق بين الحجم الهندسي والرقم الرياضي يعود إلى العرب الذين حرروا الأرقام الغير نسبية من نطاق الهندسة المحدود إلى النطاق الرياضي الأكبر وقد تمكنوا من هذا عن طريق علم الجبر الذي كان بإمكانه التعامل رياضيا مع القيم الغير معروفة. هم حتى قبلوا بالحلول الغير نسبية للمعادلات.

رغم كل التقدم البشري المعاصر في مجالي الرياضيات والهندسة فالحقيقة المرة هي أن $\sqrt{2}$ لايزال مصدر حيرة لنا بالإضافة إلى مصدر إحباط، فهذا الرقم يضع حدا مستفزا لمعرفتنا ويضرب الغرور البشري في مقتل. المصيبة الأكبر هي أن الـ$\sqrt{2}$ ليس وحده هو من يتحدانا بل كل مجموعة الأرقام الغير النسبية والتي تبلغ عددا لانهائيا فبين كل رقمين نسبيين يوجد حتما عدد من الأرقام الغير نسبية، وبالتالي فإذا قسنا مقدار جهلنا بناء على عدد هذه الأرقام سنجد أنه مقدار لانهائي. بعض الاتجاهات الفلسفية الدينية ترى في هذا الرقم والأرقام الغير نسبية الأخرى قدرة الله الذي يريد أن يُري الإنسان مدى عجزه عن فهم الكون. ربما يكون هذا صحيحا خاصة إذا عرفنا أن أشهر الأرقام الرياضية على الإطلاق والتي نجدها في كل مكان حولنا تنتمي إلى هذه المجموعة مثل الرقم باي $\pi$ والذي سوف نتحدث عنه في الفصل القادم.

(1) (390 - 337 ق.م) رياضي وفلكي يوناني تتلمذ على يد أفلاطون.

# باي π

إذا كان عـالم الأرقام عبارة عن مملكة فحتما الرقم «باي» هو المتربّع على عرش هذه المملكة. هذا لأن «باي» ببسـاطة هو أهم رقم في الرياضيات وقـد حيّر الرياضيـين على مر التاريـخ حتى قال عنه الريـاضي المعروف ويليام شاف William Schaaf[1]: «غالبا لم يُثر أي رمز رياضي هذا القدر من الغموض والرومانسية وسوء الفهم والاهتمام البشري كما فعل الرقم «باي»». ربما يبدو هذا الاهتمام غريبا خاصة إذا عرفنا أن «باي» هو ببساطة النسبة بين محيط الدائرة وقطرها، فلمَ إذن يحظى مثل هذا الرقم بريء المظهر بمكانة أعلى من باقي الأرقام؟

ربما تكون أول علامة على غرابة «باي» هي أنه رقم غير نسبي، وقد تحدثنا عن الأرقام الغير نسـبية سـابقا وذكرنا أنها الأرقام التي لا يمكن تمثيلها كنسبة بين رقمين صحيحين، ولذا فهـي أرقام تسـتمر بعد العلامة العشريـة للأبد ودون ترتيب معين، لـذا فـ»باي» لا يمكن أن يتـم تحديده بطريقة مطلقة بـل كل ما يمكننا فعله هو تقريبه بقدر الإمـكان، وإذا قربناه إلى الرقم العاشر بعد العلامة العشرية نجد أنه يساوي: 3.1415926536، ليس هذا فحسب بل إن «باي» ينتمي كذلك لمجموعة خاصة جدا من الأرقام تُدعى الأرقام المتعالية Transcendental numbers، وهذه الأرقام يقال عنها أنها ليست جبرية non - algebraic لأنها لا تمثل أي جذر في معادلـة متعددة الحدود. قد يبدو هذا معقدا ولكن للتبسـيط يمكن أن نأخذ مثالا لرقم جبري وهو $\sqrt{2}$، فهذ الرقم يُعد جذرا للمعادلة متعددة الحدود:

$$x^2 - 2 = 0,$$

(1) (1898 – 1992 م) ريـاضي أمريـكي قام بالتدريس بجامعة بروكلين معظـم حياته المهنية وله إنتاج غزير من الكتب.

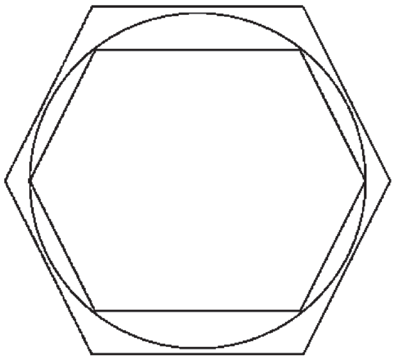
وكون $\sqrt{2}$ رقما جبريا وفي نفس الوقت رقما غير نسـبي ليست غريبة، فالقاعدة تقول أن جميع الأرقام المتعالية هي غير نسـبية أما العكس غير صحيح، أي أن هناك أرقاما غير نسـبية ولكن غير متعالية كذلك مثل $\sqrt{2}$.

هنا قد يسأل القاريء سؤالا في محله وهو إن كان «باي» رقما غير نسبي، فكيف قلنا أنه عبارة عن الـ«نسبة» بين محيط الدائرة وقطرها؟ الإجابة عن هذا السؤال تكمن في حتمية أن تكون إحدى القيمتين، سـواء محيط الدائرة أو قطرها، رقما غير صحيح وبهذا تصبح النسـبة بينهما رقما غير نسبي وهو «باي».

قبـل أن نخـوض في المزيـد مـن صفات «بـاي» العجيبة، فلنمـر سريعا عـبر تاريخ هذا الرقم. الحقيقة أننا لا نعرف من اكتشـفه للمرة الأولى ولكن لا شـك أن تاريخ اكتشافه قديم للغاية، فأول تسـجيل لمفهوم «باي» نجده في سـجلين منفصلين ينتميان إلى الحضارتين البابلية والفرعونيـة ويعود تاريخهـما إلى القرن الثاني قبل الميلاد، السـجل الأول هو لوح طيني بابلي أما الثاني فهو بردية شـهيرة تُدعى بردية رايند Rhind papyrus وفي كلا السجلين نجد حسابا لمساحة الدائرة والذي يمكن أن نستخدمه بطريقة غير مباشرة لحساب قيمة «باي»، فمساحة الدائرة تسـاوي $\pi r^2$ حيث r يسـاوي نصف القطر. بهذه الطريقة وجدنا أن البابليين توصلوا إلى أن «باي» يساوي 3.125 أما قدماء المصريين فقد توصلوا إلى أنها تساوي 3.16049 وهذان الرقمان يُعتبران تقريبين لا بأس بهما على الإطلاق لقيمة «باي» الحقيقية.

أمـا أول من قام بتطوير وسـيلة رياضية لحسـاب «بـاي» مباشرة كان أرشـميدس، فقد انتبه أن مشـكلة تحديد «بـاي» تأتي من صعوبة قياس محيط الدائرة، لذا خرج علينا بوسـيلة غاية في الذكاء كعادته لأداء هذه المهمة، فقد بدأ بدائرة ثم رسـم مضلعين سداسـيّي الزوايا، أحدهمـا منقوش داخـل الدائرة والآخر يحيط بالدائرة (شـكل ١)، فالمنطـق يقول أن محيط الدائـرة قيمتـه تقع حتما بين محيطـي المضلعين اللذين يسـهل قياسـهما، لذا فخطوتـه التالية كانـت أن يضاعف عدد أضلع المضلعين على خطوات متوالية لأن بزيادة عدد الأضلع يقترب رويـدا رويـدا من المحيط الحقيقـي للدائرة باعتبارهـا تحتوي على عدد لانهـائي من الأضلع. انتهى أرشـميدس بمحاولاته حتى وصـل إلى مضلعين بـ96 ضلع ومن هذا اسـتطاع إثبات أن

قيمـة باي تقع بين النسـبتين 223/71 و22/7، وهذه النسـبة الأخيرة هـي التقريب الذي ظل يسـتخدم بكـثرة إلى يومنـا هـذا. لا غرابـة إذن بعد هذه المسـاهمة الضخمة من أرشـميدس في حسـاب قيمـة «بـاي» أن يربط البعض اسـمه بهذا الرقـم فيطلقون على هذا الأخير اسـم «ثابت أرشميدس».



**شكل (1)**
**طريقة أرشميدس لتقريب قيمة «باي»**

لم يغب الشرق عن المشـهد، فالصينيون، وبشكل مسـتقل، طبّقوا نفس طريقة استخدام المضلعـات لتحديد حـد أقصى وأدنى لـ«بـاي» وفي القرن الخامس بعد الميلادي، توصل تسـو تشونج تشي Zu Chongzhi[1] وابنه تسو كنج تشي Zu Gengzhi[2] إلى أن قيمة «باي» تقع بين 3.1415926 و3.1415927 باستخدام المضلعات التي وصل عدد زواياها إلى 24,576.

لم يطـرأ أي تغيـير يُذكر على «باي» لمدة قرون بعد هذا وظـل حبيس الـ«دائرة» إلى أن جاء القرن السـابع عشر الميلادي حيث تمت دراسـة أشـكال منحنية أخرى غير الدائرة مثل الأقواس والأشـكال التي تُدعى هايبوسـايكلويد hypocycloid، وأثبـت «باي» أن له دورا أساسيا في حساب مساحة هذه الأشكال الغير اعتيادية.

(1) (429 - 500م) ريـاضي وفلـكي وسـياسي صيـني عـاش في عهـدي ليـو سـونج Liu Song وكي الجنوبيـة Southern Qi.

(2) (450 - 520م) غير معروف الكثير عنه غير أنه كان مساعدا لوالده.

بعدها في عام 1706 قام الرياضي الويلزي وليم جونز William Jones[1] باستخدام الرمز π لأول مـرّة وهـو الحرف اللاتيـني «باي»، وأغلب الظـن أنه اختار هـذا الرمز تحديدا لأن ترجمة كلمة «محيط» باليونانية تبدأ بهذا الحرف.

بحلـول عصر الكمبيوتر، بدأ السـباق المحمـوم للوصول إلى أرقام أبعد وأبعد في سلسـلة «باي» اللانهائية، فقد أصبح بالإمكان إجراء الحسابات اللازمة بسرعة أكبر بكثير من ذي قبل. أدى هذا السباق إلى الوصول إلى 100,000 رقم في سلسلة «باي» عام 1961، تلا ذلك كسر حاجز المليون رقم عام 1973، ثم جاء عام 1997 ليتم حساب 51.5 مليار رقم. استمر الحال هكذا حتى وصلنا إلى أكبر عدد من الأرقام والذي سُجل في 2014 وهو 13,300,000,000,000 رقم.

نعود للأسباب التي تميز «باي» عن باقي الأرقام، وقد ذكرنا من قبل أن أحد هذه الأسباب هي كونه رقما غير نسـبي وما يحيط بهذه الأرقام من غموض، ولكن من أهم الأسـباب أيضا أن «باي» يظهر في كل شيء حولنا، فبعد تحرره من الـ«دائرة» في القرن السابع عشر، تحرر في العصور التالية من حدود الهندسة نفسها وحلّق بعيدا في جميع المجالات الرياضية مثل نظرية الأرقام number theory فنجد أن احتمالية ألا يتشـارك أي رقمين في أي عامل تسـاوي $\pi^2/6$، ومثل نظرية المجموعات set theory حيث نجد أن:

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots$$

ونجد أيضًا «باي» في حل معضلة كانت تُدعى معضلة بازل Basel problem والتي كانت تبحث عن مجموع الأرقام في السلسلة اللانهائية التالية:

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$$

فتوصـل ليونـارد أويلـر Leonard Euler[2] إلى الحل الغـير متوقع الـذي كان عبارة عن $\pi^2/6$.

(1) (1675 - 1749م) رياضي ويلزي كان قريبا من نيوتن وانضم إلى الجمعية الملكية للعلوم عام 1711.

(2) (1707 - 1783م) عالمم سويسري موسوعي فذ له مساهمات لا حصر لها في مجالات الرياضيات والفيزياء والفلك. سوف نتحدث عنه بتفاصيل أكثر في فصل قادم.

من المثالين الســابقين نستطيع رؤية جمال ما نابع من النظام حتى وإن كنا لا نفهم سر هذا النظام. موقع آخر عجيب نجد فيه «باي» هو في معضلة إبرة بوفون Buffon needle problem، لتقريب المعضلة فلنفترض أن لدينا أرضية عبارة عن ألواح خشبية لها نفس العرض، ثم ألقينا بإبرة، ماذا إذن تكون احتمالية أن تسـقط الإبرة فوق الحد الفاصل بين أي لوحين؟ نسـتطيع أن نرى كيف يختلف هذا المثال جذريا عن المثالين السـابقين ومع ذلك فإن «باي» موجود في المعادلات المؤدية لحل هذه المعضلة.

لم يكتفِ «باي» بنطاق الرياضيات بل انطلق يحلق في سـماء الفيزياء كذلك، حيث نجد «باي» في معادلات النظرية النسـبية العامة لأينشـتاين، ومعادلات وصف الموجات الضوئية والصوتية، كما أننا نجد «باي» أيضا في معادلات هايزنبيج Heisenberg[1] الخاصة بمبدأ عدم اليقـين Uncertainty principle[2] والـذي يعـرّف حقيقة حيوية من حقائـق الكون وهي أن قدرتنا على قياس أي شيء فيه محدودة.

لذا لم يكن صعبا على الكثيرين أن يضعوا «باي» في مكانة عالية تُكسبه بعض من القداسة شـبه الدينيـة، فارتباطه الأصلي بالـ«دائرة» أيـا كان حجمها جعل «باي» حقيقة أساسـية في الكـون، فـ»باي» ثابـت لا يتغير إن كنا نتحدث عن محيط الـذرّة أو الكرة الأرضية أو حتى الكـون كله. لـذا ذهب العديدون إلى أنـه حتى لو كانت هناك حضـارات أخرى في الكون غيرنا، فمن الصعب جدا تصور تقدمهم دون أن يتعثّروا في هذا الرقم.

ربمـا يعـود أيضا سر هالة التقديس هذه إلى الإشـارة إلى «بـاي» في العهد القديم، ففي سـفر الملوك (7:23): «وعمل البحر مسـبوكا عشرة أذرع من شفته إلى شفته وكان مدوّرا مسـتديرا ارتفاعه خمسـة أذرع وخيط ثلاثون ذراعا يحيط به بدائرة»، ومن هذا المقطع نرى وصفا لكيفية تشـكيل سـليمان لبحر في شـكل مسـتدير قطره عشرة أذرع ومحيطه

(1) (1901 - 1976م) فيرنـر هازنـبرج Werner Heisenberg هـو فيزيـائي ألمـاني حصل عـلى جائزة نوبل في الفيزياء عام 1932 لمساهماته في مجال ميكانيكا الكم.

(2) أحد أهم المبادئ الفيزيائية على الإطلاق والذي نشره هايزنبرج سنة 1927. يقول مبدأ عدم اليقين باختصار أننا لا يمكننا أن نقيس بدقة موقع الجسيم وزخم حركته في نفس الوقت.

ثلاثون ذراعا، فإذا حسبنا النسبة بين الرقمين نجدها 3، أي أنها تقريب لا بأس به لقيمة «باي» الحقيقية.

ربما تكون العلاقة أوضح بين المقطع السابق و«باي» إذا تبحرنا قليلا في العالم الغامض الخاص بالحروف العبرية ودلالاتها الرقمية، فكل حرف عبري له قيمة رقمية وتُقاس قيمة الكلمة بالقيمة الرقمية لمجموع حروفها. إذا أعدنا النظر إلى المقطع السابق نجد أن كلمة «خيط» التي ذُكرت فيه تُكتب بالعبرية عن طريق ثلاثة حروف هم: قوف فاف هيه، والقيمة الرقمية لكل حرف هي بالترتيب: 100 6 5، أي أن مجموعهم 111، ولكن الحرف هيه غير مهم لأنه غير منطوق، فإذا حسبنا المجموع الآن بدون هذا الحرف نجد أنه يساوي 106، والآن سنجد شيئا مثيرا وهو أن $\pi/3$ تقترب إلى حد كبير من النسبة 111/106 وإذا حسبنا «باي» بناء على هذه العلاقة نصل إلى تقريب لقيمته وهو: 3.1415094...، وهذا تقريب مدهش للقيمة الحقيقية لـ«باي» لم ينازعه أي تقريب آخر لعدة قرون متتالية. قد يفكر القارئ أن هذا مجرّد زعم ولكني أنبّه أن دقّة الرقم البالغة وكونه ذُكر في هذا المقطع تحديدا الذي يشير إلى «باي» تجعلنا نفكر مرتين قبل أن نصنفه على أنه مجرد زعم لا صحة فيه، وعلى أي حال، فهو بالتأكيد ليس زعما كاذبا لدى اليهود المهتمين خاصة المنتمين لمدرسة الـ«كابالا»[1] المهووسة بمثل هذه الدلالات الرقمية.

نتيجة لما سبق، وصل الكثيرون إلى استنتاج أن «باي» يحمل سر الكون ذاته وأن فيه الإجابات عن أي سؤال يمكن أن يخطر ببال بشري. هذا الزعم يستدل بحقيقة استمرار أرقام «باي» بعد العلامة العشرية إلى ما لانهاية، لذا فهذه السلسلة اللانهائية حتما تحتوي على كل الأرقام التي قد تفسر الكون، بدءا من سرعة الضوء مرورا بعدد الذرات في الكون ووصولا إلى رقم هاتفك الشخصي. مشكلة هذا الاستدلال أنه يعتمد على حقيقة أن «باي» رقم غير نسبي، وهو ليس وحده الذي يتمتع بهذه الصفة، لذا فهذا يُفقد «باي» التميّز المنشود إذ أن نفس القاعدة السابقة تنطبق على كل الأرقام الغير نسبية.

(1) تقليد يهودي صوفي قديم يسعى إلى تفسير الكون وما فيه عن طريق التبحر في المعاني الخفية في الكتب المقدسة.

سواء انتهينا إلى أن «باي» هو سر الكون أم لا، فما لا شك فيه أنه حقيقة واقعة في كل ما حولنا وأنه ظل مثار فضول وخيال الرياضيين وغيرهم الكثيرين الذين منهم المخرج الشهير ألفريد هتشكوك Alfred Hitchcock[1] والذي استعان بـ«باي» في فيلمه «الستارة الممزقة Torn Curtain» من إنتاج سنة 1966. لم يكن هذا الغزو الهوليودي الوحيد لـ«باي» بل ظهر في أفلام ومسلسلات عديدة منها على سبيل المثال فيلم يحمل نفس اسمه «باي Pi» إنتاج سنة 1998 وفيلم «حياة باي Life of Pi» إنتاج سنة 2012 والمأخوذ عن رواية تحمل نفس الاسم كتبها يان مارتل Yann Martel[2].

ولكن لا يوجد أدلّ على تأثير ومكانة «باي» في حياتنا من أنه الرقم الوحيد الذي صار له يوم مخصص في السنة للاحتفال به، والذي تم تحديد تاريخه وتوقيت الاحتفال فيه بالاستعانة بأول ستة أرقام من «باي» نفسه التي هي 3.14159، فالاحتفال يقام يوم الرابع عشر من مارس في الساعة الواحدة وتسع وخمسين دقيقة، أي 3/14 الساعة 1:59. أول مرة تم الاحتفال الرسمي بـ«باي» كان عام 1988 في سان فرانسيسكو والذي تولّى تنظيمه الفيزيائي لاري شو Larry Shaw[3]، بعدها أقر الكونجرس عام 2009 أن الرابع عشر من مارس هو يوم قومي للاحتفال بـ«باي».

من الجدير بالذكر أن عرش «باي» بدأ يُهدّد في الآونة الأخيرة عن طريق منافس جديد هو تاو Tau الذي يساوي ضعف باي أو $2\pi$ ويرمز له بالرمز $\tau$. أنصار تفضيل «تاو» على «باي» يحتجون بأن «باي» هو عبارة عن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها، ولكن القيمة الأكثر فائدة من القطر هي نصف القطر الذي تعتمد عليه معظم الصيغ الرياضية، وكون «تاو» ضِعف «باي» فهو يعبّر عن النسبة بين المحيط ونصف القطر. ليس هذا السبب الوحيد

(1) (1899 - 1980م) مخرج ومنتج بريطاني ويعد أحد أهم المخرجين في تاريخ السينما. من أشهر أفلامه المختل Psycho والطيور The Birds.

(2) كاتب أسباني المولد كندي الجنسية. ولد عام 1988 ومشهور بكتابه حياة باي الذي حصد عدة جوائز وباع حوالي 12 مليون نسخة. من رواياته الأخرى بياتريس وفيرجيل Beatrice and Virgil ونفس Self.

(3) (1939 - 2017م) فيزيائي وفنان أمريكي عمل بمتحف إكسبلوراتوريم Exploratorium بسان فرانسيسكو لمدة 33 عام.

الذي قد يرجّح كفة «تاو» بل أيضا عندما ننظر إلى معظم المعادلات الرياضية التي تستخدم «بـاي» نجدها تتعامل دائما مع $2\pi$ وليس $\pi$، مما يجعل من باب أولى أن نتخلص من «باي» كلية ونستبدله بـ«تاو» الذي هو بالفعل $2\pi$. سبب آخر يتعلق بإزالة البلبلة التي يسببها استخدام «باي» عندما نستخدم الزاوية نصف القطرية radian كبديل للدرجات في قياس الزاوية، نجد أن دورة كاملة، أي $360°$، تساوي $2\pi$، ونصف الدورة ($180°$) يساوي $\pi$ وربعها ($90°$) يساوي $\pi/2$، هذا قد يؤدي إلى الارتباك في بعض الأحيان ويمكن تجنب هذا إذا استخدمنا «تاو» فتصبح الدورة الكاملة عبارة عن $\tau$، ونصف الدورة هي $\tau/2$ أي نصف «تاو»، وربع الدورة هو $\tau/4$ أي ربع «تاو».

دعت الأسباب السابقة بالفيزيائي مايكل هارتل Michael Hartl[1] في 2010 أن يكتب «البيان الرسمي لتاو The Tau Manifesto» ليعبر عن رغبته في استبدال «باي» بـ«تاو» وجعل يوم الثامن والعشرين من شهر يونيو (6/28 الذي يمثل أول ثلاث أرقام من «تاو») هو يوم الاحتفال بـ«تاو». قوبل هذا البيان بالترحاب من قبل العديدين وبالجفاء من قبل آخرين و كان بمثابة شرارة الصراع بين الرقمين. الاهتمام الأكاديمي بهذه المسألة ظهر واضحا في المؤتمر الذي نظمته جامعة أكسفورد العريقة في 2013 و كان عنوانه: «تاو مقابل باي: إصلاح خطأ عمره 250 عام».

الصراع بين «باي» و«تاو» مازال في أول مراحله وليس لنا سوى الانتظار حتى نرى أيهما يخرج منتصرا ليطالب بعرش مملكة الأرقام.

(1) فيزيائي وكاتب أمريكي ولد بولاية كاليفورنيا الأمريكية. درس الفيزياء بجامعة هارفارد ثم حصل على درجة الدكتوراة في الفيزياء النظرية من معهد كاليفورنيا للتكنولوجيا.

# الرقم التخيّلي $i$

لا عزيـزي القارئ، أنـت لم تخطئ قراءة العنوان، فنحن سـوف نتحدث بالفعـل في هذا الفصل عن رقم تخيّلي لا وجود له وسـط الأرقام الحقيقية real numbers، وهو الرقم $i$. لماذا هو تخيلي؟ لأنه ببسـاطة يسـاوي الجذر التربيعي لسـالب واحد أو $\sqrt{-1}$، ونحن أثناء دراستنا لقواعد الرياضيات نعرف أن الجذر التربيعي لرقم سـالب لا حل له، فلا وجود للرقم الذي إذا ضربته مع نفسـه يعطي رقما سالبا، لأنه حتى إذا كان الرقم المراد الوصول إليه سالبا، فحصيلة ضربه مع نفسه، مثل حصيلة ضرب سالبين، سوف تعطينا رقما موجبا.

ربمـا يفكـر القـارئ أن أرقاما، كالأرقام السـالبة مثـلا، كلها تقع تحـت طائلة الأرقام التخيّليـة، فهي لا توجد في الواقع الفيزيائي حولنا، بل هي موجودة فقط في خيال الرياضيين، فأنـت لا يمكنـك أن تقول مثلا: «أريد عددا من التفاح يسـاوي سـالب واحـد»، ولكني أنبّه القـارئ أن التعريـف الريـاضي للرقم على أنه «تخيـلي» يختلف عن هذا المنطـق بعض الشيء، فبالنسـبة للرياضي الأرقام السـالبة تقع في مجال الأرقام الحقيقية حتى وإن لم توجد في العالم الفيزيائي، هذا لأننا إذا وضعنا جميع الأرقام الموجبة على خط ممتد إلى ما لانهاية، يمكننا ببساطة مدّ هذا الخط إلى ما لانهاية كذلك في الجهة المقابلة ليشمل الأرقام السالبة. نفس الشيء ينطبق على الأرقام النسبية والغير نسبية، فهذه الأرقام كلها لها مكان حتما على خط الأرقام الحقيقية هـذا، أما $i$ فهو بتعريفه غير موجـود في أي مكان على هذا الخط. ليس وحده $i$ هو الذي لديه تلـك الخاصية، بل إنه يوجد عدد لا نهائي من الأرقام التخيّلية التي يمكن أن نسـتخلصها جميعا من $i$ نفسـه، فإذا ضربنا $i$ و 2 مثلا سـوف نحصل على 2 وهو رقم تخيّلي كذلك، ويمكن تطبيق نفس القاعدة على باقي الأرقام إلى ما لانهاية.

الحـيرة التـي غالبا مـا أصابت القـارئ وهو يحاول التفكـير في هذا الرقم ليسـت فريدة

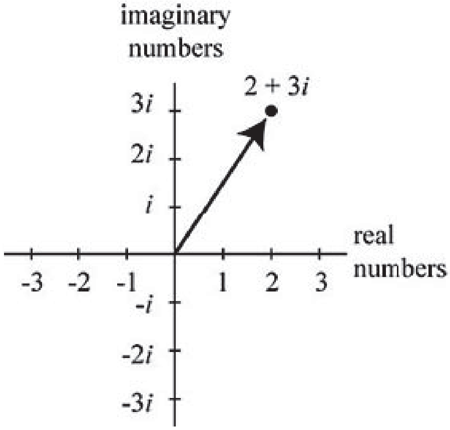
مـن نوعها، بـل أصابت الكثيرين من قبل ومنهم ألمع العقـول البشرية على الإطلاق، فقد قدّم المهنـدس الإيطـالي رفائيل بومبيللي Rafael Bombelli[1] مصطلـح 1 - √ للمرة الأولى وعرّف كيفية التعامل معه من حيث العمليات الحسـابية كالجمع والطرح والضرب والقسمة، ولكن لم يقبـل الرياضيون الرقم الجديد بالترحاب بل واجهوه بالشـك المتحـيّر الذي أدى بمعظمهم إلى رفـض تصديـق إمكانية وجود هذا الرقم في الحسـابات الرياضية فضـلا عن أن يكون له أي فائدة حقيقية. أحد هؤلاء المشككين كان العالم الفذ رينيه ديكارت Rene Descartes[2] والذي كان أول من أطلق اسـم «تخيّلي» على هذا الرقم من باب الاسـتهزاء دون أن يعرف أن هذا الاسم سيظل ملاصقا لـ $i$ إلى يومنا هذا.

لم يتم تقبّل $i$ أو اسـتخدامه على نطاق واسـع حتى جاء فذّ آخر هو ليونارد أويلر الذي كان أول مـن اسـتخدم الرقـم التخيّلي $i$ على نطاق واسـع في معادلاته ووجد أنـه مفيد للغاية للوصـول إلى حلول للمسـائل الصعبة بسـهولة. كما أن أويلر كان هـو أول من أعطى الرمز $i$ للإشـارة إلى 1 - √، وقـد اسـتخدم هذا الرمز لأنـه الحرف الأول من كلمة تخيّـلي باللاتينية imaginarius.

تلى التطور الذي أدخله أويلر على $i$ تطور آخر لا يقل أهمية جاء عن طريق كاسـبار ويسيل Caspar Wessel، فقد كان هو أول من يضع توصيفا هندسيا لـ $i$ بأن وضعه كنقطة على مسـطح مشـترك مع خط الأرقـام الحقيقية ليكوّنوا سـويا مجال «الأرقـام المركّبة» (شـكل 1)، وبهذا نجح في إزالة الكثير من الغموض الذي اقترن بهذا الرقم وسـهّل عملية التعامل معه.

(1) (1526 - 1572 م) ولد بمدينة بولونيا واهتم كثيرا بالجبر واجتهد ليكتبه بطريقة سهلة مفهومة للعامة.

(2) (1596 - 1650م) رياضي وفيلسوف فرنسي من أبرز علامات عصر التنوير الأوروبي. يعتبر كتابه «تأملات في الفلسـفة الأولى Meditations on First Philosophy» من أهم الأعمال الفلسفية على الإطلاق وأكثرها تأثيرا. من مساهماته الرياضية أنه أول من ربط بين علمي الجبر والهندسة واخترع الإحداثيات الديكارتية Cartesian coordinates التي لازلنا نستخدمها إلى الآن.




**شكل** 1

الرياضيون كانوا سعداء بما توصلوا إليه من القدرة على التعامل مع $i$ بسهولة لأداء العمليات الحسابية ومعظمهم لم يشغل باله بالبحث عن المعنى الحقيقي لوجود مثل هذا الرقم، ولكن الاتهامات العديدة التي انهالت عليهم والتي شبهتهم في إيمانهم بهذا الرقم بالمتدينين والشعراء في تصوفهم دفعت ببعضهم إلى البحث العميق عن المعنى الحقيقي لـ $i$، وهكذا انضموا إلى الفلاسفة الذين لم يكونوا بحاجة لأن يستفزهم أحد حتى يفكروا هم أيضا في هذا الرقم العجيب. وجد هؤلاء أن التساؤل الأهم هو بالتأكيد: هل $i$ رقم حقيقي أم لا؟ الرياضيون سبق أن صنفوه على أنه رقم غير حقيقي لأنه لا يوجد فوق خط الأرقام الحقيقية، فهو مجرد رمز لقيمة غير موجودة، وعزّز هذا التصاق اسم «تخيلي» بهذا الرقم، ولكن المشكلة في هذه الفرضية أننا نستطيع بعملية بسيطة للغاية أن نعيد $i$ إلى مصاف الأرقام الحقيقية، فنحن إن أخذنا تربيع $i$ سنحصل على 1 - الذي هو بالتأكيد أحد الأرقام الحقيقية، فهل من المنطقي أن يتحول «الغير حقيقي» إلى «حقيقي» بعملية بسيطة، أو حتى بأي عملية على الإطلاق؟ الفيلسوف اليوناني بارمينيدس Parmenides[1]، الذي ينتمي لحقبة ما قبل سقراط، سوف يعترض بشدة على هذا، فهو صاحب مقولة: «لا شيء يمكن أن يأتي من لاشيء».

(1) فيلسوف يوناني من الفترة الماقبل سقراطية. عاش في إيليا بين القرنين السادس والخامس قبل الميلادي وأسس مدرسة إيليا في الفلسفة.

