# الفصل الثاني

## طرق حل المعادلات التفاضلية

## ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى

## Methods of Solutions of Differential Equations

## from First Order and First Degree

**الصــورة العامــة للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى هي:**

$$F(x, y, y')=0. \tag{1}$$

ويكون الحل العام لها على الصورة

(2) حيث c ثابت اختياري $y=\phi(x, c)$

وفي بعض الأحيان نحصل على الحل في الصورة الضمنية

(3) حيث c ثابت اختياري $\Phi(x, y, c)=0$

أي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى يكون عبارة عن عائلة منحنيات ذات بارامتر (ثابت اختياري) واحد في مستوى الإحداثيات (x,y)، ويمثل كل حل خاص أحد منحنيات العائلة. واضح أنه يمكننا الحصول كحالة خاصة على $y'$ من المعادلة (1)، على الصورة

$$y'=f(x, y) \tag{4}$$

حيث $f(x, y)$ هي دالة معرفة ومتصلة ووحيدة القيمة في منطقة ما.

أي أن المعادلة (4) هي علاقة بين إحداثي نقطة ما (x, y) وميل المماس للمنحني عند هذه النقطة.

## ١/٢- طرق حل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى هي:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

وفي كثير من المسائل يكون من الأفضل وضع المعادلة على الصورة

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0$$

وسوف نستعرض فيما يلي بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية:

### ٢/١/١-طريقة فصل المتغيرات:

إذا أمكن فصل متغيرات المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى أى أن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0.$$

يكون من السهل حلها، حيث يكون الحل على الصورة

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

حيث c ثابت اختياري

ونلاحظ ان الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد، نظراً لأن المعادلة من الرتبة الأولى.

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x + 3yy' = 0$$

**الحلـ:**

يمكن وضع المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

وبفصل المتغيرات تصبح

$$3y\,dy = -x\,dx$$

وبالتكامل نحصل على

$$3\left(\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + c$$
$$\therefore 3y^2 = -x^2 + c^*$$

حيث $c^*$ ثابت اختياري.

**مثال(٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+(1+y^2)=0$$

**الحلـ:**

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{1+y^2}dy=0$$

بالتكامل نجد أن

$$\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=c$$

$$\therefore \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c$$

حيث $c$ ثابت اختيارى.

**مثال(٣):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2y+(xy+3x)y'=0, \quad x\neq 0$$

**الحلـ:**

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$2y\,dx+x(y+3)dy=0$$

بقسمة المعادلة على $xy$ والتكامل نحصل على

$$\int\frac{2}{x}dx+\int(1+\frac{3}{y})dy=c$$

$$\therefore 2\ln|x|+y+3\ln|y|=c$$

وبالتالي يكون الحل العام على الصورة

$$x^2 y^3 = e^{c-y}$$

لاحظ أننا حصلنا على الحل في الصورة الضمنية ومن الصعب الحصول عليه في الصورة $y = f(x)$.

**مثال(٤):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^4 e^{2x} dx + dy = 0$$

**الحل:**

من السهل فصل المتغيرات بقسمة المعادلة على $y^4$ والتكامل نجد أن

$$\int e^{2x} dx + \int \frac{dy}{y^4} = c, \qquad y \neq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{3y^3} = c$$

ومنها نحصل على الحل في الصورة الصريحة

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{3e^{2x} - k}}, \qquad k = 6c$$

**مثال (٥):** اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$$(i)\left(x^2 y^2 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2xy + y \qquad (ii)\, x \cos y\, dx - e^{-x} \sec y\, dy = 0$$

**الحل:**

$$(i)\left(x^2 + 1\right) y^2 \frac{dy}{dx} = y\,(2x + 1)$$

$$\therefore \left(x^2 + 1\right) y dy = (2x + 1) dx$$

$$\therefore y dy = \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1}\right) dx$$

وبإجراء التكامل ينتج أن

$$\int y dy = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left|x^2+1\right| + \tan^{-1} x + c$$

$$(ii)\ x \cos y\, dx - e^{-x} \sec y\, dy = 0$$

بالقسمة على $e^{-x} \cos y$ نجد أن

$$xe^x dx - \sec^2 y\, dy = 0$$

بالتكامل

$$\int \sec^2 y\, dy = \int xe^x dx + c$$

بالتكامل بالتجزيء يكون الحل العام هو

$$\therefore \tan y = xe^x - e^x + c$$

**مثال (٦):** اوجد حل مسألة القيمة الإبتدائية الآتية:

$$(\sin x \cos y)dx + (\cos x \sin y)dy = 0$$

التي تحقق الشرط $y(0) = 0$

**الحل:**

بالقسمة على $\cos x \cos y$ نجد أن

$$\frac{\sin x}{\cos x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

بالتكامل ينتج

$$-\ln|\cos x| - \ln|\cos y| = \ln a; \qquad a > 0$$
$$\therefore -\ln|\cos x \;\; \cos y| = c; \qquad c = \ln a$$

لإيجاد قيمة c باستخدام الشرط $y(0)=0$ فإن

$$(\cos x)(\cos y) = c, \quad c = \frac{1}{a}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$(\cos x)(\cos y)=1$$

أو

$$y = \cos^{-1}(\sec x)$$

## ٢/١/٢- معادلات يمكن تحويلها لمعادلات يمكن فصل متغيراتها:

توجد بعض المعادلات في صورة غير قابلة لفصل متغيراتها ولكن إذا قمنا بإجراء تحويل للمتغيرات فإننا نحصل على صورة يسهل فصل متغيراتها.

