الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجات العليا

Differential Equations from First Order and Higher Degrees

لقد بينا في الفصل الثاني أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي يمكن كتابتها في الصورة:

$$f\left(x,y,y'\right)=0$$

ومن المعتاد في مثل هذا النوع من المعادلات أن نرمز للمشتقة الأولي y' بالرمز P، فحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة النونية سوف نقدمها في هذا الباب وفي كل حالة سنعود لحل معادلة أو عدة معادلات من الرتبة الأولى أو الدرجة الأولى.

١/٣-معادلات قابلة للحل في P:

نعتبر أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة n يمكن كتابتها في الصورة

$$A_n\left(x,y\right)y^{(n)}+A_{n-1}\left(x,y\right)y^{(n-1)}+\ldots+A_0\left(x,y\right)=0 \qquad (1)$$

وإذا اعتبرنا أن الطرف الأيسر من هذه المعادلة على أنه كثيرة حدود في P من الدرجة n فإذا أمكن حلها بالنسبة إلى P فإن

$$A_n\left(P-\varphi_1\right)\left(P-\varphi_2\right)\ldots\left(P-\varphi_n\right)=0,\quad P=\frac{dy}{dx}$$

حيث $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ دوال للمتغيرين $x\,,y$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\varphi_1\left(x,y\right),\frac{dy}{dx}=\varphi_2\left(x,y\right),\ldots,\frac{dy}{dx}=\varphi_n\left(x,y\right)$$

وهذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى قد يمكن حلها بإحدى الطرق السابق ذكرها في الباب الثاني نفرض أن حلول هذه المعادلات على الصورة

$$f_1\left(x,y,c\right)=0,f_2\left(x,y,c\right)=0,\ldots,f_n\left(x,y,c\right)=0$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$f_1\left(x,y,c\right).f_2\left(x,y,c\right)\ldots f_n\left(x,y,c\right)=0$$

وهو يحتوي على ثابت اختياري واحد لأن المعادلة من الرتبة الأولى.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2P^2 + 3xyP + 2y^2 = 0, \quad P = y'$$

الحلـ:

بالتحليل نجد أن

$$(xP + y)(xP + 2y) = 0$$

$$\therefore xP + y = 0 \qquad or \quad xP + 2y = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad or \quad x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad or \quad 2\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\therefore \ln x + \ln y = \ln c \qquad or \quad 2\ln|x| + \ln|y| = \ln c$$

$$xy = c \qquad or \quad x^2y = c, \quad c > 0$$

∴ الحل المطلوب يكون في الصورة

$$(xy - c)(x^2y - c) = 0$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$$

الحلـ:

بوضع $y' = P$

إذن $P^2 - 2xP + x^2 - y^2 = 0$

بالتحليل يكون

$$\left[P-(x+y)\right]\left[P+y-x\right]=0$$
$$\therefore P-x-y=0 \quad or \quad P+y-x=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}-y=x \quad or \quad \frac{dy}{dx}+y=x$$
$$\therefore \mu_1=e^{-x}, \qquad \mu_2=e^{x}$$
$$ye^{-x}=\int xe^{-x}dx+c, \quad ye^{x}=\int xe^{x}+c$$
$$\therefore y-ce^{x}+x+1=0 \quad or \quad y-ce^{-x}-x+1=0$$

$\therefore$ الحل العام هو

$$\left(y-ce^{x}+x+1\right)\left(y-ce^{-x}-x+1\right)=0$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$P^2+2P\cosh x+1=0$$

الحل:

$$P=\frac{-2\cosh x\pm\sqrt{4\cosh^2 x-4}}{2}=\frac{-2\cosh x\pm 2\sqrt{\cosh^2 x-1}}{2}$$
$$=\cosh x\pm\sinh x$$
$$\therefore P=\frac{dy}{dx}=\cosh x+\sinh x=e^{x} \quad or \quad P=\cosh x+\sinh x=e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x} \;\therefore \int dy=\int e^{x}dx \;\therefore y=e^{x}+c$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{-x} \;\therefore \int dy=\int e^{-x}dx \;\therefore y=e^{-x}+c$$

$\therefore$ الحل العام هو

$$\left(y-e^{x}-c\right)\left(y+e^{-x}-c\right)=0$$

حيث c ثابت اختياري.

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y')^2 - 2y'\sinh x - 1 = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$P^2 - 2P\,sinh\,x - 1 = 0$$

$$\because\ sinh\,x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\therefore\ P^2 - P\left(e^{x} - e^{-x}\right) - 1 = 0 \qquad \therefore \left(P - e^{x}\right)\left(P - e^{-x}\right) = 0$$

$$\therefore P = e^{x} \quad or \quad P = -e^{-x}$$

$$\because P = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y = e^{x} + c, \qquad y = e^{-x} + c$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$\therefore \left(y - e^{x} + c\right)\left(y - e^{-x} + c\right) = 0$$

لاحظ أننا استخدمنا ثابت اختياري واحد، نظراً لأن المعادلة المعطاة من الرتبة الأولى.

مثال (٥): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$P^2 - (x + y)P + xy = 0$$

$$\therefore (P - x)(P - y) = 0$$

$$\therefore P = x \quad or \quad P = y$$

$$\because P = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + c_1, \quad y = c_1 e^x$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 + c\right)(y - ce^x) = 0, \quad c = -c_1$$

لاحظ أن كلا الحلين يحقق المعادلة الأصلية.

٢/٣- معادلات قابلة للحل في y:

في هذه الحالة تأخذ المعادلة التفاضلية الصورة

$$y = f(x, P) \qquad P = \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

وبالتفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{dP}{dx}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولي والدرجة الأولى في $x, P, \frac{dP}{dx}$.