إذن فكيف نفسر «عدم وجود» $i$ وفي نفس الوقت نقول باحتمالية وجوده تحت ظروف معينة؟ ربما تكمن الإجابة في فيزياء الكم Quantum Physics والتي تحدد قوانين الأشياء المتناهية الصغر في الكون مثل الذرة وما تحتها، فطبقا لقوانين فيزياء الكم، أي جسيم تحت ذري كالإليكترون لا يوجد في مكان محدد قبل أن يرصده المراقب، لأنه قبل مرحلة الرصد يكون عبارة عن «موجة احتمالات» فيمكن أن يكون في بقعة معينة أو غيرها، بل من الممكن حتى أن يكون في الجانب الآخر من الكون، ولكن «موجة الاحتمالات» هذه تنهار فور أن يتم رصد الإليكترون وعندها نراه في بقعة محددة. هذا معناه أن «حقيقة» وجود الإليكترون في الموقع الذي نرصده فيه يتأتّى فقط بعملية الرصد ذاتها، فقبل هذه العملية لا توجد حقيقة محددة لموقع هذا الإليكترون وهذا ما يدعى «تأثير الراصد observer effect». قد تكون هذه الفكرة عجيبة وغير مستساغة من قبل البعض ولكن التجارب المعملية أثبتت حقيقة هذه الفكرة مع ما يحمله هذا من تبعيات على الكون كله، فإذا كانت الجسيمات الدقيقة التي تكوّن كل شيء تتصرف بهذه الكيفية، معنى هذا أن الكون نفسه لا يتصرف بالطريقة التقليدية المطلقة التي كنا نتوقعها.

المهم أن فرضية فيزياء الكم السابقة يمكن تطبيقها على $i$ ، فمثل الإليكترون الذي لا توجد له حقيقة محددة قبل عملية الرصد، يمكننا بالقياس القول بأن $i$ غير موجود حتى نجري عليه عملية حسابية ما. بهذا التفسير يصبح «عدم وجودية» $i$ غير مطلق، بل هو مجرد إحدى الاحتمالات في «موجة احتمالات» $i$ ، وبهذا يرتقي من كونه غير حقيقي إلى كونه في مرحلة متوسطة بين الحقيقي والمُتخيّل. عبّر ليبنيز عن هذا الرأي بمقولته الشهيرة عن $i$:»هو تحليق رائع لروح الله، فهو بمثابة الكائن البرمائي القابع بين الوجود وعدمه».

رغم التفسير السابق لحقيقة $i$ إلّا أن الجدل مازال قائما حول هذا الرقم ولا يبدو أنه سينتهي قريبا، لكن حتى لو لم نكن متأكدين مما إذا كان $i$ حقيقيا أم لا، فلا شك أن تأثيره على البشرية حقيقي للغاية، فلا استغناء عنه في حسابات الدوائر الكهربائية أو النظرية النسبية، بل إن فيزياء الكم لم يكن ليصبح لها وجود دون $i$. كذلك يُستخدم $i$ في رسم الأشكال الكسورية Fractals الرائعة. أترك الحكم للقارئ بعد هذا العرض على منطقية أن نعزي كل هذه الإنجازات «الحقيقية» إلى رقم «تخيلي».

# رقم أويلر $e$

إذا ذهبت إلى البنك وفتحت حسابا ووضعت فيه جنيها واحدا وأنت تعرف أن البنك يعطي فائدة سنوية مركبة compound interest مقدارها 100 % ثم أردت أن تحسب المبلغ الذي سوف تحصل عليه بعد عام، فكيف تفعل هذا؟ عليك أن تعرف أولا المعدل الذي يعطي به البنك فائدة الـ 100 % هذه، فإذا كانت مرة واحدة في السنة سوف يكون المبلغ في حسابك آخر العام هو 1 + 1 أي جنيهين، وإذا كان مرتين في السنة تجد أنك ستحصل على 50 % أو 0.5 من الجنيه زيادة مرتين أي $(1 + 1/2)^2$، فيصبح المبلغ آخر العام 2.25 جنيه، أما إذا كان أربع مرات تصبح المعادلة $(1 + 1/4)^4$ ويصبح المبلغ آخر العام 2.44140625 جنيها. إذا استمرينا على هذا المنوال نجد أن المعادلة لحساب المبلغ إذا كان معدل الصرف شهريا هي $(1 + 1/12)^{12}$ وإذا كان يوميا تصبح $(1 + 1/365)^{365}$ ويكون المبلغ المحصّل في نهاية العام في الحالة الأولى هو 2.61303529022 جنيها وفي الثانية 2.71456748202، من هذه الحسبة نجد أن باستطاعتنا الخروج بصيغة لحساب المبلغ المحصّل أيا كان معدل الفائدة وهذه الصيغة هي:

$(1 + 1/n)^n$، حيث n هو عدد مرات التحصيل.

مما سبق يمكننا أيضا ملاحظة شيء هام وهو أنه كلما زاد عدد مرات التحصيل زاد المبلغ ولكن هذه الزيادة ليست ثابتة بل هي آخذة في النقصان فتجعل المبلغ المحصّل يقترب شيئا فشيئا من رقم معين، حتى إذا أصبح عدد مرات التحصيل عددا لانهائيا، نجد أن المبلغ الذي سوف نحصل عليه هو تقريبا 2.718281828459045... وهذا هو الرقم الذي نتحدث عنه في هذا الفصل، رقم أويلر الذي يُرمز إليه بالرمز $e$ والذي يعده الكثير من الرياضيين ثاني أهم الأرقام على الإطلاق بعد «باي».

الفضل في اكتشـاف هذا الرقم يعود إلى الرياضي جايكوب برنولي Jacob Bernoulli[1] سـليل عائلة برنولي الشـهيرة التي أفرخت العديد من الرياضيين الأفذاذ، فعن طريق دراسته للفائدة المركبة توصل إلى $e$ بنفس الطريقة التي سبق وشرحناها.

رغم أن برنولي كان هو مكتشف $e$ إلا أن هذا الرقم يطلق عليه اسم «رقم أويلر»، نسبة إلى الرياضي العبقري الآخر ليونارد أويلر. تحدثنا عن أويلر من قبل ولكن وجب علينا عندما نتحدث عن الرقم الذي يحمل اسمه أن نتبحر قليلا في سيرة هذا الرياضي الفذ.

ولد أويلر في سـويسرا سـنة 1707 ومنذ نعومـة أظفاره كان بادي الـذكاء، تتلمذ لفترة على يـد يوهـان برنـولي Johan Bernoulli[2]، الشـقيق الأصغـر لجايكوب برنولي، ومنـه تعلم حب الرياضيات. فضل برنولي على أويلر لم يقف عند تعليمه الرياضيات فحسب، بل لقد تدخّل ليقنع أبا أويلر بأن يعدل عن قراره بأن يُلحق ابنه بسلك القساوسة لقناعته أنه سيكون رياضيا عظيما.

حاول أويلر الحصول على منصب في جامعة بازل السويسرية دون جدوى فترك سويسرا إلى سـانت بطرسـبرج[3] ومنهـا إلى برلين[4] ثم أخـذ يتنقل بين الثلاث أماكـن إلى أن مات في سانت بطرسبرج سنة 1783 نتيجة لنزيف مخي مفاجئ.

لم يكـن أويلر رياضيا فحسـب بـل كان أكثر من هـذا بكثير، ونلاحـظ ذلك في تنوع المشروعـات التي تولاهـا في مناصبه العديدة، فلـه أعمال في البصريات والمغنطيسـية وعمل المحركات وصناعة السـفن ونظرية الموسـيقى ورسـم الخرائط، وكان هـذا العمل الأخير هو الذي لامه أويلر على ضعف بصره ولكن ربما يكون السـبب في هذا الحمى الشـديدة التي كادت تودي بحياته سـنة 1735. أيا كان السـبب فقد استمر بصر أويلر في الضعف حتى فقد البصر تماما في إحدى عينيه.

(1) (1654 - 1705م) رياضي سويسري من عائلة برنولي. يُعد عمله في نظرية الاحتمالات من أشهر مساهماته فقد سُميت التجربة ذات الاحتمالين: نجاح وفشل، باسم تجربة برنولي Bernoulli trial نسبة له.

(2) (1667 - 1748م) الشـقيق الأصغـر لجايكـوب برنـولي ولـه مسـاهماته مـع أخيـه في حسـاب التفاضـل والتكامل.

(3) ثاني أكبر المدن الروسية.

(4) أكبر المدن الألمانية وعاصمتها الحالية.

لم يؤثر ضعف بصر أويلر على إنتاجه بل ما حدث هو العكس، فقد زاد إنتاجه بشكل ملحوظ بدليل أنه في العام 1775 كان إنتاجه يسير بمعدل ورقة بحثية رياضية في الأسبوع. ربما ساعده على ذلك ذاكرته الفوتوغرافية التي استعاض بها عن ضعف بصره، فقد كان معروفا عنه أنه يجري المعادلات - حتى الطويلة المرهقة منها - في رأسه دون الحاجة إلى كتابتها، كما أنه كان يستطيع ترديد ملحمة الإنيادة لفرجيل كاملة دون أي خطأ بل مع تحديد أي السطور يقع في أول الصفحة وأيها في آخرها.

مساهمات أويلر في مجال الرياضيات أكثر من أن تحصى ولكننا معنيون هنا بالرقم الذي نُسب إليه، $e$، فأويلر كان أول من أثبت أن $e$ هو رقم غير نسبي أي أن أرقامه بعد العلامة العشرية تستمر إلى الأبد، وهو أول من استخدم الرمز $e$ للإشارة إلى هذا الرقم، كما أنه توسع في فحص $e$ وأظهر الإمكانيات العديدة الكامنة له.

نناقش الآن سر أهمية $e$ والحقيقة أنه يشبه «باي» في نواحٍ عدة منها أنه رقم غير نسبي متعالٍ ويظهر في العديد من المجالات التي لا علاقة ظاهرةً بينها، فبالإضافة إلى أنه يظهر في حسابات الزيادة المركبة سواء كنا نتحدث عن الأموال أو نمو البكتيريا، هو أيضا يظهر مثلا في الأشكال الهندسية السلسالية catenary shapes والتي بُني قوس سانت لويس الشهير بميسوري على هيئتها، هو يظهر أيضا مع «باي» في معادلة التوزيع الطبيعي normal distribution الذي يُعد التوزيع الأشهر في الرياضيات لأن بإمكانه وصف توزيع العديد من الأشياء مثل أطوال الناس أو نسبة الخطأ في القياسات أو مستوى ضغط الدم إلخ...

أما في العمليات الحسابية فإن $e$ يتميز بقدرته الخرافية على تسهيل إجراء الحسابات المعقدة خاصةً في حساب التفاضل والتكامل، فإن الرقم $e^x$ هو الرقم الوحيد في الكون الذي إذا حسبت تفاضله أو تكامله تحصل على الرقم $e^x$ نفسه. خصائص $e$ الفريدة في العمليات الحسابية كذلك جعلت له قسما خاصا في اللوغاريتمات تُدعى اللوغاريتمات الطبيعية natural logarithms والتي هي اللوغاريتم الذي قاعدته $e$ ويُرمز له بـ $log_e$ أو $ln$ والذي نستطيع إيجاده في أي آلة حاسبة.

دفعت صفات $e$ السـابقة إلى إضفاء لمسـة صوفية عليه وإلى وضعه بجوار «باي» كأحد أسرار الكون، وربما عزز هذا الاعتقاد أن إحدى طرق حساب $e$ هي:

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots$$

فمن هذه المعادلة المبنية على سلسـلة لانهائية نلمس نظاما بديعا رأيناه في حسـاب «باي» من قبل، ومثل هذا النظام يدفعنا دفعا إلى الاعتقاد في سـمو معنى مثل هذه الأرقام فوق العالم الحسي.

ذهـب البعض حتى إلى أبعـد من وضع $e$ في مرتبة تالية لـ«باي» ليضعوه في المرتبة الأولى بين الأرقام. من هـؤلاء الكاتب العلمي البريطاني ديفيد دارلينج David Darling(1) الذي قال عن $e$:

«ربمـا يكون هو الرقم الأهم في الرياضيات، فعلى الرغم من أن «باي» مألوف أكثر لدى الإنسان العادي، إلا أن أهمية $e$ بالنسبة للرياضي هي أكبر وأكثر شمولية من «باي»».

آن الأوان الآن وبعد أن تحدثنا عن خمسـة من أهم الأرقام على الإطلاق وهم 1 و0 وباي والرقـم التخيـلي $i$ و$e$ أن نذكر المعادلة التي تجمعهم سـويا والتي أعدهـا الرياضيون المعادلة الأجمل على الإطلاق وهي:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

ليس مستغربا أن يكون أويلر هو نفسه من توصل إلى هذه المعادلة المذهلة بكل المقاييس والتي سـميت «هوية أويلر Euler identity» نسـبة له، فهذا الرجل كانت لديه قدرة عجيبة عـلى وصل أفرع كثيرة مـن الرياضيات ببعضعها البعض، وهـذه المعادلة هي نتاج ضم علوم الحساب والتفاضل والتكامل وحساب المثلثات والأرقام المركبة.

ننظر الآن إلى المستحيلات التي جمعتها هذه المعادلة التي بناء عليها نجد أننا إذا طرحنا 1 من الجانبين نحصل على:

(1) هو فلكي وكاتب بريطاني له مؤلفات تبسـط الأفكار العملية للقارئ وأشهرها كتابه « كتاب الرياضيات الكوني The Universal Book of Mathematics».

$$e^{i\pi} = -1$$

أي أننا نرفع رقما موجبا غير نسبي وهو $e$ إلى أس مكون من رقم موجب غير نسبي آخر وهو $\pi$ مضروبا في رقم تخيلي وهو $i$ فنحصل على رقم سالب نسبي وهو 1-. الأسئلة عديدة هنا وتدير الرأس، فكيف أدى الجانب الأيسر من المعادلة إلى رقم سالب؟ وما معنى أن نرفع إلى أس به رقم غير نسبي ونحن نعرف أن الأس هو عدد مرات تكرار الأساس، فعلى سبيل المثال $3^2$ معناها $3 \times 3$ أي تكرار 3 مرتين وهو الأس في المعادلة إذن كيف نكرر رقما ما عددا من المرات لا نعرفه؟ ثم السؤال الأغرب وهو ما معنى أن نرفع إلى أس به رقم تخيلي؟

حيرت هذه الأسئلة الكثيرين ومن هؤلاء بنجامين بيرس Benjamin Pierce[1] أستاذ الرياضيات السابق بجامعة هارفارد الذي قال عن هذه المعادلة:

«نحن لا نفهمها ولا نعرف معناها ولكننا أثبتناها مما يعني أنها حتما تمثل الحقيقة».

ما لا شك فيه هو أن غموض هوية أويلر هو أحد أسباب جمالها وهو يدفعنا دفعا لإعادة التفكير في منطقنا في فهم الواقع الذي لم يتصادم مع الحقائق الرياضية قط دون أن ينهزم أمامها.

قبل أن نترك هذه المعادلة الرائعة دعونا نتذكر ما قلناه عن الصراع على عرش الأرقام الدائر بين $\pi$ و$\tau$، فأحد الأسباب التي يطرحها أنصار $\tau$ لترجيح كفته أمام $\pi$ تتعلق بهذه المعادلة، فهم يقولون أنها تصبح أجمل إذا استبدلنا $\pi$ بـ $\tau$ ليصير شكل المعادلة:

$$e^{i\tau} = 1$$

وهم يؤكدون أيضا أن هذه المعادلة أكثر استساغة من المعادلة السابقة نظرا لبعض الاعتبارات الهندسية المعقدة التي لن نتوغل فيها. يرد أنصار $\pi$ على هذا بأن المعادلة الأخيرة ليست الأجمل، فهي لا تضم واحدا من الأرقام الخمسة الأهم وهو الرقم «صفر»، لكن أنصار $\tau$ يجيبون بخبث: «تريدون الصفر إذن!! لا مشكلة هنالك».. ثم يكتبون معادلة $\tau$ بهذا الشكل:

(1) (1809 - 1880م) رياضي أمريكي درّس بجامعة هارفارد لمدة خمسين عاما. عمله في مجال الرياضيات شمل حركة الأجسام الفلكية والجبر وفلسفة الرياضيات.

$$e^{i\tau} = 1 + 0$$

وهكـذا يظنون أنهم أفحمـوا خصومهم.. ولكن هيهـات.. فكما قلنا سـابقا.. الصراع مازال في بدايته ولا يبدو في الأفق أنه سينتهي قريبا.

# رقم الوحش 666

> «فليحسب من لديه الفهم رقم الوحش، فهو رقم إنسان وهذا الرقم هو ستمائة وستة وستون».
>
> هكذا ذُكر الرقم 666 على أنه رقم «الوحش» في كتاب الوحي Book of Revelation (13:18) الذي يطلق عليه أيضا اسم كتاب نهاية العالم

Apocalypse، فطبقا للكتاب الذي يصف رؤيا يوحنا البطمسي John of Patmos هذا الوحش يخرج من الماء ثم يجمع ملوك الأرض للمعركة الأخيرة التي ستنهي كل شيء. يمكننا بناء على هذا فهم سر السمعة السيئة التي اكتسبها هذا الرقم، ولكن يبقى السؤال وهو لماذا تم اختيار الرقم 666 كعلامة لهذا الوحش؟ لمعرفة القصة كاملة ولوصل النقاط علينا أن نزور الحقبة التاريخية التي كُتب فيها كتاب الوحي.

اختُلف حول التاريخ المحدد لكتابة كتاب الوحي ولكن معظم الباحثين يرون أنه كتب في عام 95 بعد الميلاد على يد يوحنا البطمسي، وجدير بالذكر هنا أن الاعتقاد السائد لفترة كان أن يوحنا هذا هو نفسه القديس يوحنا الحواري ولكن أغلب الباحثين الآن مقتنعون بأنه كان شخصا مختلفا نظرا للاختلاف الواضح بين طريقة كتابة كتاب الوحي وإنجيل يوحنا الثابت انتمائه إلى يوحنا الحواري، وقد تم تسمية يوحنا كاتب كتاب الوحي بـ«يوحنا البطمسي» نسبة إلى جزيرة بطمس اليونانية التي نُفي إليها. إذن فكتابة هذا الكتاب تمت في عهد الامبراطور الروماني دوميتيان Domitian[1]، وفي هذا الوقت كانت الامبراطورية

(1) (51 - 96م) تولى دوميتيان حكم المملكة الرومانية بعد مقتل أخيه تيتوس عام 81م وظل في الحكم لمدة خمسة عشر عام حتى تم اغتياله. حاول مجلس الشيوخ الروماني طمس ذكرى دوميتيان ورسم صورة مخيفة لحكمه ولكن المدققين أعطوه الفضل في التقدم الحضاري والاقتصادي الذي مر بروما في القرن الثاني الميلادي.

الرومانية الوثنية آنذاك هي سيدة العالم وكانت المسيحية تتحسس طريقها في سبيل الانتشار فكان من الطبيعي أن يحدث الصدام، بالفعل حدث هذا الصدام عن طريق الاضطهاد الممنهج الذي لاحق المسيحيين منذ بداية المسيحية والذي فقد بسببه العديد منهم حياتهم. استمر هذا الاضطهاد حتى جاء الامبراطور قسطنطين Constantine[1] الذي أعطى الشرعية للديانة المسيحية عام 313م.

المصدر الأول لهذا الاضطهاد كان العامة الذين لم يعجبهم رفض المسيحيين المشاركة في المناسبات الدينية الوثنية والتي كانت تقام على الملأ مما أثار مشاعر السخط عليهم خاصة نتيجة للاعتقاد الذي كان لايزال قائما بأن الآلهة تغضب إذا لم يتم احترامها بالشكل الذي يليق بها وما فعله المسيحيون من مقاطعة مراسم العبادة كان بالتأكيد بمثابة الإهانة لتلك الآلهة. ما زاد الطين بلة هو طبيعة مراسم العبادة المسيحية التي تتسم بالخصوصية والسرية مما أطلق العنان لخيال العامة كي ينسجوا كل أنواع الأساطير حول هذه المراسم، فقد انتشرت الإشاعات بأن المسيحيين يقومون بأشياء رهيبة مثل أكل لحوم البشر وممارسة زنى المحارم.

تأثر حكام المقاطعات بسخط العامة ضد المسيحيين، فانصاعوا لرغبات هؤلاء العامة لمحاولة اتقاء أعمال شغب قد تؤثر على مكانتهم أو تجلب عليهم سخط الامبراطور، لكن كان هناك سببا آخر أكثر مباشرة دعا حكام المقاطعات لاضطهاد المسيحيين وهو أن الحاكم كان يُعتبر حاميا لأسلوب حياة الرومانيين وتقاليدهم، لذا فقد كانت مقاطعة المسيحيين لهذه التقاليد اعتداء سافرا على سلطات الحاكم وتقليلا من شأنه.

كان الاضطهاد موجودا كما ذكرنا منذ بداية المسيحية ولكنه بلغ مرحلة متجاوزة في العام 64 م، في عهد الامبراطور نيرون Nero[2]، ففي هذا العام حدث حريق روما الكبير

(1) (272 - 337م) قسطنطين العظيم هو أول إمبراطور روماني يعتنق المسيحية وله فضل كبير في نشر المسيحية في الإمبراطورية الرومانية، ففي عام 313م ساهم في إصدار مرسوم ميلان التاريخي الذي فيه حث على معاملة المسيحيين معاملة طيبة. لهذا تعتبره الكثير من الكنائس العريقة قديسا.

(2) (37 - 68م) أحد أشهر الأباطرة الرومان وكانت فترة حكمه بين 54 - 68م. تبناه عمه الأكبر كلوديوس وخلفه في الحكم بعد وفاة هذا الأخير الذي يُعتقد أن لأم نيرون دور فيه. ظلت أمه مسيطرة على نيرون في بداية حكمه ثم استقل عنها ونفاها وأخيرا أمر بقتلها. الذي اشتهر عن نيرون هو أنه كان طاغية فاسد=

الذي استمر ستة أيام ودمر العديد من الممتلكات بالمدينة مخلفا أزمة اقتصادية حادة. يقال أن بعض الأصوات بدأت تتعالى بأن نيرون هو من بدأ الحريق كي يسلي نفسه أو كي يفسح المجال لتوسعة قصره وأن هذا الأخير استغل كره العامة للمسيحيين كي يلقي لوم الحريق عليهم فيدفع عن نفسه الاتهامات، بالفعل استجاب العامة بصدر رحب وبدأت موجة قاسية من الاضطهاد تنوعت بين النفي والتعذيب والقتل الذي كانت إحدى وسائله إلقاء المسيحيين إلى الوحوش.

مرت السنين ثم تولى الحكم الامبراطور دوميتيان في العام 81م والذي ثار الخلاف حول مدى الاضطهاد الذي نال المسيحيين في عهده، فكثير من المؤرخين يرون أن الاضطهاد كان في أوجهه في عهد هذا الامبراطور في حين أكد البعض أن الأدلة بخصوص هذا الأمر متضاربة ولا يعتمد عليها. المهم أن الأغلبية مجمعة على أن يوحنا البطمسي تم نفيه في عهد دوميتيان إلى جزيرة بطمس التي كتب فيها هذا الأول كتاب الوحي.

بعد هذه المقدمة التاريخية السريعة علينا كي نفسر علاقة الرقم 666 بـ«الوحش» المذكور في كتاب الوحي أن نستعرض المدارس الأربع المختلفة في تفسير هذا الكتاب، المدرسة الأولى تدعى مدرسة البريتيريست preterist وهي تقول أن الأحداث الواردة في كتاب الوحي هي حدثت بالفعل وانتهت في القرن الأول الميلادي، وبناء على وجهة النظر هذه فهم يفسرون الوحش بأنه الامبراطورية الرومانية وبالتحديد الإمبراطور نيرون وأن الرقم 666 هو شفرة الهدف منها الوصول إلى نيرون، اعتمدوا في ترجمة الرقم على نظام الجماتريا gematria وهو نظام منتشر في الثقافة اليهودية ويعتمد على أن لكل حرف في جملة ما ما يقابله من الأرقام، ويتبع أنصار المدرسة البريتيريستية هذه الطريقة لتحويل الترجمة العبرية لاسم نيرون ولقبه «القيصر نيرون Nero Caesar» إلى أرقام ثم جمع هذه الأرقام فيصبح المجموع 666، يستند أنصار هذه المدرسة على عدة أدلة لتبرير تفسيرهم هذا أولها نص الآية الواردة في أول هذا الفصل التي تشير إلى أن «الرقم هو رقم إنسان» وطالبت بأن يحسب القارئ هذا الاسم،

= أحرق روما ليفسح مجالا لتوسعة قصره ثم ألقى اللوم على المسيحيين. بعد القراءات المعاصرة ترسم صورة أقل قسوة لنيرون وتكشف أنه كان محبوبا في بعض بقاع الإمبراطورية.

مـن الأدلـة أيضا في نفـس الكتاب (17:9) يتم وصف السـبع رؤوس لهذا الوحش أنها سـبعة تلال وأنها سبعة ملوك كذلك، خمسة منهم سقطوا وواحد مازال وواحد قادم ولكنه لن يظل طويلا، يفسر البريتيريستيون الخمسة ملوك الذين سقطوا بأنهم يوليوس Julius[1]، وأغسطس Augustus[2]، وتايبيريوس Tiberius[3]، وكاليجـولا Caligula[4]، وكلوديوس Claudius[5] وأن خامسهم الذي مازال هو نيرون الذي أتى بعده جالبا Galba[6] والذي ظل في الحكم بضعة شـهور فقط، هذا بالإضافة إلى أن روما كانت معروفة بأنها المدينة ذات الـ«تلال السـبعة». مذكور أيضا في كتاب الوحي (13:5) أن الوحش سيسـتمر لمدة اثنين وأربعين شـهرا، والمدة بين اضطهاد نيرون للمسـيحيين في م64 إلى أن مات في وسـط العام م68 أي حوالي ثلاثة أعوام ونصف التي تساوي اثنين وأربعين شهرا. من الجدير بالذكر هنا أنه في عام 2005 تم اكتشاف بردية تدعى «البردية 115» تحتوي على أقدم نص لكتاب الوحي وفيها ذُكر رقم الوحش على أنه 616 وليس 666، لكن جاء تفسير يقول بأننا إذا ما ترجمنا اسم القيصر نيرون من اللاتينية (بـدلا من اليونانية) إلى العبرية فسـوف نحصل على الرقم 616، وبمـا أن قدم البردية لا يقول شـيئا عن قدم النـص ذاته، فربما كتبـت هذه البردية في تاريخ حديث نسـبيا ثم ظن الناسـخ الأكثر معرفة باللاتينية أن هناك خطأ ما لأن مجموع اسـم نيرون باللاتينية لا يساوي 666 إذا تمـت ترجمته إلى العبريـة، بل الرقم الصحيح هو 616 ومن هنا جـاء تغيير الرقم، المهم أن من يؤمنـون بأن الرقـم الحقيقي للوحش هو 616 عددهم قليل جـدا وأن الرقم 666 هو صاحب اليد العليا في هذا الشأن.

---

(1) (100 - 44 ق.م) يوليوس قيصر الجنرال الروماني الشهير ذو الدور المحوري في تحول الجمهورية الرومانية إلى إمبراطورية.

(2) (63 ق.م - 14م) ابن يوليوس قيصر بالتبني وأول الأباطرة الرومان.

(3) (42 ق.م - 37م) ابن أغسطس بالتبني.

(4) (12 - 41م) تقـول المصـادر أن كاليجـولا كان عـادلا في بداية حكمه لنه سرعان ما تحـول إلى طاغية ذي نزوات منحرفة.

(5) (10 ق.م - 54م) عـم كاليجـولا والعم الأكبر لنيرون الذي على الأرجح قُتل على يد أم نيرون ليخلو الحكم لابنها.

(6)(3 ق.م - 69م) كان أكبر الأباطرة سنا عند توليه الحكم الذي لم يستمر أكثر من سبعة أشهر.

الآن نتحدث عن أهم مشكلة تواجه أنصار المدرسة البريتيسيرية، وهي أنهم يقولون بأن أحداث كتاب الوحي انتهت بتدمير الهيكل الثاني بالقدس عام 70 م (الهيكل الأول هو هيكل سليمان الذي دمره البابليون عام 586 ق.م) وهذا التاريخ هو قبل التاريخ المعتمد لكتابة كتاب الوحي الذي هو عام 95 م فكيف إذن تكون رؤيا وهي قد حدثت بالفعل؟ يدافع هؤلاء عن وجهة نظرهم بأن قالوا أن الكتاب حتما تمت كتابته قبل هذا التاريخ بل قبل موت نيرون عام 68 م حتى يتطابق تفسيرهم مع النص خاصة النقطة المتعلقة بأن الملك الذي مازال المشار إليه في النص هو نيرون، ولكن تظل المشكلة وهي عدم وجود الأدلة التاريخية الكافية التي تدعم كتابة كتاب الوحي في هذا التاريخ المتقدم.

المدرسة الثانية تدعى المدرسة التاريخانية historicist القائلة بأن النبوءات في الإنجيل تتعلق بأحداث تاريخية لها علاقة بالكنيسة، والإصلاح البروتستانتي يتبنى وجهة النظر هذه بشكل عام التي بناء عليها فإن الوحش هو النظام البابوي. يلجأ أنصار هذه المدرسة إلى نفس نظام الجماتريا لترجمة اسم الوحش ولكنهم يلجأون إلى نوع خاص بأن يجمعوا الأرقام اللاتينية الممثلة في الاسم (فالأرقام اللاتينية ممثلة بحروف مثل I التي تعني 1 وV التي تعني 5) وبإتباع هذه الطريقة تمكنوا من جمع الأرقام التي تمثل الكلمة اللاتينية Vicarius Filii Dei والتي تعني «ممثل ابن الله» الذي كان لقب القديس بطرس Saint Peter[1]، أول بابا للكنيسة الكاثوليكية، والذي استمر بعده فوجدوا أن المجموع هو ذاته الرقم الكئيب 666.

ننتقل الآن إلى المدرسة الثالثة وهي المدرسة المستقبلية futurist والتي ترى أن أحداث كتاب الوحي هي أحداث مستقبلية لم تحدث بعد وهم يفسرون الوحش بأنه الامبراطورية الرومانية التي ستدب فيها الحياة في آخر الزمان والتي سيقودها المسيح الدجال Antichrist في حربها النهائية ضد المسيحيين، ولكن هذه المدرسة لا تقدم تفسيرات واضحة للرقم 666 غير أنه سيكون علامة يُعرف بها المسيح الدجال.

(1)(1 - بين 64 و68م) أحد أهم الحواريين ويذكر العهد الجديد أنه ولد بقرية تُدعى بيت صيدا حيث كان صيادا. يعتبره الكثيرون أول أسقف للكنيسة الرومانية والمتداول عن موته أنه حدث في عهد نيرون وأنه تم صلبه مقلوبا بناء على طلبه لأنه لم يجد أنه يستحق أن يُصلب بنفس طريقة صلب المسيح.