**من أمثلة هذه المعادلات:** المعادلات التي علي الصورة $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$

وهذه الصورة لا يمكن فصل متغيراتها، ولكن باستخدام التعويض $z=ax+by+c$

فإن المعادلة تتحول إلى صورة يسهل فصل متغيراتها، حيث

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = b\,f(z) + a$$

ومن الواضح أن هذه الصورة يسهل فصل متغيراتها كالآتي

$$\frac{dz}{b\,f(z)+a} = dx \quad \therefore \int \frac{dz}{b\,f(z)+a} = x + c.$$

بإجراء التكامل ثم التعويض عن $z=ax+by+c$ نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة كما يتضح بالمثال التالي.

**مثال (٧):** اوجد الحل العام المعادلة التفاضلية:

$$y'=(x+y)^2$$

**الحلـ:**

بوضع $z=x+y$

إذن $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون

$$\frac{dz}{dx}-1=z^2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=1+z^2$$

أو $dz-\left(1+z^2\right)dx=0$

بفصل المتغيرات والتكامل

$$\frac{dz}{1+z^2}-dx=0$$

$$\therefore \tan^{-1}z-x=c$$

$$\therefore \tan^{-1}z=x+c$$

$$\therefore z=\tan\left(x+c\right)$$

الحل العام هو $y=\tan\left(x+c\right)-x$

**مثال (٨):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x+2y)dx+dy=0$$

**الحلـ:**

المعادلة يمكن وضعها على الصورة $\frac{dy}{dx} = -(x+2y)$

بوضع $z = x + 2y$ نجد أن

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = -z$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 1 - 2z$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\int \frac{dz}{1-2z} = \int dx - c$$

حيث c ثابت اختياري $\frac{1}{2}\ln(1-2z) + x = c,$

بوضع $z = x + 2y$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$\ln(1-2x-4y)^{\frac{1}{2}} = c - x$$

$$\therefore (1-2x-4y)^{\frac{1}{2}} = e^c . e^{-x} = k e^{-x}$$

$$\therefore 1 - 2x - 4y = k^2 e^{-2x}$$

فيكون الحل العام على الصورة

حيث k ثابت اختياري $\therefore y = \frac{1}{4}\left[1 - 2x + k^2 e^{-2x}\right],$

**مثال (٩):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$dy = (x+y)^2\, dx$$

**الحل:**

يمكن كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

بأخذ التعويض $z=x+y$ نجد أن $\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx}$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=1+y'=1+z^2$$
$$\therefore \left(1-\frac{dz}{dx}\right)=z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=z^2+1$$
$$\therefore \int\frac{dz}{1+z^2}=\int dx$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\tan^{-1}z=x+c \;\; \Rightarrow \;\; z=\tan\left(x+c\right),$$ حيث c ثابت اختياري

بالتعويض عن $z$ بـ $x+y$ نحصل على

$$y=\left[\tan\left(x+c\right)\right]-x$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة المعطاة في الصورة الصريحة.

## ٣/١/٢-حل المعادلة التفاضلية المتجانسة:

**تعريف (١):** يقال أن الدالة $f\left(x,y\right)$ أنها دالة متجانسة من الدرجة n في المتغيرين $x,y$ إذا كانت لكل عدد حقيقي $\lambda$ يكون

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^n f\left(x,y\right)$$

**وأمثلة ذلك:**

أ- الدالة $f\left(x,y\right)=ax^2+by^2+cxy$ دالة متجانسة من الدرجة الثانية حيث

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=\lambda^2 f\left(x,y\right)$$

ب- الدالة

$$f\left(x,y\right)=e^{\frac{y}{x}}+\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

دالة متجانسة من درجة صفر لأن

$$f\left(\lambda x,\lambda y\right)=e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\tan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)\lambda^0 f\left(x,y\right)$$

ج- ولكن الدالة $f\left(x,y\right)=x^2+y$ دالة غير متجانسة

إذا وضعنا $y=xz$ فان أي دالة متجانسة من درجة n يمكن كتابتها في الصورة

$$f\left(x,y\right)=f\left(x,xz\right)=x^n f\left(1,z\right)$$

وهذا التعويض يبين أن الدالة المتجانسة $f\left(x,y\right)$ يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب $x^n$ وهي دالة في x و $f\left(1,z\right)$ والتي هي دالة في z فقط.

**تعريف (٢):** يقال أن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi\left(x,y\right)}{-\psi\left(x,y\right)}\quad or\quad \varphi\left(x,y\right)dx+\psi\left(x,y\right)dy=0$$

أنها متجانسة إذا كان $\varphi\left(x,y\right),\psi\left(x,y\right)$ دالتين متجانستين ومن نفس الدرجة.

ولإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة نضع

$$dy=xdz+zdx,\quad y=xz$$

وإذا كانت $\varphi,\psi$ متجانسة من درجة n فإن

$$\varphi=x^n\varphi\left(1,z\right)=x^n p\left(z\right)$$
$$\psi-x^n\psi\left(1,z\right)=x^n Q\left(z\right)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية $\varphi dx+\psi dy=0$ نحصل على

$$x^n P\left(z\right)dx+x^n Q\left(z\right)\left(zdx+xdz\right)=0$$

أو في الصورة

$$\left[P\left(z\right)+zQ\left(z\right)\right]dx+xQ\left(z\right)dz=0$$

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة بطريقة فصل المتغيرات ويكون حلها العام هو

$$\int \frac{Q(z)}{P(z)+zQ(z)}dz = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

حيث $c$ ثابت اختياري وبعد إجراء عملية التكامل نضع $z = \frac{y}{x}$ أي أنه بالتعويض عن $y = x\,z$ تؤول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية في $x\,,\,z$ يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,y}{x^2 - y^2}$$

**الحل:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\;y}{x^{2} - y^{2}} = \frac{\varphi(x\,,y)}{\psi(x\,,y)}$$

$$\therefore \varphi(x\,,y) = x\;y$$

$$\therefore \varphi(\lambda x\,,\lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2\,\varphi(x\,,y)$$

$$\therefore \varphi(x\,,y) = x\;y$$

$$\therefore \psi(\lambda x\,,\lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2\,\psi(x\,,y)$$

وبذلك تكون المعادلة متجانسة لحلها

بقسمة كل من البسط والمقام على $x^2$ نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

بوضع $v = \frac{y}{x}$ والتعويض عن $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$ نحصل على

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^3}{1-v^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$\int\left(\frac{1}{v^{3}}-\frac{1}{v}\right)dv-\int\frac{dx}{x}=\ln\frac{1}{k}$$

$$\therefore -\frac{1}{2}v^{2}-\ln v-\ln x=-\ln k\,,\quad k>0$$

$$\therefore \frac{1}{2}v^{2}=\ln\left(\frac{k}{vx}\right)$$

$$\therefore v^{2}=\ln\left(\frac{vx}{k}\right)^{2}$$

بوضع $v=\frac{y}{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y^{2}=x^{2}\ln\left(\frac{y}{k}\right)^{2}$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

**الحلـ:**

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(2x+y)dx+(2ye^{\frac{y}{x}}-x)dy=0;\quad y=xv$$

$$\therefore (2x+xv)dx+(2xve^{v}-x)\left(vdx+xdv\right)=0$$

بفصل المتغيرات واجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)e^{\left(\frac{y}{x}\right)}}$$

واضح أن المعادلة متجانسة.

بوضع $v=\frac{y}{x}$ والتعويض عن $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ ، نجد أن

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2\left(1+v^2e^v\right)}{1-2ve^v}$$

بفصل المتغيرات والتكامل، نحصل على

حيث c ثابت اختياري $$k\,x^2\left(e^{-v}+v^2\right)=1$$

بوضع $v=\frac{y}{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y^2+x^2e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}=a,\qquad a=\frac{1}{k}.$$

لاحظ أن الحل في الصورة الضمنية ومن الصعب الحصول عليه في الصورة الصريحة $y=f(x)$.

**مثال (٣):** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y-x)dx-xdy=0$$

**الحل:**

$$\varphi(x,y)=y-x,\quad \varphi(\lambda x,\lambda y)=\lambda y-\lambda x=\lambda(y-x)=\lambda\varphi(x,y)$$
$$\psi(x,y)=-x,\quad \psi(\lambda x,\lambda y)=-\lambda x=\lambda\psi(x,y)$$

نضع

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$(xz - x)dx - x(xdz + zdx) = 0$$
$$\therefore (z-1)dx - (xdz + zdx) = 0$$
$$\therefore dz = -\frac{dx}{x}$$
$$\therefore z = c - \ln x \ \ or \ \ y = x(c - \ln x)$$

**مثال (٤):** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

**الحل:**

بوضع المعادلة على الصورة الآتية:

$$y^2 dx - (xy - x^2)dy = 0$$

بوضع $y = xz$ لأن كلا من البسط والمقام دوال متجانسة من الدرجة الثانية إذن

$$\varphi(x,y) = y^2, \qquad \varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 y^2 = \lambda \varphi(x,y)$$
$$\psi(x,y) = -(xy - x^2), \quad \psi(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda^2 xy - \lambda^2 x^2) = \lambda^2 \psi(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = \frac{x^2y^2}{x^2z - x^2} = \frac{z^2}{z-1}$$
$$\therefore x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z-1} - z = \frac{z}{z-1}$$

بفصل المتغيرات يكون

$$\frac{z-1}{z}dz=\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\left(1-\frac{1}{z}\right)dz=\frac{dx}{x}$$

$$\therefore z-\ln z=\ln x+\ln c$$

$$z=\ln cxz \qquad or \qquad e^{z}=cxz$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$\therefore e^{y/x}=cy$$

**مثال (٥):** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(y^{2}-yx\right)dx+x^{2}dy=0$$

**الحل:**

نلاحظ أن هذه المعادلة ليست ذات متغيرات قابلة للفصل ولكنها معادلة تفاضلية متجانسة.

نضع $y=xz$

$$\therefore\left(x^{2}z^{2}-x^{2}z\right)dx+x^{2}\left(zdx+xdz\right)=0 \tag{1}$$

بقسمة طرف المعادلة (١) على $x^{2}$ تصبح المعادلة (1) في الصورة

$$z^{2}dx+xdz=0$$

$$\therefore\frac{dz}{z^{2}}+\frac{dx}{x}=0$$

بإجراء التكامل نحصل على

$$-z^{-1}+\ln|x|=\ln c, \qquad c>0$$

$$\therefore -\frac{x}{y}+\ln|x|=\ln c$$

أو

$$y=\frac{x}{\ln\left(x/c\right)}$$

## ٤/١/٢-معادلات تفاضلية يمكن تحويلها إلى معادات متجانسة:

إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0 \qquad (1)$$

فإنه يمكن تحويلها إما إلى معادلة تفاضلية متجانسة أو معادلة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات

(أ) إذا كان $a_1b_2 \neq a_2b_1$ فيكون في هذه الحالة المستقيمان $a_1x+b_1y+c_1=0,$ $a_2x+b_2y+c_2=0$ متقاطعان.