بفرض أن حلها العام هو

$$P = \varphi(x, c) \qquad or \qquad x = \psi(P, c) \tag{3}$$

بحذف P بين المعادلتين (2)، (3) نحصل على

$$y = f(x, \varphi(x, c))$$

وهذا يعتبر الحل العام للمعادلة (2)، أما إذا لم يمكن حذف P بين المعادلتين (2)، (3) فإنه يمكن التعبير عن $x\,,y$ بدلالة P وتكون المعادلتين

$$x=\varphi(P,c),\quad y=f\left(\varphi(P,c),P\right)$$

هما المعادلات البارامترية للحل العام.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y=P+P^3$$

الحل:

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$\frac{dy}{dx}=P=\frac{dP}{dx}+3P^2\frac{dP}{dx}$$
$$\therefore P=\left(1+3P^2\right)\frac{dP}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int dx=\int\frac{1+3P^2}{P}dP+c$$
$$\therefore x=\ln P+\frac{3}{2}P^2+c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو المعادلتان البارامتريتان

$$x=\ln P+\frac{3}{2}P^2+c\qquad y=P+P^3$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$P^2-yP+x=0$$

الحل:

هذه المعادلة قابلة للحل في y لأنه يمكن كتابتها في الصورة

$$y = P + \frac{x}{P}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$P = \frac{dP}{dx} + \frac{1}{P} - \frac{x}{P^2}\frac{dP}{dx} \Rightarrow P - \frac{1}{P} = \left(1 - \frac{x}{P^2}\right)\frac{dP}{dx}$$

$$\therefore \frac{P^2-1}{P} = \left(1 - \frac{x}{P^2}\right)\frac{dP}{dx} \Rightarrow \left(\frac{P^2-1}{P}\right)\frac{dx}{dP} = 1 - \frac{x}{P^2}$$

$$or \quad \frac{dx}{dP} + \frac{x}{P\left(P^2-1\right)} = \frac{P}{P^2-1}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية معاملها المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{P\left(P^2-1\right)}dP} = e^{\int \left[\frac{1/2}{P-1} + \frac{\frac{1}{2}}{P+1} - \frac{1}{P}\right]dP}$$

باستخدام الكسور الجزئية لايجاد $\int \frac{1}{P\left(P^2-1\right)}dP$ نحصل على

$$\mu = e^{\ln\sqrt{P-1} + \ln\sqrt{(P+1)} - \ln P} = \frac{\sqrt{P^2-1}}{P}$$

وحلها العام هو:

$$\frac{\sqrt{P^2-1}}{P}x = \int \frac{dP}{\sqrt{P^2-1}} + c$$

$$\frac{\sqrt{P^2-1}}{P}x = \cosh^{-1}P + c \therefore x = \frac{P}{\sqrt{P^2-1}}\left[\cosh^{-1}P + c\right] \qquad (1)$$

$$\therefore y = P + \frac{x}{P} = P + \frac{1}{\sqrt{P^2-1}}\left(\cosh^{-1}P + c\right) \qquad (2)$$

المعادلتان (1)، (2) هي الحل البارامتري للمعادلة التفاضلية.

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^2 - 2xy' + y = 0$$

الحلـ:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$y = 2xP - P^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = P = 2x\frac{dP}{dx} + 2P - 2P\frac{dP}{dx}$$

وهذه المعادلة تؤول إلى الصورة

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P}{2(p-x)}$$

واضح أن هذه المعادلة ليست خطية في P ولكن إذا وضعناها على الصورة

$$\frac{dx}{dP} + \frac{2}{P}x = 2$$

نجد أنها معادلة خطية في x وعامل المكاملة لها هو

$$\mu = e^{\int \frac{2}{P}dP} = e^{2\ln P} = P^2$$

ويكون حلها العام هو

$$P^2 x = \int 2P^2 dP + c = \frac{2}{3}P^3 + c$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}P + \frac{c}{P^2} \qquad (2)$$

بالتعويض عن x من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على

$$y = \frac{1}{3}P^2 + \frac{2c}{P} \qquad (3)$$

بحذف P بين المعادلتين (2)، (3) نحصل على حل المعادلة المعطاة على الصورة

$$y = F(x)$$

مثال (٤): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$y = y'^5 + y'^3 + y' + 5$$

الحل:

بوضع $y' = P$ ، تتحول المعادلة إلى الصورة

$$y = P^5 + P^3 + P + 5 \tag{1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = P = \left(5P^4 + 3P^2 + 1\right)\frac{dP}{dx} \tag{2}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$x = \frac{5}{4}P^4 + \frac{3}{2}P^2 + \ln P + c \tag{3}$$

بحذف P بين المعادلتين (3) ,(1) نحصل على الحل العام للمعادلة في الصورة

$$y = F(x).$$

٣/٣-معادلات قابلة للحل في x:

إذا أمكن وضع المعادلة التفاضلية بحيث نحصل على x بدلالة y، P أي يمكن وضعها على الصورة

$$x = F(y, P), \qquad P = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة الى y بدلالة P

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial P}\frac{dP}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبحلها y بدلالة P.

$$y = \psi(P, c) \qquad (2)$$

وبالتعويض عن y في (2) نحصل على x بدلالة P في الصورة

$$x = F\left(\psi(P, c), P\right) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف P بين المعادلتين (2)، (3) قد يتعذر حذف P بين المعادلتين (2)، (3) للحصول على الحل العام فنكتفي بالمعادلتين (2)، (3) كمعادلتين باراميتريتين للحل العام.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x = 4P + 4P^3, \quad P = y'$$

الحل:

هذه المعادلة قابلة للحل في x بالتفاضل بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} = \left(4 + 12P^2\right)\frac{dP}{dy}$$
$$\therefore dy = \left(4P + 12P^3\right)dP$$
$$\therefore \int dy = \int\left(4P + 12P^3\right)dP$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore y &= 2P^2 + 3P^4 + c \\ x &= 4P + 4P^3 \end{aligned}\right\}$$

تسميان (المعادلتان البارامتريتان)

هاتان المعادلتان هما التمثيل البارامترى للحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y y'^2 - 2 x y' + y = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$y P^2 - 2x P + y = 0$$

$$\therefore x = \frac{y}{2P}\left(P^2 + 1\right) = \frac{1}{2} y \left(P + \frac{1}{P}\right) \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} = \frac{1}{2} y \left(1 - \frac{1}{P^2}\right)\frac{dP}{dy} + \frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{P}\right)$$

$$\therefore \frac{y}{P}\frac{dp}{dy} = -1$$

بفصل المتغيرات والتكامل ينتج أن

$$y = \frac{c}{P} \qquad (2)$$

بحذف P بين المعادلتين (2), (1) ينتج أن

$$y^2 = c\left(2x - c\right)$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة المعطاة.

