صلاحية الوحدات الانتاجية
فى حالة عدم استقلالية تعطل مكوناتها

الدكتور احمد محمد عمر

كلية الاقتصاد والعلوم السياسية ــ جامعة القاهرة

مقدمة :

تستهدف عمليات التخطيط على مستوى المشروع أن تدار العملية الانتاجية بأعلى كفاءة ممكنة وذلك يتطلب دائما ان تزداد صلاحية وحدات الانتاج الى قيمتها العظمى المتاحة اقتصاديا اى ان تزداد فترة عمل المجموعة دون تعطل الى اقصى حد ممكن . ويمكن ان نصل الى هذا الهدف بطرق كثيرة منها عملية الاحلال اى استبدال الأجهزة العاملة بعد فترة معينة بأخرى جديدة خوفا من تعطلها اثناء العملية الانتاجية نفسها او من طريق ادخال وحدات احتياطية تعمل مباشرة عند تعطل اى من الاجهزة الأساسية ويتبع ذلك عملية صيانة واعادة الأجهزة المتعطلة الى سابق مواصفاتها . وتعتمد كفاءة هذه الطريقة على الوصول الى العدد الأمثل لاجهزة الاحتياط اللازم استخدامها فى المجموعة ، ويعتمد هذا العدد بدوره على تكاليف كل وحدة وعلى صلاحية كل جهاز عامل وكفاءة الصيانة اللازمة .

وسنتناول فى هذا البحث دراسة نموذج رياضى لقياس صلاحية بعض الوحدات الانتاجية ذات الأجهزة الاحتياطية وتأثير الاحتياط على زيادة صلاحية المجموعة . ثم نقترح طريقة لتحديد المنفعة الاقتصادية التى نجنيها لكل جهاز احتياطى مضاف .

وفى دراسة صلاحية المجموعة الانتاجية المكونة من عدد من الأجهزة العاملة يصاحبها عدد آخر من الأجهزة الاحتياطية لزيادة صلاحية المجموعة الأصلية ، يفترض أن الجهاز العامل يمكن ان يتعطل فى لحظات من الزمن لا يمكن التنبؤ بها مسبقا . اى انها لحظات عشوائية . كذلك يفترض ان كل جهاز فى المجموعة يعتبر وحدة مستقلة من حيث العمل والتعطل . او بمعنى آخر فان فترة عمل اى جهاز دون تعطل تعتبر متغيرا عشوائيا مستقلا من فترة عمل اى من الأجهزة الأخرى . وفى لحظة تعطل اى من الأجهزة العاملة يبدأ الجهاز الاحتياطى مباشرة فى تأدية عمل الجهاز المتعطل ويوجه الجهاز المتعطل للاصلاح الذى يأخذ وقتا عشوائيا لاعادته الى مواصفاته الأصلية . وعندما يتم اصلاح الجهاز يلتحق مباشرة بمجموعة الاحتياط .

وتقاس صلاحيه المجموعة غالبا بطول الفترة التي تعمل فيها هذه المجموعة ككل دون تعطل . وقد درست صلاحية مثل هذه المجموعات تحت شروط معينة خاصة بعدد الأجهزة الأساسية وعدد الأجهزة الاحتياطية وفترات عمل الجهاز الواحد دون تعطل وفترات اصلاحه وعدد وحدات الاصلاح ، كذلك تبعا لتعريف فترات عمل المجموعة دون تعطل . ففي بعض الحالات اعتبرت المجموعة متعطلة عن العمل في اللحظة التي يكون فيها عدد الاجهزة الصالحة للعمل اقل من عدد معين وفي حالات اخرى عندما تتعطل جميع اجهزة المجموعة عن العمل وذلك حسب طبيعة استخدام المجموعة .

كذلك تم تناول هذه المجموعة في حالة ما يسمى بالاحتياط البارد او الدافىء او الساخن . ويعنى الاحتياط البارد ان الجهاز في حالة الاحتياط لا يمكن ان يتعطل او تتاثر مواصفاته . وحالة الاحتياط الدافىء تعنى أن الجهاز الاحتياطي يمكن ان يتعطل ولكن بمعدل اقل من معدل تعطله اثناء عمله . والاحتياط الساخن يعنى ان معدل تعطل الجهاز في الاحتياط مساو لمعدل تعطله اثناء عمله .

ومن الامثلة التي يمكن أن تطبق فيها مثل هذه الدراسة .