المدرسـة الأخيرة هي المدرسـة المثالية idealist التي تعلي الرمزية فوق كل شيء فأنصار هذه المدرسة يقولون أن الإشارات الموجودة في كتاب الوحي هي إشارات رمزية غير متعلقة بأحـداث أو بأشـخاص بعينهم، لذا فتفسـيرهم للـ«وحش» هو أنه أي مملكـة تقف أمام الله وإحـدى هذه الممالك هي الإمبراطوريـة الرومانية ولكن الرمز غير مقصور عليها، ويتناول هؤلاء الرقم 666 بنفس الطريقة فهم يقولون أن هذا الرقم ليس شفرة يجب حلها بل هو مجرد رمز يراد به الإشـارة إلى النقص وعدم الكمال وقد ذهبوا إلى هذا التفسـير نظرا لأن الرقم 6 يـأتي قبل 7 الذي يرتبـط بالكمال في العديد من الحضارات ولهذا انتهـوا إلى أن 6 يعني النقص وأن وجود ثلاثة من هذا الرقم في 666 هو قمة النقص. كان من الطبيعي إذن أن يرفض أنصار هذه المدرسـة استخدام نظام الجماتريا لربط الرقم بشـخص بعينه ومنطقهم في هذا أن هناك العديد من الأشـخاص الذين قد يؤدي جمع أسـمائهم بشـكل أو بآخر إلى هذا الرقم. يتفق مع هذا التفسـير إلى حد كبير شهود يهوه[1]، المنشقون عن التيار المسيحي الرئيسي والذين يرون أن الرقم 666 يرمز إلى حكومات العالم التي سوف تتحد ضد الله في نهاية التاريخ، كما أنهم يفسرون جملة «هو رقم إنسان» التي في كتاب الوحي على أنها ترمز إلى جيش الحكومات هذا المكون من «ناس» فضلًا عن أن تكون عائدة على شخص معين.

إلى جانـب التيار المسـيحي فقـد لعب الرقـم 666 دوره في العديد من الحـركات الدينية الأخـرى مثـل الحركة البهائية[2]، فالبهائيـون يرون أن هذا الرقم هو رمـز للخليفة الأموي معاوية بن أبي سـفيان[3] الذي تولى الخلافة عام 661 م، فبحسـاب العام الذي تولى فيه الخلافة

(1) طائفة مسـيحية لا تعترف بالطوائف المسـيحية الأخرى. بدايتهم جاءت في ولاية بنسلفانيا الأمريكية في سبعينات القرن التاسع عشر على يد تشارلز تاز راسل Charles Taze Russel الذي أسس البذرة الأولى عن طريق مجموعة صغيرة لدراسـة الكتاب المقدس. يدّعى شهود يهوه أن عدد أعضائهم يتجاوز الثمان ملايين عضو وهم يستخدمون اسم يهوه لاعتقادهم أنه اسم الله الحقيقي.

(2) تأسسـت البهائية على يد حسـين علي النوري الملقب ببهاء الله في القرن التاسـع عشر في إيران (السـلطنة الفارسية آنذاك). البهائية من الأدريان التوحيدية ويؤمن أتباعها أن جميع الأديان الكبرى لها نفس المصدر الروحي ونفس الرب.

(3) (608 - 680م) هو شخصية هامة في تاريخ الإسلام حيث كان أحد أهم اللاعبين في الفتنة الكبرى التي قسمت صفوف المسلمين بعد مقتل عثمان بن عفان. تولى الخلافة بعد مقتل علي بن أبي طالب ليؤسس الدولة الأموية.

بعد ولادة المسيح الفعلية التي يتفق معظم المؤرخين أنها حدثت في حوالي العام الخامس قبل الميلاد نحصل على الرقم 666.

ليس من الغريب أن يجذب هذا الرقم أنصار الكابالا أيضًا المهووسين بالأرقام، ولكن الغريب هو أنه بالنسبة لهؤلاء فالرقم 666 لا يمثل شيئا سلبيا بل هو يمثل الكمال والخلق، فالله خلق الكون في 6 أيام وهناك 6 اتجاهات أساسية (الشمال والجنوب والشرق والغرب وفوق وتحت) كما أنهم يعتقدون في أن الرقم 6 موجود في اسم الله الحقيقي.

من الناحية الرياضية لا يُميّز الرقم 666 عن باقي الأرقام شيء، ربما كانت الصفة الرياضية الوحيدة التي يمكن إضفاؤها عليه هو أنه يساوي مجموع أول 36 رقم من الأرقام الطبيعية (1,2,3,...) لذا فهو يعد من الأرقام الهرمية الثلاثية، أي أننا إذا مثلنا مكوناته من الأرقام الطبيعية في شكل نقاط يساوي عددها كل رقم من هذه الأرقام فيمكننا أن نكون شكلا هرميا من هذه النقاط، وهذا الشكل شبيه بالشكل الذي يكونه الرقم 10 والذي سماه الفيثاغوريون التيتراكتس tetractys ونسبوه لله. لكن لا يمكننا أن نضفي أهمية رياضية خاصة على الرقم 666 لأنه رقم هرمي فالعديد من الأرقام هي أرقام هرمية.

إذن فأهمية الرقم 666 في ذهن البشر تكاد تكون أسبابها محصورة في الأسباب الدينية والتاريخية، لكن رغم هذا فإن هذه الأسباب كانت كافية كي يترك هذا الرقم أثره البالغ على الثقافة الشعبية من موسيقى الروك إلى عبادة الشيطان، وأن يصبح رمزا خالدا لكل ما هو دنيء وفاسد في العالم.

# رقم الشؤم 13

لم يؤثـر رقـم في حيـاة البـشر مثل الرقـم الـذي نتناوله في هـذا الفصل، وهـو الرقم 13، فـلا يوجد أحد منا لم يسـمع عن الشـؤم الذي يصحب هـذا الرقم والـذي يدفع بجزء كبير من الناس إلى تجنبه قدر اسـتطاعتهم حتى لا يمسـهم الحظ السـيئ وهذا دفع بالعديد من الفنادق والمستشفيات والمطـارات إلى تجنـب وضع غرف أو بوابـات تحمل هذا الرقم، بـل إن إحصائية أُجريت في الولايـات المتحـدة أظهرت أن 80 % مـن المباني المرتفعة بها لا يوجد بهـا الرقم 13، ولتأكيد الأثر العميق الذي تركه هذا الرقم في نفس البشر يكفي أن نعرف أن هناك فوبيا مخصصة له تدعى تريسكايديكافوبيا triskaidekaphobia أو الخوف من الرقم 13.

الحقيقـة أن البحث عن سـبب سـمعة الرقم 13 السـيئة هـو عمل غايـة في الصعوبة، فجـذور هذه المسـألة تعود إلى أزمنة سـحيقة لا نملك الكثير من المعلومـات عنها، ولكن ربما كان أقدم دليل معروف على التشاؤم من الرقم 13 يعود إلى البابليين وخاصة إلى زمن حامورابي، فإحدى أشـهر المخطوطات القديمة وهـي مخطوطة «قانون حامورابي» خالية مـن القانون الثالث عشر، مما دعى البعض إلى الظن بأن البابليين كانوا يتشـاءمون من هذا الرقـم فتعمـدوا عدم إدراجـه، ولكن هناك رأيـا آخر يقول أن هذا لم يكن سـوى خطأ المترجـم القديم الغير متعمد، وما يرجح كفة هذا الرأي هو أن القوانين لم تُكتب مرقمة من الأساس.

لكن حتى لو لم نكن متأكدين مما إذا كان البابليون تشاءموا من هذا الرقم أم لا، فلا شك أن العديد من الثقافات التي لا علاقة واضحة بينها تبنت هذا التشاؤم، من أبرز هذه الثقافات الثقافة المسـيحية التي قبحت الرقم 13 في الغالب بسـبب أن يهوذا الإسـخريوطي - الحواري الثالث عشر في العشـاء الأخير - كان هو من خان المسـيح. نجد أيضا علاقة تربط الرقم 13

بالرقـم الكريـه الآخر 666 في كتاب الوحي، فالفصل الذي ذُكـر فيه رقم الوحش 666 كان هو الفصل الثالث عشر.

مـن الثقافـات الأخرى التي تشـاءمت مـن الرقم 13 هـي ثقافة الفايكينـج، فعلى غرار العشاء الأخير، كانت هناك مأدبة كبيرة للآلهة النورديين وكان عدد الآلهة 12، فتسلل لوكي إلـه الشر والأذى إلى المأدبة ليصبح العضو الثالث عشر ثم تسـبب في قتل الإله بالدر إله النور بالخديعة.

الأمور تصير أسـوأ إذا ارتبط الرقم 13 بيوم الجمعة، فنجد أن نسبة التشاؤم تبلغ أشدها إذا صادف أن كان يوم الجمعة هو اليوم الثالث عشر في الشـهر، وقد تم تسـمية فوبيا أخرى مخصصـة لهذه الحالـة الخاصـة تدعـى باراسـكيفيديكاتريافوبيا paraskevidecatriaphobia أو الخـوف مـن يوم الجمعة الموافق للثالث عشر من الشـهر، وهذه الفوبيـا تكلف الولايات المتحدة حوالي 800 مليون دولار سنويا حيث يتجنب الناس الزواج والسفر وحتى العمل في بعض الحالات في هذا اليوم.

إذا كنا محتارين في سـبب التشـاؤم من الرقم 13، فبالتأكيد المثـل ينطبق على يوم الجمعة الذي يُعتبر يوم تفاؤل وغفران عند المسـلمين، إحدى القصص تقول أن يوم الجمعة هو اليوم الذي صُلب فيه المسـيح ولكن الشـك يحوم حول هذه الرواية، قصة أخرى تؤكد أن هيكل سليمان تم تدميره في هذا اليوم، أما القصة الأشهر التي ربطت الرقم 13 بيوم الجمعة هي قصة القضاء على فرسان الهيكل، فقد تم القبض عليهم يوم الجمعة الموافق للثالث عشر من أكتوبر عام 1307 م لتعذيبهم وقتلهم تنفيذا لأوامر الملك فيليب الرابع[1] ملك فرنسا الذي ضاق ذرعا بالديون الطائلة التي أدانه بها هؤلاء الفرسـان. أيا كان السـبب فالمؤكد هو أن التشـاؤم من هذا اليوم لم يظهر قبل القرن السـابع عشر، ولم يتأصل في الوجدان قبل القرن التاسـع عشر لذا فهو يعتبر شيء حديث إذا قورن بالتشاؤم الأعم من الرقم 13.

(1) (1268 - 1314م) ملك فرنسـا من 1285م حتى مماته. بالإضافة إلى قضائه على فرسـان الهيكل، نفى فيليب الرابـع اليهود من فرنسـا عام 1306م، فقـد كان مديونا لهم كذلك بمبالغ طائلـة وكان يعتبرهم بمثابة الدولة داخل الدولة.

المهم أن الأسباب التي شرحناها التي دعت إلى التشاؤم من الرقم 13 لم تقنع الباحثين الذين احتاروا في سبب تأصل هذا التشاؤم في ثقافات مختلفة، فعكفوا على البحث عن أسباب شافية وخرجوا بالفعل بعدة مقترحات، أحد هذه المقترحات هو أن الكثير من الثقافات القديمة اتبعت النظام القمري في تقويماتهم، وهذا النظام به 12 شهر كامل أما الشهر الثالث عشر فهو ناقص غير مكتمل مما أضفى عليه انطباعا سيئا نوعا ما.

مقترح ثان يرى أن الأديان الأبوية كاليهودية والمسيحية في سعيها للقضاء على الديانات الأقدم التي تدور حول عبادة إلهة امرأة بدلا من إله رجل، نفرت من الرقم 13 المبجل لدى هذه الديانات نظرا لارتباطه بعدد الدورات الشهرية التي تصيب المرأة سنويا.

مقترح ثالث رياضي بعض الشيء يرى أن السبب الحقيقي للتشاؤم من الرقم 13 هو أنه يأتي مباشرة بعد الرقم 12، فالرقم 12 كان بمثابة الرقم المثالي، لأنه أصغر رقم يمكن قسمته على اثنين أو ثلاثة أو أربعة أو ستة مما يسهل جدا العمليات الحسابية التي تجرى به، وهذه السهولة في التعامل هي ما دفعت بالسومريين إلى استخدام نظام في حساب الوقت يعتمد على الرقم 12 وهو النظام الذي مازال يستخدم إلى الآن، لكن بعد هذا الرقم المثالي يأتي الرقم 13 الغريب الغير مرغوب فيه والذي لا يُقسم إلا على نفسه لأنه أحد الأرقام الأولية، فربما إذن كان خوف الناس من المجهول الذي يحمله الرقم 13 هو الذي دفعهم إلى التشاؤم منه.

لكن أيًا كان السبب الحقيقي لهذا التشاؤم من الرقم 13، فإن انتشاره الواسع بين البشر يدفعنا للتساؤل عما إذا كان هذا التشاؤم له ما يبرره. بالتأكيد إيجور رادون Igor Radun خبير السلوك البشري بجامعة هيلسنكي لا يرى ذلك، فهو يؤكد أنه لا يوجد أي دليل علمي ولن يوجد على أن الرقم 13 هو رقم شؤم، بل إنه لا يوجد أي مبرر يجعل رقما ما محظوظا وآخر مشؤوما غير أن تكون عقولنا هي ما تضفي هذه الصفة أو تلك على هذا الرقم، فعلى سبيل المثال لو كان مترسخا لدى وعينا الجماعي التشاؤم من رقم آخر غير الرقم 13 لميزنا هذا الرقم الآخر في المصائب اليومية بدلا من 13، ويبرز رادون

المشـا كل التي تعاني منها الدراسـات التي تقر بأن هناك علاقة وثيقة بين الرقم 13 وسوء الحظ وإحدى هذه المشا كل هي أن تلك الدراسات ركزت فقط على البيانات الإحصائية عـن عدد الحوادث أو اتجاهات السـوق وغيرها دون أن تحقـق في كيف تؤثر المعتقدات الخرافية على السلوك البشري الذي يؤثر بالتالي على نتائج هذه الإحصائيات، ولأنه يعتبر هذه الدراسـات غير كاملة فإن رادون لا يسـتغرب التناقضات التي تظهر في نتائجها إذا مـا تم تكرارها عـلى مجموعات مختلفة، لهذا فهـو يعزي الربط بـين الرقم 13 وحدوث المصائب بالمعتقدات الخرافية المترسـخة في الأذهان لأجيـال عديدة والتي تدفعنا لتمييز الرقم 13 في تلك المصائب.

الرياضيـات حتـما تتفـق مـع وجهة نظـر رادون التـي تنفي وجـود صفـة خاصة تميز الرقـم 13 عـن باقي الأرقام أو تفسر سر التشـاؤم منـه، فالصفة الرياضية الوحيـدة التي قد تنسـب إليه هي التي ذكرناها سـابقا وهي أنه رقم أولي وفي هذا هو لا يتميز عن عدد لانهائي من الأرقام الأولية الأخرى.

على أي حال لم يكن حظ 13 سـيئا مع كل الثقافـات، فالحضارة الفرعونية مثلا اعتبرته رقما مبجلا، فهم كانوا يرون أن حياة الإنسان تمر باثنتي عشرة مرحلة تنتهي بالمرحلة الثالثة عـشر وهي مرحلة الموت والـذي لم ينظر إليه المصريون القدماء نظـرة خوف، بل اعتبروه بلوغـا لمرحلـة متعالية مـن الحياة الخالـدة. بالتأكيد يمكـن أن يكون المصريـون القدماء هم من تسـبب في نشر التشـاؤم من الرقـم 13 في العصور اللاحقة التـي لم تنظر إلى الموت بنفس الطريقة.

الهنـدوس أيضا أحبـوا هذا الرقم فهم يعتبرون اليوم الثالث عشر من كل شـهر هو يوم احتفال بالإله شيفا ويعتقدون أن عبادة هذا الإله في هذا اليوم تجلب النجاح والرخاء والثروة والأولاد.

تبجيل الرقم 13 من قبل بعض الثقافات يشكك في وجود أساس متين للاعتقاد السائد بأن هناك علاقة حقيقية بين هذا الرقم وسوء الطالع تماما كما قال إيجور رادون، لكن المؤكد أنه سـواء كانت هـذه العلاقة حقيقية أم لا من الناحية الأكاديمية، فهـي بالتأكيد كانت حقيقية

بالنسبة لنابليون[1] وفرانكلين روزفلت[2] ومارك توابن[3] بالإضافة إلى الملايين الآخرين من البشر الذين عانوا ويعانون من هذا المرض العجيب الذي يصيب صاحبه بالعجز عن ممارسة حياته اليومية بشكل طبيعي، مرض الخوف من الرقم 13.

(1) (1769 - 1821م) هو نابليون بونابرت، القائد العسكري التاريخي لفرنسا التي أعلن نفسه إمبراطورا لها عام 1804 م. تم نفيه مرتين جاءت ثانيهما بعد هزيمته في معركة واترلو الشهيرة حيث نُفي إلى جزيرة هيلانة التي مات فيها.

(2) (1882 - 1945م) الرئيس الثاني والثلاثون للولايات المتحدة وكان له دورا رئيسيا في الحرب العالمية الثانية.

(3) (1835 - 1910م) أحد أشهر الكتاب الأمريكان الذي اشتهر بنزعته للسخرية. أشهر كتبه هو مغامرات هاكلبيري فين Adventures of Huckleberry Finn.

# النسبة الذهبية φ

لم يكـن الرياضي الإيطـالي العظيـم فيبوناتشي يعرف أنه سـيتوصل إلى أحد أهم التسلسـلات الرقمية على الإطلاق عندما فكر في مشـكلة توالد الأرانب.. فقد كان يريد حساب المعدل الذي يتكاثر به زوج من الأرانب بحيث يستطيع تحديد عدد الأزواج بعد مرور وقت معين. بدأ فيبوناتشي حل المشكلة بأن قال أن الأرانب تصل بلوغها الجنسي بعد شهر أي أننا إذا بدأنا بزوج واحد، فبعد مرور شهر سوف ننتهي بنفس الزوج، في الشهر الثاني سوف يلد هذا الزوج زوجا آخر فيصبح لدينا زوجان، في الشـهر الثالث سـوف يكبر الزوج الوليد في حين يلد الزوج الأول زوجـا آخر فننتهي بثلاثة أزواج، وهكـذا.. يمكننا تمثيل هذا التكاثر بالتسلسـل التالي الذي يحسب عدد الأزواج بعد كل شهر:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

هذا التسلسـل أُطلق عليه اسم تسلسـل فيبوناتشي Fibonacci sequence ونستطيع رؤية أنه باستثناء الرقمين الأولين، فكل رقم بعد هذا هو عبارة عن مجموع الرقمين السابقين. صفة أخرى مميزة لهذا التسلسل هو أننا إذا حسبنا النسبة بين أي رقم فيه والرقم الذي يسبقه نجده يقترب جدا من رقم معين، فمثلا النسـبة بين 5 و3 هي حوالي 1.666 والنسـبة بين 21 و13 هي حوالي 1.615 وإذا صعدنا أكثر في التسلسـل وحسـبنا النسـبة بين أرقام أكبر مثل النسـبة بين 233 و144 نجدها 1.618، وهذه النسـبة تقترب جدا من قيمة رقمنا الذي نتحدث عنه في هذا الفصل، النسبة الذهبية التي يُرمز لها بالحرف اليوناني فاي «φ»، فهذه النسبة إذا قربناها للرقم العاشر بعد العلامة العشرية نجدها 1.6180339887، ونحن نذكر التقريب لهذه النسـبة لأن قيمتها الحقيقية غير معروفة، فهي كأغلب الأرقام التي حيرت العالم رقم غير نسـبي. تساؤل منطقي قابلناه من قبل وهو كيف يمكن للنسـبة الذهبية أن تكون نسـبة وفي نفس الوقت هي

رقم غير نسبي، أي لا يمكن تمثيله كنسبة؟ ناقشنا هذا التساؤل عندما تحدثنا عن «باي» و كيف أنه عبارة عن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها ومع هذا فهو غير نسبي والتفسير كان أن أحد طرفي النسبة هو حتما غير نسبي، المثل ينطبق على النسبة الذهبية فأحد طرفيها غير نسبي أي أننا لن نستطيع معرفته بدقة أبدا، ومع ذلك فالنسبة الذهبية يُطلق عليها اسم «نسبة» طبقا للعُرف الذي توارثته الحضارات.

عُرفت النسبة الذهبية قبل عصر فيبوناتشي بكثير، فهناك من يعتقد أنها كانت معروفة ومستخدمة حتى لدي المصريين القدماء. دليل هؤلاء هو بناء الأهرامات فالهرم الأكبر قاعدته طولها حوالي 230 مترا وارتفاعه حوالي 140 مترا، النسبة بين هذين الرقمين هي 1.564 أي قريبة جدا من النسبة الذهبية.

دليل آخر على قِدم النسبة الذهبية هو أننا نجدها في معبد البارثينون[1] الذي يعد أفضل النماذج المعمارية اليونانية القديمة، فنحن إذا رسمنا مستطيلا على واجهة المعبد نجد أن النسبة بين الضلع الأكبر لهذا المستطيل والضلع الأصغر هو النسبة الذهبية، وهذا المستطيل يطلق عليه اسم «المستطيل الذهبي» نسبة إلى النسبة الذهبية. بالإضافة لهذا فقد أشرف على نحت تماثيل المعبد النحات والرياضي اليوناني الشهير فيدياس Phidias[2] ويُعتقد أنه استخدم النسبة الذهبية في قياسات تماثيله. علاقة فيدياس بالنسبة الذهبية لم تنته بموته بل صارت أبدية بعد أن جاء الرياضي الأمريكي مارك بار Mark Barr[3] في أوائل القرن العشرين واقترح استخدام الحرف اليوناني φ الذي ينطق فاي phi والذي هو أول حروف اسم فيدياس وبالفعل تم قبول الاقتراح وصار فاي φ هو رمز النسبة الذهبية الرسمي.

أول من عرّف النسبة الذهبية بشكل رياضي كان هو إقليدس في كتابه العناصر Elements، فقد قال أننا إذا قسّمنا الخط المستقيم إلى قسمين بحيث تصبح نسبة الخط كله إلى القسم الأكبر

(1) معبد يوناني مخصص للإلهة أثينا في العصر اليوناني القديم. بدأ بناءه عام 447 ق.م في ذروة التوهج لإمبراطورية أثينا وانتهى البناء بعدها بتسع سنوات.

(2) (480 - 430 ق.م) أحد أشهر النحاتين والمهندسين اليونانيين القدامى ويعد تمثاله «زيوس في الأوليمب» أحد العجائب السبع للعالم القديم.

(3) (1871 - 1950م) مخترع وفيزيائي أمريكي ركز مجهوداته على بناء الآلات الميكانيكية المعقدة.

مساوية لنسبة القسم الأكبر إلى القسم الأصغر، فهذه النسبة هي «النسبة القصوى والمتوسطة extreme and mean ratio»، وهذه بالفعل إحدى طرق قياس النسبة الذهبية ويمكن تمثيلها في شكل معادلة:

$$\varphi = a/b = (a + b)/a$$

حيث أن a هو القسم الأكبر وb هو القسم الأصغر، أما a + b فهو طول الخط كله، ومن هذه المعادلة نستطيع أن نخرج بعلاقة رياضية تتميز بها النسبة الذهبية عن أي رقم آخر فإذا بدلنا النسبة a/b بالنسبة الذهبية تصبح العلاقة:

$$\varphi = 1 + 1/\varphi$$

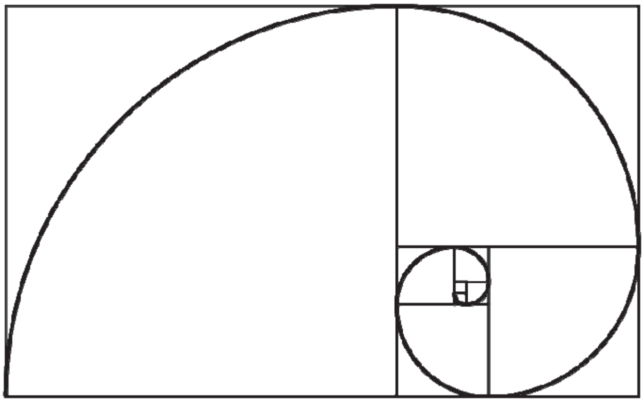
ومنها:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

إذن فالنسبية الذهبية هي الرقم الوحيد الذي إذا أضفت إليه واحد تحصل على مربع هذا الرقم.

لكن السؤال الآن هو لماذا تأثرت الحضارات القديمة بهذه النسبة مما جعلهم يضمنوها في أهم أعمالهم؟ الحقيقة أن النسبة الذهبية كان مقدرا لها أن تخلب لب العقول عبر التاريخ لارتباطها بالجمال الهندسي، فقد بيّن إقليدس أن النسبة الذهبية مرتبطة بالنجمة الخماسية التي كان يستخدمها الفيثاغوريون في التعريف بأنفسهم، فالخطوط التي تقطع شكل النجمة الخماسية تقسمها إلى العديد من الأقسام التي تمثل النسبة الذهبية علاقاتها ببعض. شكل آخر يعتبر من أكثر الأشكال الهندسية شهرة على الإطلاق وأجملها هو شكل «الحلزون الذهبي» (شكل 1) وهو سمي هكذا نسبة إلى النسبة الذهبية ولكي نتخيل كيف يمكن أن تستخدم هذه النسبة لرسم شكل حلزوني علينا أن نتخيل أولا الـ«مستطيل الذهبي» وهذا المستطيل نسبة ضلعه الأكبر إلى ضلعه الأصغر هي النسبة الذهبية ودعنا نستخدم الرمزين a وb لنرمز إلى الضلعين الأكبر والأصغر على التوالي، فلنرسم الآن مربعا داخل هذا المستطيل بحيث يكون طول أضلعه b، يترك لنا هذا مستطيلا آخر أصغر هو المساحة المتبقية من المستطيل

الأكبر بعد أن احتل المربع جزءا منه حيث أن الضلع الأكبر لهذا المستطيل الأصغر هو الآن b بينما الضلع الأقصر يصبح a - b، الآن نلاحظ شيئا عجيبا وهو أن نسبة b إلى a - b هي ذاتها النسبة الذهبية أي أن هذا المستطيل الأصغر هو أيضا مستطيل ذهبي، إذا واصلنا عملية رسم مربع داخل هذا المستطيل الذهبي الجديد سوف نجد أن المستطيل الأصغر منه المتبقي هو بالتالي مستطيل ذهبي آخر ويمكننا أن نستمر في هذه العملية إلى ما لانهاية، بعد هذا التمرين الهندسي المرهق ننتقل إلى نقطة وصل هذه المستطيلات الذهبية اللانهائية بالحلزون الذهبي وهذا يتم عن طريق رسم خط معوج ينطلق من طرف المستطيل الأول ثم يمر بأطراف كل المستطيلات المكونة داخله الواحد تلو الآخر إلى ما لانهاية فنجد أن هذا الخط سيرسم لنا شكلا حلزونيا رائع الجمال (شكل 1).



**شكل** (1)

**الحلزون والمستطيل الذهبيان**

إذا خرجنا من المجال الهندسي النظري إلى هندسة الطبيعة سنجد أمثلة لا تُحصى على وجود النسبة الذهبية في كل مكوناتها، فنحن بإمكاننا رؤية النسبة الذهبية في أوراق الكثير من الزهور التي يمثل عددها إحدى أرقام تسلسل فيبوناتشي المرتبط أشد الارتباط بالنسبة الذهبية وطبقا لمبدأ داروين[1] فعدد أوراق الزهور تم انتقاؤه بحيث يكون مثاليا

(1) (1809 - 1882م) هو تشارلز داروين المنظر لنظرية التطور عن طريق كتابه الشهير «أصل الأنواع» الذي نشره عام 1859م.

لتوفير أكبر تعرض للشمس والحشرات الملقحة وغيرها. نجد أيضا النسبة الذهبية وتسلسل فيبوناتشي متمثلين في عدد الحلزونات التي تمثل توزيع البذور في زهرة عباد الشمس، فبعض هذه الحلزونات تدور مع اتجاه عقارب الساعة والبعض الآخر يدور في الاتجاه المعاكس والعجيب أن عدد هذه الحلزونات دائما أحد الأرقام في تسلسل فيبوناتشي. نفس الشيء نراه في عدد حلزونات أكواز الصنوبر أو فاكهة الأناناس.

إذا تركنا عالم النبات وتوجهنا إلى عالم الحيوان نجد أيضا النسبة الذهبية في كل مكان، فعلى سبيل المثال نجد النسبة الذهبية تتحكم في النسب المكونة لصدفة الحيوانات الرخوية كحيوان النوتي البحري والحلزون، وإذا التفتنا إلى الإنسان نجد أن النسبة بين المسافة من سرّة الإنسان إلى قدمه وبين المسافة من رأسه إلى سرّته هي النسبة الذهبية، أيضا إذا فرد القارئ إصبع سبابته المكون من ثلاث عظام ومفصلين ثم قاس طول العظمة الكبرى وقسمها على طول العظمة الوسطى، كذلك العظمة الوسطى على العظمة الصغرى سيجد أنه سيحصل في الحالتين على النسبة الذهبية. مثل هذه النسب تتكرر كثيرا وسط مملكة الحيوان فنجدها لدى الدولفين ونجم البحر والنمل والنحل وغيرهم.

وجه الإنسان كذلك مرتبط بالنسبة الذهبية فنجد أن النسبة بين طول الوجه وعرضه تقترب بشدة من النسبة الذهبية وكذلك ملامح الوجه الموزعة بحيث تفصل بينها النسبة الذهبية كالنسبة بين المسافة من العين إلى الأنف والمسافة من الأنف إلى الفم، أو النسبة بين المسافة من العين إلى الفم والمسافة من الفم إلى الذقن وهكذا، وهناك اعتقاد قوي بأن جمال الوجه مرتبط بالالتزام بهذه النسبة وأن الحياد عنها يؤدي إلى شكل وجه غير مقبول نسبيا، وهذا الافتراض يقترح أن النسبة الذهبية والتعرف على جمالها موجودان في بنائنا كبشر.

حتى المكونات الغير مرئية من الكائنات الحية كالحمض النووي أو الدنا DNA والذي يتكون كل جزيء منه من سلسلتين تدوران حول بعضهما، فنجد أن طول الدورة الواحدة هو 34 أنجستروم بينما عرضها 21 أنجستروم والنسبة بين هذين الرقمين هي 1.61904761905 أي تقترب إلى حد مدهش من النسبة الذهبية.

إذا انتقلنا من الأشياء المتناهية في الصغر كالدنا إلى الأشياء المتناهية في الكبر كالمجرات،

نجد النسـبة الذهبيـة تطل علينا كعادتهـا، فالمجرات التـي يُطلق عليها المجـرات الحلزونية كمجرتنا درب التبانة تتبع شكل الحلزون الذهبي أي أن بإمكاننا رسم المستطيل الذهبي بدقة بالغة على مثل هذه المجرات.

للأسـباب السـابقة كان من الطبيعي أن تبهر النسبة الذهبية أعظم العقول على مر التاريخ، مثـل يوهـان كيبلر Johannes Kepler[1] الذي حسـب مدارات الكواكب حول الشـمس كما أثبت أن النسبة الذهبية هي نهاية النسب بين أرقام تسلسل فيبوناتشي. يصف كيبلر هذه النسبة بقوله: «يوجد كنزان للهندسة، الأول هو نظرية فيثاغورس والثاني هو النسبة الذهبية، فالأول يمكن مقارنته بمقدار من الذهب أما الثاني فيمكن أن نطلق عليه اسم «الجوهرة الثمينة»».