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^3 - y' = x + 1$$

الحل:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$x = P^3 - P - 1 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{1}{P} = \left(3P^2 - 1\right)\frac{dP}{dy}$$

$$\therefore y = \int \left(3P^3 - P\right) dP + c$$

أي أن

$$y = \frac{3}{4}P^4 - \frac{1}{2}P^2 + c \qquad (2)$$

بحذف p بين المعادلتين $(2)\,,(1)$ نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة في الصورة

$.\,y = f\left(x\right)$

٣/٤- معادلة دالمبرت (D'Alembert equation)

تعتبر معادلة دالمبرت حالة خاصة من معادلة دالبرت

$$y = xg\left(P\right)+f\left(P\right),\quad g\left(P\right)\neq P \qquad (7)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$P = g\left(P\right)+\left[xg'\left(P\right)+f'\left(P\right)\right]\frac{dP}{dx}$$

بالقسمة على $\frac{dP}{dx}\neq 0$ نجد أن:

$$\left[g\left(P\right)-P\right]\frac{dx}{dP}+g'\left(P\right)x+f'\left(P\right)=0$$

أو

$$\frac{dx}{dP}+\frac{g'\left(P\right)}{g\left(P\right)-P}x=-\frac{f'\left(P\right)}{g\left(P\right)-P} \qquad (8)$$

هذه معادلة تفاضلية خطية يمكن حلها بالطرق السابق ذكرها في الباب الثاني حيث μ عامل مكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{g'(V)}{g(P)-P}dP}$$

ويكون الحل العام للمعادلة (8) هو

$$\mu x = -\int \frac{f'(P)}{g(P)-P}\mu dP + c$$

أي أنه يمكن إيجاد x في الصورة $x = \Psi(P,c)$

وبالتعويض في معادلة البرت نحصل على

$$y = \psi(P,c)g(P) + f(P)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على x, y كدوال في البارامتر P وهما يمثلان المعادلات البارامترية لمعادلة البرت، وإذا أمكن حذف P بين هاتين المعادلتين يمكن ان نحصل على الحل العام في الصورة $\varphi(x,y,c) = 0$.

مثال (١): اوجد الحل العام لمعادلة دالبرت:

$$y = 2xP + P^2$$

الحلـ:

بالتفاضل بالنسبة إلى x يكون

$$P = 2P + 2(x+P)\frac{dP}{dx}$$

$$\therefore \frac{dx}{dP} + \frac{2x}{P} = -2$$

لحل هذه المعادلة الخطية نوجد العامل المكامل

$$\mu = e^{\int \frac{2}{p}dP} = e^{2\ln P} = P^2$$

ويكون

$$xP^2 = -2\int P^2 dP + c$$

$$x = \frac{c}{P^2} - \frac{2}{3}P$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه نجد أن

$$y = \frac{2c}{P} - \frac{P^2}{3}$$

وبذلك نكون قد عبرنا عن x , y كدالتين فى البرامتر P والثابت الاختياري، أى حصــلنا على الحل العام فى صورته البارامترية.

مثال (٢): اوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة

$$3y = 2Px - 2\frac{P^2}{x}, \quad P = y'$$

الحلـ:

هذه المعادلة قابلة للحل في y بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$3P = 2P + \frac{2P^2}{x^2} + \left(2x - \frac{4P}{x}\right)\frac{dP}{dx}.$$

أو

$$P-\frac{2P^2}{x^2}-\left(2x-\frac{4P}{x}\right)\frac{dP}{dx}=0$$

$$Px^2-2P^2-\left(2x^3-4Px\right)\frac{dP}{dx}=0$$

$$x^2\left(P-2x\,\frac{dP}{dx}\right)-2P\left(P-2x\,\frac{dP}{dx}\right)=0$$

$$\therefore\left(x^2-2P\right)\left(P-2x\,\frac{dP}{dx}\right)=0$$

$$P-2x\,\frac{dP}{dx}=0 \qquad or \qquad x^2-2P=0$$

$$\frac{dx}{x}=2\frac{dP}{p} \qquad or \qquad x^2=2P$$

$$\therefore \ln|x|=2\ln|P|+\ln c\Rightarrow x=cP^2, \qquad c>0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $P=\sqrt{\dfrac{x}{c}}$ ينتج أن

$$3y=2x\sqrt{\frac{x}{c}}-\frac{2}{c}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية وللحصول على الحل الشاذ بحذف P بين المعادلة التفاضلية والمعادلة $x^2=2P$ فنحصل على

$$3y=x^3-2\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x^3$$

وهو يمثل الحل الشاذ.

٥/٣- المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى ودرجة عليا:

سوف ندرس في هذا الباب طرق حل بعض المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ومن درجة أعلى، وكذلك طرق حل بعض معادلات الرتبة الثانية والتي يمكن أن تؤول إلي معادلات ذات الرتبة الأولى.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية غير الخطية ذات الرتبة الأولى هي $F\ (x\ ,\ y\ ,\ y')=0$ وسوف نرمز للمشتقة $y'=\dfrac{dy}{dx}$ بالرمز P وبالتالي فإن المعادلة السابقة تكتب على الصورة

$$F\ (x\ ,y\ ,p)=0 \qquad (1)$$

وتعتمد طريقة حل هذه المعادلة على إمكانية حلها بالنسبة لأحد المتغيرات x أو y أو المشتقة P.

١/٥/٣- معادلة كليروت: (Clairout's equation)

هي معادلة غير خطية من الرتبة الأولى على الصورة

$$y=xy'+f\ (y') \qquad (1)$$

حيث $f\ (y')$ دالة معلومة في المتغير y'

لإيجاد حل المعادلة (1) نفاضل طرفيها بالنسبة إلى x فنحصل على

$$y'=x\ y'+y'+f'(y')\ y''$$

$$\therefore\ \left[x+f'(y')\right]y''=0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تتحقق عندما $y''=0$ ، أو عندما $x+f'(y')=0$.

عندما $y''=0$ فإن $y'=c$ ، حيث c ثابت اختياري، وبالتعويض بهذا الحل في المعادلة (1) نحصل على الحل العام لمعادلة كليرو على الصورة

$$y = cx + f(c) \qquad (3)$$

وعندما $x + f'(y') = 0$ فإنها تعطي حلاً مفرداً يتوقف على شكل الدالة f'،

ويمكن التعبير عنه في الصورة البارامترية باستبدال y' بالبارامتر P في هذه العلاقة، وفي المعادلة (1) في ذات الوقت، لنحصل على

$$x = -f'(P), \quad y = -Pf'(P) + f(P) \qquad (4)$$

المعادلة البارامترية (4) هي حل مفرد للمعادلة (1).

مثال (١): اوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة التفاضلية:

$$(y - xy')\sqrt{1 + y'^2} = a y'$$

حيث a مقدار ثابت.

الحل:

المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$y = xy' + \frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \qquad (1)$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} = cx + k, \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختياري، $k = \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}}$.