١ — تعتبر اطارات السيارات مثالا توضيحيا مبسطا لمثل هذه المجموعات فسيارة الركوب مثلا تسير على اربعة اطارات كل منها يعتبر جهاز خدمة اساسي وهناك اطار احتياطي واحد يحل محل اى من الاطارات الأخرى عند تعطله عن العمل وتعتبر فترة عمل كل اطار متغيرا عشوائيا . ويمكن ان يعتبر الاطار الاحتياطي هنا في حالة احتياط بارد . ومن الطبيعي ان المجموعة كلها تتوقف عن العمل عندما يصبح عدد الاطارات الصالحة اقل من ٤ . اما في سيارات النقل فهناك اطارين مزدوجين يعتبر كل زوج منها مكون من جهازين مستقلين احدهما اساسي والآخر في حالة احتياط وفي بعض السيارات يعتبر الاطار الاحتياطي في حالة احتياط دافىء وفي حالات اخرى يعتبر احتياطيا ساخنا حسب التصميم الهندسي للمجموعة .

٢ — كذلك يراعى أن يحمل التيار الكهربائي للأجهزة الحاسبة الألكترونية والأجهزة التي يتطلب استخدامها الى صلاحيات عالية على أكثر من خط بحيث اذا تعطل اى من الخطوط فان الخط الآخر يتولى مباشرة توصيل التيار الكهربائي الى الجهاز لكى لا يتعطل عن العمل . ويكون الخط الاحتياطي في حالة احتياط بارد او ساخن تبعا لاعتبارات معينة تتوقف على سرعة توصيل الاحتياط عند تعطل الخط الأساسي .

٣ — كذلك تطبق مثل هذه الدراسة في تخطيط صيانة مجموعات الأجهزة والآلات العاملة في اى من مجالات العمل حيث نتحكم في عدد أجهزة الاحتياط او قطع الغيار كذلك في عدد وحدات الاصلاح بحيث تزداد فترة صلاحية المجموعة بالتكلفة الاقتصادية المثلى .

وسندرس فى هذا البحث صلاحية بعض المجموعات فى ظروف أقرب الى التطبيق العملى من تلك التى درست من قبل . وسنتخلف هنا من شرط استقلالية التعطل الذى ذكرناه سابقا حيث أنه عمليا تتأثر الاجهزة العاملة بشكل أو بآخر بتعطل أى منها . وقد تناول Robert Harris [6] دراسة أمثلة لهذه المجموعات تحت شرط عدم الاستقلال فى بعض الحالات البسيطة وفى حالة الاستقرار خاصة . أى أنه درس المجموعة بعد فترة طويلة من بداية عملها بافتراض أن حالة مجموعة الخدمة بعد هذه الفترة الطويلة لا تتأثر بالحالة التى بدأت بها عملها . وسنوجد فى هذا البحث علاقة لدالة توزيع عمل المجموعة معتمدا على الزمن أى فى الحالة العامة وليس فى حالة الاستقرار النهـــائى .

١ ــ تيـــار التعطل

سنتناول هنا مجموعة مكونة من جهازين أساسيين غير مستقلين من حيث العمل والتعطل . وسنستخدم وصفا لتيار التعطل كما ورد فى [6] . أى أن فترة عمل الجهازين دون تعطل أى منهما تتبع القانون التتالى الأسى السالب ، أى :

$$F(x,y) = P_r\ \{ X \leq x,\ Y \leq y \} = \qquad (1)$$
$$= 1 - \exp [-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max (x,y)]$$

λ_1 ، λ_2 ثابتان غير سالبـــان .

وكما فى قانون التوزيع الأسى السالب لمتغير عشوائى واحد فان $F(x,y)$ لها الخاصية التالية :

$$F(x,y)\, F(t,t) = F(x+t,\ y+t)$$

كذلك يمكن اعتبار أن تيار التعطل هذا ناتجـــا من جمع ثلاث تيـــارات بواسونية بمعدلات λ_1 ، λ_2 ، λ_{12} على التوالى حيث التيار الأول يحتوى على تعطلات الجهاز الأول فقط والتيار الثانى على تعطلات الجهاز الثانى فقط والثالث على تعطلات الجهازين معا فى نفس الوقت ومن الواضح أن وصفا بهذا الشكل لتيار التعطل أكثر قربا من الواقع حيث أن تعطل الجهازين معا يمكن الحدوث فى كثير من الحالات خاصة اذا كانت أجهزة الخـــدمة فى المجموعة تعتمد مثلا على التيار الكهربائى فان انقطاع التيار الكهربائى يعنى تعطل الأجهزة العاملة جميعها فى نفس الوقت وسنعتبر هنا أن الجهـــازين متماثلين أى أن $\lambda_2 = \lambda_1$ فقط لاختصار صورة العلاقات الرياضية .