من أبرز العقول كذلك التي تأثرت بالنسـبة الذهبية كان لوكا باكيولي Luca Pacioli[2] وهو أول من أطلق اسـم «النسـبة الإلهية» على هذه النسبة في رسـالته التي تحمل نفس الاسم وقد أصبح هذا الاسـم هو الاسـم الرسمي للنسـبة الذهبية في عصر النهضة، وقد كتب لوكا أسـبابه في الميل إلى هذا الاسـم ومنها أن الله والنسبة الذهبية يشـتركان في أنهما يحملان قيمة واحـدة لا أكـثر، منها أيضا أنه كـما أن الله لا يمكـن تعريفه أو فهمه بالكلمات فإن النسـبة الذهبية لا يمكن التعبير عنها برقم محدد أو نسبة محددة.

لم يكن الرياضيون وحدهم هم المتأثرون بالنسبة الذهبية بل تأثر بها أيضا أعظم الفنانين عـلى الإطلاق خاصة هؤلاء المنتمين إلى عصر النهضة، وأشـهر هؤلاء هـو ليوناردو دافنشي Leonardo Da Vinci[3] الـذي كان أول مـن أطلق على النسـبة الذهبية اسـم «المقطع الذهبي Golden Section»، فقد استخدم دافنشي النسبة الذهبية في العديد من أبرز أعماله مثل لوحاته

(1) (1571 - 1630م) ريـاضي وفلكي ألماني ويعد من أهم علامات الثورة العلمية الأوروبية. حسـابه لمدارات الكواكب حول الشـمس هو من أهم إسـهاماته العلمية وقد اسـتخدم نيوتن تلك الحسابات فيما بعد ليضع أسس نظرية الجاذبية.

(2) (1447 - 1517م) رياضي إيطالي تعاون مع دافنشي في أعماله. يعده الكثيرون هو أبو فن المحاسبة وتنظيم الدفاتر.

(3) (1452 - 1519م) عـالم إيطالي موسـوعي من علماء فترة النهضـة الأوروبية. أعماله لا حصر لها وتمتد عبر العديـد مـن المجالات مثل النحت والهندسـة والرياضيات والرسـم والفلك والتشريح وغيرها. من أشـهر أعماله الفنية هو لوحته «الموناليزا» المعروضة حاليا بمتحف اللوفي بباريس.

«العشـاء الأخير» و«البشارة». من فناني عصر النهضة الآخرين الذين ضمنوا النسبة الذهبية في أعمالهـم كان مايكل أنجلو Michelangelo[1] الذي اسـتخدمها في لوحته الجصية الشـهيرة «خلق آدم» المرسـومة على سقف كنيسة سيسـتين[2] بالفاتيكان، ورفاييل Raphael[3] الذين زين حائطا من حوائط إحدى الغرف بقصر الفاتيكان بلوحته الجصية «مدرسـة أثينا» التي ضمت العديد من الإشارات إلى النسبة الذهبية.

إذا تركنـا عصر النهضة وذهبنـا إلى عصر أحدث نجد أن النسـبة الذهبية لاتزال عاملا فعـالا في التأثير على الفن، فمثـلا الفنان الفرنسي المنتمي إلى مرحلة مـا بعد الانطباعية post - impressionism[4] جورج سـورات Georges Seurat[5] نجد النسـبة الذهبية بارزة تقريبا في كل لوحاته، أما إذا انتقلنا إلى العصر الحديث فنجد أن الفنان الأسـباني الشـهير سلفادور دالي Salvador Dali[6] قد استخدم النسبة الذهبية في لوحته «سر العشاء الأخير المقدس» والمتأثر فيها بدافنشي.

ليس غريبا بعد ما سـبق أن نقول أن النسـبة الذهبية هي الرقم الذي أثر في أكبر عدد من العقول البشرية الفذة منذ بداية الحضارة وإلى الآن أكثر من أي رقم آخر، وهذا يعود بالطبع إلى الارتباط القوي بين هذه النسبة وبين جمال كل ما حولنا. أمام هذا لا يسعنا إلا أن نفكر في الكون على أنه لوحة مبهرة رسمها الله باستخدام ريشته الخاصة، التي هي النسبة الذهبية.

---

(1) (1475 - 1564م) نحات ومعماري إيطالي لم يكن فقط أحد أعظم فناني فترة النهضة بل أحد أعظم الفنانين على الإطلاق. أشهر أعماله وأجملها موجودة على سقف كنيسة سيستين بالفاتيكان وتضم «خلق آدم» و«آدم وحواء في جنة عدن» وقد استغرقت تلك الأعمال حوالي أربع سنوات.

(2) من أعرق الكنائس التي تقع في قصر بابا الفاتيكان وسميت تيمنا بالبابا سيكستس الرابع Sixtus IV الذي رممها في الفترة بين 1477 و1480م.

(3) (1483 - 1520م) رسام ومعماري إيطالي آخر من عصر النهضة ورغم موته في سن السابعة والثلاثين إلا أن أعماله كانت غزيرة وأشهرها هي لوحة «مدرسة أثينا» بالفاتيكان.

(4) حركة فنية فرنسية برزت في أواخر القرن التاسع عشر وفيها حاول الفنانون التركيز على الرمزية واستخدام الألوان الغير مألوفة كرد فعل للإنطباعية التي ركزت على الاستخدام الطبيعي للألوان والضوء.

(5) (1859 - 1891م) أحد رواد ما بعد الإنطباعية وتميز بخلطه بين رهافة الحس والدقة الرياضية.

(6) (1904 - 1989م) فنان سريالي أسباني شهير متأثر بفناني عصر النهضة وتميز بأعماله العجيبة.

# ثابت أويلر - ماسكروني $\gamma$

ربما كان الرقم الذي نتحدث عنه في هذا الفصل هو الأقل شهرة وسط الأرقام التي حيرت العالم التي ذكرناها إلى الآن ومن النادر أن يعرفه الإنسان العادي. ربما يعود هذا إلى أنه ليس من الأرقام التي نستطيع ربطها بالطبيعة حولنا مثل «باي» أو «النسبة الذهبية»، كما أنه ليس من الأرقام التي قد تثير الفضول لغموضها مثل الرقم التخيلي i، لكنه بالطبع في منتهى الأهمية بالنسبة للرياضي للأسباب التي سنناقشها لاحقا. قيمة هذا الرقم مقربة إلى الرقم العاشر بعد العلامة العشرية هي: 0.5772156649... ويُرمز إليه بالرمز $\gamma$.

كان أول من أشار إلى هذا الرقم هو ليونارد أويلر الذي اعتدنا على وجوده معنا عند الحديث عن عجائب الرياضيات وأتت هذه الإشارة في كتابه بعنوان: «ملاحظات عن المتواليات التوافقية Observations about Harmonic Progressions» الذي نُشر عام 1734 وفي هذا الكتاب تمكن أويلر من حساب $\gamma$ إلى الرقم الخامس بعد العلامة العشرية، ثم جاء بعدها في العام 1790 الرياضي والقسيس الإيطالي لورنزو ماسكروني Lorenzo Mascheroni[1] الذي تمكن من حساب 32 رقم بعد العلامة العشرية لـ $\gamma$، بالإضافة إلى هذا كان ماسكروني هو من أعطى هذا الرقم الرمز $\gamma$. مساهمات هذين الرياضيين السابقين في مشوار $\gamma$ هي التي أدت إلى تسمية هذا الرقم ثابت أويلر - ماسكروني.

من الجدير بالذكر هنا أن في العام 1809 أثبت الرياضي يوهان فون سولدنر Johann von Soldner[2] أن ماسكروني كان مخطئا في حساباته وأنه كان محقا فقط إلى أن وصل إلى الرقم

---

(1) (1750 - 1800م) هو رياضي إيطالي كان يعمل كأستاذ للرياضيات في مدينة برافا الإيطالية.

(2) (1776 - 1883م) رياضي وفيزيائي وفلكي ألماني علّم نفسه بنفسه نظرا لعدم إكماله للمرحلة التعليمية الثانوية.

العشرين بعد العلامة العشرية. ظل النزاع بين حسبة ماسكروني وحسبة سولدنر فكلّف الرياضي الكبير فريدريك جاوس Friedrich Gauss[1] تلميذه الواعد إف.جي.بي نيكولاي F.G.B Nicolai[2] وهو مازال في سن التاسعة عشر أن يبتّ في المسألة وبالفعل تمكن نيكولاي من حساب $\gamma$ إلى 40 رقم بعد العلامة العشرية متفقا مع حسابات سولدنر.

مع هذا لم ينته النزاع وظلت الحسبتان مستخدمتين حتى أنهما ظهرتا سويا في إحدى الأبحاث. لحسم هذا التشويش تمت إعادة حساب $\gamma$ على الأقل ثمان مرات وأثبتت جميع هذه الحسابات أن ماسكروني كان مخطئا بلا شك وأن حسبة سولدنر هي الصحيحة، واستمرت الحسابات تضيف إلى أرقام $\gamma$ إلى أن وصل عدد أرقامه المكتشفة إلى حوالي 100 مليار رقم في 2013، ونلاحظ هنا أن هذا العدد هو أقل بكثير من عدد الأرقام التي توصلنا إليها في حساب «باي» على سبيل المثال وهذا يعود إلى أن $\gamma$ هو أصعب في الحساب بكثير من «باي».

ربما كان السبب الأول لأهمية $\gamma$ لدى الرياضيين هو أنه مستفز لهم، فعلى عكس الأرقام الشهيرة الأخرى مثل «باي» و$e$ وغيرهما الذين نعرف عنهم الكثير، فالرياضيون إلى الآن لم يتمكنوا من إثبات أن $\gamma$ هو رقم غير نسبي، بالتأكيد يميل الكثيرون إلى هذا الاستنتاج فعادة الأرقام الهامة أن تكون غير نسبية، لكن مازال الإثبات مفقودا والعلم لا يقبل إلا بالإثباتات الواضحة لإقرار حقيقة ما، لذا فقد أصبح العثور على هذا الإثبات هو الشغل الشاغل لمجموعة من أهم الرياضيين ومنهم الرياضي الإنجليزي جي. إتش. هاردي G.H. Hardy[3] الذي عرض أن يعطي مقعده في جامعة أوكسفورد لمن يثبت أن $\gamma$ هو رقم غير نسبي.

(1) (1777 - 1855م) هو يوهان كارل فريدريك جاوس الذي يعده الكثيرون هو أعظم رياضي في التاريخ. القصص حول نبوغه المبكر كثيرة ومنها أنه في المرحلة الابتدائية طلب منه معلم أن يحسب جموع الأرقام من 1 إلى 100 متوقعا أن يستغرق التمرين وقتا طويلا لكنه فوجئ بجاوس يعطيه الإجابة بعد وقت قصير جدا، فقد لاحظ الأخير معادلة يمكن استخدامها للقيام بالمهمة وهي $s = n(n+1)/2$ وإذا استبدلنا n بـ100 في حالتنا هذه نحصل على الإجابة وهي 5050 وهذه المعادلة لاتزال تستخدم إلى الآن. لن نعد مساهمات جاوس العديدة في مجال الرياضيات هنا ولكن يكفينا ذكر بعض من المجالات التي ساهم فيها وهي الجبر والهندسة والمغناطيسية ونظرية الأرقام والبصريات إلخ..

(2) (1793 - 1846م) فلكي ورياضي ألماني تتلمذ على يد جاوس وعمل كمدير لمرصد مانهايم الفلكي.

(3) (1877 - 1947م) رياضي بريطاني له مساهمات في مجالات نظرية الأرقام والتحليل الرياضي.

مـن الأسـباب الأخرى التـي تضفي أهمية وغموضـا في نفس الوقت عـلى γ هي طريقة حسابه، فهذا الرقم يمكن حسابه عن طريق النهاية التالية:

$$\gamma = \lim (n - >\infty) (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n) - \ln(n)$$

وبنـاء على هذه الحسـبة فإن γ يربط بـين اثنين من أهم مجـالات الرياضيات وهما نظرية الأعـداد Number theory واللوجاريتمات، فنظرية الأعداد المعنية بدراسـة خواص الأرقام متمثلة في المعادلة السـابقة في جمع السلسـلة اللانهائية الموجودة بين الأقواس وهذه السلسـلة هي من أشـهر السلاسل الرياضية ويطلق عليها اسم السلسلة التوافقية Harmonic series، أما اللوغاريتـمات فتتمثل في المصطلح الموجود في أقصى اليمين وهـو ln(n) الذي هو اللوغاريتم الطبيعي لـ n والسلسة كلها تعتمد على اقتراب n من اللانهاية.

يقـص علينا د. طـوني باديللا Tony Padilla[1]، أسـتاذ الفيزياء بجامعـة نوتنجهام، قصة النملة ورحلتها الشـاقة لتوضيح السـحر الكامن في الجمع بين السلسـلتين السابقتين. فليتخيل القـارئ الكريم أنه رسـم دائرة محيطها مـتر وأنه وضع نملة فوق نقطة مـا على محيط الدائرة وطلـب منهـا أن تبدأ رحلتها حتى تكمل دورتهـا حول الدائرة لتعود لنقطـة البداية. بالفعل تبدأ النملة في رحلتها بسرعة واحد سـنتيمتر في الثانية وهي واثقة من قدرتها على أداء المهمة ولكنها لا تدري أنك عزيزي القارئ خبيث وتريد التلاعب بها، فأنت تزيد في محيط الدائرة مـترا إضافيا كل ثانيـة دون أن تدري النملة المسـكينة، وبهذا أنت مطمئن تمامـا أن النملة لن تبلغ غايتها أبدا. أسـتطيع تخيل الدهشـة وعدم التصديق على وجه القـارئ عندما يرى النملة الباسـلة وهي تبلغ خط النهاية بالفعل بعد أن أكملت دورتها المستحيلة حول الدائرة. كيف حدث هذا!!.. الإجابة تكمن في صفات السلسـلة التوافقية، فقد تم إثبات أن هذه السلسـلة من السلاسـل المتشـعبة، أي أنها تسـتمر في الزيادة مـع زيادة كل رقم إضـافي إلى أن تنتهي إلى اللانهاية. ما علاقة هذا بالنملة؟ إذا حسب القارئ المسافة التي تقطعها النملة كل ثانية سيجد أنها في الثانية الأولى قطعت سـنتيمترا واحدا وهذه المسـافة تمثل 1 % من محيط الدائرة الذي

(1) أسـتاذ مسـاعد في قسـم الرياضيات بجامعة نوتنجهام واشـتهر عن طريق الفيديوهات التي يعرضها على اليوتيوب والتي تسعى إلى إبراز عجائب الرياضيات.

كان مترا في البداية، في الثانية التالية قطعت النملة سنتيمترا آخر ولكن محيط الدائرة أصبح مترين أي أن النسبة بين المسافة والمحيط أصبحت ½ %، وهكذا.. من هنا يجد القارئ أن بإمكاننا جمع النسب التي تقطعها النملة بالشكل التالي:

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$$

وهذه بالضبط هي السلسلة التوافقية التي - كما ذكرنا سابقا - متشعبة أي أنها دائما في زيادة مما يجعل مهمة النملة غير مستحيلة، فهي دائما تقطع مسافة أطول كل ثانية، لكن الصعوبة بالتأكيد تأتي من أن هذه المسافة رغم أنها تستمر في الزيادة إلا أنها تزيد بمعدل أصغر كل ثانية، فكما نرى في السلسلة، النملة تبدأ بمسافة واحد بالمائة ثم تزيد نصف بالمائة ثم ثلث وهكذا، وهذا المعدل في الحقيقة هو معدل لوغاريتمي مما قد يفسر هذه العلاقة العجيبة بين السلسلة التوافقية واللوغاريتم في حساب الرقم $\gamma$. المهم أن هذا المعدل المتباطئ في الزيادة يتيح للنملة بلوغ هدفها ولكنه يخبرنا أن هذه العملية سوف تأخذ وقتا طويلا للغاية، وهذا الوقت يمكننا بالفعل حسابه وهو تقريبا 3 تريديسيليون tredecillion عام أي 3 وبعدها 42 صفرا، أي أن النملة سوف تخرج منتصرة في النهاية ولكن بعد أن تكون الشمس وربما الكون كله قد فنيا.

ربما كانت الفكرة السابقة غير مستساغة للقارئ الذي مازال يرى أن النملة لن تبلغ هدفها أبدا، فنحن نزيد المسافة أمامها كل ثانية، وهذا صحيح ولكن ما على القارئ الكريم إدراكه هو أن كون النملة تسير فوق محيط دائرة يجعل المسافة خلفها تزيد كذلك بنفس معدل زيادة المسافة أمامها، أي أن نقطة البداية التي تركتها النملة خلفها تبتعد عنها من خلاف وتقترب منها من الأمام. قد يكون تخيل هذا مازال صعبا ولكني أنصح القارئ أن يجرب رسم الدائرة والنملة والتخيل على الرسم حتى تصل الفكرة بشكل أسهل.

لا يقتصر سحر $\gamma$ على صعوبة تخيل النملة ورحلتها فحسب، بل إن هناك سحرا أكبر مصدره هو أننا في معادلة حساب $\gamma$ نجد أننا نطرح رقمين لانهائيين من بعضهما فنحصل على رقم محدد الذي هو $\gamma$ نفسه، فالسلسلة التوافقية كما ذكرنا سابقا هي سلسلة متشعبة أي أن جمع أرقامها يؤدي إلى لانهاية، كذلك لوغاريتم n الذي يقترب من اللانهاية هو لانهاية كذلك،

ومعــنى أن γ رقم موجب هو أن لانهاية السلســلة التوافقية هــي أكبر من لانهاية لوغاريتم n، ولكن كيف يمكن أن توجد لانهاية أكبر من لانهاية أخرى؟ تطرقنا إلى هذه المســألة العجيبة ســابقا عندما تحدثنا عن اللانهاية ولكن الأعجب في حالتنا هذه أننا نســتطيع طرح اللانهايتين فنحصل على هذا الرقم الصغير γ، وهذه النتيجة هي إحدى ألغاز γ بالإضافة إلى كونها إحدى ألغاز اللانهاية.

الرياضيــون كذلك مهتمون بـ γ بصورة اســتثنائية لوجود هذا الرقم في مجموعة من أهم الدالات الرياضية، على ســبيل المثال دالة جاما Gamma function التي نجدها في فيزياء الكم Quantum physics والفيزيــاء الفلكية Astrophysics وديناميكا الســوائل Fluid dynamics، ودالة زيتا Zeta function التي اكتشفها الرياضي الكبير برنارد ريمان Bernhard Riemann[1] والتــي أدت إلى فرضيــة ريمــان Riemann hypothesis، هــذه الفرضية التي يُعتــبر إثباتها هو المسعى الأول لأي رياضي في العالم وسوف نتحدث عنها بتفاصيل أكثر في فصل قادم.

نســتطيع مما ســبق أن ندرك حجم المساهمة التي يقوم بها γ في مجال الرياضيات ولهذا فهو سيظل دائما أحد أهم الأرقام حتى وإن تغاضت أعين العامة عنه.

(1) (1826 - 1866م) ريــاضي ألمــاني تــرك علامــات كثيرة في مجــالات الرياضيات رغم أنــه لم يقض أكثر من أربعين عاما فوق الأرض. ربما أهم مساهماته هو عمله في الهندسة التفاضلية التي أرست القواعد الرياضية المستخدمة في النظرية النسبية العامة.

# 7

الأسـبوع به سـبعة أيام.. ألوان الطيف سـبعة.. الأرض بها سـبع قارات وسبعة بحار[1].. عجائب الدنيا سبع.. هناك سبع نوتات موسيقية..

ربما للأسـباب السابقة اكتسب الرقم سبعة سمعته الطيبة بأنه رقم الحظ، أي أنه والرقم 13 يقعان على طرفي النقيض، ولكن هل يعني الظهور العنيد للرقم سـبعة في أشـياء كثيرة حولنا لا علاقة ظاهرة بينها أن هذا الرقم يحتوي على سر كوني ما؟ أم أن هذه الملاحظات مجرد مصادفات؟

الرياضيون في الأغلب سـوف يميلون إلى الاحتمال الثاني، فرغم أن الرقم سـبعة هو رابع الأرقام الأولية بعد 2 و3 و5 إلا أن هذا لا يميزه عن عدد لانهائي من الأرقام الأولية. بالنسـبة لهؤلاء إذن تكرار وجود الرقم سـبعة حولنا لا يحمـل أي مدلول متجاوز لكونه صدفة وأننا نستطيع إذا بحثنا بدقة أن نلاحظ نفس التكرار في أي رقم آخر.

المتدينون على الجانب الآخر سوف يميلون بكل تأكيد إلى الاحتمال الأول، فالرقم سبعة طاغي الوجود في النصوص المقدسة للأديان الإبراهيمية الثلاث، بشكل لا يمكن أن يُعزى إلى مجرد الصدفة.

فإذا فتحنا الكتاب المقدس على سـبيل المثال سـوف نجد أن الرقم سـبعة بمشتقاته تكرر ذكره أكثر من أي رقم آخر، وقد ربطه الله بعملية الخلق ذاتها، فكما ذكر في سفر التكوين، الله خلق الكون وما فيه في سـتة أيام ثم اسـتراح في اليوم السابع الذي أعلن فيه اكتمال الخلق وباركه وقدسه، لذا كان من الطبيعي أن يرتبط الرقم سبعة لدى المتدينين بالكمال والتمام.

(1) البحر المتوسط والبحر الأدرياتيكي وبحر قزوين والخليج العربي والبحر الأحمر والبحر الأسود والمحيط الهندي.

الإشـارات الأخـرى إلى الرقـم سـبعة عديدة في الكتـاب المقدس وهـي ترتبط بأعظم الأحداث مثل قصة الطوفان، فالله حذر نوحا من الطوفان الذي سـيغرق كل شيء قبل سبعة أيـام من نزول المطـر (التكوين 4:7)، وأمره أن يجمع سـبعة أجواز مـن الحيوانات الطاهرة والطيور لحفظها (التكوين 2 - 3:7)، وبعد الطوفان اسـتقر الفلك في الشـهر السـابع على جبل أراراط[1] (التكوين 4:8)، كما أن نوحا كان يرسـل الحمامة كل سبعة أيام للبحث عن أرض جافة (التكوين 10:8).

من أشـهر القصص أيضا التي ذكرت الرقم سـبعة في الكتاب المقدس هي قصة يوسـف عليه السـلام الذي اسـتدعاه فرعون ليفسر له حلمه الذي أرقه (التكوين 41)، وفي هذا الحلم كان يرى سـبع بقرات حسنة المنظر تأكلها سبع بقرات هزيلة قبيحة، وبالمثل كان يرى سبع سـنابل سمينة تأكلها سبع سـنابل ضعيفة، ففسر له يوسف الحلم بأنه نبوءة وأن السبع بقرات حسـنة المنظر والسبع سنابل السـمينة ترمز إلى السبع سـنوات القادمة والتي ستكون عامرة بالوفرة والشـبع في البلاد وتتبعها سبع سنوات عجاف والتي ترمز إليها السبع بقرات الهزيلة والسـبع سنابل الضعيفة، ومنطلقا من هذا التفسير اتخذ فرعون احتياطه وخزن من الغلال ما يسـاعد البلاد على تحمل السـبع سنين العجاف القادمة وكافأ يوسـف بأن أخرجه من السجن وأعطاه نفوذا وسلطة.

قصة ثالثة شـهيرة هي قصة شمشـون الجبـار ودليلة (القضاة 16)، وشمشـون هو البطل الشـعبي الإسرائيلي الذي اشـتهر بقوته الخارقة. أثارت قوة شمشـون هذه حنق الفلسطينيين فاسـتعانوا بدليلة التي يهيم بها شمشـون حبا لمعرفة سر قوته. في البداية قاوم شمشـون وظل يعطيها أسرارا كاذبة إلى أن استسـلم تماما لشهواته وحبه لدليلة ليخبرها السر الحقيقي لقوته القابع في شـعره الملفوف في سبع خصلات. بعد معرفة السر، انتظرت دليلة حتى نام شمشون على ركبتها واستدعت أحد الرجال فحلق السبع خصلات ليفقد شمشون قوته ويبدأ مشوار الذل. أهمية هذه القصة بالذات تأتي من رمزيتها خاصة فيما يتعلق بالرقم سبعة، فالبعض يظن أنه كما كان الرقم سبعة هو سر قوة شمشون، فهو أيضا يحتوي على أسرار إلهية كونية.

(1) أعلى قمة جبلية في تركيا ويقع في الشمال من منطقة شرق الأناضول بمحافظة أغري.

الأثر الواضح للرقم سبعة في الكتاب المقدس انعكس علي الطقوس والمظاهر والرموز الدينية لدى اليهود والمسيحيين، والشمعدان السباعي أو المينوراه اليهودي على سبيل المثال من أشهر هذه التجليات وهذا الشمعدان مستمد من سفر زكريا: «و قال لي ماذا ترى فقلت قد نظرت واذا بمنارة[1] كلها ذهب و كوزها على رأسها وسبعة سرج عليها وسبع أنابيب للسرج التي على رأسها، وعندها زيتونتان إحداهما عن يمين الكوز والأخرى عن يساره» (زكريا 3 - 4:2)، كما ذكر بتفاصيله الدقيقة عندما وصفه الله لموسى (الخروج 40 - 25:31)، لذا فقد اعتبره اليهود رمزا دينيا مقدسا نظرا لأنه الرمز الوحيد الذي صممه الله بنفسه، وقد تطور هذا الرمز الديني فيما بعد ليصبح رمزا قوميا كذلك لدولة إسرائيل. من التجليات الأخرى للرقم سبعة عند اليهود أنهم يقدسون اليوم السابع في الأسبوع (السبت) و كل سنة سابعة كسنة سبتية بالإضافة إلى أن بعض الأعياد الدينية اليهودية كعيدي المظال[2] والفصح[3] تستمر لمدة سبعة أيام.

بالنسبة للمسيحية، فنرى في سفر الرؤيا أن الله يفتح كتاب الأقدار يوم القيامة ويفض الأختام السبعة، فينفخ سبعة من الملائكة في سبعة أبواق لتقع سبع كوارث تنتهي بها الدنيا. إلى جانب هذا نجد أن هناك سبعة أسرار[4] للكنيسة الكاثوليكية وهي المعمودية والتثبيت والقربان المقدس والاعتراف ومسحة المرضى والكهنوت والزواج، ونفس الكنيسة أقرت بوجود سبع خطايا قاتلة وهي الفخر والجشع والشراهة والحسد والشهوة والكسل والغضب، وفي مقابل هذه الخطايا توجد سبع فضائل مقدسة وهي العفة والاعتدال والإحسان والاجتهاد والصبر واللطف والتواضع.

وإذا انتقلنا من الكتاب المقدس إلى القرآن الكريم، فسوف نجد نفس النفوذ الكاسح

(1) الترجمة العربية لكلمة مينوراه العبرية.

(2) أو عيد العرش ويمتد من 15 إلى 21 من تشريه حسب التقويم اليهودي وهو عيد لإحياء ذكرى خيمة السعف التي آوى إليها اليهود في العراء أثناء خروجهم من مصر.

(3) العيد الذي يحيي ذكرى خروج بني إسرائيل من مصر ويمتد من 15 إلى 21 من نيسان حسب التقويم اليهودي.

(4) أعلنت الكنيسة اللائحة الرسمية للأسرار سنة 1274م في مجمع ليون المسكوني.

للرقم سبعة، فهو ثاني أكثر الأرقام تكرارا في القرآن بعد الرقم واحد وقد ذكر في العديد من المناسبات التي يتشارك القرآن والكتاب المقدس في بعضها كقصة يوسف عليه السلام[1]. وكذلك فالقرآن يشير إلى أن هناك سبع سماوات: ﴿ٱلَّذِى خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖ طِبَاقٗاۖ﴾ [الملك: 3]، وأن هناك سبع بوابات لجهنم: ﴿وَإِنَّ جَهَنَّمَ لَمَوۡعِدُهُمۡ أَجۡمَعِينَ ٤٣ لَهَا سَبۡعَةُ أَبۡوَٰبٖ لِّكُلِّ بَابٖ مِّنۡهُمۡ جُزۡءٞ مَّقۡسُومٌ﴾ [الحجر: 43 - 44]، وقد أُستخدم الرقم سبعة في القرآن للرمز إلى الكثرة مثل قوله: ﴿مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمۡوَٰلَهُمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتۡ سَبۡعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ سُنۢبُلَةٖ مِّاْئَةُ حَبَّةٖۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُۚ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ﴾ [البقرة 261].

الحديث الشريف أيضا ذكر الرقم سبعة بكثرة مثل حديث: «**اجتنبوا السبع الموبقات، قالوا: يا رسول الله، وما هن؟، قال: الشرك بالله، والسحر، وقتل النفس التي حرم الله إلا بالحق، وأكل الربا، وأكل مال اليتيم، والتولي يوم الزحف، وقذف المحصنات المؤمنات الغافلات**» (البخاري ومسلم)، وحديث: «**سبعة يظلهم الله في ظله يوم لا ظل إلا ظله: الإمام العادل، وشاب نشأ في عبادة الله، ورجل قلبه معلق في المساجد، ورجلان تحابا في الله اجتمعا عليه وتفرقا عليه، ورجل دعته امرأة ذات منصب وجمال، فقال إني أخاف الله، ورجل تصدق بصدقة فأخفاها حتى لا تعلم شماله ما تنفق يمينه، ورجل ذكر الله خاليا ففاضت عيناه**» (البخاري ومسلم)، وغيرهما من الأحاديث.

وإذا التفتنا إلى الطقوس والشعائر الإسلامية فأثر الرقم سبعة يصبح واضحا للعيان إذا نظرنا إلى شعائر الحج، فالطواف حول الكعبة يكون سبع مرات، والسعي بين الصفا والمروة كذلك سبع مرات، وعدد الجمرات التي يرجم بها الشيطان سبع.

إذن لا شك أن الأديان الإبراهيمية وضعت الرقم سبعة في مكانة خاصة بين باقي الأرقام، ولكن الأمر غير مقتصر على تلك الأديان فقط، بل إن الرقم سبعة كان له نفس الأثر العميق على الحضارات والديانات الأخرى والتي يعود تاريخها إلى أزمنة سحيقة.

فسوف نجد آثار للرقم سبعة في الأساطير السومرية والتي وصلت إلينا عن طريق

---

(1) تختلف القصة القرآنية عن قصة الكتاب المقدس بعض الشيء، فمثلا في القرآن لم تتم الإشارة إلى الملك الذي جاءه الحلم بأنه فرعون كما في الكتاب المقدس.