للحصول على الحل المفرد، نعلم أن المعادلة (1) هي معادلة كليرو، حيث

$$f(y') = \frac{a y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad f'(y') = \frac{a}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

وتكون المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد هما (بوضع $y' = P$):

$$x=-f'(P)=\frac{-a}{\left(1+P^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y=-Pf'(P)+f(P)=\frac{aP^3}{\left(1+P^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

بحذف P بين المعادلتان السابقتان ، نحصل على الحل المتفرد على الصورة

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

مثال (٢): اوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية:

$$y=xy'-y'^2 \qquad (1)$$

الحل:

الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y=cx-c^2=c(x-c), \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختياري.

للحصول على الحل المفرد لمعادلة كليرو (المعادلة المعطاة)، حيث أن

$$f(y')=-y'^2 \qquad \therefore \qquad f'(y')=-2y'$$

وتكون المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد هما (بوضع $y'=p$):

$$x=-f'(P)=2P,$$

$$y=-Pf'(P)+f(P)=2P^2-P^2=P^2.$$

بحذف P بين المعادلتين السابقتين ، نحصل على الحل المفرد على الصورة

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

لاحظ أن الحل المفرد يحقق المعادلة المعطاة ولا يمكن الحصـــول عليه من الحل العام الذي حصلنا عليه (معادلة (2)).

مثال (٣): اوجد الحل العام والمفرد للمعادلة التفاضلية:

$$y = xP + \frac{a}{P}$$

الحلـ:

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$P = P + \left(x - \frac{a}{P^2}\right)\frac{dP}{dx}$$

أولا: $\frac{dP}{dx} = 0$ أو $P = c$ تعطي الحل العام $y = cx + \frac{a}{c}$

ثانيا: $x = \frac{a}{p^2}$ ومنها $y = \frac{a}{P^2}\cdot P + \frac{a}{P} = \frac{2a}{P}$

وبحذف P نحصـــل على $y^2 = 4ax$ وهذا هو الحل الشـــاذ (المفرد) ويمثل قطع مكافئ "كغلاف الخطوط"

$$y = cx + \frac{a}{c}$$

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = xP - \sin P\,, \qquad P = y'$$

الحلـ:

بالتفاضل

$$P = P + (x - \cos P)\frac{dP}{dx}$$

أو

$$(x - \cos P)\frac{dP}{dx} = 0$$

$\frac{dP}{dx} = 0$ منها $P = c$ ويكون الحل العام هو

$$y = cx - \sin c$$

$$x = \cos P \therefore P = \cos^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos^{-1} x$$

$$\therefore \int dy = \int \cos^{-1} x dx$$

باجراء التكامل بالتجزيء نحصل على الحل المفرد في الصورة

$$y = x \cos^{-1} x - \sin\left(\cos^{-1} x\right)$$

٢/٥/٣- معادلة لاجرانج:

المعادلة التي على الصورة $y = x f(y') + g(y')$

حيث f , g دالتان معلومتان في y' ، تسمى معادلة لاجرانج، نسبة للعالم الفرنسي لاجرانج $(1736-1813)$، وهي معادلة خطية في كل من x , y.

لاحظ أن معادلة كليرو حالة خاصة من معادلة لاجرانج وذلك عندما $f(y') = y'$.

وطريقة حل معادلة لاجرانج هي ذاتها طريقة حل معادلة كليرو وذلك باستبدال y' بالبارامتر P، فتأخذ معادلة لاجرانج الصورة

$$y = x f(P) + g(P) \tag{1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = P = f(P) + \left[x f'(P) + g'(P)\right]\frac{dP}{dx}$$

$$or \quad P-f\left(P\right)=\left[x f'\left(P\right)+g'\left(P\right)\right]\frac{dP}{dx} \qquad (2)$$

من المعادلة (2) يمكن الحصــول مباشــرة على حلول معينة، وذلك لأنها تتحول إلى متطابقة لأي قيمة ثابتة $P = P_0$، تحقق الشـرط $P_0 - f\left(P_0\right) = 0$، ودائماً عند أي قيمة ثابتة P_0 يكون $\frac{dP}{dx} = 0$ وينعدم الطرف الأيمن للمعادلة (2)

وبالتالي عندما يتحقق الطرف الأيسر فإن الطرف الأيمن يكون متحقق تلقائياً.

الحل المناظر لكل قيمة $P = P_0$ (أي $\frac{dy}{dx} = P_0$) هو دالة خطية في x ، نظراً

لكون المشتقة تكون ثابتة في حالة الدوال الخطية فقط.

لإيجاد هذه الدالة يكفي أن نضع $P = P_0$ في معادلة لاجرانج فينتج أن

$$y = xf\left(P_0\right) + g\left(P_0\right)$$

وإذا اتضح أن هذا الحل لا ينتج من الحل العام لأي قيمة للثابت الاختياري P_0، كان هذا الحل هو الحل المفرد.

إيجاد الحل العام:

لإيجاد الحل العام نكتب المعادلة (2) على الصورة

$$\frac{dx}{dP} - \frac{f'\left(P\right)}{P - f\left(P\right)}x = \frac{g'\left(P\right)}{P - f\left(P\right)}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في x وبحلها نحصل على

$$x = h\left(P, c\right) \qquad (3)$$

وبحذف البارامتر P بين المعادلتين $(1), (3)$ نحصل على الحل العام لمعادلة لاجرانج على الصورة

$$F\left(x, y, c\right) = 0$$

مثال: اوجد الحل المفرد والحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = xy'^2 + y'^2$$

الحل:

بوضع $y' = P$ ينتج أن

$$y = xP^2 + P^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = P = P^2 + [2xP + 2P]\frac{dP}{dx}$$

أي أن

$$P - P^2 = [2xP + 2P]\frac{dP}{dx} \qquad (2)$$

والحل المفرد الذي يحقق العلاقة $P - P^2 = 0$ هو

$$P_0 = 0 \quad or \quad P_1 = 1$$

وبالتعويض بهما في المعادلة (1) نحصل علي

$$y = 0 \quad or \quad y = x + 1$$

وعندما نحصل على الحل العام سوف يتبين لنا أيهما حل مفرد.

لإيجاد الحل العام نكتب المعادلة (2) على الصورة

$$\frac{dx}{dP} - \left(\frac{2}{1-P}\right)x = \frac{2}{1-P}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في x، عامل المكاملة لها هو

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{1-P}dP} = e^{2\ln(1-P)}$$

$$\therefore \mu = (1-P)^2$$

وحلها العام هو

$$\left(1-P\right)^2 x = 2\int\left(1-P\right)dP + c_1$$

$$= -\left(1-P\right)^2 + c_1$$

$$\therefore x = -1 + \frac{c_1}{\left(1-P\right)^2} \qquad (3)$$

بحذف P بين المعادلتين (3), (1) نحصل على الحل العام، على الصورة

$$y = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2$$

لذلك فإن الحل المفرد للمعادلة المعطاة هو $y = 0$ نظراً لأن هذا الحل لا يمكن الحصول عليه من الحل العام بوضع قيمة للثابت c، في حين أن الحل $y = x + 1$ حل خاص، حيث يمكن الحصول عليه من الحل العام بوضع $c = 0$ ، حيث c ثابت اختياري.