نفرض أن نقطة التقاطع هي $(\alpha,\beta)$ نضع

$$x=X+\alpha, \qquad y=Y+\beta$$

وفيها

$$dx=dX\ , \quad dy=dY$$

هذا التعويض يختزل المعادلة التفاضلية (1) إلى معادلة تفاضلية متجانسة في الصورة

$$(a_1X+b_1Y)dX+(a_2X+b_2Y)dY=0$$

والتي يمكن حلها مثل النوع السابق باستخدام التعويض $Y = XZ$ ثم نستبدل المتغيرات الجديدة $X, Y$ بالمتغيرات الأصلية $x, y$

(ب) إذا كان $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ أو $a_1b_2=a_2b_1$ أي أن المستقيمين $a_1x+b_1y+c_1=0,$ $a_2x+b_2y+c_2=0$ متوازيان وفي هذه الحالة نستخدم التعويض

$$a_1x+b_1y=u$$

ينتج أن

$$dy=\frac{du-a_1dx}{b_1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نجد أنها تتحول إلى معادلة تفاضلية يمكن فيها فصل المتغيرات.

(ج) المعادلة التفاضلية التي في الصورة

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

بحيث $a_1b_2\neq a_2b_1$ فيمكن حلها كما في (أ)

(د) المعادلة التفاضلية التي في الصورة

$$\frac{dy}{dx}=F\left(ax+by+c\right)$$

تتحول إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات باستخدام التعويض

$$\therefore z=ax+by+c$$

**مثال (١)**: أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$$

**الحلـ:**

حيث أن

$$a_1=1,\ b_1=-1,\ c_1=1,\ \ a_2=1,\ b_2=1,\ c_2=-3$$
$$\therefore\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=-1$$

فإن الخطان متقاطعان

بحل المعادلتين $x+y-1=0$ ، $x-y+1=0$ نجد أن نقطة التقاطع هي $(1,2)$.

بوضع $y=Y+2$ $\quad x=X+1,$ نجد أن $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dY}{dX}$

وتتحول المعادلة إلي الصــورة $\frac{dY}{dX}=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$ وهى معادلة متجانســة. وباســتخدام التعويض $Y=vX$ نجد أن $\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$ وتتحول المعادلة إلي الصورة

$$X\frac{dv}{dX}=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\left(1-2v-v^2\right)X^2=c_1$$

بوضع $v=\frac{Y}{X}$ نجد أن

$$\left(X^2-2XY-Y^2\right)=c_1$$

بوضع $X=x-1,\ \ Y=y-2$ في المعادلة السابقة نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة على الصورة $x^2-2xy-y^2+2x+6y=c$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y-3}{2x-4y+5}$$

**الحل:**

حيث أن

$$a_1=-1, b_1=2, c_1=3,\ \ a_2=2, b_2=-4, c_2=5$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{2},\quad \frac{b_1}{b_2}=-\frac{1}{2}$$

وحيث أن $a_1b_2=a_2b_1=4$ ، فإن المســتقيمان $-x+2y-3=0,\quad 2x-4y+5=0$ متوازيان.

لذلك يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y-3}{-2(x+2y)+5}$$

بأخذ التعويض $z=-x+2y$ نجد أن

$$\frac{dz}{dx}=-1+2\frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1+\frac{dz}{dx}).$$

وتتحول المعادلة إلى الصورة

$$\frac{1}{2}(1+\frac{dz}{dx})=\frac{z-3}{-2z+5}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{4z-11}{-2z+5} \qquad (1)$$

و المعادلة (1) يسهل فصل متغيراتها

$$\therefore \int \frac{2z-5}{4z-11}dz+\int dx=c$$

حيث c ثابت اختياري

لاجراء التكامل $\int \frac{2z-5}{4z-11}dz$ نجري عملية القســـمة المطولة أولاً ثم نوجد التكامل فينتج أن

$$\therefore \frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{4}\ln(4z-11)\right]+x=c$$

بالتعويض عن $z=-x+2y$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة يكون على الصورة

$$4x+8y+\ln(8y-4x-11)=k, \qquad k=8c.$$

**مثال (٣):** اوحد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-3}{x+y-1}$$

**الحلـ:**

حيث أن $a_1b_2 \neq a_2b_1$ إذن المستقيمان متقاطعان في النقطة $(\alpha, \beta)$ والتي يمكن إيجادها بحل

$$x - y - 3 = 0 \qquad (1)$$

$$x + y - 1 = 0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين نحصل على $2x - 4 = 0 \therefore x = 2$ وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن $y = -1$ فنحصل على $\alpha = 2, \beta = -1$ بوضع $x = X + 2$ و $y = Y - 1$ تتحول المعادلة التفاضلية المعطاة إلى المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

نستخدم التعويض $Y = Xz$ لنجد أن

$$\frac{dY}{dX} = X\frac{dz}{dX} + z$$

$$\therefore z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1-z}{1+z} \therefore X\frac{dz}{dX} = -\frac{z^2 2z - 1}{1+z}$$