الألـواح الطينية المكتوب عليها بالخط المسـماري، فكان واضحـا التبجيل الخاص لهذا الرقم من هذه النصوص، هذا التبجيل الذي ورثته جميع حضارات ما بين النهرين التي تلت الحضارة السـومرية كالآكادية والبابلية والآشورية. فعلى سبيل المثال نجد في أحد الألواح الآشورية هذا النشـيد الذي يتحدث عن سـبع أرواح شريرة قد تسكن جسم الإنسان ولذلك يُطلق على هذا النشيد «نشيد الأرواح السبعة»:

**إنهم سبعة.. إنهم سبعة**

**يسكنون قرار المحيط وهم سبعة**

**ليسوا بالذكور ولا بالإناث**

**إنهم الريح الجارفة والوباء العضال**

**ليس لهم أولاد وليس لهم زوجات**

**لا يعرفون حكما ولا سلطة**

**لا يسمعون صلاة**

**إنهم سبعة.. إنهم سبعة، ومرة أخرى إنهم سبعة**

وكـما تأثر الآشـوريون تأثـر البابليون الذين كانـوا يعتقدون أن الرقم سـبعة هو رمز الكـمال على غرار الأديـان الإبراهيمية التي تلـت، بل إنهم كانوا يسـتخدمون نفس الكلمة للإشارة إلى «سبعة» و« كل». كان البابليون أيضا يتوقفون عن العمل أيام 7 و14 و21 و28 من كل شـهر، وربما كان هذا هو أسـاس نظام العطلة الأسبوعية. كانوا يعتقدون أيضا أن العالم تعرض للطوفان سبع مرات، وأن هناك سبعة آلهة للمصير، وأن هناك سبعة قضاة للجحيم.

لكـن ربما كان أهم أثـر أدبي تركته حضارات ما بين النهرين هـو ملحمة جلجاميش[1]

(1) كتبت هذه الملحمة في 12 لوحا طينيا بالخط المسماري واكتشفت بالصدفة عام 1853م في العراق والألواح موجودة حاليا في المتحف البريطاني.

والتي تعج بإشارات للرقم سبعة. تتحدث هذه الملحمة عن الملك جلجاميش، ملك أوروك[1]، الـذي كانـت أمه إلهة وأبـوه بشر فان، وبعـد مغامرات عـدة يُقتل صديقه أنكيـدو فيحزن جلجاميـش حزنا شـديدا ويرفـض أن يدفن أنكيدو طوال سـبعة أيام ولكنـه يقوم بدفنه في النهايـة بعد أن بدأت الديدان تخـرج من جثة صديقه. هزت هـذه الصدمة جلجاميش الذي تعـزز لديه الخوف من المـوت، فهو يعرف أنه حتما ملاقيه نظرا للجـزء الفاني داخله القادم من أبيه. يدفعه خوفه هذا إلى المضي في رحلة بحثه عن الخلود فيسـعى لإيجاد الإنسان الوحيد الذي وجد الخلود وهو أوتنابشـتم. يقص أوتنابشـتم كيف أن الآلهـة كافأته بالخلود بعد أن نجـح في المهمة التـي كلفوها بها وهي أن يبني فلكا ويجمع مـن المخلوقات الحية لإنقاذها من الطوفان القادم، وهنا بالتأكيد انتبه القارئ إلى الشبه الملحوظ بين قصة أوتنابشتم وقصة نوح عليه السـلام والذي دفع بالكثيريـن للاعتقاد أنهما نفس الشـخص وأن جلجاميش في الغالب كان شـخصية حقيقية نسـجت حوله الأسـاطير وأنه بالفعل قابل نوحا بعد الطوفان، ولكن تأكيـد هـذا هو شيء غاية في الصعوبة. المهم أنه على غرار قصة نوح، ظل الرقم سـبعة يظهر بإلحاح في قصة أوتنابشتم، فقد تابع هذا الأخير إلقاء قصته على مسامع جلجاميش فأخبره أنه انتهى من بناء الفلك بعد سـبعة أيام ثم جاء الطوفان وأن الزوابع اسـتمرت سبع ليال وهدأت في اليوم السـابع، وبعد أن اسـتقر الفلك في اليوم السـابع بدأ يرسـل الطيور لمعرفة ما إذا كان الماء انحسر أم لا، وعندما أرسـل الغراب ولم يعد اعتبر هذه إشـارة حسنة فأقام سبعة قدور للقرابين ليقدمها للآلهة شكرا على النجاة.

وإذا اتجهنـا غربا إلى الحضـارة المصرية القديمة لن نجد اختلافا كثـيرا فيما يتعلق بالرقم سـبعة، ففي كتاب الموتى[2] الفرعوني في الفصلـين 145 و146 نجد أن الإله أوزوريس دُفن في جزيرة سرية في العالم السـفلي وأن هذه الجزيرة لها سـبعة أبـواب. توجد آثار أخرى كثيرة للرقم سـبعة في البرديـات الفرعونية ولكن ربما كان الأثر الطقوسي الواضح والذي اسـتمر

(1) أو الوركاء وهي مدينة سـومرية وبابلية تقع على نهر الفرات على بعد حوالي 30 كم شرق مدينة السـماوة العراقية.

(2) مجموعـة من النصـوص الدينية والتعليمات التي غرضها مسـاعدة الميت في حياتـه الأخرى وهي موجودة حاليا في المتحف البريطاني.

مع المصريين إلى يومنا هذا هو «السبوع» الذي يتم فيه الاحتفال الصاخب بالمولود الجديد، فهذا الطقس منحدر من عادات المصريين القدامى الذين كانوا يعتقدون أن حاسة السمع لدى المولود تتجلى في اليوم السابع لولادته فكان ضروريا إحداث صخب حوله لتقوية هذه الحاسة الجديدة ثم يهمسون في أذنيه كلمات الطاعة للآلهة فتكون أول كلمات يسمعها.

في بلاد فارس القديمة كذلك نجد نفوذ الرقم سبعة ظاهر في الديانة الزرادشتية(1)، ففي كتاب الزرادشتية المقدس «أفيستا» توجد سبع خطوات على الإنسان المرور بها لتحقيق الوحدانية مع الذات الإلهية، كما أن الأرض مكونة من سبع مناطق، وتجديد العالم سوف يتم على يد سبعة قادمين من كل منطقة ويترأسهم المنقذ القادم من المنطقة الوسطى.

وفي الهند تخبرنا الريغ فيدا(2) الهندوسية أن مركبة الشمس تجرها سبعة أحصنة، كما أن الهندوسية لديها أيضا سبع خطايا وهم اللعب والصيد والسباب اللفظي والسباب الجسدي والزنا والسرقة والسكر ونجد التحذير من هذه الخطايا القاتلة واضحا في الملحمة الهندية الكبرى «المهابهاراتا» والتي تدور حول الصراع على السلطة في مملكة هستينابورا التي تحكمها سلالة كورو.

نمر الآن على البوذية فنجد أن أول تعاليم البوذية هي أن الحياة معاناة وأن مصادر المعاناة سبعة: الولادة، الشيخوخة، المرض، الموت، مصاحبة العدو، مفارقة الصديق، والإخفاق في التماس ما تطلبه النفس، ونجد أن عناصر الاستنارة سبعة: الذهن، التقصي، الطاقة، النشوة، الاسترخاء، التركيز، والاتزان.

حتى في الثقافة اليابانية تخبرنا الأساطير أن هناك آلهة حظ سبعة وهم: بيكو كو وبيشامون وبينيتس وإبيسو وجوروجين وهوتي وفو كورو كوجو.

بعد هذه الجولة السريعة التي تأكدنا فيها من التأثير العميق للرقم سبعة في ثقافات وديانات

(1) تُعتبر الديانة الزرادشتية من أقدم الديانات التوحيدية فقد نشأت في حوالي القرن الثاني قبل الميلاد في المنطقة التي تعرف حاليا بإيران على يد زرادشت الذي دعا بوجود إله واحد هو أهورامزدا. أطلق عليهم اسم مجوس وانتشر بالخطأ أنهم كانوا يعبدون النار في حين أنهم كانوا يعتبرونها رمزا للطهر.
(2) أحد الكتب المقدسة الأربعة في الديانة الهندوسية والتي يطلق عليهم مجموعين اسم «فيدا».

مختلفة في الأزمنة والأمكنة، أصبح من الطبيعي أن نسأل أنفسنا: لماذا؟ والحقيقة أنه لا توجد إجابة واضحة، ولكن توجد نظريات بالتأكيد وقد تكون النظرية الأقرب للمنطق هي التي تصل الرقم سبعة بدورة القمر الشهرية، فالقمر يمر بأربع مراحل رئيسية هي: الهلال، الربع الأول، البدر، الربع الثاني، وكل مرحلة تستمر حوالي سبعة أيام. منطقية هذا الطرح الذي يضع دورة القمر كحجر زاوية في أهمية الرقم سبعة هي أن جميع الحضارات القديمة اشتركت في أنها كانت تراقب هذه الدورة بحرص لتحديد المواسم والأشهر والسنوات.

انطلاقا من التفسير السابق، يسهل علينا تخيل العامل البشري الذي أخذ هذا الرقم الهام لحساب التوقيت وربطه بالميثولوجيا والأساطير، ولكن هذا لا يفسر أهمية الرقم في الأديان الإبراهيمية التي تؤكد أن نصوصها المقدسة آتية من الله نفسه، وهذا بالضبط ما دفع البعض إلى تكريس جزء كبير من حياتهم بحثا عن سر هذا الرقم علهم يجدون سر الكون نفسه.

المهم أنه لا جدال أن الرقم سبعة أصبح جزءا هاما من ثقافتنا، هذه الثقافة التي أنتجت لنا سنو وايت والأقزام السبعة[1] وجيمس بوند[2] ذا الرقم الكودي 007. ليس غريبا إذن أن يتأثر وعينا الجماعي كبشر بهذا الرقم، وإحدى أدلة هذا إحصائية أجريت في 2014 على 30000 شخص طلب منهم تحديد رقمهم المفضل. نتائج الإحصائية وضعت الرقم سبعة في المرتبة الأولى باكتساح، فحوالي 10 % من الأشخاص اختاروا الرقم سبعة من بين عدد لا نهائي من الأرقام، وهذه النتيجة المذهلة تدفعني لسؤال القارئ الكريم: هل تعتبر أنت أيضا الرقم سبعة رقمك المفضل؟

(1) فيلم أنتجته شركة والت ديزني عام 1937 وهي مبنية حول قصة ألمانية للأخوين جريم تدور حول سنوايت الجميلة التي تسعى زوجة أبيها للتخلص منها فينقذها أصدقاؤها الأقزام السبعة.

(2) شخصية العميل السري الجذاب التي ألفها الكاتب البريطاني إيان فليمنج عام 1953 ونالت الشخصية نجاحا ساحقا وتم تجسيدها في عدة أفلام هوليودية.

# رقم هاردي ـ رمانوجان 1729

لم يكن الرجل الإنجليزي الوقور بحاجة لمساعدة حتى يجد طريقه، فقد قطع هذا الطريق مرات عدة متمنيا في كل مرة أن يرى شيئا مختلفا في نهاية مطافه.. لكن هيهات.. فها هو الشـاب الهندي النحيل متكوم فراشه تماما كـما تركه آخر مرة وإجهاد المرض يعلـو وجهه.. حاول أن يخفي تأثره خلف قناع البرود الإنجليزي الذي لازمه طيلة حياته حتى أصبح جزءا أصيلا من شخصيته، وعندما أوشكت محاولاته أن تفشل لجأ لسياسة أخرى وهي سياسة فتح أي موضوع بعيد عن المرض والجو العام الخانق.

- آسف للتأخير.. لقد ضل سائق سيارة الأجرة طريقه. كان علي أن أخمن أن هذا سيحدث من رقم السيارة..

قالها الرجل الإنجليزي حانقا، فالتفت إليه الشاب الهندي مقاوما ضعفه:

- وأي رقم هذا؟

- هو أكثر رقم ممل رأيته.. الرقم 1729.

لمعت عينا الشاب ولوهلة ذهبت عنه كل أعراض المرض وهو يقول بحماس:

- ولكن هذا الرقم ليس مملا على الإطلاق..

إذا قال هذا أي شخص عادي نستطيع ببساطة أن نتجاهل إجابته أو أن نؤكد له أن الرقم 1729 يبـدو بالفعـل رقما ممـلا، ولكن في حالتنا هـذه علينا أن ننصت، فبطلنا الشـاب في هذه القصة ليس بالشـخص العادي.. إنه سرينيفاسـا رمانوجـان Srinivasa Ramanujan الرياضي الهندي الذي أحدث تيارا عاتيا في الرياضيات الحديثة رغم حياته القصيرة. الرجل الإنجليزي

ليس شخصا عاديا هو الآخر فهو جي إتش هاردي G. H. Hardy أستاذ الرياضيات بجامعة كامبريدج والذي كان رمانوجان هو أعظم اكتشافاته على الإطلاق.

قبل أن نعود إلى تعليق رمانوجان على الرقم 1729 ولم اعتبره غير ممل، فلننتهز الفرصة لنتعرف أكثر على حياة هذا الرجل العظيم، فقد كانت حياته خليطا من العبقرية العلمية الفذة والخرافة الدينية والصدام الحضاري المأساوي.

ولد رمانوجان عام 1887 في بيت جديه من أمه في قرية صغيرة تدعى إيرود Erode تبعد حوالي 400 كم من مدينة مدراس الهندية. كانت أسرته فقيرة وكان أبوه يعمل كاتبا في أحد محلات الأقمشة بمدينة كومباكونام Kumbakonam حيث انتقل رمانوجان مع أمه بعد عام من ولادته.

في العام 1889 توغل الجدري في البلاد وحصد الآلاف وكاد يفتك برمانوجان ويحرم البشرية من عقليته الجبارة ولكن هذا الأخير تعافى بعد معركة مرهقة.

عند بلوغه عامه الخامس، بدأ رمانوجان رحلته بين المدارس المحلية التي تباينت بسبب تنقل أسرته المستمر، ونظرا لعمل أبيه المتواصل فقد كان عاتق تربيته يقع بالكامل على كتفي أمه التي كان لها عظيم الأثر في تكوين شخصية رمانوجان. كانت أمه هندوسية أصيلة وعلمت ابنها التعاليم الأرثوذكسية الهندوسية مثل عدم المساس باللحوم في الطعام والحرص الدائم على حضور المناسبات الدينية وزيارة المعابد، ونستطيع أن نلمس هذا التأثير الديني بوضوح في تعليقات رمانوجان، كتعليقه بأنه يدين بحسه للرياضيات لإلهة عائلته مهالاكشمي Mahalakshmi التي كان يتطلع إليها طويلا ثم فجأة تأتيه رؤيا تكشف له علاقة رياضية معقدة. من أشهر الجمل أيضا التي أخذت عن لسان رمانوجان هي: «المعادلة لا تمثل لي أي شيء غير أن تكون فكرة من أفكار الله».

أبلى رمانوجان خير بلاء في دراسته المدرسية وكانت درجاته هي الأعلى في المنطقة، وفي 1897 التحق بالمدرسة الثانوية التي قابل فيها الرياضيات للمرة الأولى وبدأت رحلة العشق.

كان رمانوجان محظوظا بأن قابل اثنين من طلبة الجامعات كانا يقيمان معه في المنزل،

فقد استخلص منهما عصارة معرفتهما الرياضية، ثم بدأ بحلول العام 1900 في بناء الرياضيات الخاصة به سواء في الهندسة أو السلاسل اللانهائية.

إنجازات رمانوجان في الرياضيات جاءت دون أن يتعلم الرياضيات بشكل منهجي، فقد علم نفسه بنفسه، وكان من أهم الكتب التي وقعت بين يديه ليتعلم منها الرياضيات وأصبح علامة فارقة في حياته كتاب: «المختصر في النتائج الأولية للرياضيات البحتة Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics» لكاتبه الرياضي الإنجليزي جي إس كار G. S. Carr[1]، ولكن يرى البعض أن هذا الكتاب كان له أثر جانبي سيء على كتابات رمانوجان فيما بعد، فقد كانت طريقة الكتاب مبسطة للغاية ولا تحتوي معادلاته إلا على إثباتات مختصرة وربما كان تأثر رمانوجان بهذه الطريقة هو السر في أن كتاباته كانت سيئة تفتقر كثيرا إلى الإثباتات رغم محتواها العلمي القيم.

درجات رمانوجان الممتازة في المدرسة مكنته من الحصول على منحة دراسية للالتحاق بجامعة كومباكونام الحكومية، ولكن حبه وتفانيه للرياضيات جعلته يهمل باقي المواد فرسب فيها وفقد المنحة. هنا بدأت أصعب فترة في حياة رمانوجان، فقد كان معدما في هذه الفترة لا يكاد يجد قوت يومه، بل إن الجوع كان مصاحبا دائما له.

محطة هامة أخرى من حياة رمانوجان كانت مقابلته للبروفيسور رماسوامي Ramaswami المؤسس للأكاديمية الهندية للرياضيات أثناء بحث الأول عن وظيفة، وعندما اضطلع رماسوامي على مفكرات رمانوجان أدرك على الفور أن هذا الأخير ليس شخصا عاديا، بل هو عبقري.

بعث رماسوامي بجوابات توصية نيابة عن رمانوجان إلى الرياضيين أصدقائه، وأحد هؤلاء كان آر رماشاندرا راو R. Ramachandra Rao المسؤول عن جمع إيرادات المقاطعات الهندية. تشكك راو في البداية من أن يكون رمانوجان هو بالفعل من جاء بهذه المعادلات

(1) (1837 - 1914م) رياضي بريطاني عمل بجامعة كامبريدج وكان كتابه المذكور أعلاه بمثابة الدليل لتجاوز امتحان الترايبوس في الرياضيات tripos mathematics examination والذي كان آخر مرحلة للحصول على درجة الماجستير من جامعة كامبريدج.

ولكن عندما تأكد له أن رمانوجان بالفعل عبقري وغير مزيف تبنى المصاريف المعيشية لهذا الأخير كي يتفرغ إلى أبحاثه.

نشر أول أبحاث رمانوجان في مجلة الأكاديمية الهندية للرياضيات بمساعدة رماسوامي وكان دائم المشاركة في وضع وحل المعضلات الرياضية في المجلة. المعضلات التي كان يضعها كانت في الغالب لا تجد من يحلها فيضطر هو لوضع الحلول بنفسه. لكن التقدير الحقيقي الذي حصل عليه رمانوجان من المجتمع الرياضي الهندي كان عندما نشر بحثه عن أرقام برنولي Bernoulli numbers وهي سلسلة من الأرقام النسبية ذات الصلة الوثيقة بنظرية الأرقام number theory، فقد كان هذا العمل هو ما حفز بعض الرياضيين الهنود للسعي لتوصيل أبحاث رمانوجان للمجتمع الرياضي ببريطانيا كي يتم الاعتراف بنبوغه عالميا.

لم تسر المراسلات بين هؤلاء وبين أشهر الرياضيين الإنجليز كما تمنوا، فمنهم من لم يرد على الإطلاق ومنهم من اعترف أن هناك شيئا متميزا في فكر رمانوجان ولكن عدم تحصيله التعليم الرياضي المناسب هو العائق الأساسي أمام الاعتراف به كرياضي.

تغير الحال عندما تلقى جي إتش هاردي أول جواب من رمانوجان. كان هاردي مشدوها أمام المعادلات التي احتوى عليها جواب رمانوجان المكون من تسع صفحات وظن أنها عملية نصب ما، ولكن بعد معاينة الجواب بدقة خلص إلى أن هذه المعادلات حتما حقيقية لأنها لو لم تكن، فلا يوجد شخص بالخيال الكافي لتأليفها. استعان بزميل له هو جي إي ليتلوود J. E. Littlewood[1] الذي لم يختلف رد فعله كثيرا واعترف الاثنان أن صاحب هذه المعادلات هو رياضي من الطراز الأول.

أرسل هاردي جوابا يعرب فيه عن اهتمامه بأعمال رمانوجان وبدأ في الترتيب لرحلة لهذا الأخير لبريطانيا، وهنا ظهر المؤثر الديني مرة أخرى في شخصية رمانوجان الذي رفض السفر في البداية لأن السفر إلى أرض أجنبية محرم دينيا. بعد محاولات عدة لإقناعه بالسفر بدا أن رمانوجان عدل موقفه ولكن كانت هناك عقبة والديه اللذين كانا رافضين لسفره لنفس

(1)(1885 - 1977م) رياضي بريطاني تعاون كثيرا مع جي إتش هاردي وكان أكثر تركيزه في مجال التحليل الرياضي.

الأسباب الدينية. في النهاية وافقت أمه بعد أن جاءتها الآلهة في الحلم تطلب منها ألا تقف بين رمانوجـان وبـين تحقيق هدفه في الحياة، وبالفعل اتجه رمانوجـان إلى بريطانيا مبحرا كي يبدأ فصلا جديدا من حياته.

انضـم رمانوجان لهـاردي في كلية ترينيتـي بجامعة كامبريدج وأعطـاه باقي مفكراته ليذهل هاردي أكثر، فقد بات واثقا أن رمانوجان يمكن مقارنته بالرياضيين الأفذاذ من أمثال ليونـارد أويلر وكارل جاكـوبي Carl Jacobi[1]، لكن رغم هذا فقد كانت علاقة رمانوجان بهـاردي مليئة بالصراعات نظرا لتباين الشـخصيتين مـن الناحية الروحيـة والحضارية، فقد كان رمانوجـان متدينا يؤمـن بالروحانيات وأن الرياضيات تأتيه مـن الله لذا لم يهتم كثيرا بالإثباتـات واعتمد أكثر على الحدس، هذا بالطبع لم يكن مستسـاغا لـدى هاردي الذي كان ملحدا ولا يؤمن بالروحانيات كما أن الإثباتات لديه كانت أهم من أي حدس.

لم تمنع هذه الخلافات الاثنين من العمل سويا ومن النشر، ومن أهم الأعمال التي نشراها البحث الخاص بالأرقام فائقة التركيب Highly Composite Numbers الذي نشراه عام 1916 وكان السـبب في حصـول رمانوجان عـلى درجة الدكتوراة، لكن ربما أهـم عمل قاما بنشره على الإطلاق هو البحث عن دالة التقسـيم Partition Function الذي نشر عام 1918، ولمعرفة قيمة هذا البحث فلنعرف أولا ما الذي يعنيه التقسـيم ولنأخـذ الرقم أربعة كمثال. إذا أردنا أن نعرف عدد التقسـيمات الصحيحة التي يمكننا بها تقسيم الرقم أربعة يمكننا فعل هذا يدويا على المنوال التالي:

$$4,\ 1+3,\ 1+1+2,\ 2+2,\ 1+1+1+1$$

أي أن الرقـم أربعة يمكن تقسـيمه بخمس طرق، ومن السـهل أن نـرى صعوبة الطريقة اليدوية إذا أردنا العثور عدد التقسيمات للأرقام الكبيرة وما فعله رمانوجان وهاردي هو أن عرفا الدالة التي يمكن استخدامها لحساب عدد التقسيمات لأي رقم كان.

(1)(1804 - 1851م) رياضي ألماني له مساهمات هامة في المعادلات التفاضلية ونظرية الأرقام. كان أول يهودي يعين كرياضي في جامعة ألمانية.

هذا الاكتشـاف كان لـه الفضل في اختيار رمانوجان كزميـل في الجمعية الملكية Royal Society في العام نفسه ليصبح من أصغر الزملاء في تاريخ الجمعية وثاني الهنود الذين التحقوا بالزمالـة بعـد أرداسـير كورسـيدجي Ardaseer Cursetjee[1] الـذي حصل عـلى اللقب عام 1841.

لم يمهـل القدر رمانوجان الوقـت الكافي لحصد ثمار نجاحه، فقـد كان يعاني من المرض طوال حياته وكان يحاربه ببسـالة ولكن المنتصر في النهاية كان مرض السـل. تم تشـخيصه بهذا المرض العنيد في بريطانيا وهو في أوج نجاحه، ورغم أن المرض كان ينهش في جسده إلا أن عقـل رمانوجان كان حرا طليقا، وكان إنتاجه غزير وصلته بعشـقه الأول، الرياضيات، لا سبيل لقطعها.

عـاد رمانوجان إلى الهند عام 1919 ليقـضي آخر أيامه هناك حتى مات بعد وصوله بعام. المأسـاة هنا هو أن حيـاة رمانوجان كان يمكن إنقاذها لو تعجل اكتشـاف المضادات الحيوية الـذي تم على يد السـير ألكسـندر فليمنـج Alexander Fleming[2] عـام 1928 أي بعد موت رمانوجان بأقل من عقد من الزمان، لكن المأسـاة الأكبر سـتكون إذا تم إثبات ما توصل إليه الأطباء عام 1994 بعد أن راجعوا التقارير الطبية لرمانوجان، فقد انتهوا إلى أن ما كان يعاني منه رمانوجان هو بالأحرى أميبا الكبد Hepatic amoebiasis وليس السل، وهو المرض الذي كان علاجه متوفرا وقتها، مما يجعلنا نتسـاءل: هل حقا خسرنا أحد أهم العقول البشرية على الإطلاق قبل أوان نضوجها نتيجة تشخيص خاطئ؟

في النهايـة علينـا أن نكتفـي بالثلاثة وثلاثين عاما التي عاشـها رمانوجـان فوق الأرض والتي أسـهم فيها بالكثير في سـبيل تقدم الرياضيات، فبالإضافة إلى مـا ذكرناه في هذا الفصل بالفعل، سـاهم رمانوجان في مجال السلاسـل اللانهائية على وجه الخصوص مساهمات عديدة،

(1) (1808 - 1877م) مهندس وبناء سـفن هندي. كما ذكرنا، كان أرداسـير هو أول هندي ينضم إلى الجمعية الملكيـة البريطانية وقد عمل على تطوير مدينة بومباي بأن أدخل تكنولوجيا مثل ماكينة الخياطة، الإضاءة بالجاز والري بمضخات تعمل ببخار الماء.

(2) (1881 - 1955م) طبيـب وعالم ميكروبيولوجي إسـكتلندي يعزى إليه اكتشـاف أول مضاد حيوي على الإطلاق وهو البنسلين. اكتشافه هذا أهداه عن استحقاق جائزة نوبل في الفسيولوجي عام 1945.

منها اكتشاف سلسلة لانهائية جديدة لحساب الرقم المفضل بين الأرقام $\pi$، وتتميز سلسلة رمانوجان هذه بسرعة الوصول للحل مما جعلها من الطرق المفضلة لحساب $\pi$ في يومنا هذا.

نعود الآن إلى قصتنا التي بدأنا بها الفصل والتي حدثت أثناء وجود رمانوجان بالمستشفى ببريطانيا أثناء معاناته مع المرض، ونعود إلى رقم سيارة الأجرة التي جاء بها هاردي وهو الرقم 1729 الذي أكد رمانوجان أنه ليس مملا أبدا. تابع رمانوجان بعدها أن 1729 هو أصغر رقم يمكن تمثيله كحاصل ضرب بين مكعبين بالشكل التالي:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

وللقارئ أن يسأل: هل فكر رمانوجان في هذه المسألة سابقا وشاءت المصادفة أن تحدث هذه القصة أم أن الإجابة أتته في لحظتها؟ لا نعرف.. ولكن إذا صدقنا رمانوجان في أن العلاقات الرياضية تأتيه كإلهام من الآلهة، فليس من المستبعد أن يكون الاحتمال الثاني هو الصحيح.

المهم أن الرقم 1729 لم ينظر إليه أحد على أنه رقم ممل بعدها وأصبح يطلق عليه اسم رقم هاردي - رمانوجان تخليدا للعلاقة الخاصة التي جمعت بين هذين الرجلين المنتميين لعالمين مختلفين واللذين جمعهما شغفهما بالرياضيات.

من الجدير بالذكر أن حياة رمانوجان كانت مصدر إلهام لهوليود التي أنتجت فيلما عنها عام 2015 بعنوان ملهم هو: «الرجل الذي عرف اللانهاية The Man Who Knew Infinity»، والفيلم من إخراج مات براون Matt Brown وبطولة ديف باتيل Dev Patel[1] الذي قام بدور رمانوجان، أما دور هاردي فقد قام به الممثل العملاق جيريمي آيرونز Jeremy Irons[2] وقد لاقى الفيلم نجاحا كبيرا بين النقاد والجماهير، ولم يفت المخرج أن يشير في الفيلم إلى قصة رمانوجان وهاردي مع السيارة الأجرة ذات الرقم 1729.

(1) ممثل بريطاني شاب من أصول هندية. ولد عام 1990 ومن أهم أدواره التي كان لها فضل كبير في شهرته تجسيده لشخصية جمال مالك في فيلم المليونير المتشرد Slumdog Millionaire.

(2) ممثل بريطاني مخضرم ولد عام 1948 وبدأ مشواره الفني على خشبة المسرح. نال العديد من الجوائز على أدواره المتميزة ومن هذه الجوائز جائزة الأوسكار وآيمي وطوني.

# -1/12

بينما نحن نتحدث عن رمانوجان وعبقريته، فلنقرأ هذه الرسالة الهامة التي أرسلها إلى هاردي في فبراير عام 1913:

«سيدي، سعدت بقراءة رسالتك بتاريخ الثامن من فبراير 1913. توقعت منك ردا مشابها لرد بروفيسور رياضيات آخر بلندن سألني أن أركز دراستي على سلسلة بروميتش اللانهائية Bromwich's Infinite Series[1] وألا أقع فريسة للسلاسل المتشعبة... أخبرته أن مجموع الأرقام في السلسلة اللانهائية: 1 + 2 + 3 + 4 + ... هو 1/12-، ولو أخبرتك بنفس النتيجة سوف تنصحني بأن أنتقل إلى مصحة للمختلين عقليا في الحال.»

من منا لم يكن ليحيل رمانوجان إلى تلك المصحة لو رأينا هذه النتيجة العجيبة التي توصل إليها؟ إذ كيف يمكن لسلسلة متشعبة مثل سلسلة الأعداد الطبيعية (1 + 2 + 3 + 4 + ...) والتي تستمر في الزيادة إلى ما لانهاية ولا يوجد بينها أي رقم سالب أو أي رقم نسبي أن يساوي مجموعها 1/12-.

لكن قبل أن نتهم رمانوجان بالخبال، علينا أن نتذكر أنه عبقري ولذا علينا أن نأخذ ما قاله بعين الاعتبار وننظر إلى دليله على ما قال. نجد هذا الدليل في الإثبات الرياضي الذي عرضه في الفصل الثامن من دفتر ملاحظاته الأول الضخم ولكن الحقيقة هو أنه تم اكتشاف العديد من الإثباتات الرياضية المختلفة التي تؤدي إلى نفس النتيجة المدهشة. نذكر هنا أحد هذه الإثباتات الذي عرضه الرياضي طوني باديللا على اليوتيوب. الإثبات يبدأ بافتراض ثلاث مجموعات سوف نعرّفها كالآتي:

(1) سميت هذه السلسلة باسم الرياضي الإنجليزي والزميل بالجمعية الملكية توماس برومويتش Thomas Bromwich (1875 - 1929م).

$$S1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

$$S2 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$S3 = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$$

المجمـوع S1 يمثل ما نريد حسـابه وسـوف نسـتخدم المجموعين الأخريـن لفعل هذا. لحسـاب S2 سنلاحظ أنه مجموع لسلسلة متشعبة كذلك، فالأرقام لا تقترب من نتيجة محددة بل تتأرجح بين 1 و0 إلى مالانهاية، لكن نسـتطيع أن نمارس بعضا من خفة اليد هنا ونحسـب المجموع على أنه المتوسط بين هذين الرقمين فنحصل على 1/2.