٣/٥/٣- معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية تؤول إلى معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى:

هناك نوعان من معادلات الرتبة الثانية والتي تؤول إلى معادلات من الرتبة الأولى، هما:

أ – معادلات خالية من y

هي المعادلات التي على الصورة

$$y'' = f\left(x, y'\right) \qquad (1)$$

بوضع $y' = P$ فإن $y'' = \frac{dP}{dx}$ وبالتالي فإن المعادلة (1) تصبح

$$\frac{dP}{dx} = f\left(x, P\right)$$

وهذه المعادلة من الرتبة الأولى في P وحلها يكون على الصورة

$$P = g\left(x, c_1\right)$$

وحيث أن $P=\frac{dy}{dx}$ فبالتكامل مرة أخرى نحصل على الحل العام للمعادلة (١) على الصورة

$$y=\int g\left(x\ ,c_1\right)d\ x\ +c_2$$

مثال: اوجد الحل العام لمنحنى الكتينة:

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+\ y'^{\ 2}}\ \text{التي تحقق}\ y(a)=a,\quad y'(a)=0$$

الحل:

بوضع $y'=P$ فإن $y''=\frac{dP}{dx}$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على معادلة من الرتبة الأولى في P، على الصورة

$$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+P^2}$$

و بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\sinh^{-1}P=\frac{x}{a}+c_1$$

$$\therefore P=\sinh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)$$

وحيث أن $P=\frac{dy}{dx}$، لذلك فإن

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)$$

$$\therefore y=a\cosh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)+c_2$$

و من شروط منحنى الكتينة أن

$$y=a,\qquad y'=0\quad at\quad x=a$$

وباســتخدام هذه الشــروط نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ وفي هذه الحالة فإن معادلة الكتينة تصبح على الصورة

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

ب– معادلات خالية من x:

هي المعادلات التي على الصورة

$$y'' = f(y, y') \qquad (1)$$

وهي لا تحتوي على المتغير x صراحةً.

لحل المعادلة (1) نضع $\frac{dy}{dx} = P$ وبالتالي فإن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} . \frac{dy}{dx} = P \frac{dP}{dy} \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد أن

$$P \frac{dP}{dy} = f(y, P)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على P كدالة في y وثابت اختياري (c_1)

$$\therefore P = h(y, c_1) \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = h(y, c_1)$$

بفصل المتغيرات والتكامل، نجد أن

$$x = \int \frac{dy}{h(y, c_1)} + c_2$$

بالحصول على التكامل نكون قد حصلنا على الحل العام للمعادلة (1) على الصورة

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0.$$

مثال: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ فإن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}.\frac{dy}{dx} = P\ \frac{dP}{dy}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن

$$P\frac{dP}{dy} + y = 0$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$P^2 + y^2 = c_2^{\ 2}, \quad c_2 = 2c_1$$

$$\therefore P = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_2^{\ 2} - y^2}$$

بفصل المتغيرات وبالتكامل نحصل على

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{c_2}\right) = \pm\left(x + c_3\right)$$

$$\therefore y = \pm\, c_2 \sin\left(x + c_3\right)$$

وذلك نظراً لأن دالة الجيب دالة فردية.

٣/٦- تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

٣/٦/١- إيجاد معادلة مجموعة من المنحنيات:

١) المعادلة التفاضــلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى $y' = f\left(x,y\right)$ هي علاقة بين ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة واقعة على المنحنى وإحدى موضــع هذه النقطة بحل هذه المعادلة نحصـــل على معادلة مجموعة المنحنيات والتي تحقق المعادلة التفاضلية وفيما يلي بعض العلاقات التي تشمل المشتقة الأولي

أ- ميل المماس عند أي نقطة $\left(x,y\right)$ هو $\frac{dy}{dx}$ وميل العمودي هو $-\frac{dx}{dy}$

ب- معادلة المماس عند القطة $\left(x_1,y_1\right)$ هي

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}\left(x - x_1\right)$$

(ج) طول تحت المماس $y\,\frac{dx}{dy}$ وطول تحت العمودي $y\,\frac{dy}{dx}$

(د) طول العمودي إلى محور السينات هو $y\sqrt{1+y'^2}$.

مثال (١): اوجد معادلة المنحني الذي له طول تحت المماس عند أي نقطة $\left(x,y\right)$ يكون متناسبا مع مربع الجزء المقطوع من محور السينات ويمر بالنقطة $(1,e)$.

الحلـ:

المعادلة التفاضلية هي

(حيث k ثابت التناسب)

$$y\,\frac{dx}{dy} = kx^2$$

$$\therefore \frac{dx}{x^2} = k\,\frac{dy}{y} \Rightarrow k\,\ln y = \frac{-1}{x} + c$$

عندما يكون $y = e,\ \ x = 1$ نجد أن $c = k + 1$

ويكون المنحني المطلوب هو

$$k \ln y = \frac{-1}{x} + k + 1$$

مثال (٢): اوجد المعادلة العامة لمجموعة المنحنيات التي بها طول تحت العمودي عند أي نقطة عليها يساوي $\frac{1}{2}(x+y)$.

الحل:

المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات هي

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x+y)$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)}{2y}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة لحلها نضع $y = xz$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{2z}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{2z} - z = \frac{1+z-2z^2}{2z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2z\,dz}{1+z-2z^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2z\,dz}{(2z+1)(z-1)} = c$$

$$\therefore \frac{dx}{x} + \frac{2/3}{2z+1}dz + \frac{2/3}{z-1}dz = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{3}\ln|2z+1| + \frac{2}{3}\ln|z-1| = \ln c, \qquad c > 0$$

$$x^3(2z+1)(z-1)^2 = a \qquad or$$

$$x^3\left(\frac{2y}{x}+1\right)\left(\frac{y}{x}-1\right)^2 = a \qquad or$$

معادلة مجموع المنحنيات هي

$$(2y+x)(y-x)^2 = a$$

٢/٦/٣- المسارات المتعامدة:

يقال للمجموعتين من المنحنيات إنهما يكونان مجموعتين من المسارات المتعامدة إذا كانت المنحنيات تتقاطع على التعامد. المنحنيات المتعامدة تكون مماساتها عند نقطة التقاطع متعامدة. ولإيجاد معادلة المسارات المتعامدة على مجموعة من المنحنيات التي تمثلها المعادلة $f\left(x,y,c\right)=0$ ، حيث c بارامتر. وبالتفاضل بحذف البارامتر c نحصل على المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعلومة في الصورة

$$\varphi\left(x,y,y'\right)=0$$

وحيث أن المماسات للمنحنيات المعلومة والمسارات المتعامدة تكون متعامدة عند نقطة تقاطعها أي أن

$$\varphi\left(x,y,\frac{-dx}{dy}\right)$$

هي المعادلة التفاضلية لمجموعة المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات المعطاة

إذا للحصول على المسارات المتعامدة على مجموعة من المنحنيات المعلومة نكون أولا المعادلة التفاضلية لهذه المنحنيات ثم نضع $-\dfrac{dx}{dy}$ بدلالة $\dfrac{dy}{dx}$ فنحصل على المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة وبحلها نحصل على معادلة المسارات المتعامدة

مثال (١): اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات:

$$y^2=cx$$

الحل:

بالتفاضل نحصل على

$$2yy'=c$$

إذاً المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات هى

$$y = 2xy' \qquad \text{أو} \qquad y^2 = \frac{2}{xyy'}$$

المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة نحصل عليها بوضع $-\frac{dx}{dy}$ بدلاً من y' في المعادلة السابقة

$$\therefore y = -2x\frac{dx}{dy} \Rightarrow ydy + 2xdx = 0$$

وبذلك تكون المسارات المتعامدة هى

$$y^2 + 2x^2 = c$$

مثال (٢): اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة الدوائر:

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

الحل:

بالتفاضل نجد أن

$$2x + 2yy' = 2c$$

بحذف c نحصل على المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر المعطاة

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

بوضع $-\frac{dx}{dy}$ بدلاً من y' نحصل على المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة وهي

$$\left(x^2 - y^2\right)y' - 2xy = 0$$

وهذه هـ معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نضع $y = xz$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = \frac{2z}{1 - z^2}$$

أو

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2z}{1-z^2}-z=\frac{z^3+z}{1-z^2}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z^2}{z^3+z}dz=\left(\frac{1}{z}-\frac{2z}{z^2+1}\right)dz$$

بالتكامل

$$\therefore \ln x=\ln z-\ln\left(z^2+1\right)+\ln c$$

$$\therefore \frac{x\left(z^2+1\right)}{z}=c\Rightarrow\frac{x^2}{y}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=c$$

اذن الحل العام هو $y^2+x^2=cy$ وتمثل المسارات المتعامدة على مجموعة الدوائر المعطاة.

ملحوظة: إذا كانت المسارات مائلة بزاوية ثابتة α مع مجموعة المنحنيات فإن المعادلة التفاضلية لمجموعات المسارات التي تميل بزاوية معلومة نحصل عليها من المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات المعطاة وذلك بوضع

$$\frac{\frac{dy}{dx}-\tan\alpha}{\frac{dy}{dx}\tan\alpha+1}$$

بدلالة $\frac{dy}{dx}$ للمنحنيات المعطاة أي أن:

إذا كانت $F\left(\chi,y,y'\right)=0$ هي المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعطاة فإن المعادلة التفاضلية لمجموعة المسارات التي تميل بزاوية معلومة α هي

$$F\left(x,y,\frac{y'-\tan\alpha}{1+y'\tan\alpha}\right)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على المسارات المائلة **(Obliqne trajectories)**.

مثال (٣): اوجد المسارات المائلة والتي تصنع زاوية ٤٥ درجة لمجموعة الدوائر المتحدة المركز

$$x^2+y^2=c$$

الحل:

المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر هي $x+yy'=0$، وبوضع

$\dfrac{y'-1}{1+y'}=\dfrac{y'-\tan 45}{1+y'\tan 45}$ بدلالة y' في المعادلة السابقة نحصل على

$$x+y\,\frac{y'-1}{1+y'}=0\Rightarrow(x+y)dy+(x-y)dx=0$$

وهي المعادلة التفاضلية لمجموعة المسارات التي تميل بزاوية ٤٥ مع مجموعة الدوائر المعطاة وهي معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نضع $y=xz$ فيكون

$$\left(z^2+1\right)dx+x\left(z+1\right)dz=0\Rightarrow\frac{dx}{x}+\frac{z+1}{z^2+1}dz=0$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(z^2+1\right)+\tan^{-1}z=\ln A_1$$
$$\ln x^2\left(z^2+1\right)=\ln A-2\tan^{-1}z$$

وتكون معادلة المسارات المائلة المطلوبة هي:

$$x^2+y^2=Ae^{-2\tan^{-1}}\left(y/x\right)$$

٧/٣- تطبيقات طبيعية:

للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي والدرجة الأولي عدة تطبيقات في المجالات الطبيعية وسوف نوضح ذلك بالأمثلة الآتية:

مثال (١): يتناسب معدل ازدياد عدد الجراثيم في مزرعة جرثومية مع عدد العناصر الموجودة بها وإذا كان العدد تضاعف بعد أربع ساعات فكم يصبح العدد بعد 12 ساعة؟

الحلـ:

نفرض أن عدد الجراثيم في اللحظة t هو x وعندما $t=0$ عدد الجراثيم هو x_0 فتكون المعادلة التفاضلية هي

$$\frac{dx}{dt}=Kx \qquad \text{أو} \qquad \frac{dx}{x}=Kdt$$

حيث K ثابت التناسب

$$\therefore \ln x = kt+\ln c \quad or \quad x=ce^{kt}$$

وبفرض أن $x=x_0$ عندما $t=0$ إذن $c=x_0$

ونحصل على

$$x=x_0e^{kt}$$

عندما $t=4$ يكون $x=2x_0$ ، فبالتعويض في المعادلة السابقة

$$2x_0=x_0e^{4k} \ \therefore e^{4k}=2$$

عندما $t=12$ نحصل على

$$x=x_0e^{12k}=x_0\left(e^{4k}\right)^3=8x_0$$

أي أنه يوجد عدد من الجراثيم يساوي ثماني مرات عددها الإبتدائي.