بالتكامل

$$\int \frac{dX}{X} = -\int \frac{1+z}{z^2 + 2z - 1} dz$$

$$\therefore \ln X + \frac{1}{2}\left(z^2 + 2z - 1\right) = \ln c$$

$$or \ \ln X^2\left(z^2 + 2z - 1\right) = \ln c^2$$

$$X^2\left(z^2 + 2z - 1\right) = c^2$$

$$\therefore Y^2 + 2XY - X^2 = c^2$$

بدلالة $x, y$ يكون الحل العام هو

$$\therefore (y+1)^2 + 2(x-2)(y+1) - (x-2)^2 = c^2$$

**مثال (٤):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 1}{x - 2y + 3}$$

**الحل:**

واضح أن $a_1b_2 = a_2b_1$ وبأخذ $x - 2y = u$ ، إذن

$$1-2\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد إن

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right) = \frac{u+1}{u+3}$$

$$-\frac{du}{dx} = \frac{2u+2}{u+3} - 1 = \frac{2u+2-u-3}{u+3} = \frac{u-1}{u-3}$$

بفصل المتغيرات يكون

$$dx = -\frac{u+3}{u-1}du$$

وبالتكامل

$$x = -\int\left(1+\frac{4}{u-1}\right)du + c$$

$$= -u - 4\ln|u-1| + c$$

$$2x - 2y + 4\ln|x-2y-1| = c$$

**مثال (٥):** حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = (2\chi - y + 1)^2 - 2$$

**الحل:**

نضع

$$z = 2x - y + 1$$

إذن

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

**(يترك تكملة الحل للقاريء)**

## ٥/١/٢- المعادلات التفاضلية التامة: (Exact differential equation)

**تعريف:** المعادلة التفاضلية التالية

$$\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

تكون معادلة تامة لدالة $F(x,y)=c$ إذا كانت $\varphi, \psi$ مرتبطتين بدالة $F(x,y)$ بالمعادلات

$$\varphi(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \psi(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$$

أى أنه توجد دالة $F(x,y)$ بحيث $F(x,y)=c$

$$F(x,y)=\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dx \qquad (2)$$

وعلى هذا فان حلها هو

$$\therefore dF=0$$

ومن ثم فإن $F(x,y)=c$

إذا كانت $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ ومشتقاتها

$$\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

دوال متصلة نجد أن $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2F}{\partial y\,\partial}=\frac{\partial^2F}{\partial\varphi\,\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$

**نظرية:** إذا كانت $\varphi, \psi$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ جميعها دوال متصلة في $x$ , $y$ فان الشرط الضروري والمكافئ لكى تكون المعادلة التفاضلية $\varphi dx+\psi dy=0$ تامة هو

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

**البرهان:**

نفرض أن الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية

$$\varphi(x,y)dx+\Psi(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

هو تفاضل تام للدالة $F(x,y)$ أي أن

$$\varphi dx+\psi dy=dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$\therefore \varphi=\frac{\partial F}{\partial x}\ ,\ \psi=\frac{\partial F}{\partial y} \qquad (2)$$

بتفاضل العلاقة الأولي من (2) بالنسبة إلى y والثانية بالنسبة إلى $x$ نحصل على

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

ومنها نجد أن

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

وبذلك نكون قد برهنا أن الشرط ضروري

ولكن نبين أن الشرط كافي افرض أن الشرط تحقق وسوف نجد الدالة $F(x,y)$ بحيث يكون

$$dF=\varphi\,dx+\psi dy$$

نبحث عن الدالة $F(x,y)$ والتي تحقق الشرط الأول من (2) وذلك بتكاملها بالنسبة إلى $x$ (بفرض أن y ثابت) فنحصل على

$$F(x,y)=\int\varphi(x,y)dx+g(y) \qquad (3)$$

حيث A (y) دالة اختيارية في y سوف نختار g (y) بحيث أن التفاضل الجزئي للدالة $F(x,y)$ بالنسبة إلى $y$ يساوي $\psi(x,y)$ أي أن

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi(x,y)dx+A'(y)=\psi(x,y)$$

ومنها يكون

$$A'(y)=\psi(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi(x,y)dx \qquad (4)$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة لا يعتمد على $x$ وبالتالي $x$ لا تدخل في الطرف الأيمن أيضا، سوف نوضح أن التفاضل الجزئي للطرف الأيمن بالنسبة إلى $x$ من المعادلة (1) يكون مساويا للصفر.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right)&=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right)\\&=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right)\\&=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\end{aligned}$$

بتكامل المعادلة (4) بالنسبة إلى y يكون لدينا

$$A(y)=\int\left[\psi-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right]dy+c$$

حيث c ثابت التكامل.