الآن نستخدم S2 لحساب S3 كالآتي:

$$\begin{aligned}
2S2 &= 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \\
&\ \ + 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \\
\hline
&= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

ومن هنا نرى أن S2 يصبح:

$$S2 = 1/4$$

حان الدور الآن على S1 ونستطيع حسابه بأن نطرح منه S3:

$$\begin{aligned}
S1 - S3 &= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \\
&\quad - [1 - 2 + 3 - 4 + \ldots] \\
\hline
&= [0 + 4 + 0 + 8 + \ldots] \\
&= 4[1 + 2 + 3 + 4 + \ldots] \\
&= 4S1
\end{aligned}$$

وباستبدال S3 بالمجموع 1/4 الذي توصلنا إليه منذ قليل نجد:

$$S1 - 1/4 = 4S1$$

$$4S1 - S1 = - 1/4$$

$$3S1 = - 1/4$$

$$S1 = - 1/12$$

وهذه هي النتيجة التي توصل إليها رمانوجان والتي تتحدى كل البديهيات لدينا.

بالتأكيد لاقت هذه النتيجة هجوما شرسا من الرياضيين وغيرهم الذين لم يقبلوا بهذه النتيجة المستفزة، بل إن البعض اعتبروها جنونا. بعض هذه الاعتراضات هاجمت حقيقة أن تعريف مجموع محدد لكل من السلاسل السابقة يُعتبر تحايل غير مقبول، فالسلاسل الثلاث السابقة كلها سلاسل متشعبة ولدينا الإثباتات الواضحة على هذا، فكيف إذن نصل إلى مجموع محدد لكل واحدة منها؟ يمكن للقارئ لمس قسوة الاعتراضات على فكرة المجموع المحدد للسلاسل المتشعبة في مقولة الرياضي النرويجي نيلز هنريك أبل Niels Henrik Abel[(1)]:

«السلاسل المتشعبة من اختراع الشيطان، وإنه من العار استخدامهم في إثبات أي شيء على الإطلاق.»

قد نرى المنطق خلف الاعتراضات ولكن المشكلة أن الإثبات الرياضي صحيح تماما، والأدهى من ذلك أن رمانوجان لم يكن الأول في الوصول إلى مثل هذا الرقم 1/12 -، فقد سبقه إليه رياضيون لهم وزنهم مثل أويلر الذي استخدم نفس طريقة الإثبات لإيجاد حلول محددة لسلاسل متشعبة مثيلة. وبعد أويلر بحوالي مائة عام جاء رياضي عملاق آخر هو برنارد ريمان وقام بإثبات نفس النتيجة باستخدام دالته الشهيرة، دالة زيتا Zeta function، وارتباط 1/12- بهذه الدالة الغامضة التي مازلنا نتحسس أسرارها يعتبر كافيا كي يحتل هذا

(1) (1802 - 1829م) رياضي نرويجي ساهم في العديد من المجالات الرياضية أبرزها في التكامل الجبري algebraic integrals حيث وضع نظريته التي سميت باسمه قبل أن يتوفى جراء مرض السل.

الرقـم مكانته بين أكـثر الأرقام غموضا في الرياضيات. لكن السـؤال يبقى: كيف نوفق بين هذه الإثباتات التي صاغها هؤلاء العمالقة والعبثية الواضحة في النتيجة؟

يحاول البروفيسـور إدوارد فرينـكل Edward Frenkel[1] من جامعة كاليفورنيا بيركلي أن يجيـب عن هذا السـؤال ويبـدأ بتحدى المفهوم العـام عن الرياضيات بأنهـا تحمل إجابات واضحة لا تقبل النقاش في أي محتوى ممكن، ويقرب فكرته بمثال الأرقام التخيلية التي تحدثنا عنها في فصل سـابق، فقد كانت هذه الأرقـام مرفوضة تماما لأنها تتعارض مع البديهيات، فلا يوجد رقم هو نتيجة الجذر التربيعي لرقم سـالب، ولكن بمرور الوقت وجدت هذه الأرقام مكانهـا وفوائدها في محتوى الأرقام المركبة التي ربطت بين الأرقام التخيلية والواقع، ويرى فرينكل أن المثل ينطبق على الرقم 1/12- وعن وجوده كمجموع لسلسـلة متشـعبة، لأننا إذا وضعنا مثل هذه السلاسـل في محتوى معين يسـمح بوجود مجموعين مختلفين، أحدهما اللانهاية بالتأكيد، أما المجموع الآخر فيمكننا الوصول إليه بعد أن نستبعد الجزء اللانهائي في المتوالية وهذا المجموع هو 1/12- وهو الذي يدعوه فرينكل «القلب الذهبي».

قد يقبل القارئ هذا الطرح أو يرفضه كما رفضه الكثيرون الذين حكموا على المسـألة برمتها أنها ترف رياضي لا معنى له ولا يعنينا في شيء، لكن إن كنت عزيزي القارئ تميل إلى هذا الرأي فوجب عليّ التنبيه أنك سـتكون مخطئـا، فقد انطلق الرقم 1/12- من معقل الرياضيات ليجـد تطبيقاته في الفيزياء التي تتعامل مع الواقع حولنا. إحدى أهم هذه التطبيقات توجد في فيزياء الكم السـاعية لفهـم الجزيئات المكونة للكون، لذا وجب علينـا أن نحترم هذا الرقم وأن نتوغل فيه وفي السحر العجيب الذي جعله يساوي مجموع السلسلة الطبيعية المتشعبة.

(1) رياضي روسي - أمريكي ولد عام 1968 ويعمل حاليا كبروفيسور بجامعة بيركلي بكاليفورنيا. حصل كتابه «الحـب والرياضيـات Love and Math» على جائـزة أويلر للكتـاب في 2015 وكان أحد الكتب الأكثر مبيعا.

# جوجول

مـن منا لا يسـتخدم باحـث الإنترنت جوجـل google؟ أغلـب الظن أن القارئ العزيز يستخدمه في تلك اللحظة ليرى ما هنالك على الإنترنت بعد أن ملّ من هذا الكتاب، فقد أصبح جوجل بما لا يدع مجالا للشك المتصفح الأقـوى على الإطلاق نظرا لسرعتـه ولوغاريتمات البحـث الذكية التي يسـتخدمها، لكننا في هـذا الفصل مهتمون بشيء آخر غير قدرة جوجل.. اسـمه.. هل سـأل القارئ نفسـه من قبل من أين جاء هذا الاسم الغير مألوف؟ الحقيقة أن هذا الاسم جاء وحيه مـن رقمنـا في هذا الفصل.. الرقم جوجـول Googol الذي يعني واحد وبعـده مائة صفر، أي $10^{100}$.

قصـة هذا الرقـم طريفة للغاية، فمن أعطاه اسـمه هو طفل في التاسـعة من عمره يدعى ميلتون سيروتا Milton Sirotta. شاءت الأقدار أن يكون عم هذا الطفل هو الرياضي الأمريكي البـارز في مطلـع القرن العشرين إدوارد كازنـر Edward Kasner[1] الذي طلب من ابن أخيه أثنـاء تنزهّما أن يعطي اسـما لرقم كبير جدا ولكنه ليس لانهايـة وهذا الرقم هو واحد يتبعه مائة صفر. فكر الطفل قليلا ثم قرر أن يدعو الرقم جوجول.

جوجـول بالتأكيـد رقم هائل و كي يـدرك القارئ كم هو كبير فعليـه أن يعرف أن عدد الجزيئـات في الكـون هـو تقريبـا $10^{80}$، وأننا إذا أردنـا أن نملأ الكون كله بحبـات رمل فلن نحتـاج أكـثر من $10^{90}$ حبة، ورغـم أن هذين رقمان كبيران للغايـة إلا أنهما أصغر كثيرا من جوجول.

لكـن جوجول مازال رقما صغيرا إذا قارنّـاه بأرقام نهائية أخرى مثل رقم جراهام الذي

(1) (1878 - 1955م) رياضي أمريكي عمل كمحاضر في جامعة كولومبيا الأمريكية.

سوف نتحدث عنه في فصل قادم أو رقم آخر شديد الصلة بجوجول نفسه، وهو الرقم جوجولبلكس googolplex. هذا الرقم الأخير سمّاه الصغير ميلتون كذلك في نفس النزهة مع عمه، فهو لم يكتف بالرقم جوجول بل حلق بخياله ليسمي رقما أكبر وهو جوجولبلكس. طبقا لرواية كازنر، هذا الرقم كان يمثل في بدايته الرقم واحد وبعده عدد أصفار تكتب إلى أن يتعب الكاتب ولكن اختلاف القدرات الفردية في الكتابة جعل هذا الرقم مبهما مما دفع إلى استبدال هذه الفكرة بأن يصبح جوجولبلكس هو الرقم واحد يتبعه عدد من الأصفار يساوي جوجول، أي $10^\wedge10^{100}$، ولا أنصح القارئ العزيز بأن يحاول كتابة هذا الرقم لأنه لن يستطيع فعل هذا أبدا، في الواقع لو جمعنا كل البشر على الأرض وإذا فرضنا أننا بدأنا كتابة أصفار جوجولبلكس منذ بداية التاريخ ونضيف أيضا أن كل خلية في أجسادنا تكتب الأصفار بصورة منفصلة عن باقي الخلايا، فلن نقترب من الانتهاء من كتابة هذا الرقم المهول.

يشرح لنا الرياضي طوني باديلا فكرة عجيبة أخرى تواجهنا عندما نتعامل مع جوجولبلكس وهي أننا لو فرضنا أن الكون طوله هو جوجولبلكس من الأمتار وأننا سافرنا مسافة كافية داخل هذا الكون، فسوف نبدأ في رؤية نسخ أخرى مطابقة للكون الذي نراه الآن والأدهى أن هذه النسخ سوف تشمل نسخا مطابقة لذواتنا.. كم ستكون هذه تجربة فريدة من نوعها!! هذه الفكرة ليست خيالية كما قد يظن القارئ، فما يحدد ماهيتك الفيزيائية هي الحالة التي تتبناها الجزيئات الموجودة في المساحة التي يحتلها جسدك الآن. هذه الحالة هي فقط واحدة من حالات عديدة تسمّى حالات الكوانتم quantum states وإذا استخدمنا حسابات فيزياء الكم نستطيع أن نحسب عدد جميع حالات الكوانتم المختلفة التي يمكن أن تتبناها الجزيئات التي تحتل مساحة تساوي مساحة الجسد البشري وهذا العدد هو $10^\wedge10^{70}$ وهو رقم هائل ولكنه أصغر من الجوجولبلكس، لذا فمن المنطقي أن نستنتج من هذا أن حالات الكوانتم هذه سوف تبدأ في التكرار إذا سافرنا مسافة أكبر من عدد الحالات المختلفة، مثل المسافة جوجولبلكس.

كسب الرقم جوجول شهرة لا بأس بها في الثقافة الرائجة بعد اكتشافه، فعلى سبيل المثال نجده في حوار بين لوسي وشرويدر، بطلي القصص الهزلية أو الكوميكس الشهيرة بيناتس

Peanuts[1]، في قصة منشــورة عام 1963 وفيها تســأل لوسي شرويدر عن احتمالات زواجهما في يوم من الأيام ويجيب شرويدر أنه احتمال جوجول إلى واحد.

أما قصة كيف تسـلل الرقم جوجول إلى الباحث جوجل، فهذه أيضا قصة طريفة، فاسم جوجل السابق كان باكراب BackRub، أو فرك الظهر، وقد سمي هكذا نظرا لاعتماده على تحليـل الروابط الخلفية لصفحات الإنترنت لتحديـد أهميتها، ولكن في العام 1997 قرر لاري بيدج Larry Page[2]، أحد مؤسسيَ جوجل أن الاسم بحاجة للتغيير فاجتمع بزملائه في جامعة ستانفورد ليفكروا سويا في اسم جديد للباحث يركز على حجم المعلومات الهائل الذي يوفره هذا الأخير، وأثناء النقاش اقترح أحد الطلبة واسمه شون أندرسون Sean Anderson الاسم جوجولبلكـس وأُعجب بيدج بالفكرة ولكنه فضل تقصيره للاسـم جوجول، وربما يكون القارئ قد لاحظ أن الاسـم جوجول googol مختلف عن الاسـم جوجـل google الذي تبناه مؤسـسي الباحث والسبب في هذا هو أن أندرسـون عندما أراد أن يبحث عما إذا كان الاسم جوجول تم اسـتخدامه بالفعل عن طريق أحد آخر، أخطـأ في الكتابة، فبدلا من البحث عن googol.com كتبها google.com لكن هذا الاسـم أعجب بيدج حتى أكثر من الاسم الأصلي googol فقـرر اسـتخدامه. كانت هذه المصادفة هي السر الذي جعل الاسـم الخاطئ google هو الاسـم الملاصق للباحث وأعطاه شهرة تجاوزت حتى شـهرة الاسم الأصلي والرقم الذي يمثله.. الرقم جوجول.

(1) شرائـط هزلية ألفها تشـارلز شـولتز وبـدأ نشرها عام 1950 في عـدة جرائد. تعد بيناتـس الآن هي أنجح وأشهر شرائط هزلية على الإطلاق وقد جعلت من شولتز مليارديرا.

(2) عالم كمبيوتر أمريكي ولد عام 1973 وهو مؤسس شركة جوجل إلى جانب سيرجي برين.

# ثابتا فايجنباوم δ وα

في هـذا الفصل نتحدث عن رقمين وليس رقما واحدا وهما ثابتا فايجنباوم δ وα. هـذان الثابتان وثيقا الصلة بمفهوم مرعب بالنسـبة لأي عالم في أي علـم.. الفوضى. التعريـف البديهي للفوضى هو فقـدان النظام الذي يولد عـدم القدرة على التحكم في هذا النظام أو التنبؤ بمردوده. هذا بالفعل هو تعريف الفوضى لدى الرياضيين إذا أضفنا إضافة بسيطة وهي أن الفوضى تحدث عندما يؤدي تغيير بسيط في مدخلات النظام إلى تغيير هائل في المردود.

بدأ صدام الرياضيين مع الفوضى منذ زمن نيوتن، فقد أثبت هذا الأخير أن هناك مدارا ثابتا يمكن التنبؤ به لجسـمين كبيرين كالشمس والأرض يدوران حول بعضهما ولكنه أدرك صعوبة تحديـد وجود هذا المدار الثابت أو التنبؤ به إذا أضفنا جسـما ثالثـا كالقمر. هذه المعضلة أصبح يطلـق عليها معضلة الثلاثة أجسـام three - body problem وقد أعيت عمالقة الرياضيات أمثال أويلر ولابلاس إلى أن جاء الرياضي الفرنسي هنري بوانكاريه Henri Poincare[(1)] وحل المعضلة، أو عـلى الأقـل هو ظن هذا، فقد توصل إلى حل جزئي لها وقـد كان هذا الحل كافيا لحصوله على جائزة من ملك السـويد سنة 1887، لكنه اكتشف بعدها أنه ارتكب خطأ وأن التبسيطات التي قـام بهـا في الحل لم تؤدي إلى مـدار ثابت على الإطلاق، بل إن تغييرا بسـيطا في المدخلات الأولى سوف تؤدي إلى مسارات مختلفة عدة لا يمكن التنبؤ بها. رسم بوينكاريه باكتشافه هذا الخطوط الأولى لنظريـة رياضية تتعامل مع الفوضى ولكن الكثيرين يعتبرون أن الأب الروحي الروحي الحقيقـي للنظرية هو عالم الأرصاد الجويـة الأمريكي إدوارد لورنـز Edward Lorenz[(2)] الذي صاغ المصطلح الأشهر في تمثيل الفوضى، وهو مصطلح «تأثير الفراشة The Butterfly Effect».

(1) (1854 - 1912م) رياضي وفيزيائي فرنسي مثلت اكتشافاته إحدى دعامات النظرية النسبية.

(2) (1917 - 2008 م) رياضي وعالم أرصاد أمريكي وهو أحد أهم مؤسسي نظرية الفوضى. أنهى حياته كأستاذ في معهد ماتشوستس للتكنولوجيا.

يشـير لورنـز في مصطلحـه إلى فكرة أن ضربـة جناح فراشـة في مكان ما قـد تؤدي بعد أسـابيع إلى إحداث إعصار مدمر في النصف الآخر من الأرض. السـبب هو أن التغير البسـيط الـذي أحدثـه جناح الفراشـة قد يترقّى عـن طريق تغـيرات متراكمة صغيرة أخـرى إلى هذا التغـير الضخـم، تماما كما قد تؤدي قطعة دومينو صغيرة إلى إسـقاط قطعـة ضخمة عن طريق القطع الوسـيطة المتزايدة في الحجم. كعادة الاكتشـافات الثورية، جاء إكتشاف لورينز لتأثير الفراشـة عن طريق المصادفة عندما كان يعمل على بناء نموذج رياضي حاسوبي للتنبؤ بالطقس، وفي نموذجـه كان دائما يبـدأ بمدخلات ثابتة ولكنه عندما قرر أن يختـصر الوقت، قام بمحاكاة جديدة تبدأ من منتصف المحاكات السـابقة بمدخلاتها عند تلك النقطة، ولدهشـته حصل على نتائج مختلفة تماما. عندما تحرى السبب وجد أن الحاسوب كان يقوم بتقريب الأرقام إلى الرقم الثالث بعد العلامة العشرية، مما يؤدي إلى إختلاف طفيف للغاية في الأرقام ولكن لورنز تجاوز النظرة السـطحية والتفـت إلى الصورة الأكبر التـي أوضحت له أن مثل هـذه التغييرات الغير ملحوظة نسـبيا، أدت بتراكمها إلى التغير الهائل في نتائج المحاكاة النهائية. وبهذا توصل لورينز إلى نتيجة محبطة بعض الشيء، وهي أنه من المسـتحيل التنبؤ الدقيق بالطقس أو أي نظام مشـابه آخـر نظـرا للعدد اللانهائي من هذه التغيرات الطفيفة التـي لا يمكن إحصاؤها جميعا. رغم هذه النتيجة المحبطة، فقد كان اكتشـاف لورنز هو حجر الأسـاس في تأسـيس نظرية جديدة هي نظرية الفوضى chaos theory، وهي النظرية التي أثارت الخيال والخوف في نفس الوقت..

نظرا لأنـه يتم الخلط كثيرا بين نظرية الفوضى ونظريـة أخرى هي نظرية الاحتمالات probability theory، فأصبح من المهم هنا أن نفصل بشـكل نهائي بين النظريتين. لتقريب هذا الفارق فلنتخيل شابا يريد أن يوجه سهما لضرب دائرة حمراء فوق الهدف. قانون الاحتمالات يعطينـا رقـما يمثل احتمال ضرب الشـاب للدائرة، وفي كل مرة يقوم الشـاب بمحاولته بنفس زاوية توجيهه ونفس قوته فسوف يحمل نفس احتمال النجاح، إذا تغاضينا بالطبع عن تحسن أدائـه بعـد كل مرة. أما الفوضى فتعني أن الشـاب لو غـير زاويته بمقدار طفيـف للغاية، فقد يصيـب بقعة بعيدة جدا عـن الدائرة الحمراء. إذن في الحالة الأخـيرة، النظام كله يطلق عليه نظاما حتميا deterministic system لعدم خضوعه لنظرية الاحتمالات، ولكنه نظام حساس جدا للمدخلات.

كان مـن الطبيعـي بعـد اكتشـاف لورنـز أن يتجنب الكثير مـن العلـماء الفوضى و كل الأنظمة المرتبطة بها حتى لا يعترفون بعجزهم عن سـبر أغوارها وإخضاعها، وهذا بالتأكيد حل غير عملي نظرا لأن الفوضى تبدو واضحة في تقريبا كل مظاهر الطبيعة حولنا من الطقس والبورصة والشـفرات وبيولوجيا جسـم الإنسـان وغيرها. لذا قرر البعض أن يدخلوا هذا العالم الفوضوي بكل شجاعة لمحاولة فهمه بشكل أفضل.

أحـد هؤلاء البواسـل كان الريـاضي والفيزيائي الأمريكي، ميتشـل فايجنبـوم Mitchell Feigenbaum(1)، وهو كان أول من سـأل سـؤالا أقل ما يمكن أن يقال عنه أنه جريء، وهو: هـل يمكن للفوضى أن تخلق نظاما ما؟ قد يرى القارئ عبثية واضحة في السـؤال نظرا لمنافاته للطبيعتـين المعروفتـين عن النظـام والفوضى، ولكـن فايجنبوم وجده سـؤالا منطقيـا للغاية وبالفعـل نجح في إثبات أن النظام يوجد حتى فيـما نعتبره فوضى. لتوضيح كيف حدث هذا، فلنتحدث سريعا عن محور عمل فايجنبوم في سبعينات القرن الماضي. كان فايجنبوم مهتما بنوع من الأشـكال الرياضية المعقدة تدعى الأشـكال المتشـعبة bifurcation diagrams (شكل 1). هذه الأشـكال تصف الكثير من المشـاهدات في الطبيعة ولكن المثال الذي يذكر بكثرة عند الحديث عن الأشكال المتشعبة هو مثال التكاثر السكاني لمجموعة من الكائنات الحية، ولنأخذ الأرانب على سـبيل المثال. توجد معادلة شهيرة تستخدم لحساب التعداد السنوي لمجموعة ما من السـكان ويطلق عليها اسـم الخريطة اللوجيستية logistic map. باسـتخدام هذه المعادلة نسـتطيع تمثيل العلاقة بين نسـبة التعداد x والخصوبة r كما هو موضح في الشـكل ١. يلاحظ القارئ أن هذه العلاقة في بدايتها تسـير بشـكل متوقع، فزيادة الخصوبـة تزيد التعداد إلى أن نصل إلى التشعب الأول في الشكل. عند هذه النقطة مقدار الخصوبة قد يؤدي إلى نسبتي تعداد مختلفتين، فمثلا قد نحصل في سـنة ما على تعداد كبير تتبعه سنة ذات تعداد صغير. السؤال هنا هو: كيف يمكن الحصول على نسبتي تعداد مختلفتين من نفس درجة الخصوبة؟ الإجابة بسيطة في الحقيقة ومنطقية، فارتفاع النسـبة السكانية في السـنة الأولى المصاحبة لارتفاع الخصوبة سـوف تؤدي إلى إرهاق الموارد اللازمة للحفاظ على التعداد الجديد مما سـيؤدي إلى انخفاض

(1) ولد فايجنبوم في ولاية نيويورك عام 1944. عمل لفترة اضطراب السوائل fluid turbulence ورغم فشله في الخروج بنظرية تصف هذه العملية إلا أن عمله هذا هو ما أدي به إلى دراسة نظرية الفوضى.

ضروري في هذه النسبة في السنة التالية من أجل بقاء النوع. هنا نرى أهمية المدخلات الأولى، فإذا بدأنا محاكاة باستخدام هذه المعادلة وحددنا أننا سوف نبدأ من تعداد كبير، فسوف ننتهي في السنة التالية إلى التعداد الأصغر، أما إذا بدأنا بالتعداد الأصغر فسوف ننتهي إلى الأكبر.

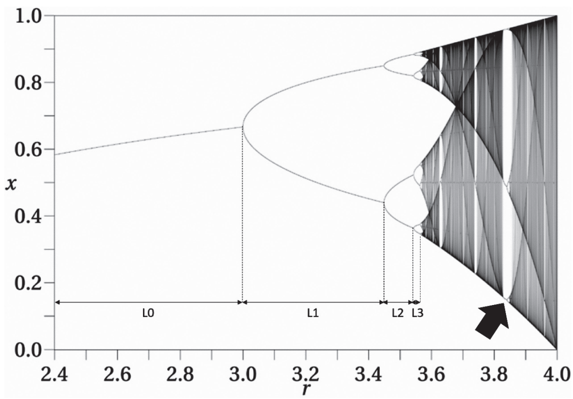
الآن نستمر في زيادة درجة الخصوبة لنجد أننا نصل إلى مفترق آخر مثير، فعند هذا المفترق سوف نجد أن عند درجة خصوبة محددة يمكننا أن نحصل على أربعة تعدادات سكانية بدلا من اثنين فقط ونستطيع تخيل التوالي بين هذه التعدادات على مدار أربع سنوات متوالية. يمكن للقارئ أن يخمن ماذا سيحدث بعد ذلك، فعند درجة خصوبة أعلى سوف تفترق الأربعة تعدادات إلى ثمانية، ثم الثمانية إلى ستة عشر تعداد. بعد الستة عشر سوف تتزايد التعدادات بشكل صاخب قد يُرى على أنه «فوضى» كاملة، فعند الوصول إلى هذه النقطة لا يمكن الاعتماد على تنبؤات المعادلة لأن استخدام درجة خصوبة ما قد تؤدي في النهاية إلى أي واحد من تعدادات لا يمكن حصرها والنظام كله يصبح شديد الحساسية للمدخلات ولدرجة الخصوبة التي يؤدي تغيير متناهي الصغر فيها إلى تغيير كبير للغاية في النتيجة. الحقيقة أن تلك الخاصية جعلت الخرائط اللوجستية تجد فائدتها في مجال البرمجة، فعن طريق التغيير الطفيف في العنصر المتحكم في دخول النظام إلى العشوائية (مثل الخصوبة)، نستطيع إنتاج الأرقام شبه العشوائية pseudo - random numbers التي يتم استخدامها بكثرة في برامج الكمبيوتر المختلفة.

يأتي دور فايجنبوم في القصة عندما دقق النظر في الشكل المتشعب الموضح ثم قرر لسبب ما أن يقيس المسافة بين هذه المفترقات، أي من البداية إلى المفترق الأول (L0)، من المفترق الثاني إلى الثالث (L1)، الثالث إلى الرابع (L2)، ثم الرابع إلى الخامس (L3). تلك المسافات في تناقص مستمر كما هو واضح لكن النتيجة المذهلة التي توصل إليها فايجنباوم هو أنه عندما حسب النسبة بين كل مسافة والمسافة الأصغر التي تليها مباشرة وجد أن هذه النسبة ثابتة وهي: 4.6692016091.... بالتأكيد حمل هذا الرقم اسم مكتشفه فايجنبوم وأصبح ثابت فايجنبوم الأول وكما العادة مع الأرقام الأهم، حصل هذا الرقم على رمزه الخاص به وهو الرمز $\delta$. ثابت فايجنباوم الثاني الذي يرمز له بالرمز $\alpha$ هو وثيق الصلة بالأول، فهو أيضا نسبة يمكن حسابها من نفس الأشكال المتشعبة ولكنه - بدلا من طول المسافة - فهو يمثل النسبة بين عرض المفترق الأكبر إلى عرض إحدى المفترقين الأصغرين، وهذا الرقم هو:

2.5029078750.... لا يحتـاج القـارئ بالتأكيد إلى أن أوضح أن هذين الرقمين غير نسـبيين، فهذا ديدن أهم الأرقام التي حيرت العالم. هما أيضا في أغلب الظن رقمان متعاليان ولكن هذا شيء لايزال في انتظار الإثبات الرياضي الحاسم.

لم يتوقف فايجنبوم هنا، بل اسـتمر في إذهالنـا عندما نظر إلى معادلات أخرى تنتمي إلى نفس نوع المعادلات الذي تنتمي إليه الخرائط اللوجستية، وهي المعادلات التكعيبية. النتيجة كانت واضحة.. التشعب هو سمة مشتركة بين كل هذه المعادلات ورقما فايجنباوم يظهران فيها جميعا، مما يجعلهما رقمين عالميين universal numbers.

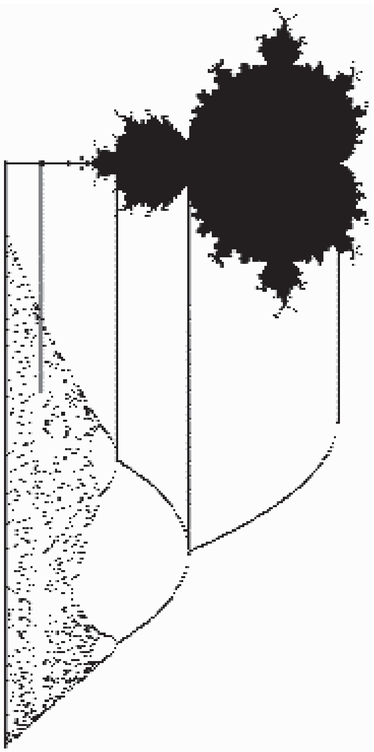
إذا ظـن القارئ أنه رأى كل ما تحمله الأنظمة الفوضوية من مفاجآت، فيسـعدني أن أخبره أن هناك المزيد. انظر مرة أخرى إلى الشـكل 1، تحديدا إلى تلك الفترات التي يدخل فيها النظام إلى «فـوضى» ظاهـرة وتابع بعينيك سـتجد أن هناك فترات تخرج من هـذه الفوضى تحمل عددا محدودا من النتائج (مشـار إلي إحدى هذه الفترات بالسـهم الأسود الكبير)، فتلك الفترات تبدو بشـكل كبـير مماثلة إلى فترة التشـعبات الثنائية التي سـبقت الدخـول إلى الفـوضى الكاملة. في الواقع إذا حملنا عدسـة مكبرة و كبرنا التفرقات الظاهرة في هذه الفترات، سـنجدها مماثلة تماما للتفرقات السـابقة الأكبر وتحمل رقمي فايجنبـاوم في طياتها، وعلى نفس المنوال، إذا دققنا النظر في التفرقات الأصغر سنجد أن هناك تفرقات مماثلة أصغر منها وهكذا إلى ما لانهاية، وهذا يضع هذه الأشكال في تصنيف أشكال أخرى لا تقل غموضا، وهي أشكال الفراكتال fractals.




**شكل** (1)

ما يميز هذه الأشكال جميعا هي أننا إذا دققنا النظر في تفاصيلها الصغيرة سنجدها مماثلة للشكل الكبير وأن هذه صفة تستمر إلى الأبد بأي درجة تكبير. مثل هذه الأشكال نجدها في كل تفاصيل الطبيعة حولنا.. في الأشجار بفروعها.. في الجبال.. في ذرة الثلج.. أي أن هذه الأشكال هي أيضا عالمية، فهل تحمل هذه الأشكال - التي قد تبدو لأول وهلة فوضوية - نظاما بديعا خفيا هو أبسط مما نتخيل؟

الحقيقة أن مطلق اسم فراكتال (التي تعني بالإنجليزية الشكل المكسور) على هذه الأشكال، وهو الرياضي بنوي ماندلبروت Benoit Mandelbrot[1]، كان أول من توصل إلى كيفية إنتاج مثل هذه الأشكال المعقدة عن طريق معادلات بسيطة للغاية يتم إدخالها على جهاز الكمبيوتر، وكانت أول جهة استفادت من اكتشافاته هي السينما، فقد أحدث ماندلبروت ثورة في عالم التصوير السينمائي بأن سهل جدا عملية رسم شكل معقد في الطبيعة كالجبال والأشجار وجعلها تبدو حقيقية للغاية باستخدام معادلات بسيطة.



**شكل (2)**
**ثابت فايجنباوم في مجموعة ماندلبروت**

نظرا لانضمام الأشكال المتشعبة إلى أشكال الفراكتال، فقد بحث المهتمون عن علاقة ما بين رقما فايجنباوم وبين باقي هذه الأشكال. بالفعل لم يمض وقت طويل قبل أن تظهر هذه العلاقة واضحة في أحد أشهر أشكال الفراكتال الذي اكتشفه مانلبروت بنفسه ولذا يطلق عليه اسم مجموعة ماندلبروت Mandelbrot set (شكل 2). في هذا الشكل نجد العديد من الدوائر والأشكال الحلزونية المصاحبة ونرى أن $\delta$ يمثل النسبة بين قطر كل دائرة والدائرة التي تصغرها حجما (شكل 2).