مثال (٢): تحتوي دائرة كهربية مقاومتها R ومكثف سعته C متصلين على التوالي بمنبع قوته الدافعة الكهربية

$E=E_0\sin wt$ حيث E_0,w,R,C ثوابت وتعطى الشحنة q للمكثف للمعادلة

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=E$$

اوجد الشحنة q عند أي لحظة t إذا علم أن $q=0$ عندما $t=0$

الحل:

المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن كتابتها فى الصورة

$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{Rc}=\frac{Eo}{R}\sin wt$$

وهى معادلة تفاضلية خطية عاملها المكامل هو $\mu=e^{tiRc}$

وحلها العام هو

$$qe^{t/Rc}=A+\int\frac{Eo}{R}e^{t/Rc}\sin wt\,dt$$
$$=A+\frac{cEo\,e^{t/Rc}}{1+R^2c^2w^2}\left(\sin wt-Rcw\cos wt\right)$$

عندما $t=0$ يكون $q=0$ فإن

$$\therefore 0=A-\frac{c^2wEo}{1+R^2c^2w^2}$$
$$A=c^2wEo/\left(1R^2c^2w^2\right)$$

وتعطى الشحنة q في الصورة

$$q=\frac{cEo}{1+R^2c^2w^2}\left[Rcwe^{-t/Rc}+\sin wt-Rcw\cos wt\right]$$

مثال (٣): اذا ارتبطت شدة التيار الكهربائي I والقوة الدافعة الكهربية E فى دائرة بها مقاومة R وملف ذاتي L بالعلاقة

$$L\frac{di}{dt}+RI=E$$

اوجد شدة التيار I إذا كان L,R,E ثوابت وإذا علم أن $I=0$ عندما $t=0$

الحلـ:

المعادلة التفاضلية $\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$ معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\mu I=\int \mu \frac{E}{L}dt+c$$

$$\therefore Ie^{\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}e^{Rt/L}+c \;\therefore I=\frac{E}{R}+ce^{-Rt/L}$$

لتعيين c من الشرط الابتدائي عندما $t=0$ نجد أن $c=\frac{-E}{R}$ ويكون الحل الخاص المطلوب تعينه هو $I=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$

مثال (٤): تدلي زنبرك مهمل الوزن رأسيا يعلق بطرفة الحركتلة قدرها m كجم فإذا كانت معادلة حركتها هي

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kx$$

فاوجد السرعة v كدالة في الاستطالة الحادثة x للزنبرك علماً بأنه عندما يكون طول الزنبرك مساوياً طوله الأصلي تكون سرعة الكتلة هي V_0

الحلـ:

يمكن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية في الصورة

$$m\frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt}=mg-kx \;\; or \;\; mv\frac{dv}{dx}=mg-kx$$

$$\therefore = mvdv=mgdx-kxdx$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2}=mgx-k\frac{x^2}{2}+c$$

وعندما $x=0$ فإن $v=v_0$

$$\therefore c = \frac{mv_0^2}{2}$$
$$\therefore mv^2 = 2gmx - kx^2 + mv_0^2$$

مثال (٥): ينص قانون نيوتن للتبريد على أن معدل تغيير درجة حرارة جسم تتناسب مع فرق درجة حرارة الجسم عن الأجسام المحيطة به فإذا انخفضت درجة حرارة جسم 80^oم إلى 60^o م في 20 دقيقة اوجد درجة الحرارة بعد 40 دقيقة إذا كانت درجة الحرارة الأجسام المحيطة هي 20^o م.

الحل:

نفرض أن x هي درجة حرارة الجسم بعد زمن t دقيقة

$$\therefore \frac{dx}{dt} \propto x - 20 \qquad or \qquad \frac{dx}{dt} = k\,(x - 20)$$

بحل هذه المعادلة نجد أن

$$\frac{dx}{x - 20} = kdt \quad \therefore \ln(x - 20) = kt + \ln c$$
$$\therefore x = 20 + ce^{kt}$$

وحيث أن $x = 80$ عندما $t = 0$ فإن $c = 60$ وبذلك تكون

$$x = 20 + 60e^{kt}$$

أيضا $x = 60$ عندما $t = 20$ تعطى

$$60 = 20 + 60e^{20k} \quad \therefore e^{20k} = \frac{2}{3} \; or \; e^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/20}$$
$$\therefore x = 20 + 60e^{kt} = 20 + 60\left(e^k\right)^t = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^{t/20}$$

وعندما $t = 40$ فإن

$$x=20+60\left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

٨/٣- تمارين:

(١) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$(a)P^2-(x+y)P+xy=0, \qquad P=y'$

$(b)y=(2+P)x-P^2$

$(c)y=xP+\sqrt{4+P^2}$

$(d)xyP^2+(x^2+xy+y^2)P+x^2+xy=0$

$(e)e^{P-y}=P^2-1 \qquad (f)x=2P+\ln P$

$(g)P^3-2xyP+4y^2=0 \qquad (h)y'^2=9y^4$

$(i)P^2-yP+x=0 \qquad (j)P^2+2yP\cot x-y^2=0$

(٢) اوجد الحل العام والحل الشاذ لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$(a)xP^2-2yP+4x=0, \qquad P=y'$

$(b)y=x+aP-a\ln P,$

$(c)yP^2-2xP+y=0 \qquad (d)y=x^2+2xP+\frac{1}{2}P^2$

$(e)y=\frac{x}{x+1}P+\frac{(x+1)e^x}{P} \qquad (f)xP^2+2xP-y=0$

حيث a ثابت اختياري

(٣) اوجد الحل العام للمعادلات الآتية:

$(a)y'^3-e^{2x}y'=0 \qquad (b)y'^2+2yy'\cot x-y^2=0$

$(c)y'^3-2xy'+y=0 \qquad (d)xyP^2-(x^2+y^2)P+xy=0$

(٤) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$a)\ y'^3 - e^{2x} y' = 0\,.$

$b)\ y'^2 + 2y \cot x\, y' - y^2 = 0\,.$

$c)\ y'^2 - 2\cosh x\, y' - y^2 = 0\,.$

$d)\ (y' - x)^2 = y' + x.$

$e)\ x - 4y' - 4y'^3 = 0\,.$

$f)\ x - y + y'^3 = 0\,.$

$g)\ y'^3 - (y+3)\, y' + x = 0\,.$

$h)\ y - x y'^2 + y' = 0\,.$

$i)\ y = 2x y' - y'^2\,.$

(٥) اوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلات التفاضلية الآتية:

$a)\ y = x^2 + 2x y' + \frac{1}{2} y'^2\,.$

$b)\ y\left(1 + y'^2\right) = a$ $\qquad$ a ثابت اختياري

$c)\ y'^2 + (x + a)\, y' - y = 0,$ $\qquad$ a ثابت اختياري

$d)\ y = x y' + \sqrt{1 - y'^2}\,.$

$e)\ y = x y' - \frac{1}{y'^2}\,.$

$f)\ y = x y' - 2y'^2.$

$g)\ y = -x y' + x^4 y'^2\,.$

$h)\ x y'^2 - 2y y' + 4x = 0\,.$

$i) y^2 y'^2 + 3x p - y = 0 .$

(٦) حول المعادلات التفاضلية التالية (ذات الرتبة الثانية)، إلى معادلات من الرتبة الأولى، ثم اوجد الحل العام لكل منها.