بالتعويض عن قيمة A(y) في المعادلة (1) نجد أن الدالة $F$ تعطى في الصورة

$$F(x,y)=\int\varphi dx+\int\left[\psi-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right]dy+c$$

والتي تفاضلها التام هو $\varphi dx+\psi dy$

**مثال (٦):** اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة وأوجد حلها

$$(2xy-y)dx+(x^2-x)dx=0$$

**الحل:**

$$\varphi = 2xy - y, \qquad \psi = x^2 - x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x - 1, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x - 1$$

لذلك فالمعادلة تامة

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

اجراء التكامل على $\varphi$ أو على $\psi$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi = 2xy - y$$

$$\therefore F = \int (2xy - y)dx = x^2 y - xy + A(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi = x^2 - x = x^2 - x + A'(y)$$

أى أن

$$g'(y) = 0$$

أو

$$g(y) = a$$

ويكون الحل العام هو

$$x^2 - xy = c$$

**ملحوظة:** لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة نكامل $\varphi$ بالنسبة إلى $x$ مع اعتبار $y$ ثابتة وتكامل $\psi$ التى لا تحتوى على $x$ بالنسبة إلى $y$ ونضيف التكاملين وتساوى الناتج بمقدار ثابت. أو تكامل $\psi$ بالنسبة إلى $y$ مع اعتبار $x$ ثابتة وتكامل حدود $\varphi$ التى لا تحتوى على $y$ بالنسبة إلى $x$ وتساوى مجموع التكاملين بمقدار ثابت. أو تكامل $\varphi$ بالنسبة إلى $x$ وتكامل $\psi$ بالنسبة إلى $y$ ونضيف التكاملين بحيث لا تدرج الحدود المتشابهة فى التكامل الا مرة واحدة وتساوى الناتج بمقدار ثابت. وهذا صحيح اذا كانت $\varphi$ ، $\psi$ كثيرة الحدود فى $x, y$.

**مثال (٧):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(2x+3\cos y)dx+(2y-3x\sin y)dy=0$$

**الحل:**

$$\varphi=2x+3\cos y,\quad \psi=2y-3x\sin y$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-3\sin y=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية تامة

$$\because \frac{\partial F}{\partial x}=2x+3\cos y$$
$$\therefore F(x,y)=\int(2x+3\cos y)dy+A(y)$$
$$=x^2+3x\cos y+A(y)$$

بالتفاضل جزئيا بالنسبة إلى $y$ نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-3x\sin y+A'(y)=2y-3x\sin y$$
$$\therefore \frac{dA}{dy}=2y\Rightarrow A(y)=y^2$$
$$\therefore F(x,y)=x^2+3x\cos y+y^2=c$$

الحل العام هو

$$x^2+3x\cos y+y^2=c$$

**طريقة أخرى:**

$$\int\varphi dx=\int(2x+3\cos y)dx=x^2+3x\cos y$$
$$\int\Psi dx=\int(2x-3\sin y)dy=y^2+3x\cos y$$

بجمع التكاملين بحيث لا يدرج الحد المكرر الا مرة واحدة نحصل على الحل العام في صورة

$$x^2+3x\cos y+y^2=c$$

**مثال (٨):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(y\cos xy+e^{x}\right)dx+\left(x\cos xy-2ye^{y^{2}}\right)dy=0$$

$$\varphi=y\cos xy+e^{x},\ \psi=x\cos xy-2ye^{y^{2}}$$

**الحل:**

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\cos xy-xy\sin xy,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\cos xy-xy\sin xy$$

المعادلة تامة لأن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\int\left(y\cos xy+e^{x}\right)dx=\sin xy+e^{x}$$

$$\int\left(x\cos xy-2ye^{y^{2}}\right)dy=\sin xy-e^{y^{2}}$$

الحل العام هو:

$$\sin xy+e^{x}-e^{y^{2}}=c$$

### ٦/١/٢- معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات تامة:

المعادلة التفاضلية $\left(2y-4x^{2}\right)dx+xdy=0$ غير تامة ولكن بضربها في الدالة $\mu(x)=x$ تصبح المعادلة في الصورة

$$\left(2xy-4x^{3}\right)dx+x^{2}dy=0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة وحلها العام هو

$$x^{2}y-x^{4}$$

في هذا المثال الدالة $\mu(x)=x$ تسمى بالعامل المكامل للمعادلة التفاضلية الأصلية لأنه بضربها في هذا العامل تصبح معادلة تفاضلية تامة يمكن إيجاد الحل العام لها، أي أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية:

$$\varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

غير تامة فإنه يوجد عامل مكامل $\mu = \mu(x, y)$ بحيث

$$\mu\varphi\, dx + \mu\psi\, dy = 0 \qquad (2)$$

تصبح معادلة تامة.

**إيجاد المعامل المكامل:**

المعادلة (2) معادلة تفاضلية تامة بعد ضربها في المعامل المكامل $\mu$ وعليه فإن:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu\psi)$$

أي أن

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

أو

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = \psi\frac{\partial\mu}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\mu}{\partial y} \qquad (3)$$

من هذه المعادلة التفاضلية الجزئية يمكن تعيين العامل المكامل $\mu$ وحل هذه المعادلة في الحالة العامة قد يكون بالغ الصعوبة إلا انه في بعض الحالات الخاصة مثل $\mu = \mu(x)$ أو $\mu = \mu(y)$.