٢ ــ مجموعة مكونة من جهاز واحد اساسى وآخر احتياطى فى حالة احتياط ســاخن :

تمت دراسـة هذه المجموعة فى حالة الاسـتقلال فى [5] ، [3] ، [1] كذلك فقد درسـها R. Harris [6] فى بعض الحـــالات الخاصة فى حالة عدم الاستقلال . وسنوجد علاقة لدالـــة توزيع فترة عمل المجموعة دون تعطل فى الحالة التـــالية .

١ ــ توزيع فترة عمل الجهازين دون تعطل تتبع القانون النقى الأسى السالب كما فى (١) .

٢ ــ الجهاز المتعطل يتوجه مباشرة للاصلاح الذى ياخذ وقتا عشوائيا له التوزيع $G(x)$

٣ ــ تصبح المجموعة متعطلة عن العمل فى اللحظة التى يكون فيهـــا الجهازين متعطلين .

نفرض أن $P(x)$ هو احتمال أن تعمل المجموعة دون تعطل فترة x على الأقل . وبالتالى فان

$$\phi (x) = I - P (x)$$

حيث $\phi (x)$ هى دالة توزيع فترة عمل المجموعة دون تعطل .

ولايجاد $\phi (x)$ نفرض أن $A_i (x,t)$ هو احتمال ان تعمل المجموعة فترة طولها t على الأقل تحت شرط أن هناك i جهاز متعطل قد مضى على اصلاح احدها فترة طولها x [7]

وبالتالى فان $A_i (x, t)$ تحقق المعادلات

$$A_0 (o,t) = e^{-(2\lambda + \lambda_{12})t} + \int_0^t 2\lambda e^{(2\lambda+\lambda_{12})\tau} A_0 (o, t-\tau)\, d\tau \quad (٢)$$

$$A_1 (x,t) = \frac{I- G (x + t)}{I- G (x)} e^{-(X\lambda + \lambda_{12}) t} +$$

$$+ \frac{I}{I - G (x)} \int_0^t e^{-(\lambda + \lambda_{12})\tau} A_0 (o, t - \tau)\, d G (t + \tau) \quad (٣)$$

وذلك لأن المجموعـــة تعمل دون تعطل فترة طولهـــا t اذا تحققت اى من الحالات التالية :

١ — لا يتعطل اى من اجهزتها طوال هذه الفترة .

٢ — بعد فترة طولها τ يتعطل احد اجهزتها ويبدأ فى اصلاحه مباشرة ولكن المجموعة تعمل دون تعطل فترة طولها $t-\tau$ على الاقل .

كذلك فان المجموعة التى تبدأ بجهاز متعطل واحد مضى على اصلاحه فترة طولها x تعمل دون تعطل فترة طولها t اذا تحققت الاحتمالات التالية :

١ — لا ينتهى اصلاح الجهاز المتعطل ولا يتعطل الجهاز الآخر طوال هذه الفترة .

٢ — ينتهى اصلاح الجهاز المتعطل بعد فترة طولها τ وخلالها لا يتعطل الجهاز العامل وتستمر المجموعة بعد ذلك فى العمل دون تعطل فترة طولها $t-\tau$

وباستخدام العلاقات

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\phi(t)$$

$$a_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} A_i(o,t)\, dt$$

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dG(t) \qquad (1)$$

$$g_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} [1-G(t)]\, e^{-(\lambda+\lambda_{12})t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda+\lambda_{12}+s} [1 - g(\lambda+\lambda_{12}+s)]$$