(1) (1924 - 2010م) رياضي فرنسي - أمريكي كان له العديد من الاهتمامات. مساهماته في هندسة الفراكتال أثرت في العديد من المجالات كالفيزياء والهندسة والتشريح وعلم الأعصاب وغيرها.

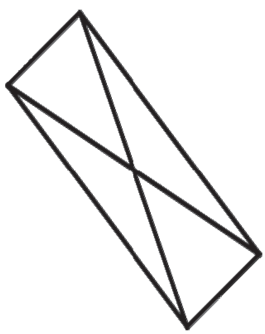
ما ساهم به فايجنبوم وزملاؤه هو أنهم غيروا نظرتنا للعالم بشكل جذري، فباكتشاف ثابتي فايجنبوم ظهر لنا بصيص من ضوء في ظلام هائل أطلقنا عليه اسم الـ«فوضى» وتجنبناه بقوة حتى لا يواجهنا بعجزنا عن سبر أغواره. بالتأكيد لايزال جزء كبير من تلك الظلمة عصي علينا، فالطبيعة لاتزال تتحدى وتأبى التسليم لنا ببساطتها ولكن إذا كان ثابتا فايجنبوم هما أول القطرات، فقد يؤديان في النهاية إلى سيل جارف، تماما كتأثير جناح الفراشة.

# رقم جراهام

ما أكبر رقم يمكن الوصول إليه؟ هل يبدو سؤالا مكررا؟ بالفعل، فقد مر علينا هذا السؤال عند حديثنا عن اللانهاية، ولكننا لم نصل لإجابة شافية بعد، فاللانهاية ليست رقما بالمعنى المألوف، فهل يمكن إذن أن نعرّف أكبر رقم «محدود» يمكن الوصول إليه؟ في سنة 1988 أعلنت وكالة جينيس للأرقام القياسية أن هذا الرقم هو رقم جراهام.

قصة رقم جراهام بدأت مع مكتشفه الرياضي رونالد جراهام Ronald Graham[1] الذي كان يسعى لحل معضلة تتعلق بنظرية الرسم البياني graph theory وأرجو أن يصبر القارئ معي أثناء السطور التالية لأن شرح المعضلة ليس بسيطا على الإطلاق.

فلنبدأ بمربع بسيط.. المربع له أربعة رؤوس وأربع حواف تصل بين تلك الرؤوس. الآن فلنربط جميع الرؤوس ببعضها البعض عن طريق رسم الخطين القطريين اللذين سوف يمثلان حافتين إضافيتين ليصبح إجمالي عدد الحواف ستة (شكل 1).

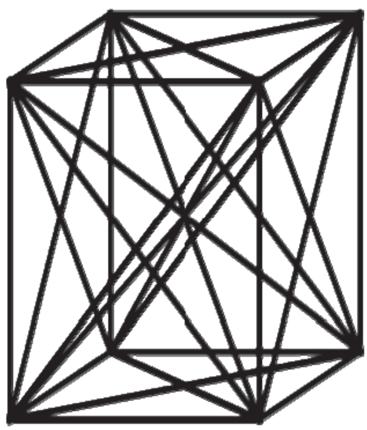


**شكل** (1)

(1) رياضي أمريكي ولد عام 1935 ويعمل حاليا بمعهد كاليفورنيا للاتصالات والمعلومات.

الخطـوة التاليـة هي أن نسـتخدم لونين وليكونـا الأحمر والأزرق لتلويـن تلك الحواف الست بـأي طريقة نحب، لكن السـؤال الـذي يقبع خلف المعضلـة هو: هـل يمكننا تلوين الحواف بحيث نتفادى وجود مربع تربط بين رؤوسـه حواف بنفس اللون (سنطلق على هذا المربع اسـم المربع المتشابه)؟ بالنسبة لمَثل المربع يمكننا أن نرى أن هذا سهل التحقيق، فالمربع به مسـطح وحيد تشـمل الأربعة رؤوس مما يسـهل المهمة، ويمكننا ببسـاطة أن نلون إحدى الحواف بالأحمر والحواف الخمس الباقية بالأزرق لنحصل على إجابتنا. بالتأكيد ليس هذا هو الحـل الوحيد فيمكننا أن نلون حافتين بالأحمر وأربع بالأزرق وهكذا.. ولكننا لا نحتاج إلى إحصاء كل الحلول الممكنة فالعثور على أي حل منها يكفي لإجابة سؤال المعضلة.

الآن فلننتقـل إلى مشـكلة أعقد قليلا بأن نزيد عدد أبعـاد المربع من بعدين إلى ثلاثة، أي أننـا ننظـر الآن إلى المكعّـب. المكعب به ثمانيـة رؤوس و28 حافة تصل بـين جميع الرؤوس (شكل 2). إذا استخدمنا نفس اللونين الأحمر والأزرق لتلوين الحواف وحاولنا إجابة السؤال السابق سوف نجد أننا في هذا المثل أيضا نستطيع بسهولة تجنب وجود المربع المتشابه.



**شكل** (2)

بالانتقال إلى المكعـب رباعي الأبعاد الذي يدعى التسراكت tesseract أو خماسي الأبعاد فسوف نجد أن الإجابة مماثلة لما سبق. هنا يصبح السؤال هو: هل سنحصل على نفس الإجابة دائما مهما زادت أبعاد المكعب؟ الإجابة هي لا، وهذا ما اسـتطاع جراهام إثباته باسـتخدام

رقمه، فقد توصل إلى أن مكعبا ذا عدد أبعاد يساوي رقم جراهام لن يستطيع تفادي وجود مثل هذا المربع المتشابه.

كل هذا جميل ولكن السؤال الآن هو ما قيمة هذا الرقم بالضبط؟ الحقيقة أنه لا أحد يعرف ولا حتى جراهام نفسه يستطيع كتابة هذا الرقم، فهو كبير للغاية لدرجة أننا لن نستطيع أبدا كتابته، بل حتى لا نستطيع إحاطته بعقولنا ولو حدث هذا فسيصبح في رؤوسنا كمية من المعلومات كافية لإحداث ثقوب سوداء مكانها، وإذا حاول القارئ العزيز مقارنة هذا الرقم برقم آخر لم نتمكن من كتابته وهو جوجولبلكس، فأرجوك ألا تحاول، فجوجولبلكس لا يساوي شيئا بجوار رقم جراهام. أرى نظرات عدم التصديق على وجه القارئ لذا دعني أحاول أن أشرح لك كم هو كبير هذا الرقم.

سنبدأ بتعريف مصطلح يدعى سهم نوث الأعلى Knuth's up - arrow الذي صاغه الرياضي الأمريكي دونالد نوث Donald Knuth[1] في العام 1976 ويرمز له بـ ↑. سنعرف هذا المصطلح عن طريق الأمثلة التالية:

$$3 \uparrow 3 = 3x3x3 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow (3 \uparrow 3) = 3 \uparrow 27 = 7625597484987$$

من هنا نلاحظ قوة مصطلح نوث الذي جعلنا نقفز من 27 إلى ما يقرب من 8 تريليون فقط بزيادة سهم وحيد. الآن فلنحاول زيادة سهم آخر:

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow 7625597484987 = \ldots$$

الرقم السابق هو كما نستطيع أن نتخيل، مهول، فهو عبارة عن 3 مرفوعة للأس 3 مرفوعة للأس 3 وهكذا إلى أن نصل لسلسلة من الأس 3 تصل إلى ما يقرب من 8 تريليون. هل ظن القارئ أننا وصلنا لرقم جراهام؟ لا أريد إحباطك ولكن الرحلة لا تزال في بدايتها.

(1) عالم كمبيوتر ورياضي أمريكي ولد عام 1938 ويعمل حاليا كأستاذ بجامعة ستانفورد.

فلنقل أن هناك رقما اسمه G1 يساوي:

$G1 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$

ومنه نحسب G2 كالتالي:

$G2 = 3(G1\uparrow)3$

الـ↑ G1 تعـني أن هناك عددا من الأسـهم بين الأقواس يسـاوي G1. أهـذا رقم كبير بما يكفي؟ ليس بعد، فمازال علينا أن نمر بالخطوات التالية للوصول إلى رقم جراهام:

$G3 = 3(G2\uparrow)3$

$G4 = 3(G3\uparrow)3$

.

.

.

G64 = رقم جراهام

أخيرا وصلنا للرقم المنشـود الذي أنا واثق من أن القارئ قد تاه في ضخامته تماما كما تاه الكاتب.

كيف إذن استطاع جراهام أن يصل إلى هذا الرقم؟ الإجابة هي مجموعة من التصريفات الرياضية المعقدة التي تقع خارج نطاق هذا الكتاب، ويكفي أن نؤكد ما ذكرناه سابقا وهو أننـا لن نسـتطيع أبدا كتابة هذا الرقـم بالتفصيل وأكثر ما يمكننا فعلـه هو كتابة آخر حوالي 500 رقم منه والتي تنتهي بـ 7.

لمـاذا دخل هذا الرقم موسـوعة جينيـس؟ ألا يمكننا أن نفكر في أرقـام أكبر؟ مثلا: رقم جراهام ونزيد عليه واحدا! المسـألة ليسـت بتلك البسـاطة، فرقم جراهام نال شهرته لأنه ليـس مجرد رقم نتج عن خيال عشـوائي ولكنـه نتج عن عملية رياضية لهـا مغزى محدد وهو الإجابـة عن عدد الأبعاد المراد لمكعب ما لتفادي وجود المربع المتشـابه. ننتقل لسـؤال آخر وهـو: هـل معنى هذا أنه لا يوجد أي عـدد أبعاد أصغر من رقم جراهام حتما سـيحتوي على

المربـع المتشـابه؟ الإجابة: لا نعرف، فإلى المكعـب ذي الـ12 بعدا يمكننا حتـما تفادي المربع المتشـابه والشـكوك تدور حول كون المكعب ذي الـ13 بعدا هو أصغر عدد أبعاد يفشـل في هذا ولكننا لم نثبت هذا بعد ويظل العدد الوحيد المثبت هو رقم جراهام.

المدهـش أن رقـم جراهام لم يجلـس طويلا فوق عـرش أكبر رقم محـدود، فقد توالت الأرقام التي تجاوزته في الكبر، من ضمن هذه الأرقام الرقم الذي يشـار إليه بـ Tree(3) ولن نتطـرق لشرح من أين جاء هذا الرقم ولكن ما يهمنا معرفته هو أن هذا الرقم هام في محتوى مـا يعرف بنظرية الإثبات proof theorem التي تقول أن الرقم Tree(3) هو حتما رقم محدود ولكننا لن نتمكن أبدا من كتابة الإثبات لهذا، فالزمن الكوني سـوف يبدأ في إعادة نفسـه قبل أن نصل لهذا الإثبات. ما يهمنا معرفته كذلك هو أن رقم جراهام لا يكاد يقترب من Tree(3) وأترك العنان هنا لخيال القارئ لإدراك ما يعنيه هذا بالنسبة لحجم هذا الرقم الأخير.

قـد لا يكون رقم جراهـام هو اللاعب الأسـاسي في الوقت الحالي وسـط أكبر الأرقام المحـدودة ولكنـه حتـما لا يزال الأشـهر، فهو الذي مهـد الطريق لباقي تلـك المجموعة من الأرقام الفريدة التي أعيت عقولنا وأعجزتها حتى عن الاقتراب من حدودها.

# ثابت ميلز θ

الأرقام الأوليّة prime numbers هي بمثابة الذرات التي تتكون منها جميع الأرقام ومواد البناء لكل مجالات الرياضيات. رغم هذا، فالأرقام الأوليّة هي أكثر الأرقام غموضا، فهي تبدو عشوائية الظهور فوق خط الأرقام بلا وسيلة للتنبؤ بمكان وجودها ولكنها تطل علينا في بعض الحالات الخاصة بشكل نظامي بديع يواجهنا بحقيقة أننا لا نعرف ما يكفي عنها. الرياضيون بالتأكيد قبلوا التحدي وسعوا جاهدين لإيجاد طرق تساعدنا على كشف هذا النظام الخفي القابع خلف الأرقام الأوليّة، وإحدى هذه المساعي أدت لاكتشاف ثابت ميلز Mills' constant والذي صار عرفيّا يحمل الرمز θ.

مكتشف هذا الرقم هو الرياضي الأمريكي وليم ميلز William Mills الذي أثبت في سنة 1947 وجود أرقام إذا رفعت إلى الرقم 3n ثم تم تقريب النتيجة، فالمحصلة ستكون دائما رقم أولي مهما تغير n، وأصغر هذه الأرقام هو الذي صار يطلق عليه اسم ثابت ميلز وهو تقريبا يساوي 1.3063778838.... لتوضيح هذه الصفة العجيبة لـ θ فلنحسب أول ثلاث نتائج نحصل عليها بتغيير n من 1 إلى 3 كالآتي:

$n = 1: \theta^{3^\wedge 1} = 2.2294... \approx 2$

$n = 2: \theta^{3^\wedge 2} = 11.0819... \approx 11$

$n = 3: \theta^{3^\wedge 3} = 1361.0000... \approx 1361$

بالطبع الأرقام 2 و11 و1361 هي جميعا أرقام أولية ونفس الشيء سيتكرر لجميع القيم الأخرى لـ n.

هـذه النتيجة مثيرة للغاية، فهي تصـف علاقة وثيقة بين $\theta$ والأرقام الأوليّة قد تؤهله كي يكون أحد أهم أسـلحتنا في اقتحام الكنوز الخفية التي تحملها تلك الأرقام. لم إذن لا تضاهي شـهرة $\theta$ شهرة نجوم الأرقام التي حيرت العالم أمثال $\pi$ و$e$ وغيرهما من الأرقام التي لا تحمل نفـس العلاقة المبـاشرة بالأرقام الأوليّة؟ قد يكون القارئ قد خمـن الإجابة عندما لاحظ أن الحسابات السابقة المعتمدة على $\theta$ تقفز قفزات كبيرة بين الأرقام الأوليّة ولا يمكن استخدامها في تحديـد أماكـن كل تلك الأرقـام، فبين 2 و11 يوجد 3 و5 و7، وبـين 11 و1361 العديد من الأرقـام الأوليّة الأخـرى. أيضا، تلك القفزات سرعـان ما تدخل في حسـابات كبيرة للغاية نظرا لأننا نغير في n وهو أس للأس، مما يجعل أداء تلك الحسـابات صعبا للغاية حتى على أقوى الكمبيوترات المتاحة.

سبب آخر يجعل الرياضيين في نظرة شك مستمرة من $\theta$ هو أنهم لا يعرفون قيمته الحقيقية، فـلا توجـد علاقة رياضية متاحة إلى الآن للحصول على تلـك القيمة أو تقريبها كما الحال مع باقي الأرقام التي تحدثنا عنها. أرى اسـتنكارا مندهشـا في أعين القارئ الذي سيعلق: ألم تحدد قيمته بأنها تساوي تقريبا 1.3063778838...؟ وللقارئ الفطن أقول أن هذه القيمة تم تحديدها بافتراض صحة فرضية تعتبر الأهم في الرياضيات على الإطلاق وهي فرضية ريمان Riemann hypothesis التي ذكرناها سريعا عند تحدثنا عن ثابت أويلر - ماسكروني $\gamma$. لن نذكر تفاصيل هـذه الفرضية المعقدة ولكـن يكفي القول أن إثبات صحة تلك الفرضية التي عرضها برنارد ريمان سـنة 1859 على العالم سـيحمل نتائج هائلة سـوف تهز جميع فروع الرياضيات ومنها تقديم طريقة لحساب $\theta$ بدقة كبيرة، وإذا كان القارئ العزيز مازال متشككا من أهمية فرضية ريمان، فأعتقد أن رأيه سـيتغير عندما يعلم أن مؤسسة كلاي للرياضيات Clay Mathematics Institute وضعت إثبات تلك الفرضية في قائمة تتضمن السـبع معضلات الأهم في الرياضيات وتعـرض مكافـأة قدرها مليون دولار لمـن يصل لحل إحداها. من الطريـف أن نذكر هنا أن إحدى تلك المعضلات، المدعوة بحدسية بوانكاريه Poincare conjecture[1]، تم حلها بالفعل سـنة 2002 على يد الرياضي الروسي المغمور نسبيا، جريجوري بيريلمان Gregory Perelman.

(1) تم صياغة تلك الحدسية على يد الرياضي الفرنسي هنري بوانكاريه عام 1904 وهي ببساطة تقول أن: كل شكل هندسي بلا ثغرات يمكن تحويله إلى شكل كروي.

العجيب أن بيريلمان رفض جائزة المليون دولار كما رفض ميدالية فيلدز Fields medal، التي هـي بمثابة جائزة نوبل في الرياضيات، وكان رده على التسـاؤلات المندهشـة هو أنه لا يهمه المال أو الشهرة وأن الوصول إلى حل للمعضلة هو كل ما كان يسعى إليه.

نسـتطيع الآن أن نرى السر في عدم ذيوع شـهرة الرقم θ، فاعتماده على فرضية لم تثبت بعد وصعوبة القيام بالحسـابات اللازمة لتحديد قيمته سـاهما في جعله عسـير الهضم بالنسبة للكثير من الرياضيين. رغم هذا فهو يظل متفردا بين زملائه من الأرقام التي حيرت العالم في علاقته الخاصة بالأرقام الأوليّة، ومن يدري فربما يكون هو المفتاح الذي يسـاعدنا أخيرا في كشف سر تلك الأرقام الغامضة.

# ثابت أبيري (3) ζ

وقـف الرياضي الفرنـسي - اليوناني روجر أبـيري Roger Apery (1916 - 1994م) في العـام 1978 يلقي محـاضرة على آذان الحاضرين الذين لم يبدوا عليهم الاهتمام البالغ. كان أبيري لا يبالي بهذا بل يتوقعه، فهو رياضي غير معروف نسبيا وصل تقريبا إلى نهاية مشواره الأكاديمي وربما يكون أكثر شيء مثير في حياته هو أنه كان ناشـطا سياسـيا أثناء الحرب العالمية الثانية وسـجنه النازيون فترة، لذا لم يلم أولئك المشككين في قدرته على تقديم أي شيء مثير. الحقيقة أن أبيري ألقى في تلك المحاضرة قنبلة هزت عالم الرياضيات وهي أنه أثبت أننا إذا أدخلنا الرقم 3 في دالة شهيرة للغاية، هي دالة زيتا، فإن الإجابة تصبح رقما غير نسبي وهو تقريبا 1.2020569031....

لمعرفـة أهمية هذا الاكتشـاف ولم أثـار كل تلك الجلبة علينا أن نعود إلى القرن السـابع عـشر وتحديدا العام 1664. في هذا التاريـخ، عرض الرياضي الإيطالي، بييترو مينجولي Pietro Mengoli[1]، معضلـة عـلى باقـي الرياضيـين لإيجاد حل لهـا. المعضلة كانت: مـا هو مجموع السلسلة اللانهائية:

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots$$

وهذه السلسـلة تمثل إحدى تجليات دالة زيتا التي ذكرناها في فصل سابق والتي اكتشفها برنارد ريمان. هذه الدالة يمكن كتابتها كالتالي:

$$\zeta(s) = 1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \dots$$

فإذا استبدلنا s في هذه الدالة بـ 2، سوف نحصل على سلسلة مينجولي السابق ذكرها.

(1)(1626 - 1686م) رياضي ورجل دين إيطالي درّس معظم حياته المهنية بجامعة بولونيا.

ظلت تلك المشكلة عصية على الحل لما يقرب من مائة عام إلى أن جاء عام 1734 رجل فذ يـأبى أن يمر رقم من الأرقام التي حيرت العالم دون أن يترك علامته عليه. هذا الرجل بالطبع هو ليونارد أويلر الذي تصدى للمشـكلة ووجد أن هذه السلسـلة هي سلسـلة متقاربة وأن حلها هو الرقم الغير نسـبي المتعـالي: $\pi^2/6$، وإذا كانت ذاكرة القـارئ قوية فقد ذكرنا هذا الحـل عند تحدثنـا عن الرقم $\pi$ وعن دوره العجيب في حل هذه المعضلة التي أصبحت معروفة باسـم معضلة بازل، نسبة إلى مدينة بازل السـويسرية التي هي مسقط رأس أويلر. هذا الحل أعطى أويلر شـهرة لا بأس بهـا في مقتبل حياته ولكن طبيعته العنيـدة أبت أن تقف عند هذا الحد وسعى لإيجاد حل عام لنفس المعضلة إذا رفعنا أرقام المقام إلى أرقام أخرى أكبر من اثنين وقـد اقترب كثيرا من هذا بأن وجد الحل العام لجميع السلاسـل التـي رفعت لأرقام زوجية، وهـي جميعـا مرتبطة بـ $\pi$ ولذا فهـي جميعا أرقام غير نسـبية متعالية. ما أرّقـه كانت الأرقام الفردية، فهو لم ينجح في إيجاد حلول لمجموع السلاسل إذا رفعت المقامات لهذه الأرقام ولم يثبت إن كانت أرقاما غير نسبية متعالية أم لا.

هنا ندرك لم كان اكتشـاف أبيري بمثابة قنبلـة لم يصدقها الكثيرون في البداية، إذ كيف يمكن لرياضي مغمور نسـبيا مثل أبيري أن يحل معضلة فشـل أويلر نفسـه في حلها، بالإضافة إلى أبرز الرياضيين في القرنين السـابقين، في حلها؟ المناوشات استمرت حتى اضطر أبيري إلى إعلان توضيح آخر لإثباته في العام التالي، خاصة أن الإثبات كان متشابكا وعسيرا على الفهم. لكـن بقي شـيئا لم يتمكن أبيري أو أي أحد آخر من إثباته وهـو إن كان $\zeta(3)$ رقما متعاليا أم لا. كما أن لا أحد تمكن من تعميم هذه النتيجة لتشمل باقي الأرقام الفردية و كان أكبر إنجاز في هذا الشـأن إلى يومنا هذا هو إثبات الرياضي الروسي فاديم زوديلين Wadim Zudilin[1] في 2001 أن هناك على الأقل رقما واحدا غير نسبي بين الأرقام: $\zeta(5)$ و $\zeta(7)$ و $\zeta(9)$ و $\zeta(11)$.

نال الرقم $\zeta(3)$ أهمية فيزيائية إلى جانب أهميته الرياضية بأن ظهر في العديد من المجالات الفيزيائيـة الهامة، خاصة في مجال الديناميـكا الكهربائية للكم quantum electrodynamics، لكن لاتزال أهميته الرياضية وقصته العجيبة هي سر شهرة هذا الرقم.

(1) رياضي روسي يعمل حاليا بجامعة نيكاسل بأستراليا.

كعادة الرياضيين عندما يقابلون رقما غير نسبي بأهمية $\zeta(3)$، تباروا في زيادة عدد الأرقام المعروفة في سلسلة الأرقام اللانهائية التي يمتد إليها هذا الرقم، وآخر تلك المحاولات وصلت في العــام 2015 إلى 400000000000 رقم بعـد العلامة العشرية ولكن من المتوقع أن يتم كسر هذا الرقم قريبا.

باكتشــافه $\zeta(3)$، تمكن أبيري من ترك علامـة بارزة في تاريخ الرياضيات بأن أصبح أحد هؤلاء النادرين الذين نجحوا فيما فشل فيه الفذ أويلر، وقد خلد هذا الإنجاز على شاهد قبره الذي يحمل بعد اسمه النتيجة التي توصل إليها بعدم نسبية الرقم $\zeta(3)$ وهي مكتوبة كالتالي:

$$1 + 1/8 + 1/27 + 1/64 + \ldots \neq p/q$$

# 40

يطـل علينا في هذا الفصل رقم آخر يسـتمد مكانته مـن النصوص الدينية وخاصة الأديان الإبراهيمية، فالرقم 40 ورد ذكره في العديد من المواضع في الكتاب المقدس والقرآن الكريم وقد ارتبط بفترات المشقة والاختبار والتطهّر. على سبيل المثال الرقم 40 برز في قصة طوفان نوح، فعندما قرر اللـه أن يغـرق كل من على الأرض بسـبب معصية البشر أرسـل المطر 40 يوما وليلة ليغسـل ويطهّر الأرض من تلك المعصية؛ وفي الحديث عن موسى عليه السـلام نرى الرقم 40 في عدد الأيام التي قضاها موسى صائما في حضرة الله أثناء تلقيه الوصايا العشر وهو أيضا عدد سـنين التيه التي قضاها بنو إسرائيل في الصحراء جزاء معصيتهم لله قبل عثورهم على أرض الميعاد؛ وإذا انتقلنا للمسـيح عيسى عليه السـلام نجد أنـه اعتكف صائما 40 يومـا وليلة في الصحراء وفي تلك الأثناء تجاوز إغراءات الشـيطان الثلاثة المتمثلة في حب الشـهوات والذات والمادة، والمسيحيون إلى اليوم يحيون ذكرى هذا الاعتكاف بالصيام فترة 40 يوما تنتهي بعيد الفصح؛ أما في الإسلام فبالإضافة إلى القصص السابقة التي تكرر ذكر بعضها في القرآن الكريم إلا أن أبرز ظهور للرقم 40 في السيرة النبوية هو أنه كان عمر الرسول عندما نزل عليه الوحي.

وخارج نطاق الأديان الإبراهيمية سنجد أن الرقم 40 متواجد كذلك في الديانة السومرية والبابلية، فقد كان الصيام 40 يوما يتم تكريما للإله تموز الذي قتله خنزير بري وهو في سـن الأربعين، وعن طريق هذا الطقس يخرج تموز من قبره ويُحضر معه الربيع والخصوبة للبلاد، والحقيقـة أن مثـل هذه الطقـوس لم تقتصر عـلى البابليين بل كانت موجـودة لدى المصريين القدامى والفينيقيين وحتى المكسيكيين.

الهندوسية كذلك بها صلاة شهيرة تدعى هانومان تشاليسا Hanuman chalisa، هذه الصلاة

عبارة عن ترنيمة في الغالب ألفها الشـاعر القديس تولسـيداس Tulsidas[1] في القرن السادس عشر وتتحدث عن البطل المغوار هانومان وإخلاصه للإله راما. ما يهمنا هنا هو كلمة تشاليسا التي تعني بالهندية «أربعين»، وقد سميت الترنيمة بهذا الاسم لأن بها 40 بيتا بالتحديد.

مـا سر الرقـم 40 إذن؟ ربمـا النظرية الأكـثر ترجيحا لوجـوده في المواضـع العديدة في الأديان والثقافات القديمة هي أنه ببساطة كان يستخدم للتعبير عن الـ« كثرة» سواء في العدد أو الوقت، تماما كما نسـتخدم في مصر المعاصرة الرقم مائة للتعبير عن الـ« كثرة» في تعبيرات مثـل: «بنت بمائة رجـل»، فالرقم مائة بالتأكيـد ليس أكبر الأرقام ولكن جـرت العادة على استخدامه للتعبير عن العدد الكبير. هذه الـ« كثرة» ارتبطت في معظم القصص الدينية بالوقت وطـول المدة وهذا بالتأكيد هـام لاكتمال فكرة التطهّر التي يجب أن تتم عبر فترة طويلة يتم التخلص فيها من كل ما هو قديم شائب كي يأتي ما هو جديد طاهر.

هذا التفسـير يسفّه الرقم 40 إلى حد ما وسـط باقي الأرقام ولكنه تفسير معزّز من قبَل باقـي المجالات التـي تتعامل مع الأرقام كمجـال الرياضيات الذي لا يجـد أهمية خاصة لهذا الرقـم، فهو كما يبدو لنا رقم زوجي عادي بريء للغاية. ربما يكون المجال الوحيد الذي يجد فيـه هذا الرقم شـيئا من التميز هو مجال الفيزيـاء الحرارية، فالرقم الوحيـد الذي يتقابل فيه نظامي الحرارة السيلزيوس[2] والفهرنهايت[3] هو الرقم 40 -، لكن هذا وحده غير كاف كي يحتل الرقم 40 مكانة خاصة وسط باقي الأرقام.

سواء اتفقنا أو اختلفنا حول إذا كانت أهمية الرقم 40 حقيقية أم وهمية، فدوره في حياتنا

(1) (1511 - 1623م) هـو قديس وشـاعر هندي عـاش معظم حياته بمدينة فاراناسي Varanasi بشـمال الهند ويعد أحد أهم الشعراء في تاريخ الهند والعالم.

(2) النظـام الحراري المسـتخدم في جميع أنحاء العالم عدا الولايات المتحدة وبضعة دول أخرى والاسـم يعود إلى الفلكي السويدي أنديرس سيلزيوس. اعتمد هذا النظام في بدايته على درجة الحرارة صفر حيث يحدث التجميـد ورجة الحرارة مائة وهي درجة الغليان ثم تم تعديـل النظام ليعتمد على درجة الحرارة - 273 وهي الصفر المطلق.

(3) النظـام الحـراري الذي اقترحـه الفيزيائي البولنـدي دانييل جابر ييـل فهرنهايت في 1724 والمسـتخدم في الولايـات المتحدة إلى اليوم. هذا النظام مبني على أسـاس أن الرقم صفـر فيه هو حرارة المحلول المكون من أجزاء متساوية من الثلج والماء والملح.

لا خلاف عليه، ويكفي أن ننظر إلى بعض من عاداتنا مثل عادة إحياء ذكرى الميت بعد 40 يوما من وفاته، أو «ذكرى الأربعين» كما يُطلق عليها في مصر. يرجح البعض أن تلك العادة متوارثه من المصريين القدامى الذين كانوا يدفنون الميت بعد تحنيطه بأربعين يوما لإعطاء الفرصة الكافية كي تتخلل مواد التحنيط الجثة بالكامل، لكن هذا لا يفسر وجود مثل تلك العادة في بلاد الشام والعراق والتي تتجلى فيها تلك الطقوس بصورة خاصة لدى الشيعة الذين يحيون الذكرى السنوية لمرور 40 يوما على استشهاد الحسين في مذبحة كربلاء.

بالإضافة إلى العادات سوف نجد أن الرقم 40 متواجد كذلك في الفلكلور الشرقي في إحدى أشهر قصص ألف ليلة وليلة[1]، وهي قصة «علي بابا والأربعين حرامي» الذين خدعهم علي بابا وسرق كنوزهم ثم قتلتهم خادمته المخلصة بأن ألقت الزيت المغلى فوق رؤوسهم وهم مختبئون داخل الصناديق، والحقيقة أني لا أعرف كيف لاتزال تلك القصة تُروى على آذان أطفالنا إلى اليوم وهي تحمل ما تحمل من قتل جماعي وأشلاء بشرية.

من الجدير بالذكر كذلك أن الرقم 40 ارتبط بواحدة من أكثر فترات الإنسانية ظلاما وهي فترة الطاعون في القرون الوسطى، فقد كان المسافرون القادمون عبر البحر يتم حجزهم داخل سفنهم في الموانيء مدة 40 يوما إلى أن يتم التأكد من خلوهم من المرض الأسود، ومن هنا جاءت كلمة quarantine التي تعني الحجر الصحي وهي في الأصل الإيطالي quaranta أي أربعون.