قد يمكن الحصول على العامل المكامل. وسوف ندرس هاتين الحالتين الخاصتين:

### ١/٦/١/٢- إذا كانت $\mu$ دالة في $x$ فقط:

حيث أن $\mu = \mu(x)$ فإن

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$$

وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\psi\,\frac{\partial\mu}{\partial x}=\psi\,\frac{d\,\mu}{dx}$$

ومنها

$$\frac{1}{\mu}d\,\mu=\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx$$

ومعامل التكامل هو

$$\mu=e^{\int\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx}$$

## ٢/٦/١/٢- إذا كانت $\mu$ دالة في $y$ فقط:

في هذه الحالة المعادلة (3) تأخذ الصورة

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-\varphi\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

ومنها

$$\frac{d\,\mu}{\mu}=-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dy$$

ويكون العامل المكامل هو

$$\mu=e^{-\int\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy}$$

**مثال (١):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1-xy)dx+\left(xy-x^{2}\right)dy=0$$

**الحل:**

$$\varphi = 1 - xy\,, \qquad \psi = xy - x^2$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x\,, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = y - 2x$$
$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية المعطاة غير تامة

$$\therefore \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{x - y}{xy - x^2} = -\frac{1}{x}$$

إذن فإنه يكون العامل المكامل دالة في $x$ بضرب طرفي المعادلة التفاضلية في $\mu$ حيث $\mu = \mu(x)$ يكون

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = x^{-1}$$

$$\mu(1 - xy)dx + \mu\left(xy - x^2\right)dy = 0$$

$$\left(x^{-1} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

ويكون

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -1$$
$$\therefore \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x}$$

وهي معادلة تفاضلية تامة.

إذن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(1 - xy)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(xy - x^2\right)\right]$$
$$\therefore -\mu x = \mu(y - 2x) + \left(xy - x^2\right)\frac{d\mu}{dx}$$

$$\therefore (y-x)\mu dx + x(y-x)d\mu = 0$$

$$\therefore \mu dx + xd\mu = 0 \therefore \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \ln\mu = -\ln x \;\therefore \mu = \frac{1}{x}$$

وبضرب طرفي المعادلة التفاضلية المطلوب إيجاد حلها العام في هذا العامل المكامل تصبح

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y-x)dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة حلها العام هو

$$\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = c$$

**مثال (٢):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0$$

**الحل:**

$$\varphi = y + xy^2, \qquad \psi = -x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 + 2xy\,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -1$$

إذن المعادلة غير تامة لأن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ولكن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2 + 2xy = 2(1+xy)$$

$$\therefore -\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = -\frac{2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

$$\therefore \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$$

إذن

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}}{\varphi}=\frac{2+2xy}{y+xy^2}=\frac{2}{y}$$

إذن العامل المكامل دالة في y أي أن $\mu=\mu(y)$.

المعادلة

$$\mu\left(y+xy^2\right)dx-\mu x\,dy=0$$

تامة أي أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(y+xy^2\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\mu x\right]$$

$$\mu\left[1+2xy\right]+\left(y+xy^2\right)\frac{d\mu}{dy}=-\mu$$

$$\therefore 2\mu+\frac{y\,d\mu}{dy}=0 \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dy}{y}$$

$$\ln\mu=-2\ln y \Rightarrow \mu=1/y^2$$

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية في $\mu=1/y^2$ يكون

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

تصبح المعادلة تامة وبالتالي يمكن حلها كما سبق فنحصل على

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=c$$

**مثال (٣):** اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(x^2+y^2+x\right)dx+xydy=0$$

**الحل:**

$$\varphi = x^2 + y^2 + x,\ \psi = xy, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y - y = y$$

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

∴ العامل المكامل دالة في $x$ فقط، ويكون العامل المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx} e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب المعادلة التفاضلية بهذا العامل المكامل لنحصل على معادلة تفاضلية تامة هي

$$\left(x^2 + xy^2 + x\right)dx + x^2 y dy = 0$$

وحلها العام هو

$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c$$

## ٢/١/٧-المعادلة التفاضلية الخطية: (Linear differential equation)

تكون المعادلة التفاضلية التي من الرتبة الأولي خطية إذا كانت $y', y$ من الدرجة الأولي.
والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي هي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \qquad (2)$$

حيث $Q, P$ دالتان متصلتان ولهذه المعادلة التفاضلية الخطية أهمية كبيرة في الرياضيات البحتة والتطبيقية. ولحل هذه المعادلة نعيد كتابتها على الصورة

$$dy + \left(Py - Q\right)dx = 0$$

$$\varphi(x, y) = Py - Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = P(x), \; \psi(x, y) = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] = P(x)$$

$$\therefore \frac{1}{\psi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] = P(x)$$

وهذه المعادلة غير تامة وعامل المكامل لها دالة في $x$. بضرب هذه المعادلة في عامل المكامل $\mu = \mu\left(x\right)$ فتصبح

$$\mu dy + \left(\mu Py - \mu Q\right)dx = 0$$

وتكون هذه المعادلة تامة إذا تحقق الشرط:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu Py - \mu Q\right) \qquad \textbf{(3)}$$

$$\therefore \frac{d\mu}{dx} = \mu P$$

$$\therefore \ln \mu = P\int dx + c \qquad \textbf{(4)}$$

ويكون العامل المكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int p dx} \qquad (5)$$

من المعادلة (٤)، يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$\mu dy + y d\mu = \mu Q$$

ومنها

$$\frac{d}{dx}\left(\mu y\right) = \mu Q$$

بالتكامل

$$\mu y = \int \mu Q dx + c \qquad (6)$$

وبالتعويض عن $\mu = e^{\int P dx}$ نحصل على الحل العام في الصورة

$$y.e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c$$

**مثال (٤)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3$$

**الحل:**

هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى عاملها الكامل $\mu$ هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية هو

$$xy = \int x.x^3 dx + c$$

$$xy = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\therefore 5xy = x^5 + a, \quad a = 5c$$