وحيث أن

$$a_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} A_0(o, t)\, dt$$

$$= \frac{I - \varphi(s)}{s}$$

نجد أن المعادلتين (٢) ، (٣) تأخذ الصورة

$$\varphi(s) = \frac{2\lambda + \lambda_{12}}{2\lambda + \lambda_{12} + s} - \frac{2\lambda s}{2\lambda + \lambda_{12} + s}\, a_1(s)$$

$$a_1(s) = \frac{I}{\lambda + \lambda_{12} + s}\left[I - g(\lambda + \lambda_{12} + s) \right]$$

$$+ \frac{I - \varphi(s)}{s}\, g(\lambda + \lambda_{12} + s)$$

ومنهما نجـــد أن

$$\varphi(s) = \frac{(2\lambda + \lambda_{12})(\lambda + \lambda_{12} + s) - 2\lambda\left[s + (\lambda_{12} + 2\lambda)\, g(\lambda + \lambda_{12} + s)\right]}{(\lambda + \lambda_{12} + s)\left[2\lambda + \lambda_{12} + s - 2\lambda\, g(\lambda + \lambda_{12} + s)\right]} \qquad (٤)$$

بوضـــع λ_{12} = صفر نجد أن هذه العلاقة تنطبق على العلاقة المماثلة في حالة استقلال تعطل الجهازين كما في [5]

كذلك اذا كانت

$$G(x) = I - e^{-\mu x} \qquad \mu > o$$

وبالتعويض في العلاقة (٤) نحصل على العلاقة المماثلة في الحالة الخاصة (a) في [6]

ومن العلاقة (٤) نوجد الفترة المتوقعة لعمل المجموعة دون تعطل وهى

$$T = \frac{\lambda_{12} + 3\lambda - 2\lambda g}{(\lambda_{12} + \lambda)(\lambda_{12} + 2\lambda - 2\lambda g)}$$

حيث

$$g = g(\lambda + \lambda_{12})$$

وبتطبق هذه العلاقة على العلاقة (8) فى [6] عندما تكون

$$G(x) = I - e^{-\mu x} \qquad \mu > o$$

٣ — مجموعة مكونة من جهازين اساسيين و n جهاز احتياط بارد .

سنتناول فى هذا الجزء مجموعة مكونة من جهازين اساسيين و n جهاز احتياطى فى حالة احتياط بارد . وسنوجد أولا دالة توزيع تهار التعطل حسب شروط عد م الاستقلال التى اوردناها سابقا .

نفرض أن $Pr(x)$ هو احتمال تعطل r جهاز خلال فترة زمنية طولها x من الواضح ان $Pr(x)$ تحقق مجموعة المعادلات التفاضلية التالية

$$P_0'(x) = -(2\lambda + \lambda_{12})P_0(x)$$

$$P_1'(x) = -(2\lambda + \lambda_{12})P_1(x) + 2\lambda P_0(x)$$

$$P_k'(x) = -(2\lambda + \lambda_{12})P_k(x) + 2\lambda P_{k-I}(x) + \lambda_{12} P_{k-2}(x)$$

$$k \geq 2$$

ويمكن استنتاج حل هذه المجموعة بفرض انه فى بداية الزمن كانت جميع الاجهزة صالحة للعمل اى ان .

$$P_0(o) = I \quad , \quad P_r(o) = o \quad r \geq I$$

ويأخذ هذا الحل الصورة

$$P_0(x) = e^{-(2\lambda + \lambda_{12})x}$$

$$P_1(x) = 2\lambda x\, e^{-(2\lambda + \lambda_{12})x}$$

$$Pr(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{(2\lambda x)^{r-2m}}{(r-2m)!} \frac{(\lambda_{12} x)^m}{m!} e^{-(2\lambda + \lambda_{12})x}$$

وبالنسبة لهذه المجموعة فان $A_i(x, t)$ تحقق مجموعة العلاقات

$$A_0(o, t) = I - \phi(t) = e^{-(2\lambda + \lambda_{12})t} \tag{٥}$$

$$+ \int_0^t [2\lambda e^{-(2\lambda + \lambda_{12})\tau} A_1(o, t-\tau) + \lambda_{12} e^{-(2\lambda + \lambda_{12})\tau} A_2(o, t-\tau)]\, d\tau$$

$$A_i(x, t) = \frac{I - G(x+t)}{I - G(x)} \sum_{r=0}^{n-i} Pr(t) + \tag{٦}$$

$$\frac{I}{I - G(x)} \int_0^t \sum_{r=0}^{n-i} A_{i+r-I}(o, t-\tau)\, Pr(\tau)\, d\, G(\tau + x)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