قد لا تتعدى أهمية الرقم 40 إذن ارتباطه بفكرة الـ«رقم الكبير» أو الـ«فترة الطويلة» التي وظفتها الأديان ومنها صار البشر يولونه اهتماما خاصا انطبع على عاداتنا وثقافاتنا، فهل تعدّ هذه أهمية لها أسباب حقيقية أم لا؟ القارئ الفطن قد يجيب بسؤال: وما أهمية الشيء في ذاته إن لم يضفي البشر عليه انطباعاتهم التي تعطيه قوته في حياتهم ومن ثم يصبح مهما؟ سؤال فلسفي قد يعني الكثير للرقم 40 ولزملائه من الأرقام التي لا نجد لها ظهورا واضحا في الطبيعة أو في الرياضيات المجردة أمثال الأرقام 13 و666 وغيرهما.

(1) كتاب شهير عبارة عن مجموعة قصص شعبية جُمعت من التراث الآسيوي تحديدا والعامل المشترك بين القصص هما شخصيتا الملك شهريار وشهرزاد التي تقص عليه قصة مختلفة كل ليلة حتى لا يأمر الملك سيّافه بقتلها.

# 3

> «الأشياء السيئة تحدث دائما في مجموعات من ثلاث»
>
> تـتردد تلك المقولة بكـثرة في العالم الغربي عندما يحـدث شيء جلل لتعدّ المستمع لاستقبال حدثين تابعين آتيين لا محالة بعد هذا الحدث الأول، وتلك الأحداث في الغالب هي مصائب. المقولة تبرز وبقوة الدور الحيوي الذي

يلعبـه الرقـم ثلاثة في الفلكلور الغـربي، فذلك الميل إلى ربط المصائـب أو الأحداث الكبرى بالرقم ثلاثة واسع الانتشار في العالم الغربي لدرجة أنه حصل على اسمه الخاص وهو تريافيليا triaphilia.

البحـث عن أصل هذه الخرافة، كـما هو الحال مع كل الخرافات، يحمـل إلينا العديد من الروايـات المتضاربـة. أكثر تلـك الروايات قربا للمنطـق تخبرنا أنها جـاءت كتطور طبيعي للتشاؤم من مشاركة ثلاثة مدخنين لنفس عود الثقاب. في الغالب بدأ هذا التشاؤم بين الجنود أثنـاء الحـرب الكريميّـة[1] عندما قصّ الجواسـيس الـروس المُلقى القبض عليهـم كيف كان قناصتهم يسـتفيدون من مشـاركة جنود التحالـف لنفس عود الثقاب، فعندما يشـعل الأول العود يلاحظ القناص مكان الهدف، وعندما يستخدمه الثاني يكون القناص قد وجّه بندقيته ثـم يأتي الثالث المسـكين ذو الحظ العثر الذي تكـون رصاصة القناص مـن نصيبه. الطريف أن هـذه القصة المرتبطة بالموت والحرب تم اسـتخدامها فيما بعد عـن طريق إيفار كروجر Ivar Kreuger، ملك عود الثقاب السـويدي، كي يبيع المزيد من أعواد الثقاب ويجني ثروة من

(1) حرب دموية دارت بين الإمبراطورية الروسـية من ناحية والعثمانية إلى جانب فرنسا وبريطانيا وساردينيا من ناحية أخرى في الفترة 1853 - 1856م. أسباب الحرب الظاهرة كانت الدفاع عن حقوق الأقليات المسيحية في الأرض المقدسـة أما الأسـباب بعيـدة الأمد كانت محاولة فرنسـا وبريطانيا إيقاف مـد النفوذ الروسي في الإمبراطورية العثمانية المريضة. انتهت الحرب بهزيمة روسيا وتوقيع معاهدة باريس عام 1856م.

ورائها، فنشر تلك الخرافة جعل المدخنين يعزفون عن مشـاركة أعواد الثقاب فيسـتهلكون كميات أكبر.

رغـم منطقية التفسـير السـابق، إلا أنه لا يفسر الوجود السـاطع للرقـم 3 في الديانات، ولنأخذ على سبيل المثال الديانة المسيحية التي هي أكثر الديانات انتشارا في العالم الآن، فمبدأ الثالـوث هو أحد الأحجار الرئيسـية للعقيدة المسـيحية. هذا المبدأ يقـول أن الله له جوهر واحـد وثلاثة أقانيم متمايزة متسـاوية، تماما كما للمثلث الواحـد ثلاث رؤوس، فكل رأس متمايز متساوي مع الرأسين الآخرين ولكنهم يكونون سويا جوهر المثلث.

فكرة الثالوث ليست مقتصرة على المسيحية بأي حال، فتقريبا كل الديانات الكبرى بها إشـارة إلى هذه الفكرة. مثلا في الهندوسـية نجد الثلاثة آلهة الكبرى: براهما وفيشـنو وشيفا هم الذين يجسـدون الأفعال العظمى وهي الخلق والمحافظة والتدمير على التوالي. في الطاوية أيضـا نجد أن الآلهة الكبرى عددهم ثلاثة ويطلق عليهم اسـم الثلاثة الطاهرين ومنهم أتت كل الكائنات العاقلة. أمـا البوذيون فيتخذون ملاذا في الجواهر الثلاث وهم البوذا وتعاليمه (الدارما) ورهبانه (السـانجا). حتى الديانة اليونانية القديمـة كانت تدور حول ثلاثة إخوة هم أكبر الآلهة: زيوس: إله السماوات وما فوق الأرض، بوسايدون: إله البحار وهادس: إله العالم السفلي.

بعـد هذا العرض السريع، يأتي السـؤال الطبيعي الذي يطل علينـا عندما نواجه مثل هذا الانتشـار الغير مبرر لرقم ما.. السؤال بالطبع هو: لماذا؟ لماذا تأثرت هذه الديانات باختلاف ظروفها ومعتقداتها والثقافات التي ظهرت فيها بالرقم 3؟ الإجابة غير معروفة وفي الغالب لن نعرف أبدا ولكن هذا لم يمنع المتحمسـين من الخروج بنظرياتهم الخاصة الغارقة في الصوفية في أحيان كثيرة.

إحدى تلك النظريات بدأت بعد اكتشـاف الشـفرة الوراثية. تلك الشـفرة تفسر كيف يتـم ترجمة المعلومات التي يحملها جزيء الدنا في الخلايا لانتـاج البروتينات اللازمة للحياة. معلومـات الدنـا عبارة عن ترتيـب محدد لأربع قواعـد يُرمز لهم بالحـروف A وT وC وG، وكل ثـلاث قواعـد يتم ترجمتهم إلى حمض أميني مقابل، مثـلا القواعد ATG تتم ترجمتهم إلى

الحمض الأميني ميثيونين methionine، وهكذا إلى أن تتم ترجمة كل سلسلة الأحماض الأمينية التـي تمثل البروتين المطلـوب. النظرية التي نتحدث عنها تتبنى فكـرة أن الله أراد أن يخبرنا - عـن طريق التجليات العديدة للرقم 3 - كيف أن هـذا الرقم يمثل سر الحياة وأصلها نظرا لأن الشـفرة التي يتـم ترجمتها إلى أحمـاض أمينية يتم حملها عـلى 3 قواعد تحديـدا. ربما كان هذا التفسير مغريا لكن لا يمكننا تجاهل التفسير العلمي المقابل الذي يقول أن عدد القواعد فرضه التطور نظرا لأن هناك 20 حمضا أمينيا، إذن نحن بحاجة على الأقل إلى شـفرة من 3 قواعد كي نحصـل على تجميعات كافية للحصـول على الأحماض الـ20، فلو أن الشـفرة عبارة عن قاعدة واحدة كنا سـنحصل على $4^1$ أي أربع أحماض فقط، ولو كانت قاعدتين فأكثر عدد للأحماض الأمينية المتاح كان سيصبح $4^2$ أي 16 حمض فقط، أما وعدد قواعد الشفرة 3 فيمكننا الحصول على $4^3$ أي 64 حمض وهو أكثر مما نحتاج إليه.

طائفـة دينية أخرى قدسـت الرقم ثلاثة لأسـباب أكثر وضوحا وعمليـة كانت طائفة الفيثاغوريـين الغامضـة، فقد كان هـذا الرقم بالنسـبة لهم يمثل التجانس الكـوني وهو أكثر الأرقام نبلا لأنه الرقم الوحيد الذي يسـاوي مجموع جميع الأرقام الأصغر منه. بالإضافة إلى أن التمثيل الهندسي للرقم 3 هو المثلث الذي يعتبره الفيثاغوريون أول الأشكال على الإطلاق وهو محور أشهر نظرياتهم وأهمها، نظرية فيثاغورس.

متأثرا بفيثاغورس، جاء الفيلسوف العملاق أفلاطون ليرسخ فكرة كيف أن الرياضيات والأشكال الهندسية قد تستخدم لتفسير كل ما في الكون. أهمية المثلث لدى أفلاطون جاءت واضحة عندما رسـم مجسمات أفلاطون الخمسة التي تعد من أشهر وأجمل الأشكال الهندسية عـلى الإطلاق والتي أكد الفيلسـوف أنها تمثل العناصر الرئيسـية الخمسـة، فسـوف نجد أن المثلث يمثل أسطح ثلاثة من تلك الأشكال وهي أشكال رباعي السطوح tetrahedron، وثماني السـطوح octahedron، وعشريني السـطوح icosahedron. لا يفوتنا كذلك أن نذكر هنا أن شكل رباعي السطوح هو الشكل الذي اختاره المصريون القدامى لبناء الأهرامات.

اتحدت الأسـباب الإلهية مع الأسباب الرياضية الهندسية في غرس الرقم ثلاثة في الوعي البشري وفي سـجل هذا الوعي المتمثل في الأدبيات، فمن منا لم يتمنّ أن يجد مصباحا سـحريا

يحكّه كي يخرج الجني الذي سيحقق له «ثلاث» أمنيات تحديدا، كما حدث مع علاء الدين في أساطير ألف ليلة وليلة؟ العديدون منا كذلك قرأوا أثناء دراستهم قصة وليم شكسبير[1] الشهيرة، تاجر البندقية، التي فيها قرر والد بورشيا الجميلة أن يصمم اختبارا للمتقدمين للزواج من ابنته بأن يجعلهم يختارون واحدا من «ثلاثة» صناديق، أحدهم من الذهب وآخر من الفضة وثالث من الرصاص. الأمثلة المشابهة عديدة، فالأدبيات القديمة والحديثة تمتلئ بالأبطال الذين كان عليهم تجاوز ثلاث مهمات صعبة للفوز بقلب البطلة، والكنوز التي يحرسها كائن أسطوري يسأل المغامرون «ثلاثة» أسئلة كاختبار لاستحقاق تلك الكنوز. من المثير أن ندرك أن في معظم تلك الأدبيات الرقم 3 يتجسد في شكل اختبار أو عقبة يجب تجاوزها، وربما كان هذا هو ما دفع بعض المتصوفة إلى اعتبار الرقم 3 هو الاختبار الذي علينا تجاوزه للوصول إلى أسرار الكون.

بين الديانات والبيولوجيا والرياضيات والأدب تجوّل الرقم 3 وفرض سيطرته، ومازلنا لا نعرف سره. ربما كان أحد الذين بإمكانهم إجابتنا هو المخترع العبقري الغريب الأطوار نيكولا تيسلا Nikola Tesla[2]، الذي كان مهووسا بالرقم 3، فقد كان يتجول ثلاث جولات حول أي مبنى قبل أن يدخله، كما كان يحرص على حجز غرف لها أرقام تقبل القسمة على 3 ويفعل كل شيء في مجموعات من ثلاث ويستخدم دائما 18 منديلا عند الطعام وهذا الرقم هو أحد مضاعفات الرقم 3. لم اختار تسلا إذن الرقم 3 تحديدا ليكون محور هوسه؟ هل وجد فيه السر الذي بحث عنه طويلا باقي المهووسين بهذا الرقم؟ لم يكن تسلا رجلا عاديا بأي مقياس حتى نتجاوز هذه النقطة ببساطة، بل كان عبقريا يرى العالم بمنظور لم يتسن لبقيتنا، إذن عندما يمحور رجل مثل هذا حياته حول الرقم 3، فلابد لنا من وقفة متأملة متفكرة في السر.

قد يكون هذا السر كامنا في العلاقة الوثيقة بين الرقم 3 وشيء لا ينفصل عن حياتنا ومع ذلك يمر علينا كل يوم دون أن ننتبه. هذا الشيء هو الزمن. ما علاقة الرقم 3 بالزمن؟..

---

(1)(1564 - 1616م) شاعر وكاتب مسرحي بريطاني يراه الكثيرون على أنه أعظم كاتب بريطاني على الإطلاق. من أشهر مسرحياته «تاجر البندقية» و«روميو وجولييت» و«هاملت».

(2)(1856 - 1943م) مخترع صربي - أمريكي عبقري له العديد من الاختراعات أهمها تطوير التيار الكهربائي المتناوب.

حسـنا.. أليس هذا الزمن مقسـما إلى ماض وحاضر ومستقبل؟ ألسنا جميعا نمر بثلاث مراحل زمنيـة مـن الحياة وهي الولادة والحيـاة والموت؟ بل أليس كل ما في الكون له بداية ووسـط ونهايـة؟ تجليـات العلاقة بين الرقـم 3 والزمن قد تأتي حتـى من أمور تمر علينـا مر الكرام، القارئ العزيز نفسه لا ينكر تأثره الغريزي بالرقم 3 عندما يتعلق الأمر بالضبط الزمني، مثل أن نبدأ سباقا بعد: واحد.. اثنان.. ثلاثة..، لماذا دائما 3 وليس 2 أو 4 أو أي رقم آخر؟

لا توجد إجابة محـددة إلى الآن والأمر متروك لخيال القارئ الباحث عن المعنى المتجاوز للرقم 3.. إن وُجد..

# 42

> إذا كنت عزيزي القارئ من الباحثين عن «إجابة السؤال المطلق عن الحياة والكون وكل شيء»، فيسعدني إخبارك أن رحلتك قد وصلت لنهايتها؛ هذا لأن الإجابة التي تبحث عنها هي 42. أرى نظرات مستنكرة غير راضية عن الإجابة وأنا أتفهم تماما هذا الشعور، فقد كان هو نفسه

شعوري في يوم من الأيام؛ لكن وجب عليّ الآن التوضيح.

لأول وهلة لا يبدو الرقم 42 مميزا من أي جانب، فهو رقم حقيقي طبيعي زوجي كعدد لانهائي من الأرقام المشابهة، فكيف أصبح إجابة السؤال الأهم في الكون؟ الحقيقة أن أهمية الرقم 42 كان مصدرها دعابة أرادها الكاتب البريطاني دوجلاس أدامز Douglas Adams[1] في سلسلته الشهيرة: دليل المسافر إلى المجرة Hitchhiker’s Guide to the Galaxy. السلسلة تدور أحداثها في إطار من الكوميديا والخيال العلمي حول آرثر دنت Arthur Dent، الناجي البشري الوحيد من دمار الأرض على يد مخلوقات فضائية اسمهم فوجون Vogon والذين أرادوا أن يزيلوا الأرض كي يسهّلوا إقامة ممر فضائي سريع مكانها.

القصة تذكر كذلك كيف أن فصيلة عليا من الكائنات الفضائية صنعت سوبر كمبيوتر للإجابة عن السؤال المطلق عن «الحياة والكون وكل شيء». الكمبيوتر استمر في البحث عن الإجابة لمدة سبعة ونصف مليون سنة وأخيرا توصل للإجابة التي كانت الرقم 42. المشكلة التي واجهت هذه الكائنات هي أنهم انتبهوا إلى أنهم لا يعرفون السؤال نفسه الذي إجابته 42، لذا فقد بنوا سوبر كمبيوتر آخر للبحث عن هذا «السؤال المطلق» وسموا هذا الكمبيوتر

(1) (1952 - 2001م) كاتب بريطاني اشتهر بكتاباته الساخرة وعشقه للطبيعة والتكنولوجيا. أشهر أعماله هو «دليل المسافر إلى المجرة» الذي بدأ كسلسلة كوميدية عبر الراديو ثم تحولت في حياة أدامز إلى سلسلة تليفزيونية.

«الأرض». بالفعل ظل هذا الكمبيوتر عشرة ملايين عام يبحث ولكن قبل أن يعرض الإجابة بخمس دقائق فقط، جاء تدمير الأرض وما فيها على يد الفوجون.

نجحت سلسلة «دليل المسافر إلى المجرة» نجاحا باهرا منذ أن تمت إذاعتها كحلقات راديو سنة 1978 مرورا بسلسلة الكتب التي باعت 14 مليون نسخة عالميا وانتهاء بالفيلم السينمائي الذي حمل نفس العنوان والذي تم عرضه سنة 2005. هذا النجاح حوّل الرقم 42 من رقم بريء المظهر إلى أحد أهم الأرقام لدى الثقافة الرائجة.

بالتأكيد سئل دوجلاس أدامز عن سر اختياره للرقم 42 بالذات وإجابته كانت أنه أراد أن يخرج بأقوى دعابة كونية ممكنة وسبيله لهذا كان بجعل إجابة أهم سؤال كوني على الإطلاق مجرد رقم ممل لا معنى له، وعندما فكر في أكثر الأرقام مللا تفتق ذهنه عن الرقم 42.

لم تمنع إجابة أدامز المهاويس بالسلسلة بشكل خاص وبالأرقام بشكل عام من أن يبدأوا في ملاحظة الرقم 42 في كل شيء حولهم وكأنه اكتسب فجأة قدرات فائقة للطبيعة. خرج هؤلاء أيضا بتفسيراتهم الخاصة حول السر وراء الرقم 42، ومما زاد من حماسهم هي القصة المنتشرة عن كيف احتفظ أدامز بالسر الحقيقي خلف اختياره للرقم 42 ولم يبح به إلا لصديق له أقسم أن يأخذ السر إلى قبره. النظريات الباحثة عن السر تنوعت بين نظريات معقولة وأخرى غاية في الجموح؛ إحدى هذه النظريات الجامحة هي أن أدامز اختار 42 لأنه عدد الحكام الذين مروا على التبت؛ نظرية أخرى تقول أن 42 بالنظام الثنائي هو 101010 والذي يبدو «جميلا» نوعا ما.

نظرية ثالثة تقول أنه استخدم الرقم 42 تعبيرا عن تقديره لكاتب كبير آخر هو لويس كارول Lewis Carrol[1] والذي كان مهووسا بهذا الرقم وخبأه في كل مكان بمؤلفاته. أشهر هذه المؤلفات هي سلسلة «أليس في بلاد العجائب Alice in Wonderland» التي لا تحتاج لتعريف، فيندر أن تمر طفولة أحدنا دون المرور بمغامرات هذه البنت الذكية في بلاد العجائب المليئة بالرموز والأفكار المتجسدة. مغامرات أليس كانت مليئة بالإشارات إلى

(1) (1832 - 1898م) كاتب ورياضي بريطاني اسمه الحقيقي هو تشارلز دودجسون Charles Dodgson. أشهر أعماله هو كتاب «أليس في بلاد العجائب».

الرقم 42، فعلى سبيل المثال وليس الحصر، نجد أن عمر الملكتين الحمراء والبيضاء مجتمعتين هو 74088 الذي هو حاصل ضرب 42x42x42. من المثير هنا أن كارول كان أيضا رياضيا مما يدفعنا للتساؤل عما إذا كان سر اختياره للرقم 42 له خلفية رياضية ما ولكننا لن نعرف أبدا الإجابة فكارول مات ومعه دفن السر. المهم أن الكثيرون يرون أن أدامز تأثر بكارول ولهذا استخدم الرقم الذي هوس هذا الأخير.

ربما النظرية الأقرب للمعقولية مرتبطة بحقيقة أن أدامز استعار عنوانه وبعض جمله من كتاب «دليل المسافر إلى أوروبا Hitchhiker's Guide to Europe» للكاتب الأسترالي كن ولش Ken Welsh. لم يخفِ أدامز هذا فقد أرسل رسالة شكر لولش يشكره فيها على كتاب هذا الأخير الذي كان ذا فائدة كبيرة لأدامز. أحد الجمل التي استعارها أدامز كانت الجملة التي ألقاها السوبر كمبيوتر قبل أن يلفظ إجابته وهي: «لن تعجبك الإجابة»؛ فقد ذكر ولش جملة مشابهة في تعليقه على المتجهين إلى بريطانيا بحثا عن جذورهم بأن «الإجابة ستكون محبطة». بالطبع يمكن أن تكون هذه مصادفة ولكن هل هي مصادفة كذلك أن يكون تعليق ولش هذا موجودا في الصفحة 42 تحديدا؟

كعادة الرياضيين، الذين هم أشد المهووسين بالأرقام، انهمكوا في البحث عن الدلالات الرياضية المحتملة التي قد تميز الرقم 42 وقد وجدوا بالفعل بعض الشواهد التي قد توحي أن هذا الرقم ليس بالملل الذي ظنه أدامز؛ فمثلا 42 هو أحد الأرقام التي يطلق عليها الأرقام البرونية pronic numbers وهي الأرقام التي يمكن الحصول عليها عن طريق ضرب رقمين صحيحين متتاليين، فـ 42 هو حاصل ضرب 6 و7. اكتشاف آخر ربما يكون أكثر إثارة من هذا الاكتشاف الأول هو أن 42 يعد من الأرقام الأولية الشبه مثالية primary pseudoperfect numbers وهذه الأرقام تتشارك في خاصية مثيرة وهي أننا إذا أضفنا مقلوب عناصرها إلى مقلوب الرقم نفسه نحصل على واحد. لتوضيح هذه الفكرة باستخدام الرقم 42 نلاحظ أن عناصره هي 2 و3 و7 وإذا قلبنا هذه العناصر نحصل على 1/2 و1/3 و1/7 وإذا جمعنا هذه المقلوبات مع مقلوب 42 أي 1/42 نجد أن الإجابة واحد. المثير هنا أنه، على خلاف الأرقام البرونية، عدد الأرقام المنتمية لمجموعة الأرقام الأولية الشبه مثالية أكثر ندرة وإذا نظرنا إلى أول خمسة أرقام في هذه المجموعة نجدهم:

2

6

42

1806

47058

وبعـد هذه الأرقام الأولى نجد أننا بحاجة لقفزة هائلـة كي نحصل على الرقم التالي وهو 2214502422.

قد يعود القارئ هنا إلى فكرة الترف الرياضي الذي يسعى جاهدا لإضفاء غموض رياضي مـا على رقم خال مـن الغموض، وقد يظن أيضا أني خدعته عندمـا أخبرته في بداية الفصل أن الرقـم 42 هو ضالته المنشـودة لإجابة كل شيء ولكن قبل أن نتسـرع بالحكم فإني أذكر أننا مازلنا لا نعرف ما هو «السـؤال المطلق» الـذي إذا ما توصلنا إليه في يوم من الأيام فربما نجد المنطـق خلف الإجابة؛ المهم أنه مهما اختلفنا حول القيمة الحقيقية للرقم 42، فالذي لا أعتقد أننا سنختلف عليه هو أن قصة هذا الرقم هي من أطرف قصص الأرقام التي حيرت العالم.

# 23

في عام 2007، تم عرض فيلم لنجم هوليود جيم كاري Jim Carrey[1] اسمه «الرقم 23 أو The number 23»، وهو يدور حول شخصية والتر سبارو Walter Sparrow الذي عثر على كتاب يحمل نفس اسم الفيلم فيقرأه ليجد أنه يحكي قصته هو وكيف أن الرقم 23 يظهر في كل ما يتعلق بحياته بدءا من ولادته إلى زواجه. هنا يسيطر عليه الهوس بالرقم 23 الذي يبدأ بالفعل في ملاحظته في كل شيء حوله. في نهاية الفيلم يتضح أن سبارو هو مريض نفسي أدت عدة صدمات في حياته إلى هذا الهوس الجنوني، ولكن هل كان اختيار الرقم 23 تحديدا مجرد اختيار عشوائي أم أن هناك سرا ما خلف هذا الرقم؟

يخبرنا كاتب الفيلم البريطاني فيرنلي فيليبس Fernley Phillips أن اختياره لهذا الرقم لم يكن عشوائيا، بل القصة بدأت عندما ذكر له أحد أصدقائه ما يُدعى بـ«لغز الرقم the 23 number 23 enigma» وهو اعتقاد بأن الرقم 23 له أهمية كونية ما. أثار هذا اللغز خيال الكاتب الذي بحث في أصله فوجد أن الكاتب المستقبلي الصوفي روبرت أنتون ويلسون Robert Anton Wilson[2] كان له دور كبير في نشر الاعتقاد بأهمية الرقم 23 نظرا لأنه أدمجه في كتبه العديدة عن المتنورين illuminati[3]. بدوره يشير ويلسون أن أول من اعتقد في لغز الرقم 23 كان

---

(1) ممثل كندي - أمريكي ولد عام 1962 م بأونتاريو الكندية واشتهر بأعماله الكوميدية مثل «الغبي والأغبى» و«آس فنتورا» وغيرهما من الأعمال.

(2)(1932 - 2007م) كاتب أمريكي اشتهر بنظرته الصوفية وسعيه لدفع البشر إلى إعادة النظر في كل شيء حولهم بنظرة لاأدريّة صوفية.

(3) مجموعة سرية اختلطت فيها الحقيقة والخرافة ولكن أغلب الظن أنها بدأت في بافاريا عام 1776 م عندما اجتمع أفرادها على محاولة نشر التنوير ومقاومة الخرافة وسيطرة الكنيسة.

كاتــب أمريكي آخر هو وليـم بـاروز William Burroghs[1] الذي حكى لويلســون عن قبطان اسـمه كلارك كان يتفاخر بأنه جال البحار لمدة 23 عاما بلا أي حادثة، ثم في نفس اليوم غرق مركب كلارك ومات هو وكل من كانوا معه. المدهش أن باروز أثناء تأمله في سخرية القدر الواضحــة هنا سـمع في الراديو عن سـقوط طائـرة في فلوريدا وأن الطيار كان اسـمه كلارك هــو الآخـر، لكن الأدهى من ذلك هو أن رقم الرحلـة كان 23. لم ير باروز الحادثين على أنهما مصادفتان بل أصبح مهووسا بالرقم 23 وصار يسجل كل مشاهدات هذا الرقم في حياته.

مصادفة كبيرة كذلك حدثت أثناء إنتاج فيلم الرقم 23 هو أنه عندما اتفق فيليبس ومخرج الفيلـم على اختيار جيـم كاري لبطولته، لم يعرفا أن هذا الأخير هــو الآخر مهووس بالرقم منــذ أن قـص له صديق قصة لغز الرقم 23 لدرجة أن كاري كان قد غير اسـم شركة الإنتاج التي يملكها إلى JC23 وهو يقول أن أحد أهم أسـباب تعلقه بالرقم 23 هو عندما اكتشـف أن المزمور رقم 23 من العهد القديم يتحدث عن الحياة بلا خوف وهو ما اتفق تماما مع فلسـفته في حياته الشخصية.

سـاعد الفيلم مع كتب ويلسون وباروز على انتشار الهوس بالرقم 23 بين العامة وبالفعل تلقـى الكاتبان المذكوران العشرات من الرسـائل من أناس يؤمنـون أن الرقم 23 متواجد في حياتهم كذلك بشـكل يوحي بسر كوني. أيضا بدأ يرى هـؤلاء العلاقة المريبة بين الأحداث التاريخية العظيمة وهذا الرقم، مثل أن المتفق عليه أن جوليوس سيزر قُتل بعد أن تم طعنه 23 مـرة وإذا انتقلنـا لأحداث أكثر معاصرة نجد أن أحداث الحادي عشر من سـبتمبر حدثت في تاريخ 11/ 9/ 2001 وإذا جمعنا تلك الأرقام نجد أنفسنا أمام الرقم 23.

لكن ربما أغرب مجموعة مهووسة بالرقم 23 هي طائفة تدعى discordianists والمنتمون لتلك الطائفة يؤمنون أن الفوضى هي أساس كل شيء وأن الرقم 23 مقدس وأنه قربان الإلهة إيريس Eris إلهة الفوضى.

تغاضى كل المهووسين بالرقم 23 بالطبع عن حقيقة وجود عارض في الطب النفسي يدعى

(1)(1914 - 1997م) كاتب أمريكي من أهم علامات عصر ما بعد الحداثة وأثرت أعماله في العديد من مظاهر الثقافة الرائجة.

أبوفينيا apophenia وهو الميل إلى إيجاد علاقات بين أشياء لا علاقة بينها، فمثلا الشخص المهووس بالرقم 23 قد يجده في كل ما حوله ولكن هذا لا يحمل معنى متجاوز، فنفس الشخص إذا نقل هوسه إلى رقم آخر سيجد هذا الرقم كذلك في كل ما حوله.

ربما يحمل الرقم 23 أهمية خاصة في البيولوجيا نظرا لأن عدد الكروموسومات البشرية التي تحمل المادة الوراثية هي 23 زوج، ولكن حتى هذا لا يبدو شيئا مميزا، فتوجد كائنات أخرى تحمل نفس عدد الكروموسومات.

الرقم 23 هو رقم أولي ولكن لا يوجد فيه ما يلفت رياضيا سوى ارتباطه بمفارقة طريفة هي مفارقة تاريخ الميلاد birthday paradox. تقول هذه المفارقة أننا لو جمعنا عددا من الناس وحسبنا احتمالات أن يتشارك أي اثنين في تاريخ الميلاد، فأصغر عدد لهذه المجموعة يؤدي إلى احتمال أكبر من خمسين بالمائة هو 23.

قد لا يبدو مما سبق أن للرقم 23 أهمية خاصة ما ولكن هذا بالتأكيد ليس ما توصل إليه عبقري الرياضيات الأمريكي جون ناش John Nash[1] الذي تم إنتاج فيلم هوليودي سنة2001 باسم عقل جميل A Beautiful Mind يتحدث عن حياته العجيبة، فقد كان ناش مريضا بالشيزوفرينيا ولكن هذا لم يمنعه من الفوز بجائزة نوبل في الاقتصاد. كان ناش من أشد المهووسين بالرقم 23 و كان يستخدمه في كل جوانب حياته وقد ارتبط هذا الهوس بتدهور حالة ناش النفسية فمن المشهور عنه أنه في إحدى محاضراته ادّعى أن صورة بابا الفاتيكان جون الثالث والعشرين Pope John XXIII[2] التي ظهرت في مجلة تايم هي في الحقيقة صورته هو. فهل رأى ناش بعقله الفريد شيئا ما فريدا في الرقم 23 يصعب على العقول العادية رؤيته أم أن هذه مجرد تداعيات مرض نفسي شديد؟ قد يميل القارئ للاحتمال الثاني ولكن يجب أن نذكر هنا أن جون ناش وزوجته قُتلا في حادث سيارة عام 2015 وتحديدا يوم 23 مايو.. فهل هذه مصادفة!!

(1) (1928 - 2015م) رياضي أمريكي عمل بجامعة برينستون وحصل على جائزة نوبل عام 1994 في العلوم الإقتصادية.

(2)(1881 - 1963م) كان بابا الفاتيكان منذ عام 1958 حتى مماته.

بهذا نصل إلى نهاية رحلتنا مع الأرقام التي حيرت العالم وأحب أن أترك القارئ العزيز مـع حقيقـة لطيفة جمدت الدماء في عروقي عندما أدركتها وهـي أن عدد الأرقام التي تحدثنا عنها في هذا الكتاب هو تحديدا.. 23!!