$a)\ x y'' - y' = x^2\ e^{x}\ .$

$b)\ y y'' - y'^2 + y'^3 = 0\ .$

$c)\ y'' + y' \tan x = \sin 2x.$

$d)\ y''^2 + y'^2 = a^2,$ a ثابت اختياري

$e)\ 3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$

$f)\ y'' = \sin ax$ a ثابت اختياري

$g)\ y'' = a\ x^2$ a ثابت اختياري

(٧) اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$(1)\left(4x + xy^2\right)dx + \left(y + xy^2\right)dy = 0$

$(2)\ y' \tan x = y$ $\qquad (3)\ \dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

$(4)\ 3e^x \tan y dx + \left(1+e^x\right)\sec^2 y$

$(5)\ e^{x2-y3} + \dfrac{y^2}{x} y' = 0$ $\qquad (6)\ x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+y^2}dy = 0$

$(7)\left(x + y\right)dy + \left(x + y\right)dx = 0$

$(8)\left(x^2 + y^2\right)y' - 2xy = 0$

$(9)\left(2ye^{2y/x}+x\right)dy+\left(2x-y\right)dx=0$

$(10)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{y-x}$ $\qquad$ $(11)x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

$(12)2y^2dy=\left(x^3+y^3\right)dx$ $\qquad$ $(13)y'=\dfrac{x+y+3}{x-y-5}$

$(14)\left(2x-4y+5\right)dy+\left(x-2y+3\right)dx=0$

$(15)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+3y-3}{2x-y-3}$ $\qquad$ $(16)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$

(٨) اثبت أن المعادلات التفاضلية الآتية تامة ثم اوجد حلها العام:

$(1)y\cos x\,dx+\sin x\,dy$ $\qquad$ $(2)\left(xy^2-y\right)dx+\left(x^2y-x\right)dy=0$

$(3)\left(1+\sin x\tan y\right)dx-\left(\cos x\sec^2 y\right)dy=0$

$(4)\left(y+e^y\right)dx+2e^{y/2}x\cosh\left(\dfrac{y}{2}\right)dy=0$

(٩) اثبت أن المعادلات التفاضـــلية الآتية غير تامة ثم اوجد المعامل المكامل لكل منها وحلها العام:

$(1)xy^2dx+\left(x^2y^2-1\right)dy=0$

$(2)\left(x-y^2\right)dx+2xydy=0$

$(3)xdy-\left(y-x^3e^x\right)dx=0$

$(4)\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$

$(5)dx+\cos y\left(\sin y-3x^2\cos y\right)dx=0$

(١٠) اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضـلية الآتية و اوجد الحل الخاص عند وجود الشروط الابتدائية:

$(i)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x}=x^3, \qquad y(1)=0$

$(ii)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=x^3, \qquad y(1)=0$

$(iii)x^2y-\ x^3y'=y^4\cos x$

$(iv)xy'-4yx^2\sqrt{y} \qquad (v)y'+\dfrac{y}{x}=y^2\sin x$

$(vi)y'=\dfrac{y^2}{1-3xy} \qquad (vii)y'-\dfrac{y}{x}e^{x^2}y^2$

(١١) حل المعادلة $y'=y^2-\dfrac{2}{x^2}$ علماً بأن $\dfrac{1}{x}$ حلاً خاصاً لها.

(١٢) اوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$(i)\sin x\ \cos y\ dy+\left(\cos x\ \sin+\cos xe^{\sin x}\right)dx=0$

$(ii)\left(y\ \cos(xy)+e^x\right)dx+\left(x\ \cos xy-2ye^{y^2}\right)dx=0$

$(iii)\dfrac{x+y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx=0$

$(iv)y^2dx+(xy+1)dy=0$

$(v)\left(y-x^2y^3\right)dx+xdy=0$

$(vi)ydx-xdy+3x^2y^2e^xdx=0$

$(vii)\left(2x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$

(١٣) اوجد المسارات المائلة التي تصنع زاوية ثابتة 45^o مع مجموعة القطاعات الزائدة

$.x^2-y^2=a^2$

(١٤) اثبت المسارات المائلة التي تصنع زاوية ثابتة α مع مجموعة المستقيمات $y=cx$ هي

$$\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\frac{1}{m}\tan^{-1}(y/x)}, \quad m=\tan\alpha$$

(١٥) اوجد معادلة المنحنيات التي فيها طول تحت العمودي ثابت.

(١٦) اوجد مائل المنحنيات التي فيها طول تحت المماس ثابت.

(١٧) (أ) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات $x^2+2y^2=c^2$

(ب) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة $xy=c$

(١٨) (أ) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة الدوائر

$$x^2+y^2=cy$$

(ب) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات $y^2=cx^2$.

(١٩) بين أن المجموعة القطاعات الناقصة ذات البارامتر

$$\frac{x^2}{c}+y^2=\frac{a^2}{c-1}$$

تكون متعامدة فيما بينها.

(٢٠) كتلة المادة التي تلعب دورا في تفاعل كميائي هي x جرام عند أي خطة t بعد بدأ التفاعل فإذا كانت $\frac{dx}{dt}=-kx$.

حيث k ثابت وكانت $x=a$ عندما $t=0$ فاوجد x بدلالة t.

(٢١) إذا ارتبط الضغط أ والحجم δ لفاز بالمعادلة $pd\delta+\delta dp=0$ فاوجد معادلة الفاز.

(٢٢) إذا تضاعف عدد سكان مدينة ما في ٥٠ عاما ففي كم عاما يصبح عدد السكان ثلاث مرات العدد الأصلي إذا علم أن معدل زيادة السكان يتناسب مع عدد السكان.

(٢٣) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات $y=6x^2$.

(٢٤) تحتوي دائرة كهربائية مقاومة مقدارها ١٥ وبطارية قوتها الدافعة الكهربية $E=20e^{-3t}$ متصل على التوالي اوجد شدة التيار علما بأن $I=0$ عندما تغلق الدائرة.

(٢٥) يســقط جســم وزنة 4kg من الســكون عند الزمن $t = 0$ في وســط مقاومته بالكيلو جرام تســاوي مربع الســرعة الخطية مقدرة بالمتر/ ثانية. اوجد الســرعة عن أي زمن $t > 0$.