وبوضع x = صفر واستخدام مجموعة العلاقات I والتحويلات

$$a_i(s) = \int_0^\infty [I - G(x)] \sum_{r=0}^{n-i} P_i(x)\, e^{-sx}\, dx$$

تأخذ المعادلتان (٥) ، (٦) الصورة

$$\varphi(s) = \frac{2\lambda + \lambda_{12}}{2\lambda + \lambda_{12} + s} + \frac{[2\lambda a_1(s) + \lambda_{12} a_2(s)]\, s}{2\lambda + \lambda_{12} + s} \qquad (٧)$$

$$a_i(s) = g_i(s) + \sum_{m=0}^{n-i} f_{im}(s)\, a_{i+m-1}(s) \qquad (٨)$$

حيث

$$f_{im}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} P_m(x)\, dG(x)$$

وبحل مجموعة المعادلات الجبرية الأخيرة يمكن ايجاد تحويلات لابلاس لدالة توزيع فترة عمل المجموعة دون تعطل وكذلك احتمالات استمرار عمل المجموعة لفترة طولها t دون تعطل ابتداء من لحظة تعطل أحد الأجهزة.

وسنوجد تفصيلا حلا لهذه المجموعة عند $n = 1$ ، $n = 2$ أى عندما تحتوى المجموعة على جهاز احتياطى واحد أو جهازين احتياطيين .

كذلك سنوجد مقدار الاضافة المتوقعة لفترة عمل المجموعة نتيجة زيادة عدد الأجهزة الاحتياطية .

(١) بفرض أن $n = 1$ فان مجموعة المعادلات (٧) ، (٨) تأخذ الصورة التالية :

$$\varphi(s) = \frac{2\lambda + \lambda_{12}}{2\lambda + \lambda_{12} + s} + \frac{2\lambda s}{2\lambda + \lambda_{12} + s} a_1(s)$$

$$a_1(s) = \frac{1}{2\lambda + \lambda_{12} + s}\left[1 - g(2\lambda + \lambda_{12} + s)\right] + a_0(s)\, g(2\lambda + \lambda_{12} + s)$$

$$= \frac{1}{2\lambda + \lambda_{12} + s}\left[1 - g(2\lambda + \lambda_{12} + s)\right] + \frac{1 - \varphi(s)}{s}$$

$$\cdot\ g(2\lambda + \lambda_{12} + s)$$

ومنها نجد أن

$$\varphi(s) = \frac{(2\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + s) - 2\lambda\,[s + (2\lambda + \lambda_{12})\, g(2\lambda + \lambda_{12} + s)]}{(2\lambda + \lambda_{12} + s)\,[s + \lambda_{12} + 2\lambda(1 - g(2\lambda + \lambda_{12} + s))]}$$

ويكون الوقت المتوقع لعمل المجموعة دون تعطل T_1 على الصورة

$$T_1 = \frac{(2\lambda + \lambda_{12}) + 2\lambda\,[1 - g(2\lambda + \lambda_{12})]}{(2\lambda + \lambda_{12})\,[\lambda_{12} + 2\lambda(1 - g(2\lambda + \lambda_{12}))]} \qquad (٩)$$

(ب) بفرض أن $n = 2$ تأخذ مجموعة المعادلات (٧) ، (٨) الصورة

$$\varphi(s) = \frac{2\lambda + \lambda_{12}}{2\lambda + \lambda_{12} + s} - \frac{2\lambda s}{2\lambda + \lambda_{12} + s}\, a_1(s) - \frac{\lambda_{12} s}{2\lambda + \lambda_{12} + s}\, a_2(s)$$

$$a_1(s) = \frac{1 - g(2\lambda + \lambda_{12} + s) + 2\lambda\, g'(2\lambda + \lambda_{12} + s)}{2\lambda + \lambda_{12} + s} - \frac{2\lambda\,[1 - g(2\lambda + \lambda_{12} + s)]}{(2\lambda + \lambda_{12} + s)^2} + a_0(s)\, g(2\lambda + \lambda_{12} + s) - 2\lambda\, a_1(s)\, g'(2\lambda + \lambda_{12} + s)$$

$$a_2(s) = \frac{1 - g(2\lambda + \lambda_{12} + s)}{2\lambda + \lambda_{12} + s} + a_1(s)\, g(2\lambda + \lambda_{12} + s)$$

حيث

$$g'(2\lambda + \lambda_{12} + s) = \frac{d}{ds}\, g(2\lambda + \lambda_{12} + s)$$