**مثال (٥)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \operatorname{cosec}^2 x$$

**الحل:**

$$\mu = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

ويكون الحل العام هو

$$y \sin x = \int \sin x \operatorname{cosec}^2 x dx + c$$

$$= \int \operatorname{cosec} x dx + c = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$$

$$\therefore y = -\operatorname{cosec} x \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c \operatorname{cosec} x$$

**مثال (٦)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(x^4+2y\right)dx-xdy=0$$

**الحل:**

نعيد كتابة هذه المعادلة كما يلي

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^3$$

وهي معادلة تفاضلية خطية معاملها المكامل هو

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

والحل العام هو

$$y.\frac{1}{x^2}=\int x^3\frac{1}{x^2}dx+c$$
$$=\frac{x^2}{2}+c\Rightarrow y=\frac{x^4}{2}+cx^2$$
$$\therefore 2y=x^4+c^*x^2,\quad c^*=2c$$

**مثال (٧)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dy}+x\sec y=\cos^2 y$$

**الحل:**

$$\mu=e^{\int\sec y dy}=e^{\ln(\sec y+\tan y)}$$
$$=\sec y+\tan y$$

∴ الحل العام هو

$$x\left(\sec y+\tan y\right)=\int\cos^2 y\left(\sec y+\tan y\right)dy+c$$
$$=\int\left(\cos y+\sin y\cos y\right)dy+c$$
$$=\sin y+\frac{1}{2}\sin^2 y+c$$

## ٨/١/٢- معادلة برنولى التفاضلية: (Bernoulli differential equation)

الصورة العامة لهذه المعادلة في الصورة

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n} \qquad (1)$$

حيث $Q$ ,$p$ دوال متصلة معلومة في $x$ فقط وأن n عدد حقيقي لا يساوي صفر أو الواحد الصحيح، إذا كانت $n=0$ فإن المعادلة (1) تكون معادلة خطية وعندما $n=1$ فإنها تكون معادلة تفاضلية يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات لذا سنفرض أن $n\neq 0,\ n\neq 1$ ولتحويل معادلة بروناي إلى معادلة خطية نتبع الآتي

١- نقسم طرفي المعادلة (1) على $y^{n}$ فتصبح

$$\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^{n-1}}P=Q$$

$$\therefore y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P=Q$$

٢- نضع $z=y^{1-n}$ إذن

$$\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}+(1-n)zp=(1-n)Q$$

وهذه المعادلة خطيه عاملها المكامل $\mu$ هو

$$\mu=e^{\int(1-n)pdx}$$

وحلها العام هو

$$\mu z=(1-n)\int \mu Qdx+c$$

ويكون الحل العام لمعادلة برنوللى هو

$$\mu y^{1-n}=\int(1-n)\mu Qdx+c$$

**مثال (٨)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^{2}\ln x$$

**الحل:**

بالقسمة على $xy^{2}$ تصبح المعادلة في الصورة

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy}=\frac{\ln x}{x}$$

نضع $z=y^{-1}$ ومنها

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y^{2}}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x}=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=-\frac{\ln x}{x}$$

وهذه المعادلة خطيه عاملها المكامل هو $\mu=e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x}$

$$\therefore\frac{1}{x}z=-\int\frac{1}{x^{2}}\ln x\,dx+c$$

باجراء التكامل بالتجزيء نحصل على

$$\frac{1}{x}z=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة هو

$$\therefore\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+c$$

*or*

$$\frac{1}{y}=\ln x+cx+1$$

**مثال (٩)**: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$$

**الحل:**

بالقسمة على $y^3$

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y^2}=x^3$$

نضع $z=y^{-2}$ إذن $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\frac{-1}{2}\frac{dz}{dx}+xz=x^3 \therefore \frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$$

$$\therefore \mu=e^{\int -2x dx}=e^{-x^2}$$

$$\therefore e^{-x^2}z=-2\int x^3e^{-x^2}dx+c=-2\int x^2\left(xe\right)^{-x^2}dx+c$$

$$\therefore e^{-x^2}z=-2\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\int x^3e^{-x^2}dx\right]+c$$

$$=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c$$

الحل العام هو

$$\frac{e^{-x^2}}{y^2}=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c$$

$$\therefore y^2=\frac{1}{x^2+1+ce^{x^2}}$$

## ٩/١/٢-معادلة ريكاتي: (Ricati's equation)

الصورة القياسية لهذه المعادلة هي:

$$y'=p\left(x\right)y^2+q\left(x\right)y+r\left(x\right)$$

حيث $p(x), q(x), r(x)$ دوال معلومة في $p(x) \neq 0, x$

يمكن حل هذه المعادلة إذا علم أي حل خاص $y = y_1$

باستخدام التعويض $y = y_1 + \frac{1}{z}$ حيث z متغير تابع جديد تتحول معادلة ريكاتي إلى المعادلة الخطية الآتية

$$\frac{dz}{dx} + (2py_1q)z + p = 0$$

## ٢/١/١٠- تمارين

١- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2y' = (x-1)(y^2 - x^{'}) + 2xy$$

علماً بأن $y = x$ يمثل حلاً للمعادلة

٢-أوجد حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$$

٣- أوجد حل المعادله التفاضليه الآتيه

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 3x^{2e^{-x}}$$

٤- أوجد حل المعادلة التفاضليه

$$\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x + y^3 = 0$$

٥- أوجد حل المعادلة التفاضليه

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 linx$$