ويمكن كتابة حل مجموعة المعادلات الجبرية الأخيرة على الصورة

(١٠)

$$\varphi(s) = \frac{(2\lambda + \lambda_{12})(2\lambda + \lambda_{12} + s) - 2\lambda\,[s + (2\lambda + \lambda_{12})\, g]}{(2\lambda + \lambda_{12} + s)\,[s + \lambda_{12} + 2\lambda(1 - g)]} - 1(s)$$

حيث

$$l(s) = \frac{(2\lambda + \lambda_{12} + s)\,[2\lambda\,(I-g) + \lambda_{12}\,s\,a_2(s) + 2\lambda\,a_1(s)\,g' - 4\lambda^2 s g']}{(2\lambda + \lambda_{12} + s)\,[s + \lambda_{12} + 2\lambda\,(I-g)]}$$

ولايجاد الفترة المتوقعة T_2 لعمل هذه المجموعة نجرى تفاضل المعادلة (١٠) ونضع S = صفر

اى ان

$$T_2 = \frac{I}{[2\lambda + \lambda_{12}]}\,[2\lambda\,a_1(o) + \lambda_{12}\,a_2(o) - I] \qquad (11)$$

حيث $a_1(o)$ ، $a_2(o)$ تحقق المعادلات

$$a_1(o) = \frac{I - g + 2\lambda g'}{2\lambda + \lambda_{12}} + \frac{2\lambda}{2\lambda + \lambda_{12}}(I-g) + T_2 g - 2\lambda\,a_1(o)\,g' \qquad (12)$$

$$a_2(o) = \frac{I - g}{2\lambda + \lambda_{12}} - a_1(o)\,g \qquad (13)$$

حيث

$$g' = g\,(2\lambda + \lambda_{12})$$

من (١١) ، (١٢) يمكن ايجاد قيمة الفرق $T_2 - T_1$ حيث

$$T_2 - T_1 = V \qquad (14)$$

حيث

$$V = \frac{2\lambda}{2\lambda + \lambda_{12}}\left[\frac{2\lambda g'}{2\lambda + \lambda_{12}} - \frac{2\lambda\,(I-g)}{(2\lambda + \lambda_{12})^2} - 2\lambda\,a_1(o)\,g'\right] + \frac{\lambda_{12}}{2\lambda + \lambda_{12}}\,a_2(o)$$

ويمكن ايجاد قيمة $a_1(o)$ ، $a_2(o)$ بحل المعادلات الجبرية (١١) ، (١٢) ، (١٣) .

٤ ــ اقتصاديات الاحتياط :

بمقارنة العلاقتين (٩) ، (١٤) نجد أن اضافة جهاز احتياطى جديد للمجموعة يزيد من الفترة المتوقعة لعمل المجموعة دون تعطل مقدارا قدره V وبالتالى يمكن تقدير المنفعة الناتجة من اضـــافة جهـــاز احتياطى واحد للمجموعة بالشكل التالى .

بفرض ان تكاليف اضافة جهاز واحد — C

وان عائد تشغيل هذا الجهاز فى وحدة الزمن هو C_1

لذا فان اتخاذ قرار اضافة جهاز احتياطى للمجموعة يتوقف على اشارة المقدار $C_1V - C$ فاذا كانت موجبة فان هناك فائدة اقتصادية من اضافة الجهاز والا فان اضافة الجهاز ستخفض المنفعة الكلية للمجموعة الأمر الذى يوجب عدم اتخاذ مثل هذا القرار .

المراجـــع :

1 - Ahmed Omar, Yousif Nasr. "Maintenance of a system consisting of n main machines and one stand by", Kebernetica, Chronic States, Tom. 4, 75-82.

2 - R.E. Barlow, "Repairman Problems," Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1962.

3 — D.R. Cox, "The analysis of Non-Markovian Stochastic Processes by the Inclusion of Supplementary Variables," Proc. Camb. Phil. Soc. 51, 422-441 (1955).

4 - D.P. Gaver, "Failure Time for a Redundant repairable System of Two Dissimilar Elements," IEEE Trans. on Reliability R-13, 14-22 (1964).

5 - B.V. Gnedenko, "Duplication with Repair," Izvestiya AN SSSR. Techn cheskaya Kibernetika 5, 111-118 (1964).

6 - Harris R., «Reliability applications of a Bivariate exponential distribution". Operations research No. 1, 1968, 18-27.

7 - Ahmed Omar, "asymptotic methods in reserve theory" unpublished thesis for Ph.D. degree, Moscow state university 1967.